

УДК 539.3

МЕТОД МНОГОСЕТОЧНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В РАСЧЕТАХ ТРЕХМЕРНЫХ ОДНОРОДНЫХ И КОМПОЗИТНЫХ ТЕЛ

А.Д. Матвеев

Институт вычислительного моделирования СО РАН, г. Красноярск, 660036, Россия

Аннотация

В работе предложен метод многосеточных конечных элементов для расчета упругих трехмерных однородных и композитных тел при статическом нагружении. Предлагаемый метод построен на основе алгоритмов метода конечных элементов с применением однородных и композитных трехмерных многосеточных конечных элементов (МнКЭ). Рассмотрены процедуры построения МнКЭ, имеющего форму прямоугольного параллелепипеда и сложную форму. Достоинства МнКЭ состоят в том, что они учитывают по правилам микроподхода неоднородную и микронеоднородную структуры тел, описывают трехмерное напряженно-деформированное состояние (без упрощающих гипотез) в однородных и композитных телах, порождают дискретные модели малой размерности и позволяют получать численные решения с малой погрешностью.

Ключевые слова: композиты, упругость, трехмерные тела, многосеточные конечные элементы, микроподход, малая погрешность

Введение

При анализе напряженно-деформированного состояния тел с неоднородной структурой широко используют микро- и макроподходы [1]. Реализация макроподхода для композитных тел регулярной структуры сводится к сложной проблеме нахождения эффективных модулей упругости. Однако для трехмерных композитов нерегулярной структуры определение эффективных модулей упругости связано с большими трудностями, особенно для композитных тел с малыми коэффициентами заполнения. Расчет композитных тел по методу конечных элементов (МКЭ) [2–4] в трехмерной постановке задачи теории упругости [5] с учетом их сложной неоднородной и микронеоднородной структуры по правилам микроподхода, когда каждая компонента неоднородной структуры тела представляется однородными трехмерными конечными элементами (КЭ), требует построения базовых разбиений высокой размерности. Размерности таких базовых разбиений могут достигать несколько миллиардов (порядка $10^9 \div 10^{10}$ узловых неизвестных МКЭ), ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ – более миллиона. Применение в этом случае программ расчета ANSYS, NASTRAN [6] и др. затруднительно. Кроме того, решение, полученное для СУ МКЭ высокого порядка, содержит вычислительную погрешность, определить точное значение которой достаточно сложно. Построение аналитических решений для трехмерных тел, имеющих сложную неоднородную и микронеоднородную структуру, связано с большими трудностями. При расчете ряда конструкций и деталей (авиационной и ракетной техники) возникает необходимость строить приближенные решения с малой погрешностью. Это вызвано тем,

что для коэффициентов запаса таких конструкций заданы определенные ограничения. Расчет по МКЭ однородных тел сложной формы, имеющих сложное закрепление и нагружение, с применением уравнений трехмерной теории упругости (без упрощающих гипотез) сводится к построению дискретных моделей высокого порядка, что порождает большие трудности при численной реализации МКЭ.

В настоящей работе предложен метод многосеточных конечных элементов для анализа напряженного состояния трехмерных однородных и композитных тел с различными коэффициентами заполнения при статическом нагружении. Предлагаемый метод реализуется на основе алгоритмов МКЭ с применением однородных и композитных многосеточных конечных элементов (МнКЭ). Отличие МнКЭ от существующих КЭ состоит в следующем. При построении m -сеточного КЭ используются m вложенных сеток. Мелкая сетка порождает мелкое (базовое) разбиение, которое учитывает неоднородную структуру и форму МнКЭ, остальные $m - 1$ крупная сетка применяются для понижения размерности МнКЭ, причем с увеличением m размерность – общее число узловых неизвестных – МнКЭ уменьшается.

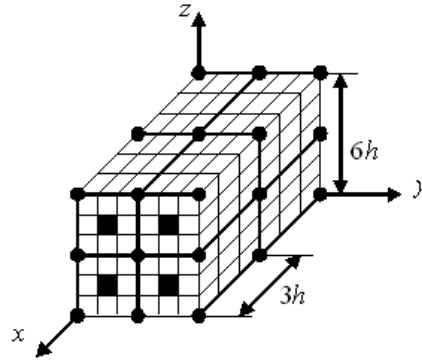
Особенность и достоинство МнКЭ состоит в том, что при построении трехмерных композитных МнКЭ (без увеличения их размерности) можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения композитных тел, состоящих из односеточных КЭ 1-го порядка, то есть по сути используется микроподход в конечно-элементной форме [1]. Такие базовые разбиения позволяют учитывать в МнКЭ, следовательно, в базовых дискретных моделях композитных тел, неоднородную и микронеоднородную структуру, сложную форму, сложный характер нагружения и закрепления, и описывать сколь угодно точно напряженно-деформированное состояние уравнениями трехмерной теории упругости без введения дополнительных упрощающих гипотез.

Краткая суть МнКЭ [7, 8] заключается в следующем. На базовом разбиении (на мелкой сетке) m -сеточного КЭ, $m \geq 2$, определяем его полную потенциальную энергию как функцию F многих переменных, которыми являются узловые перемещения мелкой сетки. На остальных $m - 1$ крупной сетке (вложенных в мелкую сетку) строим согласно алгоритмам МКЭ функции перемещений, которые используем для понижения размерности функции F , что позволяет получать МнКЭ малой размерности. При построении МнКЭ используются функции перемещений в виде степенных и лагранжевых полиномов различных порядков и уравнения трехмерной задачи теории упругости [5], записанные в локальных декартовых системах координат. Полиномы Лагранжа эффективно используются при построении МнКЭ пластинчатого и балочного типов. Приводятся процедуры построения МнКЭ формы прямоугольного параллелепипеда и сложной формы, пластинчатого и балочного типов. В настоящей работе предлагаются смешанные многосеточные дискретные модели, которые применяются для расчета трехмерных однородных и композитных тел сложной формы.

