

УДК 519.6

О СХЕМАХ МКЭ ВЫСОКОГО ПОРЯДКА ТОЧНОСТИ ДЛЯ ДВУХТОЧЕЧНОЙ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА С ВЫРОЖДЕНИЕМ

A.A. Соболев, M.P. Тимербаев

Аннотация

В статье рассматривается двухточечная краевая задача Дирихле для вырождающегося уравнения 4-го порядка. Эта задача решается методом конечных элементов высокого порядка аппроксимации с мультиплективным выделением особенности. Доказывается оптимальная скорость сходимости предложенного метода на заданном классе правых частей.

Ключевые слова: двухточечная краевая задача, весовые пространства Соболева, метод конечных элементов, мультиплективное выделение особенности.

Введение

Анализ эллиптических уравнений с вырождающимися коэффициентами показывает, что их решения имеют особенности в точках вырождения, связанные с неограниченным ростом производных (см., например, [1–4]). Стандартные проекционно-сеточные методы численного решения таких задач, не учитывающие эти особенности, оказываются малоэффективными и плохо сходящимися. Для преодоления возникающих вычислительных трудностей применяются различные подходы: специальные замены переменных в исходном уравнении, сгущение расчетной сетки в окрестности точек вырождения, использование специальных базисных функций для аппроксимации решения и другие приемы. Так, для вырождающегося уравнения 2-го порядка в [5] была построена конечно-разностная схема 1-го порядка точности на ортотропно-сгущающейся сетке в исходных переменных, которую можно интерпретировать и как схему метода конечных элементов (МКЭ) с численным интегрированием на равномерной сетке в новых координатах при специальной замене переменных. В работе [6] также использовалось ортотропное по направлению к линии вырождения сгущение, то есть линейные размеры конечных элементов триангуляции по вырождающейся переменной уменьшались существенно быстрее, чем по остальным переменным. Равномерное (изотропное) по всем переменным степенное сгущение сетки к точкам вырождения применялось в работах [7–9] для линейных и квазилинейных уравнений 2-го порядка и в работе [10] – для квазилинейного уравнения 4-го порядка. Отметим, что сгущение сетки, хотя и улучшает аппроксимацию решения в окрестности особых точек, но приводит к нежелательным с вычислительной точки зрения эффектам другого рода – к увеличению числа уравнений и неизвестных в результирующей системе МКЭ и ее худшей обусловленности по сравнению с квазиравномерными триангуляциями расчетной области, что было замечено еще в статье [5]. Что касается ухудшения в той или иной степени свойств систем уравнений МКЭ для задач с особенностями по сравнению с регулярными задачами, то это является, по-видимому, неизбежной платой за удовлетворительную или оптимальную аппроксимацию сингулярности.

Для вырождающегося линейного уравнения 2-го порядка в статье [11] был предложен оптимальный с точки зрения теории аппроксимации численный метод для класса правых частей из весового пространства Лебега, то есть наиболее быстро сходящийся в энергетической норме задачи проекционный метод на данном классе входных данных. Метод основывается на мультиплексивном выделении особенности, то есть представлении решения в виде произведения специально подобранных сингулярного веса и новой неизвестной функции, которая, как показывают априорные оценки [4], является гладкой и может быть аппроксимирована стандартными кусочно-полиномиальными функциями. Этот метод можно трактовать как МКЭ со специальным базисом, состоящим из произведений сингулярного веса на кусочно-полиномиальные базисные функции обычного МКЭ, поэтому для его реализации могут быть использованы процедуры триангуляции области и генерирования систем уравнений с оптимизацией нумерации узлов сетки, заложенные в стандартных пакетах программ МКЭ.

В настоящей работе мы применяем мультиплексивное выделение особенности для дискретизации с высоким порядком точности вырождающегося обыкновенного дифференциального уравнения 4-го порядка. Ранее для этого уравнения в [12] был построен метод 2-го порядка аппроксимации с кубическими эрмитовыми элементами. Схемы МКЭ высокого порядка аппроксимации для вырождающегося уравнения 2-го порядка анализировались в [13].

