УДК 519.21

МНОГОМЕРНАЯ ПРЕДЕЛЬНАЯ ТЕОРЕМА О БОЛЬШИХ УКЛОНЕНИЯХ ДЛЯ ЭНДОМОРФИЗМОВ ЕВКЛИДОВА ПРОСТРАНСТВА

Ф.Г. Габбасов, В.Т. Дубровин

Аннотация

Для последовательности, элементы которой составлены из значений периодической по каждому аргументу непрерывной векторной функции, отображающей траектории эндоморфизмов d-мерного эвклидова пространства в m-мерное эвклидово пространство, доказана центральная предельная теорема с большими уклонениями.

Ключевые слова: предельная теорема, эндоморфизмы, большие уклонения.

Пусть W – невырожденная целочисленная квадратная матрица d-го порядка. Рассмотрим преобразование $T\,\overline{x} = \{\overline{x}\,W\}$, где $\{\cdot\}$ – дробная часть числа, вектор $\overline{x}$ принадлежит d-мерному тору Ω_d. Обозначим через $\mathrm{mes}(\cdot)$ инвариантную меру на Ω_d, которую можно отождествить с мерой Лебега, определенной на единичном замкнутом гиперкубе d-мерного евклидова пространства R^d:

$$K_d = \{\overline{x} : \overline{x} = (x_1, x_2, \ldots, x_d),\ 0 \le x_1 \le 1,\ \ldots,\ 0 \le x_d \le 1\}.$$

Указанное преобразование является эндоморфизмом, сохраняющим меру. Кроме того, $T\,\overline{x}$ является перемешиванием всех степеней, когда среди характеристических чисел матрицы W отсутствуют числа, равные по модулю единице. При этом условии для суммы $\sum\limits_{k=1}^{n} \left(T^k\,\overline{x}\right)$ справедлива центральная предельная теорема [1].

Рассмотрим на K_d векторы

$$\overline{f}(\overline{x}\,W^k) = \{f_1(\overline{x}\,W^k), f_2(\overline{x}\,W^k), \ldots, f_m(\overline{x}\,W^k)\}, \quad k = 1, 2, 3, \ldots,$$

где $f_i(x)$ – вещественнозначные периодические по каждому аргументу $x_1, x_2, \ldots, x_d$ функции, заданные на K_d. Целью настоящей работы является исследование поведения функции

$$F_n(r) = \mathrm{mes}\left\{\overline{x} : \overline{x} \in K_d,\ \left\| n^{-1/2} \sum_{k=1}^{d} \overline{f}(\overline{x} W^k) \right\| > r \right\}$$

в случае, когда r растет вместе с n, то есть доказательство предельной теоремы с большими уклонениями. Здесь и далее $\|\overline{x}\| = \sqrt{\sum\limits_{k=1}^{d} x_i^2}$.

В дальнейшем предполагается выполнение следующих условий.

1) Существует такая постоянная $A > 0$, что

$$|f(\overline{x}) - f(\overline{y})| \le A\|\overline{x} - \overline{y}\|, \quad \overline{x},\, \overline{y} \in K_d.$$

2) Функции $f_i(\overline{x})$ интегрируемы по Лебегу на K_d и $\int\limits_{K_d} f_i(\overline{x})\,d\overline{x} = 0$ для всех $i = 1, 2, \ldots, m$.

3) Матрица R с элементами

$$\rho_{ij} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int\limits_{K_d} \left(\sum_{k=1}^{n} f_i(\overline{x}\,W^k) \right) \left(\sum_{k=1}^{n} f_j(\overline{x}\,W^k) \right) d\overline{x}$$

является единичной.

