

УДК 532.54

ТЕЧЕНИЕ ЖИДКОСТИ МЕЖДУ НЕКОНЦЕНТРИЧЕСКИМИ СФЕРАМИ, СОВЕРШАЮЩИМИ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ ВРАЩЕНИЕ

В.В. Новиков, Л.Н. Февральских

*Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского,
г. Нижний Новгород, 603950, Россия*

Аннотация

Рассмотрено движение вязкой несжимаемой жидкости между двумя неконцентрическими сферами, вращающимися с различными угловыми скоростями. Оси вращения сферических поверхностей параллельны и удалены друг от друга на малое расстояние. Для решения задачи использован аппарат шаровых векторов. Показано, что при данной постановке в системе наблюдается радиальное течение жидкости.

Ключевые слова: неконцентрические сферы, ламинарное течение, вязкая жидкость, дифференциальное вращение, неосесимметричные потоки, радиальное течение

В работе [1] рассмотрена система двух соосно-вращающихся эллипсоидальных тел, одно из которых находится в сферической полости другого. Пространство между телами заполнено вязкой несжимаемой жидкостью. В [1] показана возможность опережающего вращения внутреннего тела и дано объяснение долгопериодических вариаций длительности суток. В рамках этой модели изучено течение жидкости между поверхностями [2]. В частности, установлено, что данная модель допускает возможность радиального течения. При этом наблюдается некоторое сходство в поведении рассмотренных в [2] течений и магнитного поля Земли.

В настоящей работе изучена задача о движении жидкости между вращающимися сферами, причем центр симметрии внутренней сферы сдвинут относительно центра внешней на малое расстояние, что отвечает современным представлениям о внутреннем строении Земли. Известно [3], что твердое ядро испытывает малые смещения на расстояние 5–15 км относительно геоцентра. Предложенная модель позволяет учесть радиальное течение, с наличием которого связывают существование магнитного поля.

Рассмотрим движение однородной несжимаемой вязкой жидкости, заполняющей пространство между двумя вращающимися сферическими поверхностями. Внутренняя сфера радиуса r_1 с центром в точке O_1 вращается с постоянной угловой скоростью ω_1 относительно оси O_1z_1 неподвижной системы $O_1x_1y_1z_1$, а внешняя сфера радиуса r_2 с центром в точке O_2 – с постоянной скоростью ω_2 относительно O_2z_2 неподвижной системы $O_2x_2y_2z_2$. Оси вращения O_1z_1 и O_2z_2 удалены друг от друга на малое расстояние δ_x ($\delta_x \ll 1$), а оси O_1x_1 и O_2x_2 – на малое расстояние δ_z ($\delta_z \ll 1$) таким образом, что центр O_1 в системе $O_2x_2y_2z_2$ имеет координаты $O_1(\delta_x, 0, \delta_z)$ (рис. 1).

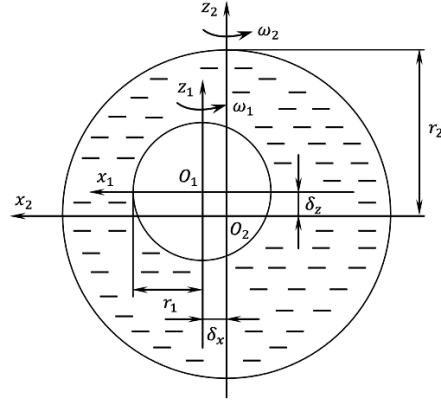


Рис. 1. Модель течения жидкости между вращающимися сферическими поверхностями

Для описания движения жидкости будем использовать сферическую систему координат, согласованную с системой $O_2x_2y_2z_2$. Тогда переход от декартовых координат (x_1, y_1, z_1) к сферическим (r, θ, φ) осуществляется преобразованием:

$$x_1 = x_2 - \delta_x = r \sin \theta \cos \varphi - \delta_x, \quad y_1 = y_2 = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z_1 = z_2 - \delta_z = r \cos \theta - \delta_z.$$

Уравнение внутренней поверхности в сферической системе координат с точностью до членов первого порядка по δ_x, δ_z есть $r = r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta$.

В предположении малости числа Рейнольдса

$$\frac{\omega_1 r_1^2}{\nu} \ll 1, \quad \frac{\omega_2 r_2^2}{\nu} \ll 1,$$

где ν – кинематическая вязкость жидкости, уравнение Навье – Стокса можно упростить. Нелинейную составляющую силы инерции $|(\mathbf{v}, \nabla)\mathbf{v}| \ll 1$ не будем принимать в расчет, считая течение ламинарным. В стационарном случае уравнение движения жидкости имеет вид

$$-\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \mathbf{v} = 0, \quad (1)$$

где p – давление, ρ – плотность жидкости.

