

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 532.546

doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.101-121

МОДЕЛИРОВАНИЕ ПРИТОКА ПЛАСТОВОГО ФЛЮИДА К ТРЕЩИНАМ БЕСКОНЕЧНОЙ ПРОНИЦАЕМОСТИ МНОГОЗОННОГО ГИДРОРАЗРЫВА ПЛАСТА С ПОМОЩЬЮ ТРУБОК ТОКА

*К.А. Поташев, А.Б. Мазо, М.В. Мухина, А.А. Ураимов,
Д.В. Маклаков, М.Р. Хамидуллин*

Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, 420008, Россия

Аннотация

Изложены теоретические основы и выполнена апробация способа понижения размерности задачи о притоке пластового флюида к трещинам многозонного гидроразрыва пласта (МГРП) за счет моделирования пространственной фильтрации в пласте с помощью одномерных трубок тока. Рассмотрены два типичных элемента дренирования вблизи МГРП, для каждого из которых предложена параметризация трубок тока на основе точных аналитических решений. На примере стационарной однофазной фильтрации показано хорошее соответствие решений по предложенной упрощенной и традиционной полноразмерной моделям. Декомпозиция пространственной задачи на одномерные трубки тока предназначена для сокращения времени решения нестационарных задач переноса вблизи трещин МГРП на порядки, что является критичным для решения многовариантных задач при проектировании МГРП и идентификации параметров трещин по результатам трассерных исследований.

Ключевые слова: нефтяной пласт, многозонный гидроразрыв, однофазная фильтрация, трубки тока, аналитическое решение, численное моделирование

Введение

Процесс притока пластового флюида к трещинам гидроразрыва пласта (ГРП) характеризуется различием на несколько порядков как характерных значений проницаемости пласта и трещин, так и величин раскрытия (порядка 0.01 м) по сравнению с протяженностью трещин и размерами области дренирования пласта (порядка 100 м). В связи с этим прямое численное моделирование нестационарных задач о переносе компонент насыщающего пласт флюида вблизи трещин ГРП предполагает значительные затраты вычислительных ресурсов при измельчении пространственного и временного шагов расчетной сетки [1, 2]. При решении прямых задач данное ограничение обычно не является принципиальным. Однако для обратных задач, таких как проектирование ГРП или идентификация параметров трещин, предполагающих многократное решение прямой задачи, численное моделирование фильтрации в исходной пространственной постановке может оказаться неприемлемым.

В целях быстрого построения решений, необходимых для исследования отдельных скважин, применяются локальные модели фильтрации вблизи трещин ГРП, основанные на методах расщепления, когда трещина и пласт моделируются отдельно с учетом условий сопряжения давления и потока на поверхностях трещин [1].

Ситуация усугубляется, если речь идет об интерпретации результатов трассерных исследований, требующих многовариантного решения задачи нестационарной двухфазной многокомпонентной фильтрации, большого числа трещин многозонного ГРП (МГРП) на горизонтальных скважинах. Настоящая работа посвящена вопросу о подходящем для данной задачи быстродействующем и в то же время достаточно точном способе моделирования фильтрационного течения вблизи горизонтальной скважины, пересеченной вертикальными трещинами МГРП. В качестве способа сокращения вычислительных затрат рассматривается замена пространственной задачи фильтрации в пласте на набор одномерных задач вдоль трубок тока (ТТ), предложенная в работах [3, 4]. При этом задачи о давлении в каждой трещине решаются с учетом распределенного притока пластового флюида из примыкающих к берегам трещины ТТ. Декомпозиция пространственной задачи на набор одномерных задач вдоль трубок тока сокращает на порядки машинное время численного решения задач многофазной многокомпонентной фильтрации [3]. Распределение относительной ширины вдоль трубок тока и сама их длина, необходимые для вычисления локального притока к трещинам, являются ключевыми параметрами модели, определяющими ее точность. Эти функции необходимы для получения профиля перетока жидкости между трещиной и пластом, способного детально воспроизвести распределение в пласте закачиваемого трассера и динамику его последующего отбора. Характеристики трубок тока могут быть дискретно определены из численного решения вспомогательной стационарной задачи однофазной фильтрации в пласте вблизи трещин гидроразрыва, однако для принципиального сокращения вычислительных затрат особый интерес представляет получение их аналитических выражений, заведомо учитывающих произвольную конфигурацию МГРП.

Известные работы, посвященные аналитическим исследованиям горизонтальных скважин с трещинами МГРП, основаны на значительных упрощениях структуры фильтрационного потока в области дренирования трещин и не могут быть использованы для достаточно точного построения системы линий и трубок тока в пласте. Так, в работе [5] полагается линейным приток к берегам трещин в прямоугольной области дренирования, а величина депрессии давления относится к половине расстояния между трещинами. Авторы [6] строят решение о притоке к трещинам МГРП в прямоугольной области дренирования с полностью непроницаемыми гранями, полагая постоянной скоростью падения пластового давления, что подходит лишь для системы симметричного расположения скважин с МГРП при упругом режиме фильтрации.

Для построения линий и трубок тока необходимы решения, достаточно точно отражающие структуру течения вблизи трещин гидроразрыва. В [7] построено аналитическое решение о распределении давления вблизи одиночной вертикальной трещины произвольной проницаемости вдоль вертикальной скважины. Поперечное сечение трещины и области дренирования пласта заданы в виде конфокальных эллипсов. Распределение давления получено в виде функции пространственных координат с разложением в ряд Фурье, однако не содержит явных выражений для функции тока. В работе [8] изложен способ построения аналитического решения о давлении в однородном пласте вблизи одиночной прямолинейной вертикальной трещины, заданной в виде непрерывно распределенных вдоль ее поперечного сечения точечных стоков. Решение для случая МГРП на неперфорированной скважине предлагается строить в виде суперпозиции решений для каждой отдельной трещины, что подразумевает единые граничные условия для всех трещин, то есть расположение контура питания на расстоянии от трещин кратно превосходящем их длину, что практически не реализуется на практике. Кроме того, интенсивность точечных стоков не определяется из решения, а должна быть задана отдельно.

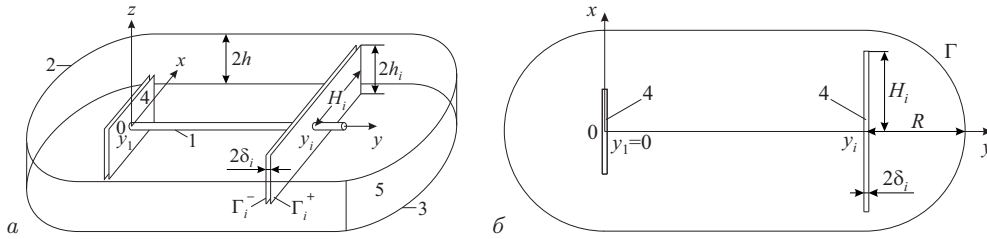


Рис. 1. Схема расположения трещин МГРП вдоль горизонтальной скважины в трехмерном представлении (а) и в проекции на горизонтальную плоскость (б)

Аналогичный метод рассмотрен в работе [9], авторы которой демонстрируют результаты решения в случае трещины бесконечной проницаемости, когда неизвестное распределение интенсивности притока к трещине определяется из условия постоянства давления вдоль нее. Достаточно точные решения для построения линий тока вблизи одиночных вертикальных трещин получены в [10, 11]. В [10, 12] представлено аналитическое выражение комплексного потенциала в эллиптическом пласте вокруг линейной трещины бесконечной проницаемости. В работах [1, 11] выполнено построение в терминах комплексного потенциала аналитического решения задачи о притоке к точечному стоку в центре конфокальных эллиптических областей различной проницаемости, отражающих расположение в области дренирования трещины и призабойной зоны пласта с измененной проницаемостью.

Таким образом, вопрос о надежном аналитическом воспроизведении структуры линий тока вблизи трещин многозонного (многостадийного) ГРП с учетом близости расположения контура питания и различий притоков к внутренним и внешним трещинам в настоящее время, вообще говоря, не решен. Величины длин трубок тока и распределение вдоль них относительной ширины должны быть определены как функции положения трубки тока вдоль трещины ГРП и всех исходных параметров задачи, включая геометрию и расположение трещин.

В настоящей работе данные зависимости построены на основе аналитических решений модельных задач стационарной фильтрации в осредненном по толщине пласте в предположении бесконечной проницаемости трещин. Рассмотрены две постановки модельных задач, отражающих две принципиально различные структуры фильтрационных потоков: в крайнем сегменте области дренирования МГРП с эллиптическим контуром питания и во внутреннем сегменте в форме прямоугольника между двумя соседними трещинами МГРП. Приведены результаты по параметризации трубок тока и апробации модели для случая трещин бесконечной проницаемости.

1. Математическая модель

1.1. Трехмерная задача фильтрации. Известно, что при залегании пласта на глубинах больше 1 км создание импульса высокого давления при проведении ГРП обеспечивает вертикальную ориентацию трещины ГРП, при этом обычно трещина разрывает пласт от кровли до подошвы. Будем рассматривать задачу о притоке однофазной жидкости к горизонтальной скважине, простимулированной многозонным ГРП, полагая трещины МГРП трансверсальными относительно оси скважины (рис. 1). Скважину будем считать изолированной, то есть ее гидродинамическое взаимодействие с пластом происходит только через трещины МГРП.