4. Матрица W такова, что

$$\sup_{\|\overline{x}\|<1} \|\overline{x}\,W^{-1}\| < 1, \quad |\det W| > 1.$$

При выполнении этих условий в работе [2] была доказана центральная предельная теорема для сумм

$$n^{-1/2} \sum_{k=1}^{n} \overline{f}(\overline{x}\,W^k) \tag{1}$$

с остаточным членом вида $O(n^{-1/2+\varepsilon})$, где ε – сколь угодно малое фиксированное положительное число. Используя этот результат, можно продвинуться дальше при исследовании больших уклонений в многомерной предельной теореме.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия* 1)–4). *Тогда при* $r \geq 1$, $r = o(n^{1/8}/\ln n)$, *для больших уклонений имеет место соотношение*

$$F_n(r) = \frac{1}{2^{(m-2)/2}\Gamma(m/2)} \int\limits_{r}^{\infty} e^{-y^2/2} y^{m-1} dy \left(1 + O\left(\frac{r \ln n}{n^{1/8}} \right) \right),$$

где $\Gamma(m/2) = \int\limits_{0}^{\infty} u^{m/2-1} e^{-u} du$.

Доказательство. Пусть Q и N – растущие вместе с n натуральные числа, $p = [n/(Q+N)]$, где $[\cdot]$ – обозначение целой части числа. Введем следующие обозначения:

$$\eta_k = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=(k-1)(Q+N)+1}^{kQ+(k-1)N} \overline{f}(\overline{x}\,W^r), \quad 1 \leq k \leq p,$$

$$\eta_k^0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=kQ+(k-1)N+1}^{k(Q+N)} \overline{f}(\overline{x}\,W^r), \quad 1 \leq k \leq p-1,$$

$$\eta_p^0 = \frac{1}{\sqrt{Q}} \sum_{r=pQ+(p-1)N+1}^{n} \overline{f}(\overline{x}\,W^r).$$

Получим, что сумма (1) разбивается на две суммы:

$$\sum_{k=1}^{n} \overline{f}(\overline{x}\,W^k) = \sqrt{Q} \sum_{k=1}^{p} \eta_k + \sqrt{Q} \sum_{k=1}^{p} \eta_k^0 = \sqrt{Q}(\zeta_p + \zeta_p^0).$$

Далее перейдем к изучению суммы ζ_p. Обозначим $\widehat{\zeta}_p = \sum\limits_{k=1}^{p} \widehat{\eta}_k$, где $\widehat{\eta}_1$, $\widehat{\eta}_2, \ldots, \widehat{\eta}_p$ – векторы со следующими свойствами:

A) $\mathrm{mes}\{\overline{x} : \overline{x} \in K_d,\, \widehat{\eta}_k \in M\} = \mathrm{mes}\{\overline{x} : \overline{x} \in K_d,\, \eta_k \in M\}$, где M – измеримые множества из R^m;

B) $\displaystyle\int\limits_{K_d} \exp\left(i\left(\overline{t}, \frac{\widehat{\zeta}_p}{\sqrt{p}}\right)\right) d\,\overline{x} = \prod_{k=1}^{p} \int\limits_{K_d} \exp\left(i\left(\overline{t}, \frac{\widehat{\eta}_k}{\sqrt{p}}\right)\right) d\,\overline{x}$.

Обозначим через Λ матрицу ковариаций вектора η_1. Так же, как в работе [2], можно показать, что элементы матрицы Λ отличаются от элементов единичной матрицы R на величину $O(1/Q)$.

Пусть матрица A такова, что $A^T A = \Lambda^{-1}$, где A^T – транспонированная к A матрица. Очевидно, что вектор $A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}$ имеет единичную матрицу ковариаций.

Пусть теперь

$$S_p(r) = \mathrm{mes}\{\overline{x} : \overline{x} \in K_d,\, \|\zeta_p/\sqrt{p}\| > r\},$$
$$F_p(r) = \mathrm{mes}\{\overline{x} : \overline{x} \in K_d,\, \|A\zeta_p/\sqrt{p}\| > r\},$$
$$\widehat{F}_p(r) = \mathrm{mes}\{\overline{x} : \overline{x} \in K_d,\, \|A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}\| > r\},$$

$$f_p(\overline{t}) = \int\limits_{K_d} \exp(i(\overline{t}, A\zeta_p/\sqrt{p}))d\,\overline{x},$$

$$\widehat{f}_p(\overline{t}) = \int\limits_{K_d} \exp(i(\overline{t}, A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}))\,d\,\overline{x}, \quad f(\overline{t}) = \int\limits_{K_d} \exp(i(\overline{t}, \eta_1))\,d\,\overline{x}.$$

Приведем необходимые в дальнейшем утверждения (через C_i будем обозначать положительные постоянные).

