Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика»

2013–2014 учебный год

9 класс

1. (25 б.) Постройте график функции $y = x^2 - |x - x^2|$
2. (25 б.) Дано 50 чисел. Известно, что среди их попарных произведений ровно 500 отрицательных. Определите количество нулей среди данных чисел.
3. (25 б.) В треугольнике ABC проведены две высоты AK и CL. Найдите величину угла B, если известно, что $AC = 2 \cdot LK$.
4. (25 б.) Сколькими способами на доске размером 8×8можно расставить 8одинаковых ладей симметрично относительно *диагонали*, проходящей через нижнее левое угловое поле?

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика»

2013–2014 учебный год

10 класс

1. (25 б.) Сколько положительных чисел среди 2014 членов последовательности: sin1°, sin10°, sin100°, sin1000°, ... ?
2. (25 б.) Решите неравенство $\arccos x \geq \arccos (x^2)$.
3. (25 б.) Площадь четырехугольника равна 1. Какую наименьшую величину может иметь сумма его диагоналей?
4. (25 б.) На какое наименьшее натуральное число N надо умножить 999 999, чтобы получилось число, записанное одними единицами?

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика»

2013–2014 учебный год

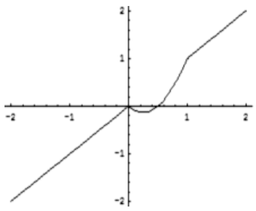
11 класс

1. (25 б.) Известно, что $tg\ \alpha + ctg\ \alpha = a$и $\alpha \in (0, \pi/2)$. Найти $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$.
2. (25 б.) В окружности ωпроведен диаметр AB и на этом диаметре зафиксирована точка X. Точка P лежит на окружности ωи не совпадает с точками Aи B. Докажите, что отношение
$$\frac{tg\ \angle APX}{tg\ \angle PAX}$$
не зависит от выбора точки P.
3. (25 б.) Решите уравнение
$$2(x-6) = \frac{x^2}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2}.$$
4. (25 б.) Известно, что a– нечетное целое число, а x_1и x_2–корни уравнения $x^2 + ax - 1 = 0$. Доказать, что при любом целом $n \geq 0$числа $x_1^n + x_2^n$и$x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$–целые и взаимно простые.

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета
по предмету «Математика»
2013-2014 учебный год

9 класс. Краткие решения.

1. Постройте график функции $y = x^2 - |x - x^2|$



Решение. Выражение $x–x^2$ положительно при $0 \le x \le 1$. Поэтому $|x–x^2|= x–x^2$, если $0 \le x \le 1$ и $|x–x^2|= x^2–x$, если $x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$. Поэтому $y = x$ при $x \in (-\infty,0) \cup (1,+\infty)$ и $y = 2x^2–x$ при $0 \le x \le 1$.

2. Дано 50 чисел. Известно, что среди их попарных произведений ровно 500 отрицательных. Определите количество нулей среди данных чисел.

Решение. Пусть m, n и p — количество отрицательных, нулей и положительных среди данных 50 чисел. Тогда из условия задачи имеем: $m + n + p = 50$ и $m \cdot p = 500$. Отсюда следует, что m и p — делители 500, сумма которых не превосходит 50. Среди всех делителей числа 500 этим свойством обладает только пара 20 и 25, т.е. $m + p = 45$, отсюда $n = 5$.

3. В треугольнике ABC проведены две высоты AK и CL. Найдите величину угла B, если известно, что $AC = 2 \cdot LK$.

Решение. Построим на стороне AC как на диаметре окружность, которая пройдет через точки L и K, так как $\angle ALC = \angle AKC = 90°$. По условию $AC= 2 \cdot LK$, и значит, отрезок LK равен *радиусу* построенной окружности, поэтому дуга, стягиваемая хордой LK, составляет 60°. Отсюда угол LCK, опирающийся на эту дугу, равен 30°. Далее, если угол B — острый, то $\angle B = 90° - \angle LCB = 60°$ (рис. 2,*а*); если же угол B — тупой, то $\angle CBL = 90° - \angle BCL = 60°$ (рис. 2,*б*), и значит, $\angle B = 180° - \angle CBL = 120°$.

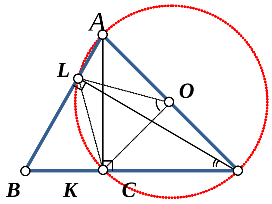


Рис.2,а

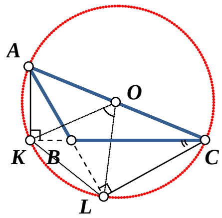


Рис.2,б

4. Сколькими способами на доске размером 8×8можно расставить 8одинаковых ладей симметрично относительно *диагонали*, проходящей через нижнее левое угловое поле?

Решение. На доске 8×8 имеется 8 диагональных и 56 недиагональных клеток, последние разбиваются на 28 пар симметричных относительно диагонали клеток. Все расположения ладей разобьем на 5 непересекающихся классов — в m-й класс отнесем расположения, при которых m пар ладей попадают на диагональ.