Введем декартову систему координат xuz с вертикальной осью z и осью y , направленной вдоль прямолинейного горизонтального ствола γ скважины 1 радиуса

$r_w \sim 0.1$ м. Начало отсчета совместим с точкой пересечения центральной плоскости первой трещины МГРП с осью скважины. Расположение остальных трещин вдоль оси y обозначим координатами y_i , $i = 1, 2, \dots, N$, где N – число трещин. Кровля 2 и подошва 3 пласта непроницаемы, толщина пласта постоянна и равна $2h \sim 10$ м. Стенки 4 трещин Γ_i^\pm представим парой прямоугольных ортогональных оси скважины плоскостей с полудлиной H_i в направлении оси x , полувысотой h_i в направлении оси z и с расстоянием между ними $2\delta_i \sim 10^{-3} \div 10^{-2}$ м (раскрытие трещины). Половину расстояния между трещинами МГРП с номерами i и $(i+1)$ обозначим через $L_i = (y_{i+1} - y_i)/2 \sim 10^2$ м. Будем считать, что высота трещин совпадает с высотой пласта $h_i = h$, поскольку трещины, как правило, распространяются по вертикали до достижения слабопроницаемых кровли и подошвы. Внешнюю границу 5 с постоянным давлением p_0 представим в виде вертикальной цилиндрической поверхности Σ с направляющей в виде некоторого замкнутого контура питания Γ в плоскости xy , размеры которого определяются расположением ближайших скважин и обычно находятся на расстоянии $R \sim 10^2$ м от рассматриваемой скважины.

Предположим, что приток жидкости из пласта к скважине происходит только через боковые поверхности трещин МГРП, что выполняется либо в случае неперфорированного ствола скважины, либо при достаточно больших размерах и проницаемости трещин, когда по сравнению с ними притоком к зонам перфорации скважины можно пренебречь. Условные торцы трещин будем считать непроницаемыми.

Абсолютную проницаемость пористой среды обозначим через $k = k(x, y, z)$. В пласте проницаемость равна $k = k^r(x, y, z)$. Внутри трещин МГРП, заполненных расклинивающим материалом (проппантом), абсолютная проницаемость принимает значение $k^f \gg k^r$.

В пренебрежении сжимаемостью пористого скелета и насыщающего его флюида однофазная фильтрация однородной жидкости в системе «пласт–трещины МГРП» описывается уравнением неразрывности и законом Дарси [13] с соответствующими граничными условиями:

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad (1)$$

$$\mathbf{u} = -\frac{k}{\mu} \nabla p, \quad (2)$$

$$(x, y, z) \in \Sigma : p = p_0, \quad (3)$$

$$z = \pm h : u_z = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial z} = 0, \quad (4)$$

$$x^2 + z^2 = r_w^2, \quad |y - y_i| < \delta_i : p = p_w, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (5)$$

$$x = \pm H_i, \quad |y - y_i| < \delta_i : u_x = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (6)$$

где \mathbf{u} – вектор скорости фильтрации; μ – вязкость флюида; p – давление в жидкости; p_w – значение давления вдоль горизонтальной скважины, которое для простоты будем считать постоянным [4].

1.2. Плоская задача фильтрации в трещинах ГРП. Из постановки (1)–(6) получим постановку двумерной задачи фильтрации в трещинах МГРП. Для этого сначала проинтегрируем уравнение (1) по толщине трещины $i = 1, 2, \dots, N$:

$$\int_{y_i - \delta_i}^{y_i + \delta_i} \left(\frac{\partial u_x}{\partial x} + \frac{\partial u_z}{\partial z} \right) dy + u_y(x, y_i + \delta_i, z) - u_y(x, y_i - \delta_i, z) = 0, \quad |z| < h, \quad |x| < H_i.$$

Введя обозначения

$$u_{x,i}^f(x,z) = \frac{1}{2\delta_i} \int_{y_i-\delta_i}^{y_i+\delta_i} u_x(x,y,z) dy, \quad u_{z,i}^f(x,z) = \frac{1}{2\delta_i} \int_{y_i-\delta_i}^{y_i+\delta_i} u_z(x,y,z) dy,$$

$q_i^-(x,z) = u_y(x, y_i - \delta_i, z)$, $q_i^+(x,z) = -u_y(x, y_i + \delta_i, z)$, $|z| < h$, $|x| < H_i$, $i = 1, 2, \dots, N$, перепишем последнее уравнение в виде

$$2\delta_i \left(\frac{\partial u_{x,i}^f}{\partial x} + \frac{\partial u_{z,i}^f}{\partial z} \right) = q_i^+ + q_i^-, \quad |z| < h, \quad |x| < H_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (7)$$

Связь средних по толщине трещины компонент скорости фильтрации с давлением получим, поделив на $2\delta_i$ и проинтегрировав выражение закона Дарси (2) в предположении об однородности поля проницаемости внутри трещин:

$$u_{x,i}^f = -\frac{1}{2\delta_i} \int_{y_i-\delta_i}^{y_i+\delta_i} \frac{k_i^f}{\mu} \frac{\partial p}{\partial x} dy = -\frac{k_i^f}{\mu} \frac{\partial p_i^f}{\partial x}, \quad u_{z,i}^f = -\frac{k_i^f}{\mu} \frac{\partial p_i^f}{\partial z}, \quad (8)$$

где введено обозначение для среднего по толщине трещины i давления

$$p_i^f(x,z) = \frac{1}{2\delta_i} \int_{y_i-\delta_i}^{y_i+\delta_i} p(x,z) dy, \quad |z| < h, \quad |x| < H_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Граничные условия плоской задачи для давления в трещине i , $i = 1, 2, \dots, N$, получим интегрированием условий (4)–(6) по толщине трещины:

$$z = \pm h : \frac{\partial p_i^f}{\partial z} = 0, \quad (9)$$

$$x^2 + z^2 = r_w^2 : p_i^f = p_w, \quad (10)$$

$$x = \pm H_i : \frac{\partial p_i^f}{\partial x} = 0. \quad (11)$$

Для замыкания системы (7)–(11) необходимо определить величины $q_i^\pm(x,z)$, выражающие скорость притока жидкости из пласта в трещину через ее левый и правый берега. С этой целью разобьем поверхность каждого берега Γ_i^\pm на бесконечно малые площадки Δw_i^\pm в окрестности точек (x,z) . Поверхность тока, образованная линиями тока, проходящими через границу площадки Δw_i^\pm , ограничивает в пласте элементарную трубку тока (ТТ) $T_i^\pm(x,z)$, достигающую внешней границы Σ области решения трехмерной задачи. Ширину $\Delta W_i^\pm(l;x,z)$ каждой ТТ $T_i^\pm(x,z)$ определим как площадь ее нормального сечения [14], являющуюся функцией дуговой координаты l , отсчитываемой вдоль линии тока (ЛТ) $\ell_i^\pm(x,z)$, проходящей от поверхности трещины в точке (x,z) , где $l = 0$, до поверхности внешней границы Σ , где достигается значение $l = \lambda_i^\pm(x,z)$.

Выражение для скорости фильтрации $U_i^\pm(l;x,z)$ вдоль ТТ $T_i^\pm(x,z)$ получим, спроецировав уравнение (2) на направление ЛТ ℓ_i^\pm :

$$U_i^\pm(l;x,z) = -\frac{k^r}{\mu} \frac{\partial p}{\partial l}. \quad (12)$$

Расход через любое сечение ТТ остается постоянным в силу непроницаемости ее боковых границ:

$$U_i^\pm(l; x, z) \Delta W_i^\pm(l; x, z) = \text{const}, \quad 0 \leq l \leq \lambda.$$

Таким же по абсолютной величине, но с обратным знаком, в соответствии с направлением отсчета l , будет приток к трещине МГРП из ТТ через ее сечение Δw , расположенное на поверхности трещины

$$q_i^\pm(x, z) \Delta w = -U_i^\pm(l; x, z) \Delta W_i^\pm(l; x, z),$$

отсюда

$$-U_i^\pm(l; x, z) = q_i^\pm(x, z) / \omega_i^\pm(l; x, z), \quad (13)$$

где $\omega_i^\pm(l; x, z) = \Delta W_i^\pm(l; x, z) / \Delta w$ – относительная ширина ТТ.