Лемма 1. *В условиях теоремы* 1 *справедлива оценка*

$$\int\limits_{K_d} \Big\| \sum_{k=1}^{l} \overline{f}(\overline{x}\, W^k) \Big\|^{2\nu} dx \le (C_1)^{2\nu} (\ln l)^{\nu} l^{\nu} (2\nu)!,$$

если $\nu \le C_2 \sqrt{l/\ln l}$.

Лемма доказывается аналогично лемме 1 из [3].

Лемма 2. *Справедлива оценка*

$$\int\limits_{K_d} \exp(\overline{h}, Q^{-1/2}) \sum_{k=1}^{Q} \overline{f}(\overline{x}\, W^k)\, dx \le C_3 < \infty,$$

где $0 < \|\overline{h}\| < \varepsilon_0/\sqrt{\ln Q}$, ε_0 *– достаточно малое фиксированное положительное число.*

Доказательство леммы почти ничем не отличается от доказательства леммы 2 из [3].

Лемма 3. *Справедлива оценка*

$$\mathrm{mes}\left\{\overline{x} : \overline{x} \in K_d,\, l^{-1/2} \Big\| \sum_{k=1}^{l} \overline{f}(\overline{x}\, W^k) \Big\| \ge \omega \right\} \le \exp\big(-C_4 \omega/\ln^{\lambda} l\big),$$

где $\lambda > 1/2$ *– постоянная,* $\omega \le C_5 \sqrt{l} \ln^{\lambda_1} l$, $\lambda_1 > 0$, $\lambda - \lambda_1 > 1/2$.

Справедливость утверждения данной леммы следует из леммы 3 [3] сведением к одномерному случаю:

$$\operatorname{mes}\Big\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \Big\|l^{-1/2}\sum_{k=1}^{l}\overline{f}(\overline{x}\,W^k)\Big\|\geq\omega\Big\}\leq$$
$$\leq\sum_{i=1}^{m}\operatorname{mes}\Big\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \Big|l^{-1/2}\sum_{k=1}^{l}f_i(\overline{x}\,W^k)\Big|>\frac{\omega}{\sqrt{m}}\Big\}.$$

Лемма 4. *Пусть*

$$\widehat{\mu}_\nu=\int\limits_{K_d}\|A\eta_1\|^\nu d\,\overline{x},\quad \mu_\nu=\int\limits_{R^m}\|\overline{x}\|^\nu d\Phi(\overline{x}),$$

где $\Phi(\overline{x})$ *– стандартное нормальное распределение. Тогда*

$$\widehat{\mu}_\nu=\mu_\nu+O\Big(\lambda_0^\nu\,\nu!\,Q^{\varepsilon-1/2}\ln^{(\lambda+1)\nu}Q\Big),\quad \lambda_0>0.$$

Лемма доказывается так же, как лемма 4 из [3], с применением теоремы 1 и соотношения (15) из работы [2].

Пусть $\overline{\xi}$ – произвольный случайный вектор, имеющий функцию распределения $F(\overline{x})$ и ковариационную матрицу Δ. Следуя [4], обозначим

$$d(\overline{v})=(h(\overline{v}),\overline{v})-\ln R(h(\overline{v})),$$

где $R(h(\overline{v}))=E\exp(h(\overline{v}),\overline{\xi})$, $h(\overline{v})=\Delta\overline{v}+O(\|\overline{v}\|^2)$.

Предположим, что функция $d(\overline{v})$ аналитична при $\|\overline{v}\|\leq v_0$. Разложение ее в ряд Маклорена дает

$$d(\overline{v})=\frac{1}{2}(\overline{v},\Delta\overline{v})-\sum_{k=3}^{\infty}Q_k(\overline{v}),\tag{2}$$

где $Q_k(\overline{v})$ – однородные полиномы порядка k, коэффициенты которых выражаются через семиинварианты вектора $\overline{\xi}$ порядка не выше, чем k.