1. Обозначения и вспомогательные результаты

Введем в рассмотрение весовые классы функций на интервале $\Omega = (0, 1)$. Для вещественного γ через $L_{2,\gamma} \equiv L_{2,\gamma}(\Omega)$ (далее символ Ω будем опускать, когда он подразумевается из контекста) обозначим пространство измеримых функций с конечной нормой

$$\|u|L_{2,\gamma}\| = \left(\int_{\Omega} |x^{-\gamma} u|^2 dx \right)^{1/2}.$$

Пусть s – целое неотрицательное число. Множество функций, у которых почти всюду ограничена обобщенная производная порядка s , обозначим через W_{∞}^s . Через H_{γ}^s будем обозначать пространство функций, имеющих обобщенную производную порядка s класса $L_{2,\gamma}$, то есть функций, у которых конечна полуночка $\|D^s u|L_{2,\gamma}\|$, где D^s – оператор обобщенного дифференцирования порядка s . Это пространство является гильбертовым с нормой

$$\|u|H_{\gamma}^s\| = (\|D^s u|L_{2,\gamma}\|^2 + \|u|L_2(\delta, 1)\|^2)^{1/2},$$

где $\delta \in (0, 1)$ фиксировано. Иногда удобнее использовать другую, эквивалентную норму

$$\|u|H_{\gamma}^s\| = \left(\|D^s u|L_{2,\gamma}\|^2 + \sum_{j=0}^{s-1} |D^j u(1)|^2 \right)^{1/2}.$$

Через $C_0^{\infty}(\Omega)$ обозначается множество бесконечное число раз дифференцируемых функций, имеющих компактные носители в интервале Ω . Замыкание множества функций C_0^{∞} в норме пространства H_{γ}^s обозначим через $\overset{\circ}{H}_{\gamma}^s$. Замыкание в H_{γ}^s бесконечно дифференцируемых финитных в окрестности точки $x = 1$ функций обозначим через \dot{H}_{γ}^s . При $\gamma = 0$ этот символ в обозначениях пространств будет опускаться.

Нам понадобятся следующие вложения, доказательство которых можно найти в [13, 14], [15, с. 378], [16, с. 319].

Теорема 1.

(i) Пространство H_α^m непрерывно вложено в пространство H_β^k ($H_\alpha^m \subset H_\beta^k$) тогда и только тогда, когда выполнены неравенства $k < m$, $\beta < 1/2$ и $m + \alpha - k - \beta \geq 0$; если последнее неравенство строгое, то данное вложение компактно.

(ii) Если $\gamma > -1/2$, то пространство $\overset{\circ}{H}_\gamma^s = \{u \in H_\gamma^s : D^k u(0) = D^k u(1) = 0, k = 0, 1, \dots, s-1\}$;

если $\gamma + s < 1/2$, то $\overset{\circ}{H}_\gamma^s = \dot{H}_\gamma^s = \{u \in H_\gamma^s : D^k u(1) = 0, k = 0, 1, \dots, s-1\}$.

(iii) Пространство $\overset{\circ}{H}_\gamma^s$ непрерывно вложено в пространство $\overset{\circ}{H}_{\gamma+k}^{s-k}$ при $k = 0, 1, \dots, s$.

(iv) Пространство H_γ^s вложено в $C^{s-1}[0, 1]$ тогда и только тогда, когда $\gamma > -1/2$; при этом данное вложение компактно.

(v) Пусть U – произвольное нормированное пространство. Для того чтобы линейный непрерывный оператор $L : U \rightarrow H_\gamma^s$ был компактен, необходимо и достаточно, чтобы был компактен оператор $D^s L : U \rightarrow L_{2,\gamma}$.

Для произвольного вещественного μ определим интегральный оператор Харди

$$K_\mu u(x) = x^{\mu-1} \int_0^x y^{-\mu} u(y) dy.$$

Естественной областью определения $\text{dom } K_\mu$ оператора Харди K_μ является множество измеримых на Ω функций $u(y)$, для которых функция $y^{-\mu} u(y)$ интегрируема по Лебегу на интервале $(0, x)$ для каждого $x \in (0, 1)$.

Теорема 2 [4]. Для оператора Харди справедливы утверждения:

- (i) если $\mu < \min(1, \gamma + s + 1/2)$, то K_μ непрерывен как оператор из H_γ^s в H_γ^s ;
- (ii) для $\mu \neq \nu$ имеет место псевдорезольвентное тождество

$$K_\mu K_\nu = K_\nu K_\mu = \frac{1}{\mu - \nu} (K_\mu - K_\nu);$$

(iii) для оператора Харди справедливы формулы дифференцирования:

если $u \in \text{dom } K_\mu$, то $x D K_\mu u = u + (\mu - 1) K_\mu u$;

если еще $Du \in \text{dom } K_\mu$, то $D K_\mu u = K_{\mu-1} Du$.

2. Постановка задачи и гладкость решения

На интервале $\Omega = (0, 1)$ рассматривается модельное уравнение 4-го порядка

$$Au \equiv D^2(x^\alpha a(x) D^2 u) + x^\beta b(x) u = f(x), \quad (1)$$

с граничными условиями Дирихле

$$u(0) = Du(0) = u(1) = Du(1) = 0. \quad (2)$$

Параметры α и β описывают степенные особенности коэффициентов дифференциального оператора A .