Поскольку $q_i^\pm = -U_i^\pm(0; x, z) \cos \alpha$, где α – угол между касательной к ЛТ ℓ при $l = 0$ и нормалью к поверхности трещины, то относительная ширина ТТ может быть вычислена как

$$\omega(l) = \cos \alpha U(0) / U(l). \quad (14)$$

Интегрирование (13) с учетом (12) вдоль ЛТ ℓ в предположении о слабой изменчивости вдоль нее проницаемости k^r дает

$$\frac{k^r}{\mu} \int_{p_i^f(x, z)}^{p_0} dp = q_i^\pm(x, z) \int_0^{\lambda_i^\pm(x, z)} \frac{dl}{\omega_i^\pm(l; x, z)}$$

или для случая определения относительной ширины ТТ как функции давления

$$\frac{k^r}{\mu} \int_{p_i^f(x, z)}^{p_0} \omega_i^\pm(p; x, z) dp = q_i^\pm(x, z) \lambda_i^\pm(x, z).$$

Отсюда получаем окончательное выражение интенсивности притока жидкости к трещинам МГРП из пласта

$$q_i^\pm(x, z) = \frac{k^r}{\mu} (p_0 - p_i^f(x, z)) J_i^\pm(x, z), \quad |z| < h, \quad |x| < H_i, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

Функция J_i^\pm определяется в зависимости от параметризации функции ω

$$J_i^\pm(x, z) = \begin{cases} \left(\int_0^{\lambda_i^\pm} \frac{dl}{\omega_i^\pm(l; x, z)} \right)^{-1}, \\ \frac{1}{\lambda_i^\pm} \int_{-1}^0 \omega_i^\pm(\varphi; x, z) d\varphi, \quad \varphi = -\frac{p - p_i^f}{p_0 - p_i^f}. \end{cases} \quad (16)$$

Перепишем уравнения (7), (8), (15), (16) в безразмерных переменных

$$\begin{aligned} \tilde{x}, \tilde{y}, \tilde{l}, \tilde{r}_w, \tilde{h}, \tilde{\lambda}_i, \tilde{H}_i, \tilde{\delta}_i &= \frac{x, y, l, r_w, h, \lambda_i, H_i, \delta_i}{H}, \quad \tilde{p} = \frac{p - p_w}{p_0 - p_w}, \\ \tilde{u} &= \frac{u}{Q / (\delta h)}, \quad \tilde{q} = \frac{q}{u^0}, \quad Q = u^0 H h, \quad u^0 = \frac{k^r}{\mu} \frac{p_0 - p_w}{H}, \end{aligned} \quad (17)$$

где δ , H – характерные значения полураскрытия и полудлины трещин. Получим

$$2\tilde{\delta}_i \left(\frac{\partial \tilde{u}_{x,i}^f}{\partial \tilde{x}} + \frac{\partial \tilde{u}_{z,i}^f}{\partial \tilde{z}} \right) = \frac{\delta}{H} (\tilde{q}_i^+ + \tilde{q}_i^-), \quad |\tilde{z}| < \tilde{h}, \quad |\tilde{x}| < \tilde{H}_i, \quad i = 1, 2, \dots, N,$$

$$\tilde{u}_{x,i}^f = -\frac{k_i^f}{k^r} \frac{\delta}{H} \frac{\partial \tilde{p}_i^f}{\partial \tilde{x}}, \quad \tilde{u}_{z,i}^f = -\frac{k_i^f}{k^r} \frac{\delta}{H} \frac{\partial \tilde{p}_i^f}{\partial \tilde{z}},$$

$$\tilde{q}_i^\pm = (1 - \tilde{p}_i^f) \tilde{J}_i^\pm, \quad \tilde{J}_i^\pm = \left\{ \left(\int_0^{\tilde{\lambda}_i^\pm} \frac{d\tilde{l}}{\omega_i^\pm(\tilde{l})} \right)^{-1}; \frac{1}{\tilde{\lambda}_i^\pm} \int_{-1}^0 \omega_i^\pm(\varphi) d\varphi \right\}. \quad (18)$$

Подстановка выражений \tilde{u}^f , \tilde{q}^\pm в первое уравнение дает

$$-2M_i \Delta \tilde{p}_i^f = (1 - \tilde{p}_i^f) (\tilde{J}_i^+ + \tilde{J}_i^-), \quad |\tilde{x}| < \tilde{H}_i, \quad |\tilde{z}| < \tilde{h}, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (19)$$

где $M_i = \tilde{\delta}_i \frac{k_i^f}{k^r} = \frac{\delta_i k_i^f}{H k^r}$. Нормировка граничных условий (9)–(11) дает

$$\tilde{z} = \pm \tilde{h} : \frac{\partial \tilde{p}_i^f}{\partial \tilde{z}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (20)$$

$$\tilde{x}^2 + \tilde{z}^2 = \tilde{r}_w^2 : \tilde{p}_i^f = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N, \quad (21)$$

$$\tilde{x} = \pm \tilde{H}_i : \frac{\partial \tilde{p}_i^f}{\partial \tilde{x}} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (22)$$

Переход от задачи (1)–(6) к задаче (19)–(22) переводит трехмерную задачу в набор двумерных задач фильтрации в трещинах МГРП, приток пластового флюида в которые моделируется в виде распределенных источников (18), содержащих информацию о форме трубок тока в области дренирования каждой трещины. Типизация формы данных трубок тока для наиболее характерных структур фильтрационных течений в области дренирования трещин МГРП позволяет исключить необходимость решения трехмерной задачи фильтрации в пласте.

2. Типизация трубок тока

2.1. Осредненная по толщине пласта задача фильтрации. Исследуем типичное строение трубок тока в области дренирования трещин МГРП на примере двумерной задачи фильтрации, осредненной по высоте однородного пласта при бесконечно большой проницаемости трещин $k^f \rightarrow \infty$. В этом случае давление в трещинах постоянно и равно давлению на скважине $p^f = p_w$. Заметим, что в данном случае берега трещин являются изобарами и, следовательно, ортогональны примыкающим к ним линиям тока, то есть в формуле (14) $\cos \alpha = 1$. Согласно оценочным расчетам, при указанных выше характерных параметрах пласта и трещин потери давления в трещинах составляют менее 15% от общего перепада давления $p_0 - p_w$ при отношении проницаемостей $k^f/k^r > 10^4$ и менее 2% при $k^f/k^r > 10^5$. На практике отношение k^f/k^r может принимать значения от 10^3 до 10^8 .

Поделив на $2h$ и проинтегрировав по высоте пласта уравнения (1) и (2) с учетом условия (4), получим

$$\frac{\partial \bar{u}_x}{\partial x} + \frac{\partial \bar{u}_y}{\partial y} = 0, \quad (23)$$

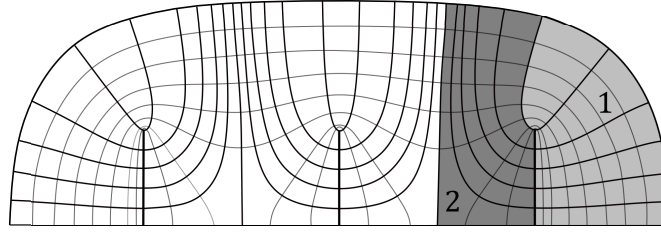


Рис. 2. Пример распределения изобар и линий тока вблизи трещин МГРП с выделением типичных участков: 1 – внешний сектор, 2 – внутренний сектор

$$\bar{u}_{x,y} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h u_{x,y} dz = -\frac{k}{2h\mu} \int_{-h}^h \frac{\partial p}{\partial(x,y)} dz = -\frac{k}{\mu} \frac{\partial \bar{p}}{\partial(x,y)}, \quad \bar{p} = \frac{1}{2h} \int_{-h}^h p dz. \quad (24)$$

Граничное условие на внешнем контуре Γ получим интегрированием по высоте пласта граничного условия (3):

$$(x, y) \in \Gamma : \bar{p} = p_0. \quad (25)$$

Вторым граничным условием является заданное давление на трещинах, толщиной которых можно пренебречь:

$$|x| < H_i, \quad y = y_i : \bar{p} = p_w, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (26)$$

Перейдя к безразмерным переменным (17), из (23)–(26) получим задачу для нормированного давления

$$\Delta \tilde{p} = 0, \quad (27)$$

$$(\tilde{x}, \tilde{y}) \in \Gamma : \tilde{p} = 1, \quad (28)$$

$$|\tilde{x}| < \tilde{H}_i, \quad \tilde{y} = \tilde{y}_i : \tilde{p} = 0, \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (29)$$

В дальнейшем для простоты волну над безразмерными переменными будем опускать.

Опыт решения задачи (27)–(29) для различных наборов трещин показывает, что можно выделить две типичные структуры фильтрационного потока (рис. 2): 1) вблизи внешних берегов боковых трещин (*внешний сектор* области дренирования скважины) и 2) вблизи внутренних берегов трещин (*внутренний сектор*).

2.2. Структура линий тока во внешнем секторе. В качестве приближения к условиям во внешнем секторе рассмотрим модельную задачу (27)–(29) вблизи одиночной трещины ($N = 1, y_1 = 0$), когда контур питания Γ является эллипсом с фокусами в торцах трещины и полуосью $R > H_1 = 1$ вдоль оси x . В силу симметрии задачи относительно координатных осей будем рассматривать решение в одном квадранте (рис. 3).