Применив к (1) операцию rot , приходим к уравнению

$$\text{rot} \Delta \mathbf{v} = 0. \quad (2)$$

Скорость течения жидкости должна удовлетворять уравнению неразрывности

$$\text{div} \mathbf{v} = 0. \quad (3)$$

Условия прилипания жидкости к ограничивающим ее поверхностям имеют вид:
1) на внутренней поверхности

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta, \theta, \varphi) &= \\ &= [\omega_1, \mathbf{r}_1] = [\omega_1 \mathbf{e}_z, x_1 \mathbf{e}_x + y_1 \mathbf{e}_y] = \omega_1 (x_1 \mathbf{e}_y - y_1 \mathbf{e}_x) = \\ &= \omega_1 ([r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta] \sin \theta \cos \varphi - \delta_x) \times \\ &\times (\sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + \cos \varphi \mathbf{e}_\varphi) - \omega_1 [r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta] \sin \theta \sin \varphi \times \\ &\times (\sin \theta \cos \varphi \mathbf{e}_r + \cos \theta \cos \varphi \mathbf{e}_\theta - \sin \varphi \mathbf{e}_\varphi) = \omega_1 (-\delta_x \sin \theta \sin \varphi \mathbf{e}_r - \delta_x \cos \theta \sin \varphi \mathbf{e}_\theta + \\ &+ (r_1 \sin \theta - \delta_x \cos^2 \theta \cos \varphi + \delta_z \sin \theta \cos \theta) \mathbf{e}_\varphi); \quad (4) \end{aligned}$$

2) на внешней поверхности

$$\mathbf{v}(r_2, \theta, \varphi) = [\boldsymbol{\omega}_2, \mathbf{r}_2] = [\omega_2 \mathbf{e}_z, x_2 \mathbf{e}_x + y_2 \mathbf{e}_y] = \omega_2 r_2 \sin \theta \mathbf{e}_\varphi. \quad (5)$$

Представим вектор скорости \mathbf{v} в виде ряда по малым параметрам δ_x, δ_z , ограничившись первым приближением:

$$\mathbf{v}(r, \theta, \varphi) = \mathbf{v}_0(r, \theta, \varphi) + \delta_x \mathbf{v}_1(r, \theta, \varphi) + \delta_z \mathbf{v}_2(r, \theta, \varphi).$$

В силу однородности уравнений (2), (3) каждый из векторов $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ также удовлетворяет этим уравнениям.

При решении задачи (2), (3) с соответствующими граничными условиями относительно $\mathbf{v}_0, \mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ удобно использовать аппарат шаровых векторов [4].

Шаровыми векторами называют полную систему линейно независимых вектор-функций

$$\begin{aligned} \mathbf{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) &= (l+1)Y_{lm}(\theta, \varphi)\mathbf{e}_r - \text{grad } Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad l = 0, 1, 2, \dots, \\ \mathbf{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi) &= lY_{lm}(\theta, \varphi)\mathbf{e}_r + \text{grad } Y_{lm}(\theta, \varphi), \quad l = 1, 2, \dots, \\ \mathbf{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) &= [\mathbf{e}_r, \text{grad } Y_{lm}(\theta, \varphi)], \quad l = 1, 2, \dots, \end{aligned}$$

где $Y_{lm}(\theta, \varphi)$ – сферические функции.

Разложим скорость жидкости на границах (4), (5) в ряд по шаровым векторам:

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta, \theta, \varphi) &= -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}} \omega_1 r_1 \mathbf{Y}_{10}^0 - \\ &\quad - \frac{1}{3} i \omega_1 \sqrt{\pi} \delta_x (\mathbf{Y}_{11}^+ + \mathbf{Y}_{1,-1}^+) - \frac{2}{3} i \omega_1 \sqrt{2\pi} \delta_x (\mathbf{Y}_{11}^- + \mathbf{Y}_{1,-1}^-) + \\ &\quad + \frac{\sqrt{\pi}}{\sqrt{5}} \omega_1 \delta_x (\mathbf{Y}_{21}^0 - \mathbf{Y}_{2,-1}^0) - \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{15}} \omega_1 \delta_z \mathbf{Y}_{20}^0, \quad \mathbf{v}(r_2, \theta, \varphi) = -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}} \omega_2 r_2 \mathbf{Y}_{10}^0. \end{aligned} \quad (6)$$

Решение уравнений (2), (3) ищем в виде ряда

$$\mathbf{v}(r, \theta, \varphi) = \sum_{l=0, |m| \leq l} (K_{lm}(r) \mathbf{Y}_{lm}^0(\theta, \varphi) + P_{lm}(r) \mathbf{Y}_{lm}^+(\theta, \varphi) + M_{lm}(r) \mathbf{Y}_{lm}^-(\theta, \varphi)). \quad (7)$$

Подстановка (7) в уравнения (2), (3) и последующая группировка выражений при шаровых векторах с одинаковыми индексами позволяет свести уравнения (2), (3) в частных производных к системе обыкновенных дифференциальных уравнений для скалярных радиальных функций $K_{lm}(r), P_{lm}(r), M_{lm}(r)$

$$\begin{aligned} M_{lm}''' - P_{lm}''' - \frac{l-3}{r} M_{lm}'' - \frac{l+4}{r} P_{lm}'' - \\ - \frac{l(l+1)}{r^2} (M_{lm}' - P_{lm}') + \frac{l(l+1)}{r^3} ((l-1)M_{lm} + (l+2)P_{lm}) = 0, \\ K_{lm}''' - \frac{l-2}{r} K_{lm}'' - \frac{(l+1)(l+2)}{r^2} K_{lm}' + \frac{l(l+1)(l+2)}{r^3} K_{lm} = 0, \\ K_{lm}''' + \frac{l+3}{r} K_{lm}'' - \frac{l(l-1)}{r^2} K_{lm}' - \frac{l(l-1)(l+1)}{r^3} K_{lm} = 0, \\ lM_{lm}' + (l+1)P_{lm}' - \frac{l(l-1)}{r} M_{lm} + \frac{(l+1)(l+2)}{r} P_{lm} = 0. \end{aligned}$$

В силу однородности уравнений и вида граничных условий (6) в ряде (7) будут присутствовать только вектора, вошедшие в (6).