Имеет место

Лемма 5. *Если* $\overline{\xi}=A\eta_1$, $F(\overline{x})=F_Q(\overline{x})=\operatorname{mes}\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ A\eta_1\leq\overline{x}\}$, *то*

$$\Big|\sum_{k=3}^{\infty}Q_k(\overline{v})\Big|\leq C_6\,\|\overline{v}\|^3/Q^{1/2-\varepsilon}$$

при $\|\overline{v}\|\leq C_7/\ln^{3/2+\varepsilon_0}Q$, *где* ε_0 *– сколь угодно малое фиксированное положительное число.*

Доказательство. Из теоремы 1 [2] следует, что $F_Q(\overline{x})=\Phi(\overline{x})+O(Q^{\varepsilon-1/2})$, где

$$\Phi(\overline{x})=1/(2\pi)^{m/2}\int\limits_{-\infty}^{\overline{x}}\exp(-\|\overline{y}\|^2/2)\,d\,\overline{y}.$$

Далее, пусть

$$R_1(\overline{h})=\int\limits_{K_d}\exp(\overline{h},A\eta_1)\,d\,\overline{x}=\int\limits_{R^m}\exp(\overline{h},\overline{x})\,dF_Q(\overline{x}),$$

$$R(\overline{h}) = \int\limits_{R^m} \exp(\overline{h}, \overline{x})\, d\Phi(\overline{x}) = \exp(\|\overline{h}\|^2/2),$$

$$K_1(\overline{h}) = \ln R_1(\overline{h}), \quad K(\overline{h}) = \ln R(\overline{h}) = \|\overline{h}\|^2/2.$$

Функция $R_1(\overline{h})$ будет аналитической при $\|\overline{h}\| \le C_8/\ln^{1/2} Q$, что гарантируется леммой 2. Имеем

$$R_1(\overline{h}) - R(\overline{h}) = \int\limits_{R^m} \exp(\overline{h}, \overline{x})\, d(F_Q(\overline{x}) - \Phi(\overline{x})) =$$
$$= \sum_{k=3}^{\infty} \int\limits_{R^m} \frac{(\overline{h}, \overline{x})^k}{k!}\, d(F_Q(\overline{x}) - \Phi(\overline{x})) \le \sum_{k=3}^{\infty} \frac{\|\overline{h}\|^k}{k!} \int\limits_{R^m} \|\overline{x}\|^k d(F_Q(\overline{x}) - \Phi(\overline{x})).$$

Из леммы 4 следует, что

$$R_1(\overline{h}) = R(\overline{h}) + O\big(\|\overline{h}\|^3 Q^{\varepsilon-1/2}\big)$$

при $\|\overline{h}\| \le C_8/\ln^{3/2+\varepsilon_0} Q = h_0$.

Далее,

$$K_1(\overline{h}) = K(\overline{h}) + \ln\frac{R_1(\overline{h})}{R(\overline{h})} = \|\overline{h}\|^2/2 + \ln\big(1 + \|\overline{h}\|^3 Q^{\varepsilon-1/2}\big) =$$
$$= \|\overline{h}\|^2/2 + O\big(\|\overline{h}\|^3/Q^{\varepsilon-1/2}\big) \ \text{ при } \ \|\overline{h}\| \le h_0. \quad (3)$$

Кроме того,

$$\frac{1}{R(\overline{h})} \int\limits_{R^m} \overline{x} \exp(\overline{h}, \overline{x})\, d\Phi(\overline{x}) = \overline{h}.$$

Так же, как при доказательстве оценки для $R_1(\overline{h})$, при $\|\overline{h}\| \le h_0$ получаем

$$\overline{v} = v(\,\overline{h}) = \frac{1}{R_1(\overline{h})} \int\limits_{R^m} \overline{x} e^{(\overline{h}, \overline{x})}\, dF_Q(\overline{x}) = \overline{h} + O\big(\|\overline{h}\|^2 Q^{\varepsilon-1/2}\big). \quad (4)$$