М. Маскетом было построено аналитическое решение данной задачи [10], из которого можно получить функциональные выражения для длины λ и относительной ширины ω трубок тока в зависимости от координаты x точки на трещине, из которой исходит ЛТ ℓ :

$$\lambda_{\Gamma}(x) = -iE \left(i \ln \rho, \frac{1}{1-x^2} \right) \sqrt{(1-x^2) \frac{\operatorname{ch}(2 \ln \rho) - \cos(2 \arccos x)}{2(1-x^2) + 2 \operatorname{sh}^2(\ln \rho)}}, \quad (30)$$

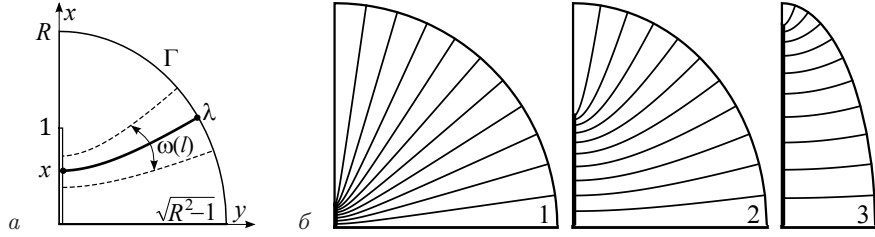


Рис. 3. Область решения (а) модельной задачи во внешнем секторе и примеры (б) распределения линий тока: 1 – $R = 10$, 2 – $R = 2$, 3 – $R = 1.1$

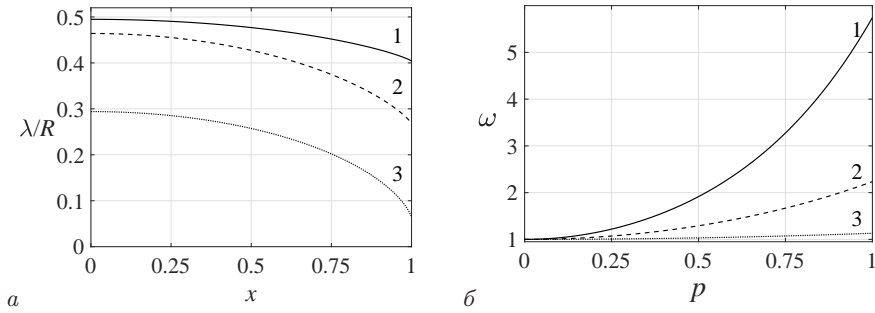


Рис. 4. Длина ЛТ (а), проходящих через различные точки x трещины, и функция относительной ширины ТТ (б), проходящих через точку трещины $x = 0.5$ во внешнем секторе: 1 – $R = 5$, 2 – $R = 2$, 3 – $R = 1.1$

$$\omega_1(\Pi, x) = \frac{|\sin(\arccos x + i\Pi \ln \rho)|}{\sqrt{1-x^2}}, \quad \rho = R + \sqrt{R^2 - 1}. \quad (31)$$

Согласно [15] в (30) при расчетах использовалось выражение

$$i E(i\gamma, m) = E\left(\theta \setminus \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{m}\right) - F\left(\theta \setminus \frac{\pi}{2} - \arcsin \sqrt{m}\right) - \operatorname{tg} \theta (1 - \cos^2(\arcsin \sqrt{m}) \sin^2 \theta)^{1/2}, \quad \operatorname{tg} \theta = \operatorname{sh} \gamma.$$

Здесь F и E – эллиптические интегралы первого и второго рода соответственно.

На рис. 3 приведены примеры линий тока, а на рис. 4 показано поведение функций длины $\lambda_1(x)$ и относительной ширины $\omega_1(l, x)$ при различных значениях параметра R .

2.3. Структура линий тока во внутреннем секторе. Модельная задача для внутреннего сектора решается вблизи одного берега одной половины трещины в прямоугольной области, ограниченной прямолинейным участком контура питания Γ ($x = R$), берегом трещины Γ_f , линией симметрии Γ_1 , проходящей вдоль оси горизонтальной скважины, и двумя линиями симметрии, одна из которых Γ_2 проходит вдоль оси x от трещины к контуру питания Γ , а другая Γ_3 – параллельно оси x на расстоянии L от нее, равном половине расстояния до соседней трещины (рис. 5, а).

Таким образом, для решения уравнения (27) кроме граничных условий первого рода (28), (29) на проницаемых участках границы Γ и Γ_f дополнительно ставятся

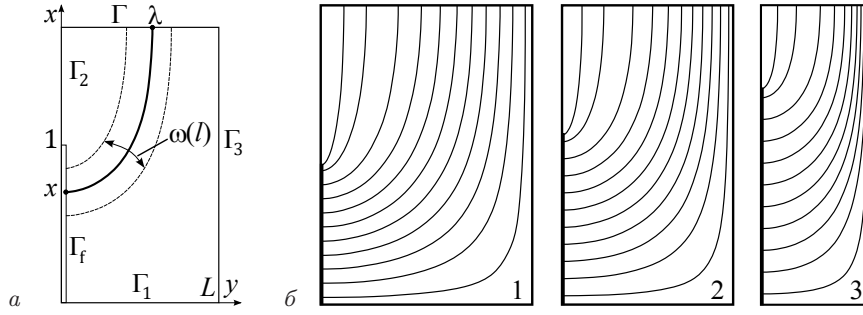


Рис. 5. Область решения (а) модельной задачи во внутреннем секторе и примеры (б) распределения линий тока: 1 – $L = 1.5$, 2 – $L = 1.0$, 3 – $L = 0.5$

условия симметрии на непроницаемых участках:

$$(x, y) \in \Gamma_1, \Gamma_2, \Gamma_3 : \frac{\partial p}{\partial n} = 0. \quad (32)$$

Проведенная серия вспомогательных расчетов с удаленным контуром $\Gamma : R \gg 1$ для значений половины расстояния между трещинами L от 0.2 до 1.5 долей полудлины трещины показала, что уже на расстояниях $x \approx 1 + 0.75L$ структура потока становится близкой к прямолинейно-параллельной, и изобары оказываются близки к прямолинейным и параллельным оси y . Поэтому при решении модельных задач полагалось, что граница Γ находится на расстоянии $R = 1 + 0.75L$. Таким образом, в безразмерной постановке задача определялась лишь одним параметром L .

Поле скорости фильтрации, соответствующее задаче (27), (28), (29), (32), определялось из аналитического решения. Пусть $w = \varphi + i\psi$ – комплексный потенциал; ψ – функция тока, принимающая постоянные значения вдоль линий тока; φ – функция потенциала скорости фильтрации, определенная в (16). Введем вспомогательную комплексную переменную $\tau = \xi + i\eta$, связанную с переменной $z = x + iy$ соотношением $t = z\pi/2L$. В плоскости t область течения является прямоугольником $ABCD$ с шириной $\pi/2$ и высотой $\pi\tau/2$, где τ – чисто мнимое число, $\text{Im } \tau > 0$ (рис. 6, а). Торцы трещины обозначим точкой $E = ai$. Зависимость между параметрами τ , a и L выражается следующим образом: $\tau = (0.75L + 1/L)$, $k = 1/(0.75L + 1)$, $a = \tau\pi k/2$.

Краевая задача для w имеет вид

$$\varphi|_{AE} = 0, \quad \varphi|_{BC} = \varphi_1, \quad \psi|_{AD} = \psi|_{DC} = 0, \quad \psi|_{BE} = Q,$$

где Q – полный расход через трещину.

Введем обозначение для комплексно-сопряженной скорости $f(t) = dw/dt = V_x - iV_y$. Чтобы найти $f(t)$, необходимо конформно отобразить прямоугольник $ABCD$ на правый нижний квадрант – область изменения функции $f(t)$ (годограф), где V_E – бесконечно удаленная точка (рис. 6, б).

Рассмотрим функцию $f^2(t) = V_x^2 - V_y^2 - 2iV_xV_y$, областью изменения которой является нижняя полуплоскость (рис. 6, в). Особенности функции $f^2(t)$ являются точки: $t = ia$ – полюс 1-го порядка, $t = \pi/2$ – нуль второго порядка. На границе прямоугольника $ABCD$ функция $f^2(t)$ удовлетворяет условию $\text{Im } f^2(t) = 0$, что позволяет продолжить данную функцию на всю комплексную плоскость $t = \xi + i\eta$. Получим двоякопериодическую функцию $f^2(t)$ с периодами π и $\pi\tau$: $f^2(t + \pi) = f^2(t)$, $f^2(t + \pi\tau) = f^2(t)$.