При $m= 0$ ни одна из ладей не стоит на диагонали, и значит, все ладьи занимают 4 из 28 пар симметричных недиагональных клеток. Таких расположений будет $C_{28}^4 = \frac{28 \cdot 27 \cdot 26 \cdot 25}{4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1} = 20\,475$. При $m= 1$ на диагонали находятся ровно две ладьи, которые могут располагаться на ней $C_8^2 =$ 28 способами. Остальные 6 ладей занимают 3 из 28 пар симметричных недиагональных клеток. Поэтому таких расстановок будет $C_8^2 \cdot C_{28}^3 = 91\,728$.

Аналогичными рассуждениями находим количество требуемых расстановок при $m= 1$ и $m= 3$, а именно, $C_8^4 \cdot C_{28}^2 = 26\,460$ и $C_8^6 \cdot C_{28}^1 = 784$ соответственно. Наконец, при $m= 4$ есть только одна расстановка, при которой все ладьи попадают на диагональ. Общее число симметричных расстановок равно

$$C_{28}^4 + C_8^2 \cdot C_{28}^3 + C_8^4 \cdot C_{28}^2 + C_8^6 \cdot C_{28}^1 + 1 = 139\,448.$$

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета
по предмету «Математика»
2013-2014 учебный год

10 класс. Краткие решения.

1. Сколько положительных чисел среди 2014 членов последовательности: sin1°, sin10°, sin100°, sin1000°, ... ?

   Решение. При $n > 3$ имеем

   $10^n - 1000 = 10^3\,(10^{n-3} - 1) = 25 \cdot 40 \cdot (10^{n-3} - 1)$.

   Поскольку $10^{n-3} - 1$ делится на 9, отсюда следует, что $10^n - 1000$ делится на 360. Поэтому все члены последовательности, начиная с четвертого, совпадают с $\sin 1000°=\sin(3 \cdot 360° - 80°) = \sin(-80°) < 0$. Таким образом, в последовательности *три* положительных члена — это sin1°, sin10°, sin100°.

2. Решите неравенство $\arccos x \ge \arccos(x^2)$.

   Решение. Запишем ОДЗ: $|x| \le 1$, $|x^2| \le 1$.

   Решением этой системы неравенств будет интервал $[-1;\ 1]$. Заметим, что функция $y = \arccos x$ — убывающая. Следовательно, неравенство из условия эквивалентно системе неравенств $x \le x^2$, $-1 \le x \le 1$. Ее решением является множество $[-1;0] \cup \{1\}$.

3. Площадь четырехугольника равна 1. Какую наименьшую величину может иметь сумма его диагоналей?

   Решение. Сначала найдем наименьшее значение для произведения диагоналей четырехугольника. Для его площади имеем равенство: $2S=xy\sin\alpha$, в котором x, y — диагонали четырехугольника, а α — угол между ними. По условию $S=1$, и значит, $2=xy\sin\alpha\le xy$.

   Теперь воспользуемся неравенством о среднем геометрическом $2\sqrt{xy}\le x+y$, из которого получим наименьшее значение для суммы диагоналей четырехугольника: $2\sqrt{2}\le x+y$.

4. На какое наименьшее натуральное число N надо умножить 999 999, чтобы получилось число, записанное одними единицами?

   Решение. Заметим, что $999\,999 = 10^6 - 1$. Число, записанное одними единицами, имеет вид $\frac{1}{9}(10^n - 1)$. Поэтому условие задачи означает, что

   $(10^6 - 1) \cdot N = \dfrac{10^n - 1}{9}$, т.е. $N = \dfrac{1}{9} \cdot \dfrac{10^n - 1}{10^6 - 1}$.

   Теперь заметим, что если $n = 6k + r$, то $10^n - 1 = (10^{6k+r} - 10^r) + 10^r - 1$. Выражение в первой скобке делится на $10^6 - 1$, поэтому $10^n - 1$ делится на $10^6 - 1$ только в том случае, когда остаток $10^r - 1 = 0$, т.е. $r = 0$, и значит, $n = 6k$. Поэтому

   $$N = \frac{1}{9} \cdot \frac{10^{6k} - 1}{10^6 - 1} = \frac{1}{9} \cdot (10^{6k-6} + 10^{6k-12} + \ldots + 10^6 + 1).$$

   Число в скобках делится на 9, когда сумма его цифр делится на 9. Но десятичная запись этого выражения состоит только из 0 и 1, причем количество единиц равно k. Отсюда следует, что наименьшее значение k, при котором N будет целым числом, равно 9. В этом случае, $n = 54$ и

   $$N = \frac{1}{9} \cdot (10^{48} + 10^{42} + 10^{36} + 10^{30} + 10^{24} + 10^{18} + 10^{12} + 10^6 + 1) =$$

   $$111111\ 222222\ \ldots\ 777777\ 88888\ 9\ .$$

Межрегиональная предметная олимпиада Казанского федерального университета по предмету «Математика» 2013-2014 учебный год

11 класс. Краткие решения.