Якобиан преобразования $\overline{h} \to v(\overline{h})$ положителен при $\|\overline{h}\| \le h_0$, следовательно, преобразование обратимо, и из (4) вытекает, что

$$\overline{h} = h(\overline{v}) = \overline{v} + O\big(\|\overline{h}\|^2 Q^{\varepsilon-1/2}\big), \ \text{ если } \ \|\overline{v}\| \le C_9 h_0. \quad (5)$$

Из (2), (3) и (5) следует справедливость утверждения леммы.

□

Теперь рассмотрим сумму $A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}$. Свойства этой суммы позволяют применить к ней теорему о больших уклонениях для независимых и одинаково распределенных векторов. По теореме 3 [4] при $1 \le r \le C_{10}\sqrt{p}/\sqrt{\ln Q}$ имеет место равенство

$$\widehat{F}_p(r) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{u \in \Omega_0} \exp\left(p \sum_{k=3}^{\infty} Q_k(ur/\sqrt{p})\right) ds \times$$
$$\times \int\limits_{r}^{\infty} \exp(-(u,u)y^2/2) y^{m-1} dy (1 + O(r/\sqrt{p})), \quad (6)$$

где ds – элемент поверхности $\Omega_0 = \{\overline{u} : \|\overline{u}\| = 1\}$. Сужение зоны действия этого равенства происходит за счет того, что по лемме 2 производящая функция $R_1(\overline{h}) < < \infty$ при $\|\overline{h}\| < \varepsilon/\sqrt{\ln Q}$.

В силу леммы 4 выражение (6) можно переписать в следующем виде:

$$\widehat{F}_p(r) = \frac{1}{2^{(m-2)/2}\Gamma(m/2)} \int\limits_r^\infty e^{-y^2/2} y^{m-1} dy\, (1 + O(r/\sqrt{p} + r^3/(\sqrt{p}Q^{1/2-\varepsilon}))), \tag{7}$$

где $1 \le r \le C_{11} \min(\sqrt{p}/\ln^{3/2+\varepsilon_0} Q, p^{1/6}Q^{1/6-\varepsilon})$.

Сделаем переход от векторов $A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}$ к векторам $A\zeta_p/\sqrt{p}$.

Имеет место неравенство

$$\left|f_p(\overline{t}) - \widehat{f}_p(\overline{t})\right| \le C_{12}\sqrt{\frac{p}{Q}}\, \exp(-C_{13}N), \tag{8}$$

вытекающее из леммы 3 [5].

Пусть

$$J_1^2 = \int\limits_{\|\overline{t}\| \le 1} \|\overline{t}\|^{-2} |f_p(\overline{t}) - \widehat{f}_p(\overline{t})|^2 d\overline{t}, \quad J_2^2 = \int\limits_{1 < \|\overline{t}\| \le T} |f_p(\overline{t}) - \widehat{f}_p(\overline{t})|^2 d\overline{t}.$$

Воспользуемся неравенством С.М. Садиковой [6, 7], которое при

$$T = \exp(C_{14}N/2m), \quad b = \ln T, \quad \delta_1 = b\sqrt{m \ln T}/T \tag{9}$$

запишем в виде

$$\begin{aligned} \left|F_p(r) - \widehat{F}_p(r)\right| \le C_{15} (\ln T)^{(m-1)/4} \Big[J_1 + 2\sqrt{2} J_2 + \frac{1}{T}\Big] + \\ + 3 \operatorname{mes}\big\{\overline{x} : \overline{x} \in K_d,\, r - \delta_1 \le \|A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}\| \le r + \delta_1\big\} + \\ + 2 \operatorname{mes}\big\{\overline{x} : \overline{x} \in K_d,\, \|A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}\| \ge b\big\}. \end{aligned} \tag{10}$$

Далее, выбрав $C_{14} < 2C_{13}$, оценим интегралы J_1 и J_2.