Перечислим достоинства предлагаемых МнКЭ:

- учитывают неоднородную, микронеоднородную структуру и сложную форму тел;
- описывают трехмерное напряженное состояние в однородных и композитных телах;
- образуют многосеточные дискретные модели трехмерных тел, размерность которых в $10^4 \div 10^5$ раз меньше размерностей базовых моделей;
- порождают численные решения с высокой скоростью сходимости к точным решениям, что позволяет строить решения с малой погрешностью.

Расчеты показывают, что реализация МКЭ для многосеточных дискретных моделей требует в $10^5 \div 10^6$ раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовых моделей, при малых временных затратах. Приведен пример расчета однородной

Рис. 1. Сетки 2сКЭ V_a (V_p)

и многослойной пластин с применением трехсеточных КЭ пластинчатого типа и базовых дискретных моделей, которые имеют 2.2 млрд узловых неизвестных МКЭ.

Отметим, что результаты настоящей работы анонсированы в [9]. В отличие от [9] в настоящей статье более подробно описаны процедуры построения МнКЭ, их свойства и достоинства. Рассматривается также вопрос о сходимости приближенных решений, построенных с применением МнКЭ, к точным решениям (см. замечание 7), изложена процедура построения МнКЭ высокого порядка формы треугольной прямой призмы, представлены расчеты многослойной пластины и однородной пластины. Проведен сравнительный анализ полученных результатов.

1. Первая процедура построения композитных двухсеточных КЭ

Основные положения данной процедуры покажем (не теряя общности суждений) на примере построения композитного двухсеточного КЭ (2сКЭ) V_a 2-го порядка в форме куба размерами $6h \times 6h \times 6h$, рис. 1, $Oxyz$ – локальная декартова система координат. Считаем, что между компонентами неоднородной структуры 2сКЭ связи идеальны. Функции перемещений, напряжений и деформаций компонентов (которые являются однородными изотропными телами) удовлетворяют закону Гука и соотношениям Коши, отвечающим трехмерной задаче теории упругости [5], то есть во всей области 2сКЭ реализуется трехмерное напряженное состояние без упрощающих гипотез.

Пусть 2сКЭ моделирует параллелепипед, армированный волокнами, параллельными оси Ox , сечения волокон на рисунке закрашены. Для построения 2сКЭ используем две вложенные сетки: мелкую h_a и крупную H_a . Равномерная сетка h_a с шагом h порождена базовым разбиением R_a 2сКЭ, которое состоит из однородных односеточных КЭ (1сКЭ) V_e 1-го порядка в форме куба со стороной h [2–4]. Базовое разбиение учитывает согласно правилам микроподхода [1] неоднородную структуру 2сКЭ, его форму, нагружение и закрепление, $e = 1, \dots, M$, M – общее число КЭ V_e , рис. 1, $M = 216$. На сетке h_a определяем равномерную крупную сетку H_a (размерности $n_1 \times n_2 \times n_3$) с шагом $3h$, узлы сетки H_a на рис. 1 отмечены точками, $n_1 = n_2 = n_3 = 3$. Полную потенциальную энергию U_a разбиения R_a 2сКЭ V_a представим в виде

$$U_a = \sum_{e=1}^M \left(\frac{1}{2} \mathbf{q}_e^T [K_e] \mathbf{q}_e - \mathbf{q}_e^T \mathbf{P}_e \right), \quad (1)$$

где $[K_e]$ – матрица жесткости, \mathbf{P}_e – вектор узловых сил, \mathbf{q}_e – вектор узловых перемещений 1сКЭ V_e , верхний индекс T означает транспонирование.

С помощью полиномов Лагранжа [3] (2-го порядка) на сетке H_a определяем функции перемещений u_a, v_a, w_a 2сКЭ, которые запишем в форме

$$u_a = \sum_{\beta=1}^n N_{\beta} u_{\beta}, \quad v_a = \sum_{\beta=1}^n N_{\beta} v_{\beta}, \quad w_a = \sum_{\beta=1}^n N_{\beta} w_{\beta}, \quad (2)$$

где $u_{\beta}, v_{\beta}, w_{\beta}, N_{\beta}$ – перемещения и функция формы β -го узла сетки H_a , n – общее число узлов сетки H_a , $n = n_1 n_2 n_3$ (для 2сКЭ V_a 2-го порядка $n = 27$, рис. 1).

Пусть $\mathbf{q}_a = \{u_1, \dots, u_n, v_1, \dots, v_n, w_1, \dots, w_n\}^T$ – вектор узловых перемещений крупной сетки H_a , то есть вектор узловых перемещений 2сКЭ. Используя (2), вектор \mathbf{q}_e выражаем через вектор \mathbf{q}_a , в результате получим равенство

$$\mathbf{q}_e = [A_e^a] \mathbf{q}_a, \quad (3)$$

где $[A_e^a]$ – прямоугольная матрица, $e = 1, \dots, M$.

Подставляя (3) в (1), из условия $\partial U_a / \partial \mathbf{q}_a = 0$ получаем для 2сКЭ V_a соотношение $[K_a] \mathbf{q}_a = \mathbf{F}_a$, отвечающее равновесному состоянию, где

$$[K_a] = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T [K_e] [A_e^a], \quad \mathbf{F}_a = \sum_{e=1}^M [A_e^a]^T \mathbf{P}_e, \quad (4)$$

$[K_a], \mathbf{F}_a$ – матрица жесткости и вектор узловых сил 2сКЭ V_a соответственно.

Порядок 2сКЭ V_a при $n_a = n_1 = n_2 = n_3$ равен $n_a - 1$. Для рис. 1 $n_a = 3$.

Замечание 1. Решение, построенное для крупной сетки H_a 2сКЭ V_a , с помощью формулы (3) проецируем на мелкую сетку h_a базового разбиения 2сКЭ, что дает возможность вычислять напряжения в 1сКЭ V_e базового разбиения 2сКЭ, то есть определять напряжения в любом компоненте неоднородной структуры тела.