Для искомых радиальных функций, отличных от нуля, получим систему

$$\begin{aligned}
M_{1m}''' - P_{1m}''' + \frac{2}{r}M_{1m}'' - \frac{5}{r}P_{1m}'' - \frac{2}{r^2}(M_{1m}' - P_{1m}') + \frac{6}{r^3}P_{1m} &= 0, \\
K_{1m}''' + \frac{1}{r}K_{1m}'' - \frac{6}{r^2}K_{1m}' + \frac{6}{r^3}K_{1m} &= 0, \\
K_{1m}''' + \frac{4}{r}K_{1m}'' &= 0, \\
M_{1m}' + 2P_{1m}' + \frac{6}{r}P_{1m} &= 0. \\
M_{2m}''' - P_{2m}''' + \frac{1}{r}M_{2m}'' - \frac{6}{r}P_{2m}'' - \frac{6}{r^2}(M_{2m}' - P_{2m}') + \frac{6}{r^3}(M_{2m} + 4P_{2m}) &= 0, \\
K_{2m}''' - \frac{12}{r^2}K_{2m}' + \frac{24}{r^3}K_{2m} &= 0, \\
K_{2m}''' + \frac{5}{r}K_{2m}'' - \frac{2}{r^2}K_{2m}' - \frac{6}{r^3}K_{2m} &= 0, \\
2M_{2m}' + 3P_{2m}' - \frac{2}{r}M_{2m} + \frac{12}{r}P_{2m} &= 0.
\end{aligned}$$

Решение этой системы имеет вид

$$\begin{aligned}
P_{1m}(r) &= -C_2r^2 + \frac{C_3}{r} + \frac{C_4}{r^3}, \quad M_{1m}(r) = C_1 + 5C_2r^2 + \frac{4C_3}{r}, \\
K_{1m}(r) &= C_5r + \frac{C_6}{r^2}, \\
P_{2m}(r) &= -\frac{4}{21}D_2r^3 + \frac{D_4}{r^2} + \frac{D_1}{r^4}, \quad M_{2m}(r) = D_2r^3 + D_3r + \frac{D_4}{r^2}, \\
K_{2m}(r) &= D_5r^2 + \frac{D_6}{r^3}, \\
m &= 0, \pm 1.
\end{aligned} \tag{8}$$

Векторы \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 удовлетворяют уравнениям (2), (3) и могут быть найдены с использованием представления (7), а радиальные функции, входящие в \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , имеют вид (8). Произвольные постоянные $C_i, D_i, i = 1, \dots, 6$ определяются из граничных условий. Сформируем условия на границе и решим последовательно задачи для векторов \mathbf{v}_0 , \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 .

Начальное приближение $\mathbf{v}_0(r, \theta, \varphi)$, соответствующее скорости жидкости между двумя соосно-вращающимися концентрическими сферами ($\delta_x = \delta_z = 0$), должно удовлетворять граничным условиям

$$\mathbf{v}_0(r_1, \theta, \varphi) = -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}\omega_1r_1\mathbf{Y}_{10}^0, \quad \mathbf{v}_0(r_2, \theta, \varphi) = -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}\omega_2r_2\mathbf{Y}_{10}^0.$$

Отсюда следует, что в \mathbf{v}_0 войдет лишь составляющая $K_{10}(r)\mathbf{Y}_{10}^0$. Условия, накладываемые на радиальную функцию $K_{10}(r)$:

$$K_{10}(r_1) = -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}\omega_1r_1, \quad K_{10}(r_2) = -\frac{4\sqrt{\pi}}{\sqrt{6}}\omega_2r_2,$$

позволяют определить произвольные постоянные, входящие в $K_{10}(r)$:

$$C_5 = -\frac{2}{3} \frac{\sqrt{6\pi}(\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3)}{r_2^3 - r_1^3}, \quad C_6 = -\frac{2}{3} \frac{\sqrt{6\pi} r_1^3 r_2^3 (\omega_1 - \omega_2)}{r_2^3 - r_1^3}.$$

Таким образом, получаем выражение для скорости жидкости, не зависящей от сдвигов δ_x , δ_z :

$$\mathbf{v}_0 = -\frac{2}{3} \frac{\sqrt{6\pi}}{r_2^3 - r_1^3} \left((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3) r + \frac{r_1^3 r_2^3 (\omega_1 - \omega_2)}{r^2} \right) \mathbf{Y}_{10}^0.$$

Определим составляющие \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 , содержащую члены, пропорциональные сдвигам. С точностью до членов первого порядка малости граничное условие на внутренней (сдвинутой) сфере может быть записано в виде

$$\mathbf{v}(r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta, \theta, \varphi) = \mathbf{v}_0(r_1, \theta, \varphi) + \delta_x (\mathbf{v}_{01}(r_1, \theta, \varphi) + \mathbf{v}_1(r_1, \theta, \varphi)) + \delta_z (\mathbf{v}_{02}(r_1, \theta, \varphi) + \mathbf{v}_2(r_1, \theta, \varphi)), \quad (9)$$

где $\mathbf{v}_{01}(r_1, \theta, \varphi)$, $\mathbf{v}_{02}(r_1, \theta, \varphi)$ – выражения при δ_x , δ_z , полученные после подстановки в $\mathbf{v}_0(r, \theta, \varphi)$ $r = r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta$, граничное условие на внешней сфере:

$$\mathbf{v}(r_2, \theta, \varphi) = \mathbf{v}_0(r_2, \theta, \varphi) + \delta_x \mathbf{v}_1(r_2, \theta, \varphi) + \delta_z \mathbf{v}_2(r_2, \theta, \varphi).$$