1. Известно, что $tg\,\alpha + ctg\,\alpha = a$ и $\alpha \in (0, \pi/2)$. Найти $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha}$.

Решение. $\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} + \frac{\cos\alpha}{\sin\alpha} = a \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha\cos\alpha} = a \Rightarrow \sin 2\alpha = \frac{2}{a}$. Далее, $\frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = \frac{\sin\alpha + \cos\alpha}{\sin\alpha\cos\alpha}$; $(\sin\alpha + \cos\alpha)^2 = 1 + \sin 2\alpha = \frac{a+2}{a} \Rightarrow \frac{1}{\sin\alpha} + \frac{1}{\cos\alpha} = a\sqrt{\frac{a+2}{a}} = \sqrt{a^2 + 2a}$

2. В окружности ω проведен диаметр AB и на этом диаметре зафиксирована точка X. Точка P лежит на окружности ω и не совпадает с точками A и B. Докажите, что отношение

$$\frac{tg\,\angle APX}{tg\,\angle PAX}$$

не зависит от выбора точки P.

Решение. Проведем перпендикуляр XH из точки X на отрезке AP. Заметим, что $\angle BPA = 90°$, так как он опирается на диаметр. Отсюда следует, что точка H лежит внутри отрезка AP и что $XH \parallel BP$. Далее,

$$\frac{tg\,\angle APX}{tg\,\angle PAX} = \frac{XH : HP}{XH : HA} = \frac{HA}{HP} = \frac{AX}{XB}.$$

Последнее равенство следует из теоремы Фалеса ($XH \parallel BP$). Но отношение AX/XB не зависит от выбора точки P, так как определяется лишь точкой X.

3. Решите уравнение

$$2(x-6) = \frac{x^2}{\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2}.$$

Решение 1. Перепишем уравнение в виде $2(x-6)\left(1+\sqrt{x+1}\right)^2 = x^2$ и сделаем замену $\sqrt{x+1} = y$. Тогда $x = y^2 - 1$ и $y \ge 0$. После замены получим $2(y^2-7)(y+1)^2 = (y^2-1)^2$. Разложим правую часть на множители $(y+1)^2(y-1)^2$, перенес влево и вынесем $(y+1)^2$ за скобки. Получим $(y+1)^2(2y^2 - 14 - (y-1)^2) = (y+1)^2(y^2 + 2y - 15) = (y+1)^2(y-3)(y+5) = 0$. У этого уравнения есть три решения $y_1 = 3$, $y_2 = -1$, $y_3 = -5$. Последние два не удовлетворяют условию $y \ge 0$, следовательно, являются посторонними. Если $y = 3$, то $x = 8$. Очевидно, этот ответ подходит.

Решение 2. Преобразуем уравнение к виду

$$2(x-6)\left(x+2+2\sqrt{x+1}\right) - x^2 = 0$$

и обозначим выражение в левой части за $f(x)$. Имеем

$$f(x) = 2x^2 - 8x - 24 + 4(x-6)\sqrt{x+1} - x^2 = x^2 - 8x - 24 + 4(x-6)\sqrt{x+1}.$$

Нам требуется решить уравнение $f(x) = 0$. Ясно, что все корни этого уравнения удовлетворяют условию $x > 6$ (иначе левая часть исходного уравнения неположительна, а правая – положительна). Найдем производную $f'(x)$:

$$f'(x) = (2x-8) + 4\sqrt{x+1} + \frac{2(x-6)}{\sqrt{x+1}}.$$

Ясно, что при $x > 6$ каждое слагаемое в последней сумме неотрицательно. Отсюда следует, что функция $f(x)$ возрастает на интервале $(6, +\infty)$. Поэтому уравнение $f(x) = 0$ может иметь не больше одного решения. Одно решение $x = 8$ легко найти подбором.

4. Известно, что a– нечетное целое число, а x_1и x_2–корни уравнения $x^2 + ax - 1 = 0$. Доказать, что при любом целом $n \geq 0$числа$x_1^n + x_2^n$и$x_1^{n+1} + x_2^{n+1}$–целые и взаимно простые.

Решение.Введем обозначение $x_1^n + x_2^n = A_n$.При $n = 0$ имеем: $A_0 = 2, A_1 = -a$–целые и взаимно простые числа. Далее, по теореме Виета, $x_1 + x_2 = -a, x_1 x_2 = -1$.Отсюда $-aA_n = (x_1 + x_2)(x_1^n + x_2^n) = x_1^{n+1} + x_2^{n+1} + x_2 x_1^n + x_1 x_2^n = A_{n+1} + x_1 x_2 A_{n-1}$.Следовательно, $A_{n+1} = -A_{n-1} - aA_n$ –целое число, если A_{n-1}и aA_n– целые. Покажем, что все числа $A_0, A_1, A_2, \ldots$– взаимно простые. Предположим, что A_{n+1}иA_nимеют общий ненулевой множитель m. Тогда это же число m должно быть и общим множителем чисел A_{n-1} и A_nи так далее. Но числа A_0иA_1 взаимно просты.