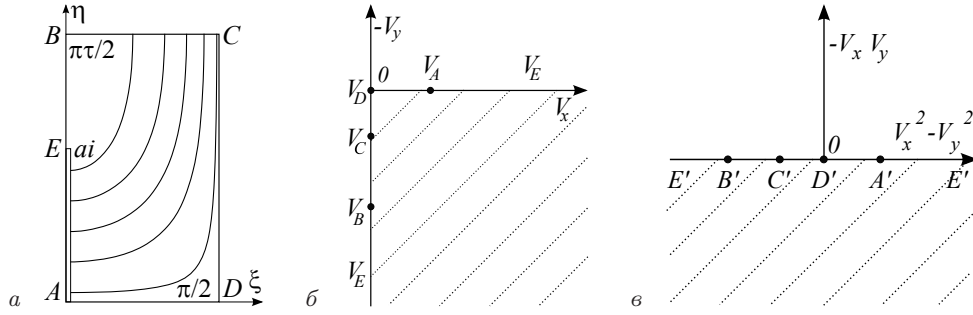


Рис. 6. Область аналитического решения (а) во внутреннем секторе, годограф скорости (б) и область значений функции $f^2(t)$ (в)

В качестве прямоугольника периодов возьмем прямоугольник с вершинами в точках $-\pi/2 - \pi\tau/2$, $\pi/2 - \pi\tau/2$, $\pi/2 + \pi\tau/2$, $-\pi/2 + \pi\tau/2$, а в качестве основной совокупности нулей и полюсов в этом прямоугольнике возьмем точки [16, с. 350, п. 21.5] $t = ia$, $t = -ia$ – полюсы первого порядка, $t = \pi/2$, $t = -\pi/2$ – нули первого порядка. Тогда

$$f^2(t) = C_1 \frac{\vartheta_1(t - \pi/2)\vartheta_1(t + \pi/2)}{\vartheta_1(t - ia)\vartheta_1(t + ia)},$$

где $\vartheta_1(t)$ – первая тэта-функция [16]. Так как $\vartheta_1(t \pm \pi/2) = \pm\vartheta_2(t)$, то

$$f^2(t) = -C_1 \frac{\vartheta_2^2(t)}{\vartheta_1(t - ia)\vartheta_1(t + ia)},$$

где $C_1 < 0$, так как на AD имеем $f^2(t) > 0$. Окончательно получаем

$$f(t) = V_x - iV_y = C\vartheta_2(t)/\sqrt{\vartheta_1(t - ia)\vartheta_1(t + ia)},$$

где $C > 0$ – действительная константа.

По полученному полю скорости фильтрации строился набор линий тока. Для каждой линии тока вычислялась длина λ и строилась табличная функция относительной ширины ω от дуговой координаты $\bar{l} = l/\lambda$. Аппроксимация полученных данных была выполнена функциями следующего вида:

$$\lambda_{II}(x) \approx 1 + 1.65L - x(1 + 0.9L), \quad (33)$$

$$\omega_{II}(\bar{l}, x) \approx \frac{1}{2} \left(1 + c + \frac{b\sqrt{2}}{s\bar{l}d\sqrt{\pi}} e^{-(s^2 - \ln(\bar{l}d/a))^2/2s^2} + (c - 1) \operatorname{th} \left[A \ln \frac{\bar{l}d}{a} \right] \right), \quad (34)$$

где

$$A(x) = x^{-\alpha}, \quad \alpha = \begin{cases} 0.8L + 0.025, & L \leq 0.5, \\ 0.45, & L > 0.5, \end{cases}$$

$$a(x) = 0.116(1 - x) \ln(22L) + 0.474x,$$

$$b(x) = \frac{0.1}{\sqrt{1-x}} + \frac{1}{1+10x} + 0.29L - 0.56, \quad c(x) = \frac{1}{15(1-x^{1.5})} + 0.72L - 0.2,$$

$$d(x) = 1 + 2.985(L - 0.5)x^{1.5}, \quad s(x) = 0.053[4L(x - 1) + 9.6(x + 1)].$$

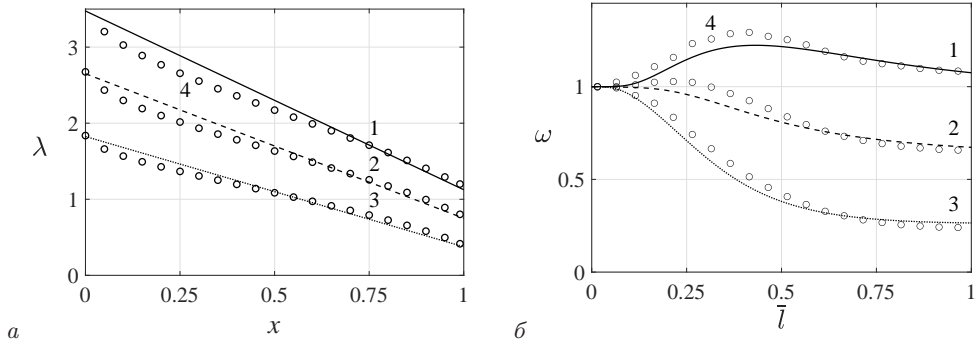


Рис. 7. Длина ЛТ (а), проходящих через различные точки x трещины, и функция относительной ширины ТТ (б), проходящих через точку трещины $x = 0.5$ во внутреннем секторе: 1, 2, 3 – приближенные значения для $L = 1.5$, $L = 1.0$, $L = 0.5$; 4 – точные значения

Числовые значения коэффициентов, входящих в приведенные выражения, отыскивались из решения задач минимизации отклонений аппроксимирующих функций от полученных табличных значений.

На рис. 5 приведены примеры построенных линий тока, а на рис. 7 показано поведение функций длины $\lambda_{\Pi}(x)$ и относительной ширины $\omega_{\Pi}(\bar{l}, x)$ от относительной дуговой координаты \bar{l} ТТ при различных значениях параметра L .

3. Аprobация модели пониженной размерности

Оценим погрешность, связанную с понижением размерности трехмерной модели фильтрации (1)–(6) в пласте и трещинах МГРП при переходе к упрощенной модели фильтрации в трещинах (19)–(22) с описанием притока из пласта с помощью параметризованных трубок тока. При этом «точным» решением будем называть численное решение трехмерной задачи, построенное методом конечных объемов с многоточечной аппроксимацией потока [2, 17].

3.1. Вычисление притока к трещине. При бесконечной проницаемости трещин коэффициенты $M_i \rightarrow \infty$, и уравнения (19) сводятся к уравнению Лапласа, решением которого с граничными условиями (20)–(22) является постоянное давление в трещинах:

$$p_i^f(x, z) = 0, \quad |x| < H_i, \quad |z| < h, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

В этом случае приток (18) из пласта к трещине записывается в виде

$$q_i^{\pm}(x, z) = J_i^{\pm}(x, z), \quad |x| < H_i, \quad |z| < h, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

В случае однородного пласта постоянной толщины, то есть аналогично условиям модельных задач, форма трубок тока и, следовательно, приток к трещине не зависят от вертикальной координаты z , и последнее выражение принимает вид

$$q_i^{\pm}(x) = J_i^{\pm}(x), \quad |x| < H_i, \quad i = 1, 2, \dots, N.$$

Полный приток к одному берегу трещины дает интеграл по его поверхности

$$Q_i^{\pm} = \int_{-h-H_i}^h \int_{-H_i}^{H_i} q_i^{\pm} dx dz = 2h \int_{-H_i}^{H_i} J_i^{\pm}(x) dx.$$

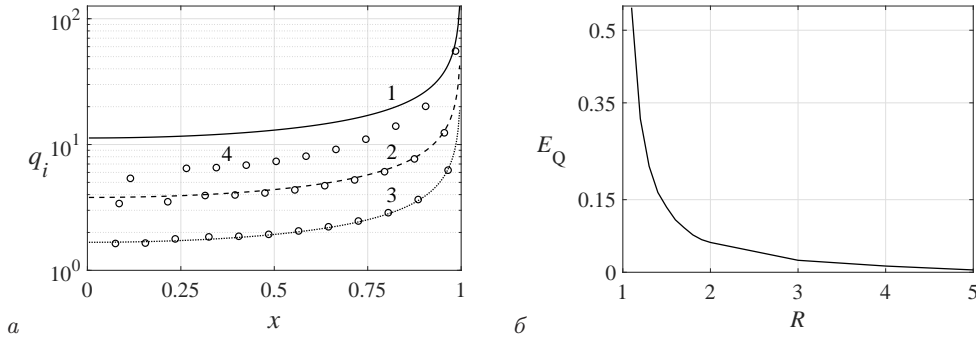


Рис. 8. Сравнение точного и приближенного решений для трещины в круговом пласте радиуса R с помощью модели для внешнего сектора с эллиптической границей: профили притока к трещине (а) и погрешность вычисления общего притока (б); 1 – $R = 1.1$, 2 – $R = 2$, 3 – $R = 10$; 4 – точное решение

Величины дебита трещины i и всей скважины определяются выражениями

$$Q_i = Q_i^- + Q_i^+, \quad Q = \sum_{i=1}^N Q_i.$$

Погрешность упрощенной модели будем оценивать, вычисляя относительные отклонения профилей притока вдоль отдельных трещин и общего дебита скважины, вычисленных по модели пониженной размерности, от этих же величин, вычисленных по исходной трехмерной модели. Последние будем обозначать символом « e » как «точные»:

$$r_i^\pm(x) = (q_i^\pm(x) - q_i^{e\pm}(x))/q_i^{e\pm}(x), \quad E_Q = (Q - Q^e)/Q^e.$$

3.2. Апробация упрощенной модели на выделенных секторах.

