Министерство образования и науки Российской Федерации

КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
им. Н.И. Лобачевского

КАФЕДРА ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И ПРИБЛИЖЕНИЙ

Направление: 010301 - Математика

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

Неравества типа Харди в выпуклых областях с конечным внутренним радиусом

Работа завершена:

"___"____________2015 г. ____________И.Р. Загитова

Работа проверена:

Научный руководитель

кандидат физико-математических наук,

"___"____________2015 г. ____________Р.Г. Насибуллин

Заведующий кафедрой теории функций и приближений,

доктор физико-математических наук, профессор

"___"____________2015 г. ____________Ф.Г. Авхадиев

Казань - 2015 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ **2**

Глава 1

Обзор результатов Ф.Г. Авхадиева и Р.Г. Насибуллина **6**

§1.1 Одномерные неравенства типа Харди 6

§1.2 Неравенства в пространственных областях 11

§1.3 Случай выпуклых областей 16

Глава 2

Основная часть **18**

§2.1 Одномерные неравенства 18

§2.2 Пространственные аналоги 20

Литература **23**

ВВЕДЕНИЕ

Выпускная работа посвящена неравенствам типа Харди в выпуклых областях с конечным внутренним радиусом. Неравенства этого типа широко применяются в разных областях математики и математической физики. Примеры использования неравенств типа Харди можно увидеть в работах С.Л. Соболева [6], Ф.Г. Авхадиева [1], А. Лаптева и Т. Вейдла [7]. Широкое развитие теория неравенств типа Харди получили лишь во второй половине 20 века. Помимо самого Харди, рядом других авторов были получены значительные результаты, например, такими авторами как Дж. Таленти, Дж. Томаселли, Б. Макенхоупт, В.Г. Мазья, В.Д. Степанов, В. Левин, Ф.Г. Авхадиев, К.-Й. Виртц, Ю.А. Дубинский, Д.В. Прохоров. Для начала приведем краткое историческое развитие неравенств Харди. А именно дискретные и интегральные аналоги, которые впервые были доказаны Г. Харди. Начнем с изложения дискретного аналога неравенства Харди (см. [8]).

Теорема A. *Положим* $p > 1$, $a_n \geq 0$ *и* $A_n = a_1 + a_2 + \cdots + a_n$. *Тогда*

$$\sum \left(\frac{A_n}{n}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \sum a_n^p,$$

кроме случая, когда все $a = 0$. *Константа* $\left(\dfrac{p}{p-1}\right)^p$ *- наилучшая.*

Как уже было сказано ранее, Теорему A впервые доказал Г. Харди, за исключением точного определения константы. После Э. Ландау установил это неравенство с точной константой. Соответствующим интегральным аналогом Теоремы A при $p > 1$ является Теорема B (см. [8]).

Теорема B. *Пусть* $p > 1,\ f(x) \geq 0$ *и*

$$F(x) = \int\limits_0^\infty f(t)dt.$$

Тогда

$$\int\limits_0^\infty \left(\frac{F}{x}\right)^p < \left(\frac{p}{p-1}\right)^p \int\limits_0^\infty f^p dx, \tag{0.0.1}$$

кроме того случая, когда $f \equiv 0$*.Константа является наилучшей.*

Отметим, что неравенство (0.0.1) является критерием сходимости интеграла. Приведем более общее одномерное неравенство Харди, в котором весовая функция содержится в левой и в правой части. Справедливо следующее неравенство:

$$\int\limits_0^{+\infty} \frac{|u(t)|^p}{t^s}dt \leqslant \left(\frac{p}{|s-1|}\right)^p \int\limits_0^{+\infty} \frac{|u'(t)|^p}{t^{s-p}}dt,$$

при $p \geq 1$, $s \in \mathbb{R}$, $s \neq 1$, и любой абсолютно непрерывной функции $u : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, $u'/t^{s/p-1} \in L^p(0, \infty)$, такой, что $u(0) = 0$ когда $s > 1$ и $u(\infty) = 0$ когда $s < 1$.

Широкое распространение получили многомерные аналоги неравенств типа Харди, предполагающие, что область интегрирования Ω – открытое собственное подмножество $\mathbb{R}^n$, сделана замена функции u и ее производной u' на функцию $f \in C_0^\infty(\Omega)$ (где $C_0^\infty(\Omega)$ – множество непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω) и на ее градиент ∇f, степени t были заменены на степени $\delta = \delta(x) = dist(x, \partial\Omega)$ – функции расстояния до границы области.

Пусть Ω – область в $\mathbb{R}^n$, $\Omega \neq \mathbb{R}^n$. Будем рассматривать сначала следующую постоянную Харди $c_p(s, \Omega)$, которую можем определить как наименьшую из возможных неотрицательную величину в следующем неравенстве

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq c_p(s,\Omega) \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx, \qquad f \in C_0^1(\Omega),$$

где $C_0^1(\Omega)$ – множество непрерывно дифференцируемых функций с компактным носителем в Ω. Следующий результат в случае $s > n$ получил Ф.Г. Авхадиев [2].