Замечание 2. При построении аппроксимирующих функций перемещений для 2сКЭ на крупной сетке H_a можно использовать степенные полиномы 1-го, 2-го и 3-го порядка [2–4].

2. Вторая процедура построения композитных двухсеточных КЭ

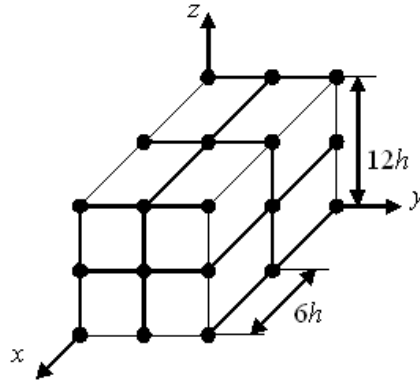
Вторую процедуру кратко рассмотрим (не теряя общности суждений) на примере построения 2сКЭ V_p в форме куба размерами $6h \times 6h \times 6h$, который имеет неоднородную структуру и расположен в локальной декартовой системе координат $Oxyz$, как и 2сКЭ V_a (рис. 1). В процедуре используем мелкую сетку h_a и базовое разбиение R_a 2сКЭ V_a . На базовом разбиении R_a 2сКЭ V_p с помощью метода конденсации [3] строим суперэлемент G . Полную потенциальную энергию U_p суперэлемента G запишем в форме

$$U_p = \frac{1}{2} \mathbf{q}_g^T [K_g] \mathbf{q}_g - \mathbf{q}_g^T \mathbf{P}_g, \quad (5)$$

где $[K_g], \mathbf{P}_g, \mathbf{q}_g$ – матрица жесткости, векторы узловых сил и перемещений суперэлемента соответственно.

На границе суперэлемента G определяем крупную сетку H_p , вложенную в мелкую h_a . Пусть \mathbf{q}_p – вектор узловых перемещений сетки H_p , то есть узловых перемещений 2сКЭ V_p . Используя функции перемещений, построенные на крупной сетке H_p , между векторами $\mathbf{q}_g, \mathbf{q}_p$ установим связь вида

$$\mathbf{q}_g = [A_g^p] \mathbf{q}_p, \quad (6)$$

Рис. 2. Трехсеточный КЭ V_b

где $[A_g^p]$ – прямоугольная матрица.

Подставляя (6) в (5), из условия $\partial U_p / \partial \mathbf{q}_p = 0$ получаем для 2сКЭ V_p следующее соотношение $[K_p] \mathbf{q}_p = \mathbf{F}_p$, которое отвечает равновесному состоянию, где

$$[K_p] = [A_g^p]^T [K_g] [A_g^p], \quad \mathbf{F}_p = [A_g^p]^T \mathbf{P}_g,$$

здесь $[K_p]$ – матрица жесткости, \mathbf{F}_p – вектор узловых сил 2сКЭ V_p .

Замечание 3. Как показывают расчеты, 2сКЭ V_p (построенные по 2-й процедуре) позволяют получить более точные приближения, чем 2сКЭ V_a (построенные по 1-й процедуре). Однако 2-я процедура включает построение суперэлементов G , связанное с обращением матриц высокого порядка. Это увеличивает временные затраты на построение 2сКЭ V_p .

Замечание 4. В силу (3) размерность вектора \mathbf{q}_a (размерность 2сКЭ V_a) не зависит от числа M , то есть от размерности разбиения R_a . Поэтому для учета в 2сКЭ V_a сложной неоднородной и микрон неоднородной структуры можно использовать сколь угодно мелкие базовые разбиения R_a , состоящие из 1сКЭ V_e (см. п. 1). В этом случае в 1сКЭ V_e сколь угодно точно описывается трехмерное напряженное состояние (без упрощающих гипотез).

При резком увеличении размерностей базовых разбиений 2сКЭ V_a , то есть числа M (размерности суперэлемента G , см. п. 2), резко увеличиваются временные затраты на построение 2сКЭ V_a (V_p). В этом случае целесообразно применять трехсеточные КЭ, построение которых требует меньше временных затрат и которые порождают дискретные модели тел меньшей размерности, чем 2сКЭ.

3. Процедура построения композитных трехсеточных КЭ

Основные положения процедуры рассмотрим на примере построения трехсеточного КЭ (3сКЭ) V_b 2-го порядка в форме куба размерами $12h \times 12h \times 12h$, который расположен в локальной декартовой системе координат $Oxyz$, рис. 2. Область 3сКЭ состоит из 2сКЭ V_n^a , $n = 1, \dots, N$, N – общее число 2сКЭ (размерами $6h \times 6h \times 6h$), для рис. 2 имеем $N = 8$. Крупные сетки 2сКЭ образуют мелкую сетку h_b 3сКЭ. На мелкой сетке h_b определяем крупную сетку H_b 3сКЭ размерности $m_1 \times m_2 \times m_3$. Узлы сетки H_b на рис. 2 отмечены точками (27 узлов), $m_1 = m_2 = m_3 = 3$.

Функции перемещений u_b, v_b, w_b 3сКЭ, построенные на сетке H_b с помощью полиномов Лагранжа, запишем в форме

$$u_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta} q_{\beta}^u, \quad v_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta} q_{\beta}^v, \quad w_b = \sum_{\beta=1}^m N_{\beta} q_{\beta}^w, \quad (7)$$

где $q_{\beta}^u, q_{\beta}^v, q_{\beta}^w, N_{\beta}$ – перемещения и функция формы β -го узла сетки H_b , $\beta = 1, \dots, m$, m – общее число узлов сетки H_b , $m = m_1 m_2 m_3$, для рис. 2 имеем $m = 27$.