Далее предполагаются выполненные условия на коэффициенты уравнения: $\alpha < 1$ (условие слабого вырождения); $\beta + 4 - \alpha > 0$; $a(x) \geq a_0 > 0$, $b(x) \geq 0$; a , b – достаточно гладкие функции (их гладкость определяется ниже).

Положим $\hat{u}(x) = u(x)/\sigma(x)$, где u – решение задачи (1), (2), $\sigma(x) = x^{2-\alpha}$. Определим оператор \hat{A} формулой $\hat{A}\hat{u} = A(\sigma\hat{u})$. Вместо исходной задачи рассмотрим задачу о нахождении функции \hat{u} :

$$\hat{A}\hat{u}(x) = f(x), \quad \sigma\hat{u}|_{x=0} = D(\sigma\hat{u})|_{x=0} = \hat{u}(1) = D\hat{u}(1) = 0. \quad (3)$$

Для решения \hat{u} справедлива теорема гладкости

Теорема 3. Пусть $\alpha - 5/2 - s < \gamma < 1/2$, $a \in W_\infty^{s+2}$, $x^{\beta+2-\alpha}b \in W_\infty^s$. Тогда оператор \hat{A} осуществляет изоморфизм пространства $H_{\gamma-2}^{s+4} \cap \dot{H}_\gamma^2$ на H_γ^s . При этом для решения задачи (3) выполняются граничные условия $x^{4-\alpha}D^2\hat{u}(x)|_{x=0} = 0$, $D(x^{4-\alpha}D^2\hat{u}(x))|_{x=0} = 0$.

Доказательство. Оператор \hat{A} представим в виде $\hat{A} = \hat{A}_0 + B$, где

$$\hat{A}_0\hat{u}(x) = D^2(x^\alpha a(x)D^2(\sigma(x)\hat{u}(x))), \quad B\hat{u}(x) = x^{\beta+2-\alpha}b(x)\hat{u}(x).$$

При выполнении условий теоремы на коэффициенты a и b непосредственным дифференцированием проверяется, что операторы \hat{A}_0 , B и \hat{A} непрерывны из $H_{\gamma-2}^{s+4}$ в H_γ^s .

Покажем, что оператор \hat{A}_0 является изоморфизмом пространства $H_{\gamma-2}^{s+4} \cap \dot{H}_\gamma^2$ на H_γ^s , а оператор B компактен из $H_{\gamma-2}^{s+4}$ в H_γ^s . Тогда оператор $\hat{A} = \hat{A}_0 + B$ будет компактным возмущением изоморфизма \hat{A}_0 . Так как однородное уравнение $\hat{A}\hat{u} = Au = 0$ имеет только тривиальное решение (это следует из эллиптичности оператора A), то в силу альтернативы Фредгольма оператор $\hat{A} : H_{\gamma-2}^{s+4} \cap \dot{H}_\gamma^2 \rightarrow H_\gamma^s$ будет изоморфизмом.

Пусть $f \in H_\gamma^s$. Дважды интегрируя уравнение (1) с $b(x) \equiv 0$, получим $x^\alpha a(x)D^2u(x) = p(x) + f_1(x)$, где $p(x)$ – полином первой степени, который подбирается из граничных условий в точке $x = 1$, функция $f_1(x)$ такая, что $D^2f_1 = f$, $f_1 \in H_\gamma^{s+2}$. Положим $g(x) = \frac{p(x) + f_1(x)}{a(x)}$. Тогда $g \in H_\gamma^{s+2}$, так как $a \in W_\infty^{s+2}$ и $a(x) \geq a_0 > 0$. Поскольку $\alpha - j < \min(1, \gamma - j + s + 2 + 1/2)$ для $j = 0, 1, \dots, s+2$, то $D^j g \in \text{dom } K_{\alpha-j}$. Следовательно, $x^{-\alpha}g \in L_1(0, t)$ для любого $t \in (0, 1)$, и с учетом граничных условий в точке $x = 0$ получим

$$u(x) = \int_0^x \int_0^y t^{-\alpha} g(t) dt dy,$$

соответственно,

$$\hat{u}(x) = x^{\alpha-2} \int_0^x y^{1-\alpha} y^{\alpha-1} \int_0^y t^{-\alpha} g(t) dt dy = K_{\alpha-1} K_\alpha g.$$