В формуле для вектора \mathbf{v}_0 на внутренней сфере выделим выражения $\mathbf{v}_{01}(r_1, \theta, \varphi)$, $\mathbf{v}_{02}(r_1, \theta, \varphi)$ при малых параметрах δ_x , δ_z :

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_0(r_1 + \delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta, \theta, \varphi) &= \\ &= \mathbf{v}_0(r_1, \theta, \varphi) - \frac{2}{3} \frac{\sqrt{6\pi}}{r_2^3 - r_1^3} ((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3) - 2r_2^3 (\omega_1 - \omega_2)) \mathbf{Y}_{10}^0 (\delta_x \sin \theta \cos \varphi + \delta_z \cos \theta) = \\ &= \mathbf{v}_0(r_1, \theta, \varphi) - \xi_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \delta_x \left[\frac{1}{3\sqrt{2}} i(\mathbf{Y}_{11}^+ + \mathbf{Y}_{1,-1}^+) - \frac{1}{3} i(\mathbf{Y}_{11}^- + \mathbf{Y}_{1,-1}^-) - \frac{1}{\sqrt{10}} (\mathbf{Y}_{21}^0 - \mathbf{Y}_{2,-1}^0) \right] - \\ &\quad - 2\xi_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \delta_z \mathbf{Y}_{20}^0 = \mathbf{v}_0(r_1, \theta, \varphi) + \delta_x \mathbf{v}_{01}(r_1, \theta, \varphi) + \delta_z \mathbf{v}_{02}(r_1, \theta, \varphi), \end{aligned}$$

где

$$\xi_0 = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} ((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3) - 2r_2^3 (\omega_1 - \omega_2)).$$

При построении граничных условий для векторов \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 на внутренней сфере учтем, что вклад, пропорциональный сдвигам, в выражение для скорости жидкости также вносит вектор \mathbf{v}_0 . Приравнявая члены, вошедшие в граничное условие (6), при сдвиговых параметрах δ_x и δ_z , выражениям $\mathbf{v}_1(r_1, \theta, \varphi) + \mathbf{v}_{01}(r_1, \theta, \varphi)$ и $\mathbf{v}_2(r_1, \theta, \varphi) + \mathbf{v}_{02}(r_1, \theta, \varphi)$ соответственно получим

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_1(r_1, \theta, \varphi) - \xi_0 \sqrt{\frac{\pi}{2}} \left[\frac{1}{3\sqrt{2}} i(\mathbf{Y}_{11}^+ + \mathbf{Y}_{1,-1}^+) - \frac{1}{3} i(\mathbf{Y}_{11}^- + \mathbf{Y}_{1,-1}^-) - \frac{1}{\sqrt{10}} (\mathbf{Y}_{21}^0 - \mathbf{Y}_{2,-1}^0) \right] - \\ = \sqrt{\pi} \omega_1 \left[-\frac{1}{3} i(\mathbf{Y}_{11}^+ + \mathbf{Y}_{1,-1}^+) - \frac{2\sqrt{2}}{3} i(\mathbf{Y}_{11}^- + \mathbf{Y}_{1,-1}^-) + \frac{1}{\sqrt{5}} (\mathbf{Y}_{21}^0 - \mathbf{Y}_{2,-1}^0) \right], \\ \mathbf{v}_2(r_1, \theta, \varphi) - 2\xi_0 \sqrt{\frac{2\pi}{15}} \mathbf{Y}_{20}^0 = -\frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{15}} \omega_1 \mathbf{Y}_{20}^0. \end{aligned}$$

Так как скорость жидкости на внешней сфере не зависит от параметров δ_x , δ_z , то

$$\mathbf{v}_1(r_2, \theta, \varphi) = 0, \quad \mathbf{v}_2(r_2, \theta, \varphi) = 0.$$

В формулах для составляющих \mathbf{v}_1 , \mathbf{v}_2 будут присутствовать только те шаровые векторы, которые вошли в условия на границе. Сформируем граничные условия для соответствующих радиальных функций, входящих в \mathbf{v}_1 :

$$M_{1,\pm 1}(r_1) = -\frac{1}{3} i(\xi_0 + 2\omega_1)\sqrt{2\pi}, \quad P_{1,\pm 1}(r_1) = \frac{1}{3} i(\xi_0 - \omega_1)\sqrt{\pi},$$

$$P_{1,\pm 1}(r_2) = M_{1,\pm 1}(r_2) = 0, \quad K_{2,\pm 1}(r_1) = \mp \sqrt{\frac{\pi}{5}} (\xi_0 - \omega_1), \quad K_{2,\pm 1}(r_2) = 0.$$

Граничные условия для ненулевой радиальной функции вектора \mathbf{v}_2 :

$$K_{20}(r_1) = \frac{2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{15}} (\xi_0 - \omega_1), \quad K_{20}(r_2) = 0.$$

Введем обозначения

$$\xi_1 = \sqrt{2}(\xi_0 + 2\omega_1), \quad \xi_2 = \xi_0 - \omega_1,$$

$$Q_1 = \frac{1}{(r_2 - r_1)^4(4r_1^2 + 7r_1r_2 + 4r_2^2)}, \quad Q_2 = \frac{r_1^3}{r_2^5 - r_1^5}.$$

Произвольные постоянные, входящие в радиальные функции вектора \mathbf{v}_1 с индексами l , m имеют следующий вид:

при $l = 1$, $m = \pm 1$

$$C_1 = \frac{1}{3} \sqrt{\pi} i Q_1 r_1 [4(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5(\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2 r_2^3 + 9\xi_1 r_2^5],$$

$$C_2 = -\frac{1}{3} \sqrt{\pi} i Q_1 r_1 [4\xi_2 r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2 r_2 + \xi_1 r_2^3],$$

$$C_3 = -\frac{1}{3} \sqrt{\pi} i Q_1 r_1 r_2 [(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5\xi_2 r_1^3 r_2^2 + \xi_1 r_2^5],$$

$$C_4 = \frac{1}{3} \sqrt{\pi} i Q_1 r_1^3 r_2^3 [(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^3 - 9\xi_2 r_1 r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2)r_2^3],$$

при $l = 2$, $m = \pm 1$

$$D_5 = \pm \sqrt{\frac{\pi}{5}} Q_2 \xi_2, \quad D_6 = \mp \sqrt{\frac{\pi}{5}} Q_2 \xi_2 r_2^5.$$

Произвольные постоянные для радиальной функции вектора \mathbf{v}_2 при $l = 2$, $m = 0$ есть

$$D_5 = -\frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \sqrt{\pi} Q_2 \xi_2, \quad D_6 = \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \sqrt{\pi} Q_2 \xi_2 r_2^5.$$

Таким образом, для скорости жидкости в рассматриваемом приближении получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(r, \theta, \varphi) &= \mathbf{v}_0(r, \theta, \varphi) + \delta_x \mathbf{v}_1(r, \theta, \varphi) + \delta_z \mathbf{v}_2(r, \theta, \varphi) = \\ &= -\frac{2}{3} \frac{\sqrt{6\pi}}{r_2^3 - r_1^3} \left((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3) r + \frac{r_1^3 r_2^3 (\omega_1 - \omega_2)}{r^2} \right) \mathbf{Y}_{10}^0 + \\ &+ \frac{1}{3} \sqrt{\pi} i Q_1 \delta_x \left[r_1 [4\xi_2 r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2)r_1^2 r_2 + \xi_1 r_2^3] r^2 - \frac{r_1 r_2 [(-\xi_1 + 5\xi_2)r_1^5 - 5\xi_2 r_1^3 r_2^2 + \xi_1 r_2^5]}{r} \right] + \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{r_1^3 r_2^3 [4\xi_1 r_1^3 - 9\xi_2 r_1 r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2) r_2^3]}{r^3} \left] (\mathbf{Y}_{11}^+ + \mathbf{Y}_{1,-1}^+) + \right. \\
 & + \frac{1}{3} \sqrt{\pi} i Q_1 \delta_x \left[r_1 [4(-\xi_1 + 5\xi_2) r_1^5 - 5(\xi_1 + 4\xi_2) r_1^2 r_2^3 + 9\xi_1 r_2^5] - 5r_1 [4\xi_2 r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2) r_1^2 r_2 + \xi_1 r_2^3] r^2 - \right. \\
 & \quad \left. - \frac{4r_1 r_2 [(-\xi_1 + 5\xi_2) r_1^5 - 5\xi_2 r_1^3 r_2^2 + \xi_1 r_2^5]}{r} \right] (\mathbf{Y}_{11}^- + \mathbf{Y}_{1,-1}^-) - \\
 & + \frac{r_1^3 r_2^3 [4\xi_1 r_1^3 - 9\xi_2 r_1 r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2) r_2^3]}{r^3} \left] (\mathbf{Y}_{11}^+ + \mathbf{Y}_{1,-1}^+) - \frac{2\sqrt{2}}{\sqrt{15}} \sqrt{\pi} Q_2 \delta_z \xi_2 \left(r^2 - \frac{r_2^5}{r^3} \right) \mathbf{Y}_{20}^0 + \right. \\
 & \quad \left. + \sqrt{\frac{\pi}{5}} Q_2 \delta_x \xi_2 \left(r^2 - \frac{r_2^5}{r^3} \right) (\mathbf{Y}_{21}^0 + \mathbf{Y}_{2,-1}^0). \right.
 \end{aligned}$$

Выделим компоненты вектора скорости в сферической системе координат:

$$\begin{aligned}
 v_r = \frac{1}{6} Q_1 \delta_x \left[\sqrt{2} r_1 [4(-\xi_1 + 5\xi_2) r_1^5 - 5(\xi_1 + 4\xi_2) r_1^2 r_2^3 + 9\xi_1 r_2^5] + \right. \\
 \quad + (2 - 5\sqrt{2}) r_1 [4\xi_2 r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2) r_1^2 r_2 + \xi_1 r_2^3] r^2 - \\
 \quad - 2(1 + 2\sqrt{2}) \frac{r_1 r_2 [(-\xi_1 + 5\xi_2) r_1^5 - 5\xi_2 r_1^3 r_2^2 + \xi_1 r_2^5]}{r} + \\
 \quad \left. + \frac{2r_1^3 r_2^3 [4\xi_1 r_1^3 - 9\xi_2 r_1 r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2) r_2^3]}{r^3} \right] \sin \theta \sin \varphi;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_\theta = -\frac{1}{6} \delta_x \left[-Q_1 \sqrt{2} r_1 [4(-\xi_1 + 5\xi_2) r_1^5 - 5(\xi_1 + 4\xi_2) r_1^2 r_2^3 + 9\xi_1 r_2^5] + \right. \\
 \quad + (Q_1 (1 + 5\sqrt{2}) r_1 [4\xi_2 r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2) r_1^2 r_2 + \xi_1 r_2^3] + 3Q_2 \xi_2) r^2 + \\
 \quad + (4\sqrt{2} - 1) Q_1 \frac{r_1 r_2 [(-\xi_1 + 5\xi_2) r_1^5 - 5\xi_2 r_1^3 r_2^2 + \xi_1 r_2^5]}{r} + \\
 \quad \left. + (Q_1 r_1^3 r_2^3 [4\xi_1 r_1^3 - 9\xi_2 r_1 r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2) r_2^3] - 3Q_2 \xi_2 r_2^5) \frac{1}{r^3} \right] \cos \theta \sin \varphi;
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v_\varphi = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3) r + \frac{r_1^3 r_2^3 (\omega_1 - \omega_2)}{r^2} \right) \sin \theta - \\
 - \frac{1}{6} \delta_x \left[-Q_1 \sqrt{2} r_1 [4(-\xi_1 + 5\xi_2) r_1^5 - 5(\xi_1 + 4\xi_2) r_1^2 r_2^3 + 9\xi_1 r_2^5] + \right. \\
 \quad + (Q_1 (1 + 5\sqrt{2}) r_1 [4\xi_2 r_1^3 - (\xi_1 + 4\xi_2) r_1^2 r_2 + \xi_1 r_2^3] + 3Q_2 \xi_2 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) r^2 + \\
 \quad + (4\sqrt{2} - 1) Q_1 \frac{r_1 r_2 [(-\xi_1 + 5\xi_2) r_1^5 - 5\xi_2 r_1^3 r_2^2 + \xi_1 r_2^5]}{r} + \\
 \quad \left. + (Q_1 r_1^3 r_2^3 [4\xi_1 r_1^3 - 9\xi_2 r_1 r_2^2 + (\xi_1 + 4\xi_2) r_2^3] - 3Q_2 \xi_2 r_2^5 (\cos^2 \theta - \sin^2 \theta)) \frac{1}{r^3} \right] \cos \varphi + \\
 \quad + \sqrt{2} Q_2 \delta_z \xi_2 \left(r^2 - \frac{r_2^5}{r^3} \right) \sin \theta \cos \theta.
 \end{aligned}$$

Рассмотрим несколько частных случаев поведения вязкой жидкости.

В случае концентрических сфер ($\delta_x = \delta_z = 0$), вращающихся с одинаковой угловой скоростью $\omega_1 = \omega_2 = \omega$, жидкость между ними вращается как твердое тело:

$$\mathbf{v} = \omega r \sin \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

При вращении концентрических сфер вокруг одной оси с различными угловыми скоростями линии тока образуют замкнутые кривые, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения, а значит,

$$\mathbf{v} = \mathbf{v}_0 = \frac{1}{r_2^3 - r_1^3} \left((\omega_2 r_2^3 - \omega_1 r_1^3) r + \frac{r_1^3 r_2^3 (\omega_1 - \omega_2)}{r^2} \right) \sin \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

В частности, при опережающем вращении внутренней поверхности относительно внешней частицы жидкости будут двигаться быстрее вблизи внутренней сферы и медленнее вблизи внешней.

Сдвиг внутренней сферы относительно внешней вдоль общей оси вращения приводит к добавлению в формулу для \mathbf{v}_0 слагаемого

$$\sqrt{2} Q_2 \delta_z \xi_2 \left(r^2 - \frac{r_2^5}{r^3} \right) \sin \theta \cos \theta \mathbf{e}_\varphi.$$

Это не приводит к осевой асимметрии потока и качественному изменению траекторий частиц.

В случае сдвига внутренней сферы относительно внешней в направлении, перпендикулярном осям вращения тел, возникает радиальное течение со скоростью v_r . Ненулевой становится также компонента v_θ .

На рис. 2 изображены линии тока при $\delta_x > 0$, $\delta_z = 0$ с учетом опережающего вращения внутренней поверхности ($\omega_1 > \omega_2$). Как и в предыдущих случаях, вблизи внешней сферы линии тока образуют замкнутые кривые, лежащие в плоскостях, перпендикулярных оси вращения. При удалении от внешней сферы линии тока «поворачиваются», образуя с осью $O_2 x_2$ малый угол. Вблизи полюсов внутренней поверхности линии тока «выравниваются», располагаясь параллельно плоскости $O_2 x_2 y_2$. Внутри полости между сферами существуют траектории, отделяющие круговые потоки жидкости от линий, берущих свое начало на внутренней сфере и входящих в нее. При этом из-за близости незамкнутых траекторий к внутренней поверхности движущиеся вдоль них частицы жидкости имеют большую скорость, чем частицы на ближайших замкнутых линиях тока. Кроме того, траектории, начинающиеся и заканчивающиеся на внутренней сфере, имеют заметные искривления.

Интерес представляет распределение скоростей без составляющей \mathbf{v}_0 , отвечающей круговым потокам жидкости. На рис. 3 представлены линии, образованные полем скоростей $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$. Условно их можно разделить на три типа: линии, соприкасающиеся с внешней сферой, линии с началом и концом на внутренней сфере и замкнутые линии, расположенные внутри пространства между сферами. Каждая линия поля $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ лежит в определенной полуплоскости с границей вдоль оси $O_2 y_2$. Области, содержащие замкнутые линии, уменьшаются при повороте полуплоскости относительно $O_2 y_2$ от $\{\theta = \pi/2, \pi/2 < \varphi < 3\pi/2\}$ к $\{\theta = \pi/2, -\pi/2 < \varphi < \pi/2\}$, в которой замкнутые линии отсутствуют.