При построении 3сКЭ V_b используем три характерные сетки: две сетки 2сКЭ V_n^a и крупную сетку H_b . Полную потенциальную энергию W_b 3сКЭ представим выражением

$$W_b = \sum_{n=1}^N \left(\frac{1}{2} (\mathbf{q}_n^a)^T [K_n^a] \mathbf{q}_n^a - (\mathbf{q}_n^a)^T \mathbf{P}_n^a \right), \quad (8)$$

где $[K_n^a]$ – матрица жесткости и $\mathbf{q}_n^a, \mathbf{P}_n^a$ – векторы узловых перемещений и сил 2сКЭ V_n^a .

Пусть \mathbf{q}_b – вектор узловых перемещений сетки H_b . Используя (7), выражаем узловое перемещение вектора \mathbf{q}_n^a через узловое перемещение вектора \mathbf{q}_b крупной сетки H_b :

$$\mathbf{q}_n^a = [A_n^b] \mathbf{q}_b, \quad (9)$$

где $[A_n^b]$ – прямоугольная матрица, $n = 1, \dots, N$.

Подставляя (9) в функционал (8) и минимизируя его по перемещениям \mathbf{q}_b , для 3сКЭ V_b получаем соотношение $[K_b] \mathbf{q}_b = F_b$, которое отвечает равновесному состоянию, где $[K_b]$ – матрица жесткости, F_b – вектор узловых сил 3сКЭ V_b , определяемые по формулам

$$[K_b] = \sum_{n=1}^N [A_n^b]^T [K_n^a] [A_n^b], \quad F_b = \sum_{n=1}^N [A_n^b]^T \mathbf{P}_n^a. \quad (10)$$

Порядок 3сКЭ V_b при $n_b = m_1 = m_2 = m_3$ равен $n_b - 1$. На рис. 2 $n_b = 3$.

В силу (9) размерность вектора \mathbf{q}_b (то есть размерность 3сКЭ V_b) не зависит от общего числа N 2сКЭ V_n^a , значит, разбиение 3сКЭ V_b на 2сКЭ V_n^a может быть сколь угодно мелким (то есть размеры 2сКЭ V_n^a могут быть сколь угодно малыми). В этом случае в базовых разбиениях 2сКЭ V_n^a , то есть в 1сКЭ V_e (см. п. 1, 2) сколь угодно точно описывается трехмерное напряженное состояние (без упрощающих гипотез). Определение напряжений в случае 3сКЭ V_b сводится к следующему. Пусть найден вектор \mathbf{q}_b . По формуле (9) находим векторы \mathbf{q}_n^a узловых перемещений 2сКЭ V_n^a и по алгоритмам п. 1, определяем напряжения в случае 1сКЭ V_e базового разбиения 2сКЭ V_n^a , $n = 1, \dots, N$.

Замечание 5. С помощью 3сКЭ по процедуре, аналогичной п. 3, проектируются четырехсеточные КЭ и m -сеточные КЭ [10, 11], $m \geq 4$. Отметим, что m -сеточные КЭ порождают дискретные модели меньшей размерности, чем $(m - 1)$ -сеточные КЭ. Предлагаемый подход проектирования m -сеточного КЭ можно рассматривать как процедуру последовательных вложений k -сеточных КЭ в $(k + 1)$ -сеточный КЭ, где $k = 1, \dots, m - 1$.

Замечание 6. При проектировании 3сКЭ пластинчатого и балочного типов мы используем полиномы Лагранжа, построенные на крупных сетках 3сКЭ. Полиномы Лагранжа для 3сКЭ пластинчатого (балочного) типа имеют по осям Ox ,

Oy , лежащих на нижней поверхности пластины (по оси балки Oy), более высокий порядок аппроксимаций, чем по оси Oz ; $m_1, m_2 > m_3$ (по осям Oz, Ox ; $m_2 > m_1, m_3$, см. п. 3).

Двумерные композитные 2сК и 3сКЭ, имеющие форму прямоугольника, проектируются по процедурам, которые аналогичны процедурам п. 1–3. При построении композитных 2сКЭ и 3сКЭ в форме треугольника используются полиномы 1-го, 2-го и 3-го порядка [2–4, 7].

Однородные МнКЭ проектируются по процедурам п. 1–3 в предположении, что все компоненты МнКЭ есть однородные изотропные тела с одинаковыми модулями упругости.

Замечание 7. При использовании мелких разбиений композитные тела представляются однородными МнКЭ. Расчеты показывают, что МнКЭ n -го порядка ($n = 1, 2, 3$) в форме прямоугольного параллелепипеда (спроектированные с применением мелких разбиений) для однородных тел порождают решения, совпадающие с решениями, построенными с применением однородных односеточных КЭ n -го порядка в форме прямоугольного параллелепипеда (таких же размеров, как МнКЭ), узловые сетки которых совпадают с крупными сетками МнКЭ. Как известно [2–4], однородные односеточные КЭ n -го порядка в форме прямоугольного параллелепипеда порождают решения, которые сходятся (в пределе) к точным. Следовательно, решения, построенные для тел с неоднородной структурой с применением однородных и композитных МнКЭ 1-го, 2-го и 3-го порядка в форме прямоугольного параллелепипеда, при $h_d \rightarrow 0$, где h_d – максимальный характерный размер МнКЭ, сходятся к точным решениям.

4. Смешанные многосеточные дискретные модели композитных тел

Краткая суть совместного применения одно- и многосеточного моделирования процесса деформирования трехмерных упругих тел сложной формы с неоднородной структурой состоит в следующем. Подобласть тела, которая включает границу сложной формы или сложного закрепления тела, представляем (мелким) базовым разбиением, которое состоит из однородных 1сКЭ 1-го порядка и учитывает неоднородную структуру и сложную форму тела. Остальную часть тела представляем крупным разбиением, состоящим из композитных МнКЭ в форме прямоугольного параллелепипеда. Мелкое и крупное разбиения соединяем с помощью связующих МнКЭ. В результате получаем смешанную многосеточную дискретную модель тела, размерность которой меньше размерности базовой модели. Подробно смешанные многосеточные дискретные модели трехмерных композитных тел сложной формы рассмотрены в работе [12]. Смешанные многосеточные дискретные модели эффективно применяются при расчете трехмерных однородных тел сложной формы, имеющих сложное закрепление.