3.2.1. Внешний сектор. Поскольку параметризация (30), (31) трубок тока во внешнем секторе с эллиптической границей (рис. 3, а) является точной, то интерес представляет оценка погрешности приближенного решения, если форма внешнего контура Γ отличается от эллиптической. С этой целью рассмотрим случай кругового контура Γ радиуса $R > 1$ с центром в середине одиночной трещины с полудлиной $H_1 = 1$.

На рис. 8, а представлены приближенные и точные профили притока к трещине при различных значениях R . На рис. 8, б показана зависимость погрешности вычисления общего притока от параметра R . Видно, что, начиная со значения $R = 1.5$, когда разница между большой и малой полуосями не превосходит 25%, относительное отклонение дебита составляет не более 10%. Заметим, что типичные значения R/H , учитывая соотношение полудлин трещин и межскважинного расстояния, лежат в интервале от 1.5 до 5.

3.2.2. Внутренний сектор. Аппроксимации (33), (34) для параметров трубок тока во внутреннем секторе являются приближенными. Поэтому оценивать погрешности между приближенным и точным решениями будем при одинаковых формах внешней границы. Для этого трехмерную задачу будем решать с прямоугольным внешним контуром Γ , состоящим аналогично модельной задаче (рис. 5, а) из трещины, трех непроницаемых участков, моделирующих границы

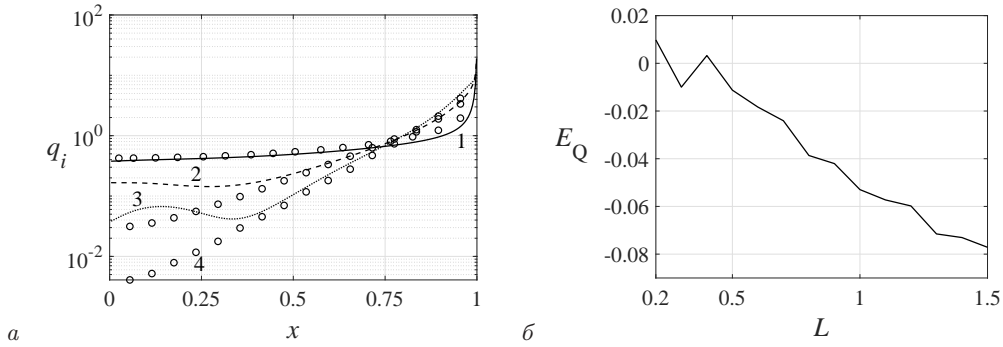


Рис. 9. Сравнение точного и приближенного решений для трещины в прямоугольной ячейке периодичности с помощью модели для внутреннего сектора: профили притока к трещине (а) и погрешность вычисления общего притока (б); 1 – $L = 1.5$, 2 – $L = 0.3$, 3 – $L = 0.2$; 4 – точное решение

симметрии, и участка с постоянным давлением, моделирующим фрагмент внешнего контура питания. Связь между шириной L и глубиной R области зададим такой же, как в модельных задачах: $R = 1 + 0.75 L$.

На рис. 9, а показаны приближенные и точные профили притока к трещине во внутреннем секторе при различных значениях L . На рис. 9, б показана зависимость погрешности вычисления общего притока от параметра L , которая не превосходит 8%.

3.3. Апробация упрощенной модели в случае МГРП. Определим алгоритм покрытия всей области дренирования скважины секторами двух введенных выше типов для применения упрощенной модели к многозонному ГРП.

Для получения непрерывного внешнего контура Γ заданного давления p_0 введем общее для всех трещин расстояние R от оси скважины до данного контура. В качестве такой величины выберем максимальную глубину внутреннего сектора среди всех рассматриваемых трещин (рис. 10):

$$R = \max \left(\max_{i=1, \dots, N-1} (R_i^+), \max_{i=2, \dots, N} (R_i^-) \right),$$

$$R_i^+ = H_i + 0.75L_i, \quad i = 1, 2, \dots, N-1;$$

$$R_i^- = H_i + 0.75L_{i-1}, \quad i = 2, 3, \dots, N.$$

Согласно указанным в п. 2.3 наблюдениям на участках пласта между модельным локальным внутренним сектором глубиной R_i^\pm и глобальным контуром Γ на расстоянии R фильтрационное течение можно считать прямолинейно-параллельным без изменения ширины трубок тока. Длину этих участков обозначим через $\Delta_i^\pm = R - R_i^\pm$ и соответствующим образом построим функцию относительной ширины трубки тока (34) во внутреннем секторе:

$$\omega_{\Pi}^*(l, x) = \begin{cases} \omega_{\Pi}(l, x), & 0 \leq l \leq \lambda_{\Pi}(x), \\ \omega_{\Pi}^\lambda(x), & \lambda_{\Pi}(x) \leq l \leq \lambda_{\Pi}(x) + \Delta, \end{cases} \quad \omega_{\Pi}^\lambda(x) = \omega_{\Pi}(\lambda_{\Pi}(x), x).$$

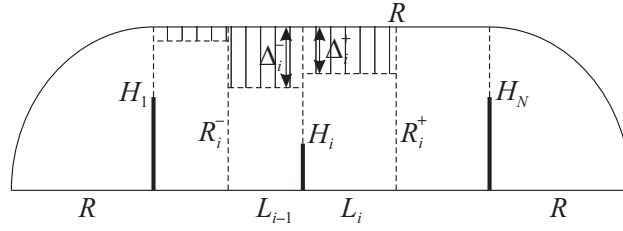


Рис. 10. Схема покрытия половины области дренирования горизонтальной скважины с МГРП типизированными секторами с дополнением участками прямолинейно-параллельной фильтрации

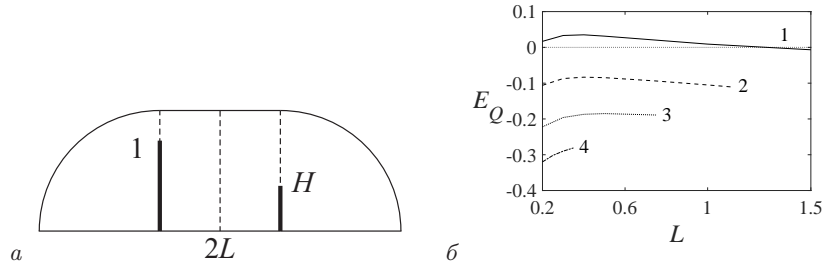


Рис. 11. Схема (а) и погрешность вычисления суммарного дебита (б) для случая двухзонного ГРП: 1 - $H = 1$, 2 - $H = 0.75$, 3 - $H = 0.5$, 4 - $H = 0.25$

Тогда приток в трещину (18) со стороны внутренних секторов с расширенной областью дренирования будет определяться с помощью величины

$$J_i^\pm(x) = \left(\int_0^{\lambda_{\Pi,i}^\pm(x) + \Delta_i^\pm} \frac{dl}{\omega_{\Pi,i}^{*\pm}(l,x)} \right)^{-1} = \left(\frac{\Delta_i^\pm}{\omega_{\Pi,i}^{\lambda_{\Pi,i}^\pm(x)}} + \int_0^{\lambda_{\Pi,i}^\pm(x)} \frac{dl}{\omega_{\Pi,i}^\pm(l,x)} \right)^{-1}.$$

Ширина внутренних секторов в рамках настоящей работы приближенно задавалась как половина расстояния между соседними трещинами.

3.3.1. Две трещины. Рассмотрим случай МГРП, представленного двумя параллельными трещинами с параметрами $H_1 = 1$, $H_2 = H \leq 1$, $L_1 = L = (y_2 - y_1)/2$ (рис. 11, а). На рис. 11, б и рис. 12 показаны величины погрешности вычисления суммарного дебита и притоков по отдельным берегам трещин в зависимости от величины полушага L между трещинами.

Из графиков видно, что наибольшее отклонение наблюдается в случаях, когда параметры H , L принимают относительно малые значения, вследствие чего структура течения значительно отличается от заложенной в модели. В то же время относительное отклонение суммарного дебита скважины оказывается примерно в два раза меньше отклонений по отдельным берегам трещин.

Можно отметить, что, поскольку обычно длины трещин МГРП, выполненного на одной скважине, отличаются незначительно, то в большинстве случаев полудлины H трещин, нормированные на максимальную полудлину, будут принимать значения в интервале от 0.75 до 1.

3.3.2. Произвольное число трещин. Для случая произвольного числа трещин будем варьировать параметры N и L , считая полудлину всех трещин одинаковой $H = 1$. На рис. 13 показан дебит Q скважины для разных значений N , L .