Возникновение магнитного поля Земли связывают с конвекционными токами в жидком ядре [5], которые невозможны без радиальной составляющей скорости. Рассмотренная модель допускает возможность радиального течения в случае смещения внутренней ограничивающей поверхности относительно внешней в направлении, перпендикулярном осям вращения тел. Наличие замкнутых траекторий векторного поля $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ представляет интерес при изучении конвекционных течений. На рис. 4, 5 изображены линии векторного поля $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ в двух взаимно перпендикулярных сечениях плоскостями $O_2 x_2 z_2$ и $O_2 x_2 y_2$ с указанием направлений движения. Видно, что сдвиг внутренней сферы в плоскости, перпендикулярной оси вращения, приводит к появлению в каждом из рассматриваемых сечений двух

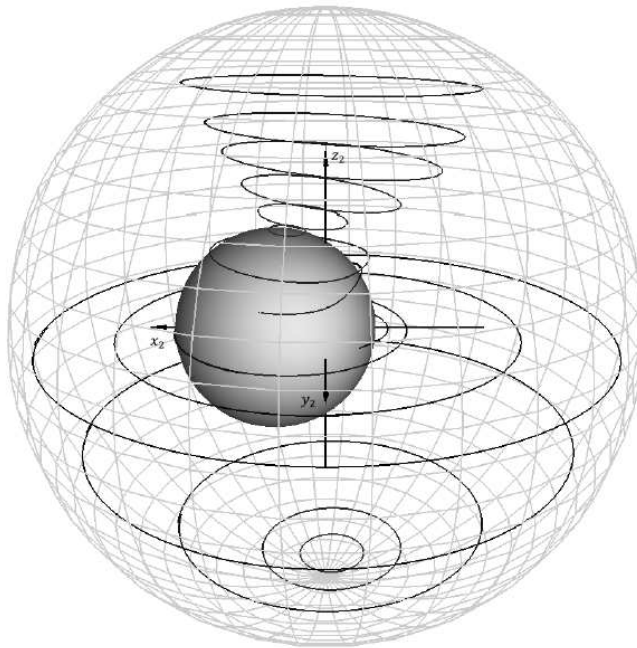


Рис. 2. Линии тока жидкости между двумя сферическими поверхностями при $\delta_x > 0$, $\delta_z = 0$ с учетом опережающего вращения внутренней поверхности ($\omega_1 > \omega_2$)

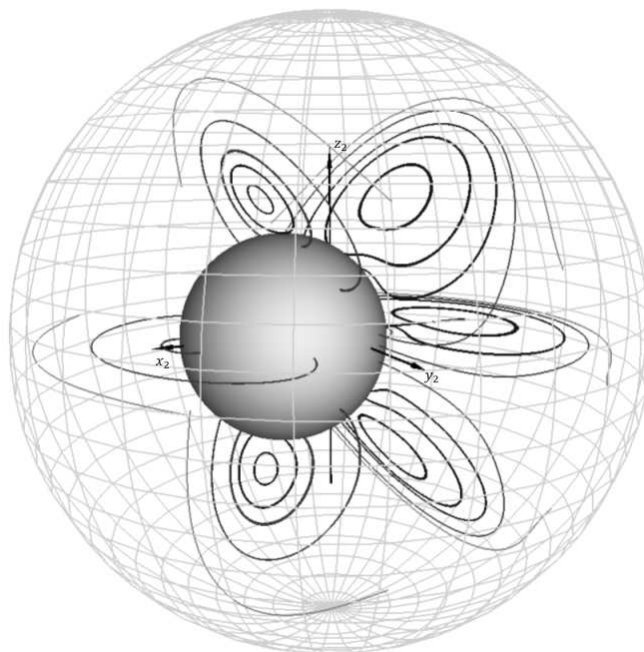


Рис. 3. Линии векторного поля скоростей $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ при $\delta_x > 0$, $\delta_z = 0$ с учетом опережающего вращения внутренней поверхности ($\omega_1 > \omega_2$)

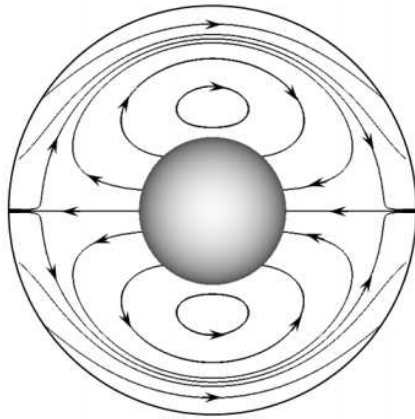


Рис. 4. Линии векторного поля $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ в сечении плоскостью $O_2 x_2 z_2$

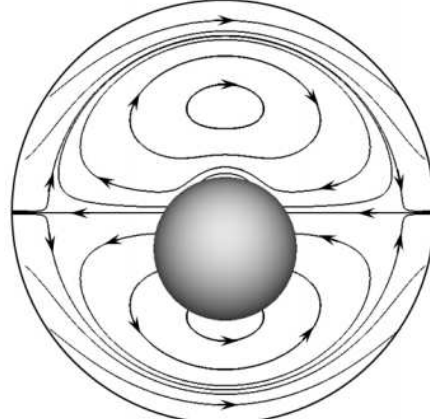


Рис. 5. Линии векторного поля $\mathbf{v} - \mathbf{v}_0$ в сечении плоскостью $O_2 x_2 y_2$

ячеек. К примеру, в экваториальной плоскости (сечение плоскостью $O_2 x_2 y_2$) вещество поднимается из центра O_2 к внешней границе вдоль радиуса, затем совершает движение вблизи поверхности вдоль экватора, стремясь к противоположному направлению подъема вещества. Обогнув полушарие, вещество возвращается к центру O_2 . Совершенствование данной модели может выявить другие более сложные режимы течения вязкой жидкости.