Используя формулы дифференцирования оператора Харди (теорема 2) и условие $\alpha - 5/2 - s < \gamma$, будем иметь:

$$D^{s+2}\hat{u} = D^{s+2}(K_\alpha g - K_{\alpha-1}g) = K_{\alpha-s-2}D^{s+2}g - K_{\alpha-s-3}D^{s+2}g \in L_{2,\gamma},$$

$$\begin{aligned} D^{s+3}\hat{u} &= \frac{D^{s+2}g}{x} + \frac{\alpha-s-3}{x} K_{\alpha-s-2}D^{s+2}g - \frac{D^{s+2}g}{x} - \frac{\alpha-s-4}{x} K_{\alpha-s-3}D^{s+2}g = \\ &= \frac{4+s-\alpha}{x} K_{\alpha-s-3}D^{s+2}g - \frac{3+s-\alpha}{x} K_{\alpha-s-2}D^{s+2}g \in L_{2,\gamma-1}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} D^{s+4}\hat{u} &= \frac{(4+s-\alpha)(\alpha-s-5)}{x^2} K_{\alpha-s-3} D^{s+2} g - \\ &\quad - \frac{(3+s-\alpha)(\alpha-s-4)}{x^2} K_{\alpha-s-2} D^{s+2} g + \frac{D^{s+2} g}{x^2} \in L_{2,\gamma-2}. \end{aligned}$$

Следовательно, $\hat{u} \in H_{\gamma-2}^{s+4}$, и в силу непрерывности операторов Харди справедлива оценка $\|\hat{u}|H_{\gamma-2}^{s+4}\| \leq c\|f|H_\gamma^s\|$. Поскольку при $\gamma < 1/2$ выполнены вложения $H_{\gamma-2}^{s+4} \subset H_\gamma^{s+2} \subset H_\gamma^2$, то с учетом граничных условий для \hat{u} в точке $x = 1$ получим, что $\hat{u} \in H_{\gamma-2}^{s+4} \cap \dot{H}_\gamma^2$. Таким образом, оператор \widehat{A}_0 есть изоморфизм пространства $H_{\gamma-2}^{s+4} \cap \dot{H}_\gamma^2$ на H_γ^s .

Проверим выполнение естественных граничных условий в точке $x = 0$. Так как

$$D^2\hat{u} = K_{\alpha-2} D^2 g - K_{\alpha-3} D^2 g \in H_\gamma^s,$$

то при $x \rightarrow 0$

$$x^{4-\alpha} D^2 \hat{u} = x \int_0^x t^{2-\alpha} D^2 g(t) dt - \int_0^x t^{3-\alpha} D^2 g(t) dt \rightarrow 0$$

и

$$\begin{aligned} D(x^{4-\alpha} D^2 \hat{u}) &= \int_0^x t^{2-\alpha} D^2 g(t) dt + x x^{2-\alpha} D^2 g(x) - x^{3-\alpha} D^2 g(x) = \\ &= \int_0^x t^{2-\alpha} D^2 g(t) dt \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Наконец покажем, что оператор $B : H_{\gamma-2}^{s+4} \rightarrow H_\gamma^s$ компактен. Справедливо равенство

$$D^s B \hat{u}(x) = \sum_{j=0}^s C_s^j D^{s-j}(x^{\beta+2-\alpha} b(x)) D^j \hat{u}(x). \quad (4)$$

Пространство H_γ^{s+1-j} компактно вложено в $L_{2,\gamma}$ (теорема 1), следовательно, оператор $D^j : H_\gamma^{s+1} \rightarrow L_{2,\gamma}$ компактен для $j = 0, 1, \dots, s$. Из условия $x^{\beta+2-\alpha} b \in W_\infty^s$ следует, что все производные $D^k(x^{\beta+2-\alpha} b)$ ($k = 0, 1, \dots, s$) ограничены на $\bar{\Omega}$. Из равенства (4) и теоремы 1 (утверждение (v)) вытекает компактность оператора $B : H_{\gamma-2}^{s+4} \subset H_\gamma^{s+1} \rightarrow H_\gamma^s$. \square

Следствие 1. Если $a, x^{\beta+2-\alpha} b, f$ – функции класса $C^\infty[0, 1]$, то функция $\hat{u} \in C^\infty[0, 1]$.

Доказательство. Из теоремы 3 при $\gamma = 0$ и вложения $H_{-2}^{s+4} \subset H^{s+2}$ следует оценка $\|\hat{u}|H^{s+2}\| \leq c\|f|H_\gamma^s\|$. Так как $H^{s+2} \subset C^{s+1}$, то $\hat{u} \in C^{s+1}[0, 1]$ для любого s , то есть $\hat{u} \in C^\infty[0, 1]$. \square

Из теоремы 3 вытекает, что решение \hat{u} задачи (3) является гладкой функцией и ее гладкость зависит только от гладкости правой части f и коэффициентов $a, x^{\beta+2-\alpha} b$ и не зависит от степени вырождения α , тогда как у решения u исходной задачи при $\alpha > 0$ вторая производная в окрестности точки вырождения $x = 0$, вообще говоря, бесконечна.