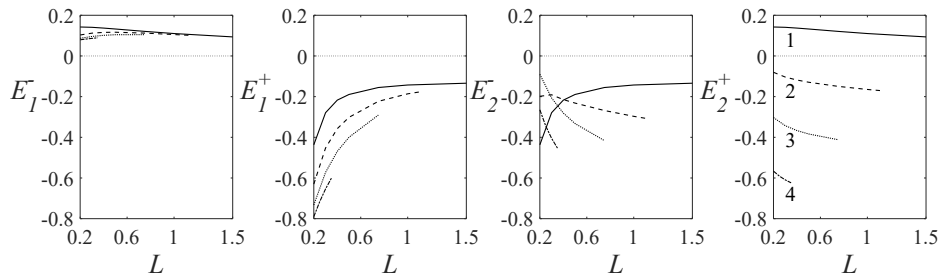


Рис. 12. Величины отклонений приближенных и точных притоков для случая двухзонного ГРП: 1 – $H = 1$, 2 – $H = 0.75$, 3 – $H = 0.5$, 4 – $H = 0.25$

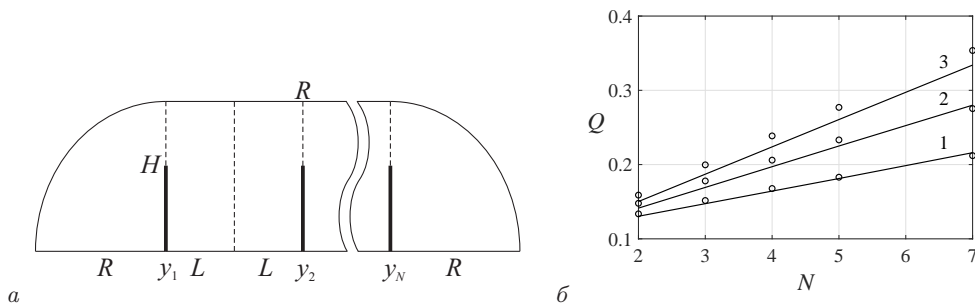


Рис. 13. Схема и пример вычисления суммарного дебита скважины с равноудаленными трещинами МГРП равной длины $H = 1$: 1 – $L = 0.5$, 2 – $L = 1.0$, 3 – $L = 1.5$

Как видно из рис. 13, б, значения, вычисленные с помощью предложенной модели, хорошо приближают точное решение, что позволяет использовать представленную модель для случаев, когда скважина простимулирована многозонным гидроразрывом пласта.

Заметим, что при $L < 1$ погрешность приближенной модели в вычислении суммарного притока составляет менее 1%. Анализ сходимости численного решения трехмерной задачи показал, что эквивалентного уровня невязки уже для 5 трещин МГРП удастся достичь лишь на сетках, содержащих в горизонтальном сечении расчетной области более 10^5 блоков.

Заключение

На основе аналитических решений модельных задач выполнена параметризация функций длины и распределения относительной ширины вдоль трубок тока, примыкающих к берегам вертикальных трещин многозонного гидроразрыва пласта на горизонтальных скважинах. Скважина полагается неперфорированной между трещинами гидроразрыва. Рассмотрен случай трещин бесконечной проницаемости в однородном пласте, когда задача сводится к двумерной постановке в горизонтальной плоскости. Результаты применимы также без каких-либо изменений для слоисто-неоднородного пласта. Получены аналитические выражения перечисленных функций свойств трубок тока с различием внутренних и внешних берегов трещин. Предложен алгоритм параметризации трубок тока для случая различающихся по длине трещин. Выполнена апробация изложенного упрощения пространственной модели и определен диапазон параметров системы, когда уровень погрешности упрощенной модели является допустимым для проведения оценочных расчетов.

Благодарности. Работа выполнена за счет средств Программы стратегического академического лидерства Казанского (Приволжского) федерального университета («ПРИОРИТЕТ-2030»).

Литература

1. Каневская Р.Д. Математическое моделирование разработки месторождений нефти и газа с применением гидравлического разрыва пласта. – М.: ООО «Недра-Бизнес-центр», 1999. – 212 с.
2. Мазо А.Б., Хамидуллин М.Р. Явно-неявные алгоритмы ускорения расчета двухфазного притока к горизонтальной скважине с многостадийным гидроразрывом пласта // Вычисл. методы и программирование. – 2017. – Т. 18, Вып. 3. – С. 204–213. – doi: 10.26089/NumMet.v18r318.
3. Mazo A.B., Sattarov R.I., Khamidullin M.R., Potashev K.A., Trifonof T.V. Interpretation of indicator studies of multistage fracturing // SPE Russ. Petroleum Technology Conf., Moscow, 16–18 Oct., 2017. – 2017. – Art. SPE-187762-MS, P. 1–23. – doi: 10.2118/187762-MS.
4. Мазо А.Б., Поташев К.А. Суперэлементы. Моделирование разработки нефтяных месторождений. – М.: ИНФРА-М, 2020. – 220 с.
5. Mukherjee H., Economides M.J. A parametric comparison of horizontal and vertical well performance // SPE Form. Eval. – 1991. – V. 6, No 2. – P. 209–216. – doi: 10.2118/18303-PA.
6. Guo G., Evans R.D. Inflow performance of a horizontal well intersecting natural fractures // SPE Production Operations Symp., Oklahoma City, Oklahoma, Mar. 1993. – 1993. – P. 851–865. – doi: 10.2118/25501-MS.
7. Prats M. Effect of vertical fractures on reservoir behavior–incompressible fluid case // SPE J. – 1961. – V. 1, No 2. – P. 105–118. – doi: 10.2118/1575-G.
8. Raghavan R., Joshi S.D. Productivity of multiple drainholes or fractured horizontal wells // SPE Form. Eval. – 1993. – V. 8, No 1. – P. 11–16. – doi: 10.2118/21263-PA.
9. Hu C., Lu J., He X. Productivity formulae of an infinite-conductivity hydraulically fractured well producing at constant wellbore pressure based on numerical solutions of a weakly singular integral equation of the first kind // Math. Probl. Eng. – 2012. – V. 2012. – Art. 428596, P. 1–18. – doi: 10.1155/2012/428596.
10. Muskat M. Physical Principles of Oil Production. – Boston: I.N.R.D.C., 1981. – 922 p.
11. Каневская Р.Д., Кац Р.М. Аналитические решения задач о притоке жидкости к скважине с вертикальной трещиной гидроразрыва и их использование в численных моделях фильтрации // Изв РАН. Механика жидкости и газа. – 1996. – № 6. – С. 69–80.
12. Giger F.M. Horizontal wells production techniques in heterogeneous reservoirs // SPE Middle East Oil Technical Conference and Exhibition, Bahrain, March 1985. – 1985. – P. 239–246. – doi: 10.2118/13710-MS.
13. Баренблатт Г.И., Ентов В.М., Рыжик В.М. Движение жидкостей и газов в природных пластах. – М.: Недра, 1984. – 211 с.
14. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. – М.-Л.: Гостехиздат, 1950. – 676 с.
15. Абрамовиц М., Стиган И. Справочник по специальным функциям. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
16. Уиттекер Э.Т., Ватсон Дж.Н. Курс современного анализа. Часть вторая. Трансцендентные функции. – М.: Гос. изд-во физ.-мат. лит., 1963. – 501 с.

17. Мазо А.Б., Поташев К.А., Хамидуллин М.Р. Фильтрационная модель притока жидкости к горизонтальной скважине с многостадийным гидравлическим разрывом пласта // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2015. – Т. 157, кн. 4. – С. 133–148.

Поступила в редакцию
28.01.2022

Поташев Константин Андреевич, доктор физико-математических наук, заведующий кафедрой аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: kpotashhev@mail.ru

Мазо Александр Бенцианович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: abmazo1956@gmail.com

Мухина Мария Вадимовна, студент Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: muvoler@gmail.com

Ураимов Алмаз Айбекович, студент Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: aauraimov@gmail.com

Маклаков Дмитрий Владимирович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры аэрогидромеханики

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: dmaklak@kpfu.ru

Хамидуллин Марсель Рашитович, младший научный сотрудник Института математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Казанский (Приволжский) федеральный университет
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия
E-mail: marseille.ksu@gmail.com

ISSN 2541-7746 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2022, vol. 164, no. 1, pp. 101–121

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.101-121

**Modeling of Fluid Inflow
towards Multistage Hydraulic Fractures of Infinite
Permeability Using Stream Tubes**

*K.A. Potashev**, *A.B. Mazo***, *M.V. Mukhina****, *A.A. Uraimov*****,
*D.V. Maklakov******, *M.R. Khamidullin******

Kazan Federal University, Kazan, 420008 Russia

E-mail: **kpotashev@mail.ru*, ***abmazo1956@gmail.com*, ****mvvoler@gmail.com*,
*****aauraimov@gmail.com*, ******dmaklak@kpfu.ru*, ******marseille.ksu@gmail.com*

Received January 28, 2022

Abstract

This article is devoted to the problem of a fundamental reduction of the machine time for numerical solution of non-steady state problems of the flow in the vicinity of multistage hydraulic fractures along horizontal wells in a petroleum reservoir. This issue arises when it is necessary to solve inverse problems associated either with the identification of fracture parameters based on the results of their hydrodynamic studies or with their optimization to obtain specified production indicators. As a way to reduce computational costs, we previously proposed replacing the spatial problem of flow in the reservoir with a set of one-dimensional problems along the stream tubes. In this case, the problems for pressure in each fracture are solved taking into account the distributed inflow of reservoir fluid from the stream tubes adjacent to the fracture edges. Decomposition of the spatial problem into a set of one-dimensional problems along the stream tubes reduces the required machine time for numerical simulation of the non-steady state flow by orders of magnitude. The object of this research is the functions of the relative width along the stream tubes distribution and their lengths, which are necessary to calculate the local inflow to the fractures and are the key parameters of the model that determine its accuracy.