Обозначим $\alpha = \sqrt{p/Q}\, \exp(-C_{13}N)$, тогда

$$\begin{aligned} J_1^2 = \int\limits_{\|\overline{t}\| \le \sqrt{\alpha}} \|\overline{t}\|^{-2} |f_p(\overline{t}) - \widehat{f}_p(\overline{t})|^2\, d\overline{t} + \int\limits_{\sqrt{\alpha} < \|\overline{t}\| \le 1} \|\overline{t}\|^{-2} |f_p(\overline{t}) - \widehat{f}_p(\overline{t})|^2\, d\overline{t} \le \\ \le C_{15} \Bigg(\int\limits_{\|\overline{t}\| \le \sqrt{\alpha}} d\overline{t} + \int\limits_{\sqrt{\alpha} < \|\overline{t}\| \le 1} \alpha\, d\overline{t} \Bigg) \le C_{16} \sqrt{\frac{p}{Q}}\, \exp(-C_{13}N). \end{aligned}$$

Здесь использованы оценка (8) и тривиальное неравенство $|f_p(\overline{t}) - \widehat{f}_p(\overline{t})| \le C_{17}\|\overline{t}\|$.

Применяя оценку (8), получим

$$\begin{aligned} J_2^2 \le C_{12}^2 \int\limits_{1 < \|\overline{t}\| \le T} p/Q \exp(-2C_{13}N)\, d\overline{t} \le \\ \le C_{17} p/Q \exp(-2C_{13}N)\, T^m \le C_{18} p/Q \exp(-C_{13}N). \end{aligned}$$

Оценим остальные слагаемые в (10). Из соотношения (7) следует

$$\operatorname{mes}\bigl\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \|A\widehat{\zeta}/\sqrt{p}\|\ge b\bigr\}=$$
$$=\frac{1}{2^{(m-2)/2}\Gamma(m/2)}\int_b^\infty e^{-y^2/2}y^{m-1}dy\,\bigl(1+O\bigl(b/\sqrt{p}+b^3/(\sqrt{p}\,Q^{1/2-\varepsilon})\bigr)\bigr).$$

и

$$\operatorname{mes}\bigl\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ r-\delta_1\le\|A\widehat{\zeta}_p/\sqrt{p}\|\le r+\delta_1\bigr\}=$$
$$=e^{-r^2/2}\,r^{m-1}\,O\bigl(r\delta_1+r/\sqrt{p}+r^3/(\sqrt{p}\,Q^{1/2-\varepsilon})\bigr).$$

С учетом полученных оценок и (9) имеем

$$|F_p(r)-\widehat{F}_p(r)|\le C_{19}N^{(m-1)/4}\sqrt[4]{p/Q}\,\exp(-C_{14}N/2m)+$$
$$+\,3e^{-r^2/2}r^{m-1}O\bigl(r/\sqrt{p}+r^3/(\sqrt{p}\,Q^{1/2-\varepsilon})\bigr)+$$
$$+\,C_{20}N^{(m-1)/2}\exp(-C_{14}N/2m)\,O\bigl(1+\sqrt{N}/\sqrt{p}+N^{3/2}/(\sqrt{p}\,Q^{1/2-\varepsilon})\bigr).\quad(11)$$

Теперь совершим переход от векторов $A\zeta_p/\sqrt{p}$ к векторам $\zeta_p/\sqrt{p}$. Нам известно, что элементы ковариационной матрицы векторов η_k отличаются от элементов единичной матрицы на величину порядка $O(1/Q)$. Поэтому

$$S_p(r)=\operatorname{mes}\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \|\zeta_p/\sqrt{p}\|>r\}=\operatorname{mes}\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ A\zeta_p/\sqrt{p}\subset M^c\},$$

где M – множество, полученное из шара радиуса r незначительной трансформацией его границы, M^c – дополнение к M.