3. Вариационная формулировка задачи

Рассмотрим обобщенную постановку исходной задачи (1), (2) на пространстве $V = \overset{\circ}{H}_{-\alpha/2}^2$ с нормой $\|u|V\| = \left(\int_{\Omega} x^{\alpha} (D^2 u)^2 dx \right)^{1/2}$. Определим билинейную форму \mathbf{a} на пространстве $V \times V$ и линейный функционал \mathbf{f} на пространстве V по формулам

$$\mathbf{a}(u, v) = \int_{\Omega} (x^{\alpha} a D^2 u D^2 v + x^{\beta} b u v) dx, \quad \mathbf{f}(v) = \int_{\Omega} f v dx.$$

Под обобщенным решением двухточечной краевой задачи (1), (2) будем понимать функцию $u \in V$, которая удовлетворяет равенству

$$\mathbf{a}(u, v) = \mathbf{f}(v) \quad \forall v \in V. \quad (5)$$

Теорема 4. *Если $\gamma \geq \alpha/2 - 2 - s$, то решение $u \in V$ задачи (5) существует и единственно для любой правой части $f \in H_{\gamma}^s$.*

Доказательство. Покажем непрерывность билинейной формы \mathbf{a} :

$$\begin{aligned} |\mathbf{a}(u, v)| &\leq \int_{\Omega} |x^{\alpha} a D^2 u D^2 v + x^{\beta} b u v| dx \leq \int_{\Omega} |x^{\alpha} a D^2 u D^2 v| dx + \int_{\Omega} |x^{\beta} b u v| dx \leq \\ &\leq c_1 \left[\left(\int_{\Omega} x^{\alpha} (D^2 u)^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} x^{\alpha} (D^2 v)^2 dx \right)^{1/2} + \right. \\ &\quad \left. + \left(\int_{\Omega} x^{\beta} u^2 dx \right)^{1/2} \left(\int_{\Omega} x^{\beta} v^2 dx \right)^{1/2} \right] \leq c \|u|V\| \|v|V\|, \end{aligned}$$

поскольку $V \subset L_{2,-\beta/2}$ при $\beta+4-\alpha > 0$. Эллиптичность формы \mathbf{a} на пространстве V следует из неравенств

$$\mathbf{a}(u, u) \geq \int_{\Omega} x^{\alpha} a (D^2 u)^2 dx \geq a_0 \|u|V\|^2.$$

Так как $V \subset L_{2,2-\alpha/2}$, то линейный функционал \mathbf{f} непрерывен на V , если $f \in L_{2,\alpha/2-2} \subset V^*$. А это выполнено, поскольку $H_{\gamma}^s \subset L_{2,\alpha/2-2}$ при $\gamma \geq \alpha/2 - 2 - s$. Из свойств билинейной формы \mathbf{a} и линейного функционала \mathbf{f} следует, что вариационное уравнение (5) однозначно разрешимо. \square

Положим $\widehat{V} = \dot{H}_{\alpha/2-2}^2$. Через σ обозначим линейный оператор умножения на функцию $\sigma(x) = x^{2-\alpha}$. В [12] доказана

Лемма 1. *Оператор σ является изоморфизмом пространства \widehat{V} на пространство V .*

Из леммы 1 следует, что вариационная задача (5) на гильбертовом пространстве V эквивалентна вариационной задаче на гильбертовом пространстве \widehat{V} : найти функцию $\widehat{u} \in \widehat{V}$ такую, что

$$\widehat{\mathbf{a}}(\widehat{u}, \widehat{v}) = \widehat{\mathbf{f}}(\widehat{v}) \quad \forall \widehat{v} \in \widehat{V}, \quad (6)$$

где $\widehat{\mathbf{a}}(\widehat{u}, \widehat{v}) = \mathbf{a}(\sigma u, \sigma v)$, $\widehat{\mathbf{f}}(\widehat{v}) = \mathbf{f}(\sigma v)$. При этом решения задач (5) и (6) связаны между собой соотношением $u = \sigma \widehat{u}$.