5. Проектирование МнКЭ сложной формы

5.1. Рассмотрим процедуру, которая эффективна при использовании мелких разбиений тел на МнКЭ, на примере двумерного 2сКЭ $ABCD$ 1-го порядка, рис. 3. Криволинейная граница AB 2сКЭ совпадает с частью границы тела. Узлы A, B, C, D крупной сетки 2сКЭ отмечены точками. При построении функции перемещений на крупной сетке 2сКЭ используем полином $P_1(x, y)$ 1-го порядка вида

$$P_1(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy.$$

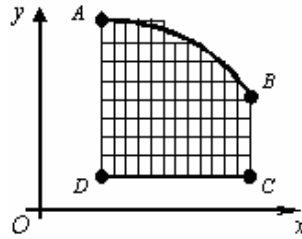


Рис. 3. Двумерный 2сКЭ 1-го порядка

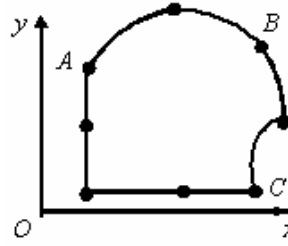


Рис. 4. 2сКЭ 2-го порядка

Сложную форму 2сКЭ учитываем с помощью базового разбиения. На рис. 3 показана сетка базового разбиения 2сКЭ, учитывающая его сложную форму. При построении функций перемещений на крупных сетках МнКЭ используем степенные полиномы [2–4]. При этом часть узлов крупных сеток лежит на криволинейных границах МнКЭ. На рис. 4 показан двумерный 2сКЭ 2-го порядка сложной формы, узлы крупной сетки отмечены точками (8 узлов), 5 узлов лежат на криволинейной границе ABC 2сКЭ, которая есть часть границы тела. При построении функций перемещений на крупной сетке 2сКЭ (рис. 4) используем полином $P_2(x, y)$ 2-го порядка

$$P_2(x, y) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4xy + a_5x^2 + a_6y^2 + a_7x^2y + a_8xy^2.$$

На рис. 5 криволинейная граница $ABCD$ трехмерного 2сКЭ 1-го порядка (крупная сетка имеет 8 узлов, которые отмечены точками) совпадает с границей тела. Функции перемещений на крупной сетке 2сКЭ (рис. 5) строим с помощью полинома $P_1(x, y, z)$ вида

$$P_1(x, y, z) = a_1 + a_2x + a_3y + a_4z + a_5xy + a_6xz + a_7zy + a_8xyz.$$

Отметим, что 2сКЭ (МнКЭ) эффективно используются при расчете однородных трехмерных тел. С помощью базового разбиения 2сКЭ (МнКЭ) учитывается сложная форма, сложный характер закрепления и нагружения трехмерных однородных тел.

Кроме того, 2сКЭ (МнКЭ) порождают дискретные модели однородных тел, размерности которых меньше размерностей базовых моделей.

5.2. Рассмотрим процедуру построения МнКЭ в форме прямой призмы, основания которых имеют сложную форму [13]. В процедуре используются аппроксимирующие функции перемещений МнКЭ (построенные на крупных сетках МнКЭ), которые представлены в виде произведения степенных и лагранжевых полиномов. Суть процедуры рассмотрим на примере 2сКЭ в форме прямоугольного параллелепипеда с отверстием сложной формы, рис. 6. Сечение отверстия заштриховано, узлы крупной сетки отмечены точками (48 узлов), которая по оси Oy является равномерной.

Базовое разбиение 2сКЭ учитывает его неоднородную структуру и форму. В плоскости Oxz (локальной системы координат $Oxyz$) на узлах крупной сетки 2сКЭ (12 узлов) определяем с помощью МКЭ аппроксимирующие функции перемещений, используя полином $P_3(x, z)$ 3-го порядка вида:

$$P_3(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2 + a_7x^2z + a_8xz^2 + a_9x^3z + a_{10}xz^3 + a_{11}x^3 + a_{12}z^3. \quad (11)$$

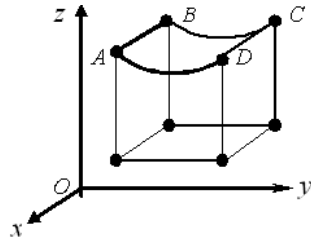


Рис. 5. Трехмерный 2сКЭ 1-го порядка

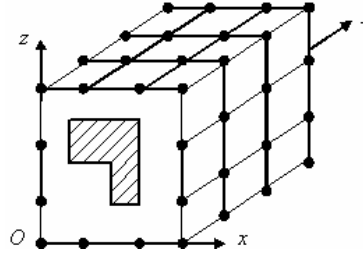


Рис. 6. 2сКЭ с отверстием

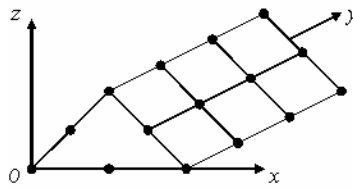


Рис. 7. 2сКЭ в форме треугольной прямой призмы

Базисную функцию $\varphi_\beta(x, y, z)$ для β -го узла крупной сетки 2сКЭ, представим в виде произведения степенных и лагранжевых полиномов, то есть

$$\varphi_\beta(x, y, z) = N_\beta(x, z)L_\beta(y) \quad (12)$$

где $N_\beta(x, z)$ и $L_\beta(y)$ – базисная функция степенного полинома (11) и полином Лагранжа соответственно, отвечающие β -му узлу крупной сетки, $\beta = 1, \dots, N$, N – общее число узлов крупной сетки 2сКЭ. На рис. 6 $N = 48$, полином $L_\beta(y)$ имеет 3-й порядок.

Описанный подход упрощает процедуру построения МнКЭ, имеющего форму треугольной прямой призмы (рис. 7), с применением аппроксимаций высокого порядка [13].