Очевидно, что $M\subset O_{r+\delta}$, а $O_{r-\delta}\subset M$, где O_r – шар радиуса r, $\delta=O(1/Q)$. При этом

$$F_p(r+\delta)\le S_p(r)\le F_p(r-\delta).$$

Воспользовавшись выражениями (11) для $F_p(r)$ и (7) для $\widehat{F}_p(r)$, имеем

$$S_p(r)=\frac{1}{2^{(m-2)/2}\Gamma(m/2)}\int_r^\infty e^{-y^2/2}y^{m-1}dy\Biggl(1+O(r\delta+r/\sqrt{p}+r^3/(\sqrt{p}\,Q^{1/2-\varepsilon}))+$$
$$+\,O\Bigl(N^{(m-1)/4}\sqrt[4]{p/Q}\exp(-C_{14}N/2m)+N^{(m-1)/2}\exp(-C_{14}N/2m)\times$$
$$\times\,O\bigl(1+\sqrt{N}/\sqrt{p}+N^{3/2}/(\sqrt{p}\,Q^{1/2-\varepsilon})\bigr)\Bigr)\Biggr).\quad(12)$$

Оценим вклад $\zeta_p^0/\sqrt{p}$ в правую часть формулы (12).

Нетрудно получить неравенство

$$S_p(r+\varepsilon_1)-\operatorname{mes}\bigl\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \|\zeta_p^0/\sqrt{p}\|>\varepsilon_1\bigr\}\le$$
$$\le\operatorname{mes}\bigl\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \|(\zeta_p+\zeta_p^0)/\sqrt{p}\|>r\bigr\}\le$$
$$\le S_p(r-\varepsilon_1)+\operatorname{mes}\bigl\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \|\zeta_p^0/\sqrt{p}\|>\varepsilon_1\bigr\}.\quad(13)$$

Так как

$$\operatorname{mes}\bigl\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \|\zeta_p^0/\sqrt{p}\|>\varepsilon_1\bigr\}\le\sum_{i=1}^m\operatorname{mes}\bigl\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ |\zeta_{ip}^0/\sqrt{p}|>\varepsilon/\sqrt{m}\bigr\},$$

где $\zeta_p^0=(\zeta_{1p}^0,\zeta_{2p}^0,\dots,\zeta_{mp}^0)$, то достаточно рассмотреть одномерный случай, который изучался в работе [3] (лемма 6).

Если $\varepsilon_1=r\omega\sqrt{N\ln n/Q}$, ω – достаточно большое фиксированное число, то

$$\operatorname{mes}\left\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \|\zeta_p^0/\sqrt{p}\|>\varepsilon_1\right\}=O(e^{-r^2/2}/(rn^{\omega})+\sqrt{p/Q}\,e^{-C_{21}Q})$$

при $r\ge 1$, $r=O(\min(\sqrt{N/\ln n},\sqrt{p\ln n}\ln^{-2}N))$, $N=o(Q)$.

Используя эту оценку и соотношение (12), из (13) имеем

$$\begin{aligned}\operatorname{mes}\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \|(\zeta_p+\zeta_p^0)/\sqrt{p}\|>r\}&=\frac{1}{2^{(m-2)/2}\Gamma(m/2)}\int\limits_r^{\infty}e^{-y^2/2}y^{m-1}dy\times\\&\times\Bigl(1+O\bigl(r\varepsilon_1+r\delta+r/\sqrt{p}+r^3/(\sqrt{p}\,Q^{1/2-\varepsilon})+\\&+N^{(m-1)/4}\sqrt[4]{p/Q}r^{2-m}\exp((r^2-C_{14}N/m)/2)+\\&+N^{(m-1)/2}r^{2-m}\exp((r^2-C_{14}N/m)/2)\times\\&\times O\bigl(1+\sqrt{N}/\sqrt{p}+N^{3/2}/(\sqrt{p}\,Q^{1/2-\varepsilon})\bigr)+\\&+r^{1-m}/n^{\omega}+\sqrt{p/Q}\,r^{2-m}\exp(r^2/2-C_{21}Q)\bigr)\Bigr).\qquad(14)\end{aligned}$$

Здесь использовали то, что $\int\limits_r^{\infty}e^{-y^2/2}y^{m-1}dy>C_{21}r^{m-2}\exp(-r^2/2)$.