4. Аппроксимация задачи конечными элементами

На отрезке $[0, 1]$ зададим набор узлов $0 = x_0 < x_1 < \dots < x_n = 1$. Данный набор точек образует разбиение $\mathcal{T}_h = \{e_k\}_{k=1}^n$ отрезка $[0, 1]$ на конечные элементы $e_k = [x_{k-1}, x_k]$ с шагом $h = \max_{k=1,\dots,n} h_k$, где $h_k = x_k - x_{k-1}$. Предполагается существование постоянной $\mu > 0$, не зависящей от h , что $h_{k+1} \leq \mu h_k$, $k = 1, \dots, n-1$.

Пусть $m \geq 3$ – натуральное число. Определим пространство конечных элементов $S_h^{m,1}$ как множество функций класса C^1 , сужение каждой из которых на произвольный конечный элемент $e_k \in \mathcal{T}_h$ есть полином степени m , то есть

$$S_h^{m,1} \equiv S^{m,1}(\mathcal{T}_h) = \{\varphi \in C^1[0, 1] : \varphi|_{e_k} \in P_m(e_k) \forall e_k \in \mathcal{T}_h\}.$$

Пусть выполнены условия: $\alpha/2 - (m-1) < \gamma < 1/2$, $a \in W_\infty^{m-1}$, $x^{\beta+2-\alpha}b \in W_\infty^{m-3}$, $f \in H_\gamma^{m-3}$. Поскольку $1/2 > \gamma > \alpha/2 - (m-1) > \alpha - (m-3) - 5/2$, то по теореме 3 решение краевой задачи (1), (2) можно записать в виде $u = \sigma\hat{u}$, где функция \hat{u} – решение вариационной задачи (6), причем имеет место оценка $\|\hat{u}\|H_{\gamma-2}^{m+1} \leq c\|f\|H_\gamma^{m-3}$.

Положим $\hat{V}_h = S_h^{m,1} \cap \hat{V} = \{\hat{v} \in S_h^{m,1} : \hat{v}(1) = D\hat{v}(1) = 0\}$, $V_h = \sigma\hat{V}_h$.

Через $u_h \in V_h$ обозначим приближение Галеркина для задачи (5), то есть функция u_h является решением вариационного уравнения

$$\mathbf{a}(u_h, v) = \mathbf{f}(v) \quad \forall v \in V_h. \quad (7)$$

В качестве приближенного решения задачи (6) возьмем функцию $\hat{u}_h \in \hat{V}_h$ такую, что

$$\hat{\mathbf{a}}(\hat{u}_h, \hat{v}) = \hat{\mathbf{f}}(\hat{v}) \quad \forall \hat{v} \in \hat{V}_h. \quad (8)$$

Тогда $u_h = \sigma\hat{u}_h$, и для погрешности приближения в энергетической норме справедлива оценка:

$$\|u - u_h\|_V \sim \sqrt{\mathbf{a}(u - u_h, u - u_h)} = \sqrt{\hat{\mathbf{a}}(\hat{u} - \hat{u}_h, \hat{u} - \hat{u}_h)} \sim \|\hat{u} - \hat{u}_h\|_{\hat{V}}.$$

Теорема 5. Пусть $\alpha/2 - (m-1) < \gamma < 1/2$, $a \in W_\infty^{m-1}$, $x^{\beta+2-\alpha}b \in W_\infty^{m-3}$. Тогда для $f \in H_\gamma^{m-3}$ справедлива оценка погрешности метода

$$\|u - u_h\|_V \leq ch^\theta \|f\|H_\gamma^{m-3}, \quad (9)$$

где $\theta = \min(m-1, m-1+\gamma-\alpha/2)$.

Доказательство. Используя лемму Сеа [17, с. 109], весовые оценки конечно-элементной аппроксимации [18] и теорему 3 для $s = m-3$, получим оценку (9):

$$\begin{aligned} \|u - u_h\|_V &\sim \|\hat{u} - \hat{u}_h\|_{\hat{V}} \leq c_1 \inf_{\varphi \in \hat{V}_h} \|\hat{u} - \varphi\|_{\hat{V}} \leq c_2 h^\theta \|D^{m+1}\hat{u}\|_{L_{2,\gamma-2}} \leq \\ &\leq c_3 h^\theta \|\hat{u}\|_{H_{\gamma-2}^{m+1}} \leq ch^\theta \|f\|H_\gamma^{m-3}. \end{aligned}$$

□

Следствие 2. Если $a \in W_\infty^{m-1}$, $x^{\beta+2-\alpha}b, f \in W_\infty^{m-3}$, то

$$\|u - u_h\|_V \sim \|\hat{u} - \hat{u}_h\|_{\hat{V}} \leq ch^{m-1} \|f\|W_\infty^{m-3}.$$

Справедливость утверждения непосредственно вытекает из теоремы, поскольку при $\alpha < 1$ имеет место вложение $W_\infty^{m-3} \subset H_{\alpha/2}^{m-3}$.