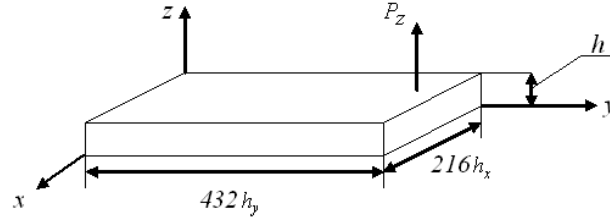
На рис. 7 узлы крупной сетки 2сКЭ отмечены точками (24 узла), которая по оси Oy является равномерной. При построении функций перемещений в плоскости Oxz на узлах крупной сетки 2сКЭ, 6 узлов на рис. 7, используем полином $P_2(x, z)$ 2-го порядка (записанный в локальной декартовой системе координат $Oxyz$) вида

$$P_2(x, z) = a_1 + a_2x + a_3z + a_4xz + a_5x^2 + a_6z^2. \quad (13)$$

Для рис. 7 полином Лагранжа $L_\beta(y)$ имеет 3-й порядок, для (12) имеем $\beta = 1, \dots, 24$. При построении функций перемещений в треугольном сечении призмы на узлах крупной сетки 2сКЭ можно использовать также степенные полиномы 1-го и 3-го порядка [2–4].

6. Результаты численных экспериментов

6.1. Расчет многослойной пластины. Рассмотрим в декартовой системе координат $Oxyz$ модельную задачу изгиба (прямоугольной в плане) шестислойной пластины V_1 размерами $216h_x \times 432h_y \times 6h_z$ (рис. 8), где $h_x = h_y = 3.5$; $h_z = 6$; $h = 6h_z$ – толщина пластины. При $y = 0$ выполнены граничные условия: $u = v = w = 0$. Слои являются изотропными однородными телами и имеют толщину

Рис. 8. Размеры пластины V_1 (V_0)

$h_c = h/6 = h_z = 6$. Модули продольной упругости (модули Юнга) слоев, начиная с нижнего, соответственно равны 10, 25, 40, 55, 70, 85. Коэффициент Пуассона равен 0.3. При $y \geq 324h_y$, $z = h$ пластина нагружена вертикальной равномерной поверхностной нагрузкой $P_z = 0.0003$.

В расчетах используем базовые дискретные модели R_1^0, \dots, R_6^0 пластины V_1 . Базовая модель R_n^0 состоит из одинаковых 1сКЭ V_e^{hn} 1-го порядка размерами $h_n^x \times h_n^y \times h_n^z$, где $e = 1, \dots, N_n$, N_n – общее число КЭ V_e^{hn} базовой модели R_n^0 , $n = 1, \dots, 6$,

$$h_n^x = h_x/(2n-1), \quad h_n^y = h_y/(2n-1), \quad h_n^z = h_z/(2n-1). \quad (14)$$

Сетка базовой модели R_n^0 имеет размерность $m_n^1 \times m_n^2 \times m_n^3$, где

$$m_n^1 = 216(2n-1)+1, \quad m_n^2 = 432(2n-1)+1, \quad m_n^3 = 6(2n-1)+1, \quad n = 1, \dots, 6. \quad (15)$$

С помощью базовых моделей R_n^0 проектируем многосеточные дискретные модели R_n пластины V_1 ($n = 1, \dots, 6$). Модели R_n состоят из пластинчатых композитных 3сКЭ V_i^n в форме прямоугольного параллелепипеда размерами $108h_n^x \times 108h_n^y \times 6h_n^z$, где i – порядковый номер 3сКЭ (см. п. 3). Крупная сетка 3сКЭ V_i^n имеет по осям Ox , Oy , Oz соответственно шаги $36h_n^x$, $36h_n^y$ и $6h_n^z$, то есть полиномы Лагранжа имеют 3-й порядок по осям Ox , Oy и 1-й – по оси Oz . Трехсеточный КЭ V_i^n состоит из 2сКЭ W_j^n 3-го порядка в форме куба размерами $6h_n^x \times 6h_n^y \times 6h_n^z$ (см. п. 3), j – порядковый номер 2сКЭ, $j = 1, \dots, 324$. Крупная сетка 2сКЭ W_j^n имеет 32 узла, по осям Ox , Oy , Oz – соответственно шаги $2h_n^x$, $2h_n^y$, $2h_n^z$. Двухсеточный КЭ строим по процедуре п. 2. На крупной сетке 2сКЭ W_j^n аппроксимирующие функции перемещений определяем с помощью степенных полиномов 3-го порядка [4], записанных в локальной декартовой системе координат.

Результаты расчетов приведены в табл. 1, где w_n^1 , σ_n^1 – максимальные прогиб и эквивалентное напряжение дискретной модели R_n пластины V_1 , $n = 1, \dots, 6$. Параметры $\delta_n^1(\%)$, $\Delta_n^1(\%)$ находим по формулам

$$\delta_n^1(\%) = 100\% \cdot |\sigma_n^1 - \sigma_{n-1}^1|/\sigma_n^1, \quad \Delta_n^1(\%) = 100\% \cdot |w_n^1 - w_{n-1}^1|/w_n^1, \quad n = 2, \dots, 6.$$

Напряжения σ_n^1 вычисляем по 4-й теории прочности.

Анализ результатов расчетов показывает (см. табл. 1), что характер изменения параметров $\delta_n^1(\%)$, $\Delta_n^1(\%)$ имеет высокую скорость равномерной сходимости максимальных напряжений σ_n^1 и перемещений w_n^1 к точным решениям, $n = 1, \dots, 6$. Так как величины $\Delta_6^1 = 0.00038$, $\delta_6^1 = 0.015$ малы и параметры $\delta_n^1(\%)$, $\Delta_n^1(\%)$ имеют высокую скорость изменения, то перемещение $w_6^1 = 767.838$ и напряжение $\sigma_6^1 = 1.166$ определены с малой погрешностью. Тогда значения w_6^1 , σ_6^1 можно считать искомым решением. Напряжения σ_n^1 возникают в окрестности крепления пластины в верхнем слое.