The parameterization of the functions of length and distribution of the relative width along the stream tubes adjacent to the edges of vertical multistage hydraulic fractures is performed. The well between the fractures is assumed to be non-perforated. The case of fractures of infinite permeability in a homogeneous reservoir is considered, when the problem is reduced to a two-dimensional formulation in a horizontal plane. The results are also applicable without any changes to a stratified heterogeneous formation. Analytical expressions are obtained for the listed properties of stream tubes with a difference between the inner and outer edges of the fractures. For this purpose, analytical solutions of the corresponding model problems are used. An algorithm for the parametrization of stream tubes for the case of fractures differing in length is proposed. The proposed simplification of the spatial model is tested, and the range of values of the initial parameters of the system, which allows for an acceptable level of error of the simplified model for evaluative calculations, is shown.

Keywords: oil reservoir, multistage hydraulic fracturing, single-phase filtration, stream tubes, analytical solution, numerical simulation

Acknowledgments. This study was supported by the Kazan Federal University Strategic Academic Leadership Program (“PRIORITY-2030”).

Figure Captions

Fig. 1. Layout diagram of multistage hydraulic fracturing along the horizontal well in 3D (a) and in projection onto a horizontal plane (b).

Fig. 2. Example of the distribution of isobars and stream lines near multistage fractures with the identification of typical areas: 1 – outer sector, 2 – inner sector.

Fig. 3. Solution domain (a) of the model problem in the outer sector and examples (b) of the distribution of stream lines: 1 – $R = 10$, 2 – $R = 2$, 3 – $R = 1.1$.

Fig. 4. Length of stream lines (a), running through various points x of the fracture, and the function of the relative width of stream tubes (b), passing through the fracture point $x = 0.5$ in the outer sector: 1 – $R = 5$, 2 – $R = 2$, 3 – $R = 1.1$.

Fig. 5. Solution domain (a) of the model problem in the inner sector and examples (b) of the distribution of stream lines: 1 – $L = 1.5$, 2 – $L = 1.0$, 3 – $L = 0.5$.

Fig. 6. Analytical solution domain (a) in the inner sector, velocity hodograph (b) and the domain of function $f^2(t)$ (c).

Fig. 7. Length of stream lines (a), running through various points x of the fracture, and the function of the relative width of stream tubes (b), passing through the fracture point $x = 0.5$ in the inner sector: 1, 2, 3 – approximate values for $L = 1.5$, $L = 1.0$, $L = 0.5$; 4 – exact values.

Fig. 8. Comparison of the exact and approximate solutions for the fracture in a radial reservoir of radius R using the model for the outer sector with an elliptical boundary: profiles of the inflow to the fracture (a) and the error in calculating the total inflow (b); 1 – $R = 1.1$, 2 – $R = 2$, 3 – $R = 10$; 4 – exact solution.

Fig. 9. Comparison of the exact and approximate solutions for the fracture in a rectangular periodicity cell using the model for the inner sector: profiles of the inflow to the fracture (a) and the error in calculating the total inflow (b); 1 – $L = 1.5$, 2 – $L = 0.3$, 3 – $L = 0.2$; 4 – exact solution.

Fig. 10. Diagram showing the layout of half of the drainage area of the horizontal well with typical sectors of a multistage hydraulic fracturing having straight-parallel filtration areas added to it.

Fig. 11. Diagram (a) and error of the total flow rate calculation (b) for the case of a two-stage hydraulic fracturing: 1 – $H = 1$, 2 – $H = 0.75$, 3 – $H = 0.5$, 4 – $H = 0.25$.

Fig. 12. Deviations of the approximate and exact inflow values for the case of a two-stage hydraulic fracturing: 1 – $H = 1$, 2 – $H = 0.75$, 3 – $H = 0.5$, 4 – $H = 0.25$.

Fig. 13. Diagram and example of calculating the total flow rate of a well with equidistant multistage hydraulic fractures of equal length $H = 1$: 1 – $L = 0.5$, 2 – $L = 1.0$, 3 – $L = 1.5$.

References

1. Kanevskaya R.D. *Matematicheskoe modelirovanie razrabotki mestorozhdenii nefi i gaza s primeneniem gidravlicheskogo razryva plasta* [Mathematical Modeling of Oil and Gas Field Development Using Hydraulic Fracturing]. Moscow, OOO “Nedra-Biznestsentr”, 1999. 212 p. (In Russian)
2. Mazo A.B., Hamidullin M.R. Explicit-Implicit Algorithms for accelerating the calculation of two-phase inflow to a horizontal well with multistage hydraulic fracturing. *Vychisl. Metody Program.*, 2017, vol. 18, no. 3, pp. 204–213. (In Russian)
3. Mazo A.B., Sattarov R.I., Khamidullin M.R., Potashev K.A., Trifonof T.V. Interpretation of indicator studies of multistage fracturing. *SPE Russ. Petroleum Technology Conf., Moscow, 16–18 Oct., 2017*, 2017, art. SPE-187762-MS, pp. 1–23. doi: 10.2118/187762-MS.

4. Mazo A.B., Potashev K.A. *Superelementy. Modelirovanie razrabotki neftyanykh mestorozhdenii* [Superelements. Oil Field Development Modeling: A Monograph]. Moscow, INFRA-M, 2020. 220 p. (In Russian)
5. Mukherjee H., Economides M.J. A parametric comparison of horizontal and vertical well performance. *SPE Form. Eval.*, 1991, vol. 6, no. 2, pp. 209–216. doi: 10.2118/18303-PA.
6. Guo G., Evans R.D. Inflow performance of a horizontal well intersecting natural fractures. *SPE Production Operations Symp., Oklahoma City, Oklahoma, Mar. 1993*, 1993, pp. 851–865. doi: 10.2118/25501-MS.
7. Prats M. Effect of vertical fractures on reservoir behavior—compressible fluid case. *SPE J.*, 1961, vol. 1, no. 2, pp. 105–118. doi: 10.2118/1575-G.
8. Raghavan R., Joshi S.D. Productivity of multiple drainholes or fractured horizontal wells. *SPE Form. Eval.*, 1993, vol. 8, no. 1, pp. 11–16. doi: 10.2118/21263-PA.
9. Hu C., Lu J., He X. Productivity formulae of an infinite-conductivity hydraulically fractured well producing at constant wellbore pressure based on numerical solutions of a weakly singular integral equation of the first kind. *Math. Probl. Eng.*, 2012, vol. 2012, art. 428596, pp. 1–18. doi: 10.1155/2012/428596.
10. Muskat M. *Physical Principles of Oil Production*. Boston, I.H.R.D.C., 1981. 922 p.
11. Kanevskaya R.D., Kats R.M. Exact solutions of problems of fluid inflow into a well with a vertical hydrofracture and their use in numerical models of flow through porous media. *Fluid Dyn.*, 1996, vol. 31, pp. 854–864. doi: 10.1007/BF02030104.
12. Giger F.M. Horizontal wells production techniques in heterogeneous reservoirs. *Proc. SPE Middle East Oil Technical Conf. Exhib., Bahrain, Mar. 1985*, 1985, pp. 239–246. doi: 10.2118/13710-MS.
13. Barenblatt G.I., Entov V.M., Ryzhik V.M. *Dvizhenie zhidkosti i gazov v prirodnykh plastakh* [Movement of Liquids and Gases in Natural Reservoirs]. Moscow, Nedra, 1984. 211 p. (In Russian)
14. Loitsyanskii L.G. *Mekhanika zhidkosti i gaza* [Mechanics of Liquids and Gases]. Moscow-Leningrad, Gostekhizdat, 1950. 676 p. (In Russian)
15. Abramovits M., Stigan I. *Spravochnik po spetsial'nyim funktsiyam* [A Handbook of Special Functions]. Moscow, Nauka, 1979. 832 p. (In Russian)
16. Whittaker E.T., Watson G.N. *Kurs sovremennogo analiza* [A Course of Modern Analysis]. Pt. 2: The transcendental functions. Moscow, Gos. Izd. Fiz.-Mat. Lit., 1963. 501 p. (In Russian)
17. Mazo A.B., Potashev K.A., Khamidullin M.R. Mathematical model of fluid filtration to a multistage hydraulically fractured horizontal well. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 4, pp. 133–148. (In Russian)

Для цитирования: Поташев К.А., Мазо А.Б., Мухина М.В., Ураимов А.А., Маклаков Д.В., Хамидуллин М.Р. Моделирование притока пластового флюида к трещинам бесконечной проницаемости многозонного гидроразрыва пласта с помощью трубок тока // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2022. – Т. 164, кн. 1. – С. 101–121. – doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.101-121.

For citation: Potashev K.A., Mazo A.B., Mukhina M.V., Uraimov A.A., Maklakov D.V., Khamidullin M.R. Modeling of fluid inflow towards multistage hydraulic fractures of infinite permeability using stream tubes. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2022, vol. 164, no. 1, pp. 101–121. doi: 10.26907/2541-7746.2022.1.101-121. (In Russian)