Отметим, что рассматриваемая задача решена в предположении ламинарности течения жидкости. Оценка числа Рейнольдса по средней вязкости жидкого ядра и угловой скорости вращения твердого ядра относительно мантии дает значения $Re \sim 10^3 - 10^4$ [6]. Эти значения числа Рейнольдса характеризуют режим движения жидкости как промежуточный между ламинарным и турбулентным. Тем не менее это не исключает возможность наличия обнаруженных особенностей течения в жидком ядре.

Благодарности. Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 15-01-08326) и финансовой поддержке Минобрнауки РФ в рамках проектной части государственного задания в сфере научной деятельности (проект № 1727).

Литература

1. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Федоров А.Е. Гравитационное взаимодействие твердого ядра с мантией Земли и вариации длительности суток // Астрон. журн. – 2008. – Т. 85, № 12. – С. 1143–1150.
2. Денисов Г.Г., Новиков В.В. О течении жидкости между вращающимися поверхностями // Прикл. механика и техн. физика. – 2011. – Т. 52, № 1. – С. 40–46.
3. Баркин Ю.В. К динамике твердого ядра Земли // Труды Гос. астрономического ин-та им. П.К. Штернберга. – 1996. – Т. LXV. – С. 136–145.
4. Петрашень Г.И. Динамические задачи теории упругости в случае изотропной сферы // Учен. зап. Ленинград. гос. ун-та. Сер. матем. наук. – 1945. – Вып. 17, № 114. – С. 2–27.
5. Каулинг Т. Магнитная гидродинамика / Пер. с англ. В.Г. Петрова. – М.: Атомиздат, 1978. – 144 с.

6. Денисов Г.Г., Новиков В.В., Федоров А.Е. Как твердое ядро Земли сутки изменяет // Природа. – 2013. – № 5. – С. 3–10.

Поступила в редакцию
16.02.16

Новиков Валерий Вячеславович, доктор физико-математических наук, профессор кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики; ведущий научный сотрудник

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия

Научно-исследовательский институт механики при ННГУ им. Н.И. Лобачевского
пр. Гагарина, д. 23, корп. 6, г. Нижний Новгород, 603950, Россия

E-mail: *vvmnovikov2007@yandex.ru*

Февральских Любовь Николаевна, аспирант кафедры теоретической, компьютерной и экспериментальной механики; младший научный сотрудник

Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского
пр. Гагарина, д. 23, г. Нижний Новгород, 603950, Россия

Научно-исследовательский институт механики при ННГУ им. Н.И. Лобачевского
пр. Гагарина, д. 23, корп. 6, г. Нижний Новгород, 603600, Россия

E-mail: *grigorieva_ln@mail.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 1, pp. 129–140

The Fluid Flow between Differentially Rotating Non-Concentric Spheres

*V.V. Novikov**, *L.N. Fevral'skikh***

N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,

Nizhny Novgorod, 603950 Russia

Research Institute for Mechanics, N.I. Lobachevsky State University of Nizhny Novgorod,

Nizhny Novgorod, 603600 Russia

E-mail: **vvmnovikov2007@yandex.ru*, ***grigorieva_ln@mail.ru*

Received September 22, 2015

Abstract

The motion of a viscous incompressible fluid between two non-concentric spheres, which rotate with different angular velocities, is considered. The axes of rotation of spherical surfaces are parallel and spaced apart by a small distance. A technique of spherical vectors is used to solve the problem. The radial fluid flow is observed in this formulation of the problem.

Keywords: non-concentric spheres, laminar flow, viscous liquid, differential rotation, non-axisymmetric flows, radial flow

Acknowledgments. This study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 15-01-08326) and the Ministry of Education and Science of the Russian Federation for the project part of the state assignment in the sphere of scientific activities (application no. 1727).

References

1. Denisov G.G., Novikov V.V., Fedorov A.E. Gravitational interactions of the solid core and the Earth's mantle and variations in the length of the day. *Astron. Rep.*, vol. 52, no. 12, pp. 1027–1034.
2. Denisov G.G., Novikov V.V. On fluid flow between rotating surfaces. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, vol. 52, no. 1, pp. 31–36.
3. Barkin Yu.V. On the Earth's inner core dynamics. *Tr. Gos. Astron. Inst. im. P. K. Sternberga*, 1996, vol. LXV, pp. 136–145. (In Russian)
4. Petrashen G.I. Dynamic problems of the theory of elasticity in the case of an isotropic sphere. *Uch. Zap. Leningr. Gos. Univ. Ser. Mat. Nauk*, 1945, vol. 17, no. 114, pp. 2–27. (In Russian)
5. Cowling T. Magnetic Hydrodynamics. Petrov V.G. (English Transl.). Moscow, Atomizdat, 1978. 144 p. (In Russian)
6. Denisov G.G., Novikov V.V., Fedorov A.E. How solid core of the Earth changes day duration. *Priroda*, 2013, no. 5, pp. 3–10. (In Russian)

Для цитирования: Новиков В.В., Февральских Л.Н. Течение жидкости между неконцентрическими сферами, совершающими дифференциальное вращение // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 129–140.

For citation: Novikov V.V., Fevral'skikh L.N. The fluid flow between differentially rotating non-concentric spheres. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 129–140. (In Russian)