Табл. 1
Максимальные прогибы и эквивалентные напряжения моделей R_n шестислойной пластины V_1

R_n	R_1	R_2	R_3	R_4	R_5	R_6
w_n^1	685.854	754.407	764.893	767.851	768.131	767.838
$\Delta_n^1(\%)$	–	9.087	1.371	0.385	0.036	0.038
σ_n^1	0.686	0.948	1.071	1.125	1.153	1.166
$\delta_n^1(\%)$	–	27.637	11.485	4.800	2.428	1.115

Табл. 2
Максимальные прогибы и эквивалентные напряжения моделей Q_n однородной пластины V_0

Q_n	Q_1	Q_2	Q_3	Q_4	Q_5	Q_6
w_n^0	702.659	775.147	783.436	785.781	786.068	785.905
$\Delta_n^0(\%)$	–	9.352	1.058	0.298	0.037	0.021
σ_n^0	1.305	1.750	1.921	1.989	2.017	2.029
$\delta_n^0(\%)$	–	25.429	8.902	3.419	1.388	0.591

Базовая дискретная модель R_6^0 пластины имеет 2270396480 узловых неизвестных ($\sim 2.2 \cdot 10^9$ неизвестных МКЭ), ширина ленты системы уравнений (СУ) МКЭ равна 955967. Размерность многосеточной модели R_6 равна 318384, ширина ленты СУ МКЭ – 14699. Реализация МКЭ для многосеточной модели R_6 требует в 463770 раз меньше объема памяти ЭВМ, чем для базовой модели R_6^0 пластины V_1 .

6.2. Расчет однородной пластины. Проведен расчет однородной изотропной пластины V_0 (рис. 8), которая имеет размеры и закрепление, как и для пластины V_1 . Модуль Юнга пластины V_0 равен 100, коэффициент Пуассона – 0.3. При $z = h$, $y \geq 324h_y$ пластина V_0 нагружена равномерной поверхностной нагрузкой $P_z = 0.0009$. В расчетах используем базовые Q_n^0 и многосеточные Q_n дискретные модели однородной пластины V_0 , $n = 1, \dots, 6$, правила измельчения базовых разбиений (14), (15) и однородные 3сКЭ типа V_i^n размерами $108h_n^x \times 108h_n^y \times 6h_n^z$, которые состоят из однородных 2сКЭ 3-го порядка в форме куба размерами $6h_n^x \times 6h_n^y \times 6h_n^z$ (см. п. 6.1). Результаты расчетов пластины V_0 даны в табл. 2, где w_n^0 , σ_n^0 – максимальные прогиб и эквивалентное напряжение дискретной модели Q_n , $n = 1, \dots, 6$. Параметры $\delta_n^0(\%)$, $\Delta_n^0(\%)$ определяем по формулам

$$\delta_n^0(\%) = 100\% \cdot |\sigma_n^0 - \sigma_{n-1}^0| / \sigma_n^0, \quad \Delta_n^0(\%) = 100\% \cdot |w_n^0 - w_{n-1}^0| / w_n^0, \quad n = 2, \dots, 6.$$

Из анализа результатов расчетов следует (см. табл. 2), что характер изменения параметров $\delta_n^0(\%)$, $\Delta_n^0(\%)$ демонстрирует высокую скорость равномерной сходимости максимальных напряжений σ_n^0 и перемещений w_n^0 к точным решениям. Так как величины $\Delta_6^0 = 0.00021$, $\delta_6^0 = 0.00591$ малы и параметры $\delta_n^0(\%)$, $\Delta_n^0(\%)$ имеют высокую скорость изменения, то максимальные перемещение $w_6^0 = 785.905$ и эквивалентное напряжение $\sigma_6^0 = 2.029$ можно считать точным решением. Следует отметить, что поскольку $\delta_n^1 > \delta_n^0$, $n = 2, \dots, 6$, то скорость сходимости напряжений σ_n^0 к точному решению, отвечающих однородной пластине V_0 , выше скорости

сходимости напряжений σ_n^1 , построенных для композитной пластины V_1 (при прочих равных условиях).

Заключение

Предложен метод многосеточных конечных элементов для численного анализа напряженно-деформированного состояния трехмерных однородных и композитных тел с различными коэффициентами заполнения при статическом нагружении. Предлагаемый метод основан на методе конечных элементов с применением однородных и композитных многосеточных конечных элементов. Описаны процедуры построения двухсеточных и трехсеточных конечных элементов. Приведенный пример расчета однородной и композитной пластин с помощью трехсеточных конечных элементов показал высокую эффективность их применения.

Литература

1. Фудзии Т., Дзако М. Механика разрушений композиционных материалов. – М.: Мир, 1982. – 232 с.
2. Зенкевич О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1975. – 541 с.
3. Норри Д., де Фриз Ж. Введение в метод конечных элементов. – М.: Мир, 1981. – 304 с.
4. Секулович М. Метод конечных элементов. – М.: Стройиздат, 1993. – 442 с.
5. Самуль В.И. Основы теории упругости и пластичности. – М.: Высш. шк., 1982. – 264 с.
6. Голованов А.И., Тюленева О.Н., Шигабутдинов А.Ф. Метод конечных элементов в статике и динамике тонкостенных конструкций. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2006. – 391 с.
7. Матвеев А.Д. Некоторые подходы проектирования упругих многосеточных конечных элементов. – Красноярск, 2000. – 30 с. – Деп. в ВИНТИ 24.11.2000, № 2990-В00.
8. Матвеев А.Д. Многосеточное моделирование композитов нерегулярной структуры с малым коэффициентом заполнения // Прикл. механика и техн. физика. – 2004. – № 3. – С. 161–171.
9. Matveev A.D. Multigrid finite element method in stress analysis of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure // IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng. – 2016. – V. 158, No 1. – Art. 012067, P. 1–9.
10. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных элементов с микронеоднородной структурой // Тез. докл. XXIII Всерос. конф. «Численные методы решения задач теории упругости и пластичности». – Новосибирск: Параллель, 2013. – С. 142–144.
11. Матвеев А.Д. Построение сложных многосеточных конечных элементов с неоднородной и микронеоднородной структурой // Изв. Алт. гос. ун-та. Сер. Матем. и механика. – 2014. – Т. 81, № 1–1. – С. 80–83.
12. Матвеев А.Д. Смешанные дискретные модели в анализе упругих трехмерных неоднородных тел сложной формы // Вестн. Перм. нац. исслед. политехн. ун-та. – 2013. – № 1. – С. 182–195.
13. Матвеев А.Д. Расчет трехмерных композитных балок сложной формы с применением двухсеточных конечных элементов // Вестн. КрасГАУ. – 2015. – № 8. – С. 92–98.