Для r справедливы соотношения $r\ge 1$ и

$$r=O(\min(\sqrt{p}/\ln^{3/2+\varepsilon_0}Q,\ p^{1/6}Q^{1/6-\varepsilon},\ \sqrt{N/\ln n},\ \sqrt{p\ln n}\ln^{-2}N,\ \sqrt{Q})).$$

Выберем $N=[n^{1/4}]$, $Q=[n^{3/4}\ln^2 n]$, а p – из условия

$$|n-p(Q+N)|\le p.\qquad(15)$$

После подстановки выбранных значений в (14) получим, что

$$\operatorname{mes}\left\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \left\|\frac{(\zeta_p+\zeta_p^{(0)})}{\sqrt{p}}\right\|>r\right\}=$$
$$=\frac{1}{2^{(m-2)/2}\Gamma(m/2)}\int\limits_r^{\infty}e^{-y^2/2}y^{m-1}dy\left(1+O\left(\frac{r\ln n}{n^{1/8}}\right)\right)$$

при

$$1\le r\le O\left(\frac{n^{1/8}}{\omega(n)\ln n}\right).$$

Далее, в силу (15)

$$\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^k)=\frac{1}{\sqrt{pQ}}\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^k)+C_{22}\,\frac{N}{Q^{3/2}p^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}\,W^k).$$

Из леммы 3 вытекает, что

$$\operatorname{mes}\left\{\overline{x}:\overline{x}\in K_d,\ \left\|\frac{N}{Q^{3/2}p^{1/2}}\sum_{k=1}^{n}\overline{f}(\overline{x}W^k)\right\|>n^{-1/8}\right\}\le$$
$$\le\exp\left(-C_{22}\frac{Q^{3/2}p^{1/2}}{Nn^{5/8}\ln^2 n}\right)\le\exp(-C_{23}n^{1/4}).\qquad(16)$$

Теперь поступая так же, как и при оценке вклада $\zeta_p^0/\sqrt{p}$ в остаток формулы (12) и используя оценку (16), получаем утверждение теоремы.

Summary

F.G. Gabbasov, V.T. Dubrovin. Multi-Dimensional Limit Theorem on Large Deviations for Endomorphisms of Euclidean Space.

We prove a central limit theorem on large deviations for a sequence with elements being formed by the values of a continuous vector function periodic in each variable, which represents the trajectories of the endomorphisms of the d-dimensional Euclidean space in the m-dimensional Euclidean space.

Keywords: limit theorem, endomorphisms, large deviations.

Литература

1. *Леонов В.П.* Некоторые приложения старших семиинвариантов в теории случайных процессов. – М.: Наука, 1964. – 69 с.
2. *Габбасов Ф.Г., Дубровин В.Т.* Оценка скорости сходимости в многомерной предельной теореме для эндоморфизмов евклидова пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 55–66.
3. *Дубровин В.Т.* Большие уклонения в центральной предельной теореме для эндоморфизмов евклидова пространства // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2011. – Т. 153, кн. 1. – С. 195–210.
4. *Bahr B.von* Multi-dimensional integral limit theorems for large deviations // Ark. Mat. – 1967. – Bd. 7, H. 1. – S. 89–99.
5. *Дубровин В.Т., Москвин Д.А.* распределении дробных долей одного класса преобразований евклидовых пространств // Вероятностные методы и кибернетика. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1971. – Вып. 9. – С. 45–46.
6. *Садикова С.М.* Расстояния между распределениями, связанные с их значениями на выпуклых множествах // Докл. АН СССР. – 1967. – Т. 176, № 4. – С. 787–789.
7. *Садикова С.М.* О многомерной центральной предельной теореме // Теория вероятности и её применения. – Казань: Казан. гос. ун-т, 1968. – Т. XIII, № 1. – С. 164–170.

Поступила в редакцию
03.03.14

Габбасов Фарит Гаязович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры прикладной математики, Казанский государственный архитектурно-строительный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *gabbasov@kgasu.ru*

Дубровин Вячеслав Тимофеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.