5. Результаты численных экспериментов

Пусть (X, ρ) – полное метрическое пространство. Если для некоторой последовательности (v_j) и элемента v из X выполнена оценка $\rho(v_j, v) \leq cq^{-j}$, где $j = 0, 1, \dots, q > 1$, то имеет место неравенство

$$\rho(v_j, v_{j+1}) \leq \rho(v_j, v) + \rho(v, v_{j+1}) \leq (c + cq^{-1})q^{-j}.$$

Справедливо и обратное утверждение

Лемма 2. *Если для некоторой последовательности $v_j \in X$ выполнено неравенство $\rho(v_j, v_{j+1}) \leq c_1 q^{-j}$, $j = 0, 1, \dots, q > 1$, то существует единственный элемент $v \in X$ такой, что $\rho(v_j, v) \leq c_2 q^{-j}$.*

Доказательство. Для любых целых неотрицательных j и натуральных s имеем цепочку неравенств

$$\begin{aligned} \rho(v_j, v_{j+s}) &\leq \rho(v_j, v_{j+1}) + \rho(v_{j+1}, v_{j+2}) + \cdots + \rho(v_{j+s-1}, v_{j+s}) \leq \\ &\leq \left(c_1 \sum_{i=0}^{s-1} q^{-i} \right) q^{-j} \leq \left(c_1 \sum_{i=0}^{\infty} q^{-i} \right) q^{-j} = c_1 \frac{q}{(q-1)} q^{-j} = c_2 q^{-j}, \end{aligned} \quad (10)$$

откуда следует, что последовательность (v_j) фундаментальна. Так как пространство X полное, то у этой последовательности существует предел, который обозначим через v . Переходя в неравенстве (10) к пределу при $s \rightarrow \infty$, получим оценку $\rho(v_j, v) \leq c_2 q^{-j}$. \square

Пусть m – степень полиномов на конечном элементе, \hat{u}_n , \hat{u}_{2n} – решения (8) на равномерной сетке, состоящей из n и $2n$ конечных элементов соответственно. Тогда по лемме 2 при $q = 2^{m-1}$, $n = n_0 2^j$ (n_0 – начальное число конечных элементов) из неравенства $\|\hat{u}_n - \hat{u}_{2n}\| \leq c_1 n^{1-m}$ следует, что $\|\hat{u}_n - \hat{u}\| \leq c_2 n^{1-m}$. Таким образом, проверка ограниченности величин $n^{m-1} \|\hat{u}_n - \hat{u}_{2n}\|$ может служить тестом на сходимость метода с порядком $m-1$. В табл. 1 эти величины вычислены для $a(x) = 1+x$, $b(x) = x$, $\beta = \alpha$, $f(x) = 1+x$.

Табл. 1

m	$\alpha \setminus n$	16	32	64	128	256	512
3	-0.5	2.0e-3	1.6e-3	1.5e-3	1.4e-3	1.4e-3	1.4e-3
3	0	2.9e-3	2.3e-3	2.0e-3	1.9e-3	1.8e-3	1.8e-3
3	0.2	3.5e-3	2.8e-3	2.4e-3	2.2e-3	2.1e-3	2.1e-3
3	0.5	4.6e-3	3.9e-3	3.5e-3	3.1e-3	2.8e-3	2.6e-3
3	0.9	6.6e-3	6.3e-3	6.0e-3	5.8e-3	5.6e-3	5.5e-3
4	-0.5	2.7e-4	2.7e-4	2.7e-4	2.7e-4	2.7e-4	2.7e-4
4	0	3.3e-4	3.3e-4	3.3e-4	3.3e-4	3.3e-4	3.4e-4
4	0.2	3.5e-4	3.6e-4	3.6e-4	3.6e-4	3.7e-4	3.7e-4
4	0.5	4.0e-4	4.0e-4	4.0e-4	4.0e-4	4.0e-4	4.1e-4
4	0.9	4.7e-4	4.8e-4	4.9e-4	4.9e-4	4.9e-4	5.0e-4

Заключение

Схемы МКЭ, основанные на мультипликативном выделении особенности для рассматриваемой задачи, имеют в энергетической норме оптимальную скорость сходимости $O(h^{m-1})$ на классе правых частей из W_∞^{m-3} , $m \geq 3$. Данный метод является эффективным как в регулярном случае $\alpha = \beta = 0$, так и в случае

вырождения, тогда как стандартный МКЭ при $0 < \alpha < 1$ для сколь угодно гладкой правой части и любого $m \geq 3$ приводит к существенно худшей сходимости $O(h^{(1-\alpha)/2})$, которая не улучшается с повышением гладкости входных данных и степени полиномов m на конечном элементе.