Поступила в редакцию
18.10.16

Матвеев Александр Данилович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт вычислительного моделирования СО РАН

Академгородок, д. 50, стр. 44, г. Красноярск, 660036, Россия

E-mail: *mtv@icm.krasn.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

**UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)**

2016, vol. 158, no. 4, pp. 530–543

Multigrid Finite Element Method in Calculation of 3D Homogeneous and Composite Solids

A.D. Matveev

*Institute of Computational Modeling, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences, Krasnoyarsk, 660036 Russia*

E-mail: *mtv@icm.krasn.ru*

Received October 18, 2016

Abstract

In the present paper, a method of multigrid finite elements to calculate elastic three-dimensional homogeneous and composite solids under static loading has been suggested. The method has been developed based on the finite element method algorithms using homogeneous and composite three-dimensional multigrid finite elements (MFE). The procedures for construction of MFE of both rectangular parallelepiped and complex shapes have been shown. The advantages of MFE are that they take into account, following the rules of the microapproach, heterogeneous and microhomogeneous structures of the bodies, describe the three-dimensional stress-strain state (without any simplifying hypotheses) in homogeneous and composite solids, as well as generate small dimensional discrete models and numerical solutions with a high accuracy.

Keywords: composites, elasticity, three-dimensional solids, multigrid finite elements, microapproach, high accuracy

Figure Captions

Fig. 1. 2gFE grids V_a (V_p).

Fig. 2. Three-grid FE V_b .

Fig. 3. Two-dimensional 2gFE of the first order.

Fig. 4. 2gFE of the second order.

Fig. 5. Three-dimensional 2gFE of the first order.

Fig. 6. 2gFE with an outlet.

Fig. 7. 2gFE of triangular right prism shape.

Fig. 8. V_1 (V_0) plate sizes.

References

1. Fudzii T. and Dzako M. Fracture Mechanics of Composite Materials. Moscow, Mir, 1982. 232 p. (In Russian)
2. Zenkevich O. Finite Element Method in Technology. Moscow, Mir, 1975. 541 p. (In Russian)
3. Norrie D., de Vries J. An Introduction into Finite Element Method. Moscow, Mir, 1981. 304 p. (In Russian)
4. Sekulovich M. Finite Element Method. Moscow, Stroyizdat, 1993. 664 p. (In Russian)
5. Samul' V.I. Fundamentals of the Theory of Elasticity and Plasticity. Moscow, Vyssh. Shk., 1982. 264 p. (In Russian)
6. Golovanov A.P., Tyuleneva O.N., Shigabutdinov A.F. The Finite Element Method in Statics and Dynamics of Thin-Walled Structures. Moscow, FIZMATLIT, 2006. 391 p. (In Russian)
7. Matveev A.D. Some Approaches for Constructing Elastic Multigrid Finite Elements. Krasnoyarsk, 2000. 30 p. Dep. VINITI, Nov. 24, 2000, no. 2990-V00. 2000. (In Russian)
8. Matveev A.D. Multigrid models of composite materials of irregular structure with a small filling ratio. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 2004, vol. 45, no. 3, pp. 440–448. doi: 10.1023/B:JAMT.0000025027.41912.a7.
9. Matveev A.D. Multigrid finite element method in stress analysis of three-dimensional elastic bodies of heterogeneous structure. *IOP Conf. Ser.: Mater. Sci. Eng.*, 2016, vol. 158, no. 1, art. 012067, pp. 1–9.
10. Matveev A.D. Constructing composite multigrid elements with microheterogeneous structures. *Tez. dokl. XXIII Vseros. konf. "Chislennyye metody resheniya zadach teorii uprugosti i plastichnosti"* [Proc. XXIII All-Russian Conf. Numerical Methods for Solving the Problems of Elasticity and Plasticity Theory]. Novosibirsk, Parallel, 2013, pp. 142–144. (In Russian)
11. Matveev A.D. Constructing the composite multigrid elements of heterogeneous and microheterogeneous structures. *Izv. Altai. Gos. Univ., Ser. Mat. Mekh.*, 2014, vol. 81, no. 1–1. pp. 80–83. (In Russian)
12. Matveev A.D. Combined discrete models in the three-dimensional elastic inhomogeneous bodies analysis of complex shape. *Vestn. Permsk. Nats. Issled. Politekh. Univ. Mekh.*, 2013, no. 1, pp. 182–195. (In Russian)
13. Matveev A.D. The calculation of the three-dimensional irregular-shaped composite beams using the double-grid finite elements. *Vestn. Krasnoyarsk. Gos. Agrar. Univ.*, 2015, no. 8, pp. 92–98. (In Russian)

⟨ **Для цитирования:** Матвеев А.Д. Метод многосеточных конечных элементов в расчетах трехмерных однородных и композитных тел // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 4. – С. 530–543. ⟩

⟨ **For citation:** Matveev A.D. Multigrid finite element method in calculation of 3D homogeneous and composite solids. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 4, pp. 530–543. (In Russian) ⟩