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты № 09-01-97015, 10-01-00728).

Summary

A.A. Sobolev, M.R. Timerbaev. On Finite Element Method of High-Order Accuracy for Two-Point Degenerated Dirichlet Problem of 4th Order.

In this paper two-point boundary value problem for a differential equation of 4th order with degeneration is considered. This problem is solved by the finite element method of high-order accuracy with a multiplicative separation of singularity. The optimal convergence rate of the presented method for a given class of smoothness of the right-hand sides is proved.

Key words: two-point boundary value problem, weighted Sobolev space, finite element method, multiplicative decomposition of singularity.

Литература

1. Смирнов М.М. Вырождающиеся эллиптические и гиперболические уравнения. – М.: Наука, 1966. – 292 с.
2. Лизоркин П.И., Никольский С.М. Эллиптические уравнения с вырождением. Дифференциальные свойства // Докл. АН СССР. – 1981. – Т. 257, № 2. – С. 278–282.
3. Кыдырайлиев С.К. О повышении гладкости решений вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1989. – Т. 25, № 3. – С. 529–531.
4. Тимербаев М.Р. Весовые оценки решения задачи Дирихле с анизотропным вырождением на части границы // Изв. вузов. Матем. – 2003. – № 1. – С. 60–73.
5. Гусман Ю.А., Оганесян Л.А. Оценки сходимости конечно-разностных схем для вырожденных эллиптических уравнений // Журн. вычисл. матем. и матем. физ. – 1965. – Т. 5, № 2. – С. 351–357.
6. Franchi B., Tesi M.K. A finite element approximation for a class of degenerate elliptic equations // Math. of Comp. – 1999. – V. 69, No 229. – P. 41–63.
7. Ляшко А.Д., Тимербаев М.Р. Оценки точности схем МКЭ для вырождающихся эллиптических уравнений второго порядка // Дифференц. уравнения. – 1993. – Т. 29, № 7. – С. 1210–1215.
8. Тимербаев М.Р., Ляшко А.Д. Об оценках погрешности схем МКЭ для квазилинейных вырождающихся уравнений 2-го порядка // Дифференц. уравнения. – 1994. – Т. 30, № 7. – С. 1239–1243.
9. Тимербаев М.Р. Конечноэлементная аппроксимация вырождающегося эллиптического уравнения 2-го порядка в области с криволинейной границей // Изв. вузов. Матем. – 1994. – № 9. – С. 78–86.
10. Карчевский М.М., Ляшко А.Д., Тимербаев М.Р. Метод конечных элементов для квазилинейных вырождающихся уравнений 4-го порядка // Дифференц. уравнения. – 1999. – Т. 35, № 2. – С. 232–237.
11. Тимербаев М.Р. Мультиплективное выделение особенности в схемах МКЭ для эллиптических вырождающихся уравнений // Дифференц. уравнения. – 2000. – Т. 36, № 7. – С. 1086–1093.

12. Тимербаев М.Р. О схемах МКЭ для 2-точечной граничной задачи Дирихле 4-го порядка со слабым вырождением // Исслед. по прикл. матем. и инф. – Казань: Казан. гос. ун-т, 2004. – Вып. 25. – С. 78–85.
13. Таюпов Ш.И., Тимербаев М.Р. Схемы МКЭ высокого порядка точности для неоднородной двухточечной граничной задачи с вырождением // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2006. – Т. 148, кн. 4. – С. 63–75.
14. Кудрявцев Л.Д. Об эквивалентных нормах в весовых пространствах // Тр. МИАН им. Стеклова. – 1984. – Т. 170, Ч. 10. – С. 161–190.
15. Никольский С.М. Приближение функций многих переменных и теоремы вложения. – М.: Наука, 1977. – 456 с.
16. Трибель Х. Теория интерполяции. Функциональные пространства. Дифференциальные операторы. – М.: Мир, 1980. – 664 с.
17. Съярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. – М.: Мир, 1980. – 512 с.
18. Тимербаев М.Р. Конечноэлементная аппроксимация в весовых пространствах Соболева // Изв. вузов. Матем. – 2000. – № 11. – С. 76–84.

Поступила в редакцию
25.01.10

Тимербаев Марат Равилевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *marat.timerbaev@ksu.ru*

Соболев Андрей Анатольевич – аспирант кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета.

E-mail: *andreyasob@yandex.ru*