Теорема C. *Пусть* Ω *– открытое собственное подмножество* $\mathbb{R}^n$*. Тогда* $1 \leq p < \infty$ *и* $n < s < \infty$*, выполняется соотношение*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{s-n}\right)^p \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p}} dx, \qquad f \in C_0^1(\Omega), \tag{0.0.2}$$

причем константу $p^p(s-n)^{-p}$ *нельзя улучшить.*

Также известны результаты при $s = n$. В самом деле, при $s = n$ имеются области, для которых соответствующая постоянная Харди равна бесконечности, например, при любом $p \geq 1$

$$c_p(n, \mathbb{R}^n \setminus \{0\}) = \infty.$$

При $s = n$, Ф. Г. Авхадиев [2] использовал веса с логарифмическими особенностями. Для произвольной области Ω он показал выполнение соответствующего неравенства:

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^n} dx \leq p^p \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{n-p}} \left(\ln \frac{\delta_0}{\delta}\right)^p dx, \qquad f \in C_0^1(\Omega).$$

При $s < n$ *для произвольной области* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *с конечным внутренним радиусом*

$$\delta_0 = \delta_0(\Omega) := sup\{\delta(x, \partial\Omega) : x \in \Omega\}$$

Ф.Г. Авхадиев и Р.Г. Насибуллин [4] показали, что имеет место утверждение

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{n-s}\right)^p \delta_0(\Omega)^{p(n-s)} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}} dx, \qquad f \in C_0^1(\Omega). \tag{0.0.3}$$

В первой главе 1 изложены одномерные неравенства из [4] и их многомерные аналоги с подробным изложением доказательств. Рассматриваются неравенства типа Харди в произвольных и выпуклых областях. Также в первой главе приведены доказательства неравенств с весами, содержащими степени и логарифмы функции расстояния до границы области. Во второй главе получены новые одномерные и многомерные неравенства типа Харди, которые являются аналогами неравенства (0.0.3). А именно

Теорема. *Предположим, что* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывная функция, которая удовлетворяет граничным условиям* $f(a) = f(b) = 0$, *и пусть* $0 < b - a < \infty$, $\delta(x) = \min\{x - a, b - x\}$. *При* $f \not\equiv 0$ *и* $f'/\delta(x)^4 \in L^1(a, b)$ *верно строгое неравенство*

$$\int\limits_a^b \frac{|f(x)|}{\delta(x)} dx < \frac{1}{4e}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \int\limits_a^b \frac{|f'(x)|}{\delta(x)^4} dx,$$

Теорема. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– произвольное открытое множество. Известно, что* $n \geq 1$. *При* $1 \leq p < \infty$ *справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta} dx \leq \left(\frac{{\delta_0}^4 p}{4e}\right)^p \int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{3p+1}} dx,$$

где $\delta = \delta_0(\Omega) := \sup\{dist(x, \partial\Omega) : x \in \Omega\}$, $\partial\Omega$ *– граница* Ω.

Глава 1

Обзор результатов Ф.Г. Авхадиева и Р.Г. Насибуллина

§1.1 Одномерные неравенства типа Харди

Основным результатом статьи [4] является неравенство (0.0.3). Для его доказательства в статье [4] авторы использовали следующую

Теорема 1.1.1. *Пусть* $0 < b - a < \infty$, $\delta(x) = \min\{x - a, b - x\}$, *и пусть* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывная функция, которая удовлетворяет граничным условиям* $f(a) = f(b) = 0$. *При* $\nu \in [1, \infty)$, $\sigma \in (-\infty, \nu)$, $f \not\equiv 0$ *и* $f'/\delta(x)^{\nu-1} \in L^1(a, b)$, *выполняется следующее неравенство*

$$\int\limits_a^b \frac{|f(x)|}{\delta(x)^\sigma} dx < M(\sigma, \nu) \left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu-\sigma} \int\limits_a^b \frac{|f'(x)|}{\delta(x)^{\nu-1}} dx, \tag{1.1.1}$$

где

$$M(\sigma, \nu) := \begin{cases} (1-\sigma)^{-1}, & \text{если } \nu = 1, \\ (\nu-1)^{-1} e^{-1}, & \text{если } \sigma = 1, \\ (\nu-\sigma)^{-1}((\nu-1)/(\nu-\sigma))^{(\nu-1)/(1-\sigma)}, & \text{если } \nu \neq 1,\ \sigma \neq 1, \end{cases}$$

для параметров $\nu \geq 1$, $\sigma < \nu$, *и эта постоянная является точной.*

Прежде доказывается следующая лемма.

Лемма 1.1.1. *Предположим* $\rho > 0$, $g : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ *- абсолютно непрерывная функция, которая удовлетворяет граничному условию* $g(0) = 0$. *Если* $\nu \in [1, \infty)$, $\sigma \in (-\infty, \nu)$, $g \not\equiv 0$ *и* $g'/t^{\nu-1} \in L^1(0, 1)$, *то* *верно неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^\sigma}dt < M(\sigma,\nu)\rho^{\nu-\sigma}\int_0^\rho \frac{|g'(t)|}{t^{\nu-1}}dt, \tag{1.1.2}$$

при этом для всех допустимых значений σ и ν постоянная $M(\sigma,\nu)$ точная.

Доказательство леммы взято из статьи [4], но с более подробным изложением. Приведем его.

Доказательство. Оказывается, достаточно доказать это неравенство для случая $\rho = 1$. Известно, что

$$\left|\int_0^1 g(t)dt\right| \leq \int_0^1 |g(t)|dt.$$

Неравенство (1.1.2) при $\rho = 1$ выглядит

$$\int_0^1 \frac{|g(t)|}{t^\sigma}dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^\sigma}\int_0^t |g'(x)|dx.$$

В этом случае верно

$$|g(t)| \leq \int_0^t |g'(x)|dx.$$

Далее меняем порядок интегрирования в повторных интегралах. Получаем

$$\int_0^1 \frac{|g(t)|}{t^\sigma}dt \leq \int_0^1 \frac{dt}{t^\sigma}\int_0^t |g'(x)|dx = \int_0^1 |g'(x)|\int_x^1 \frac{dt}{t^\sigma}dx. \tag{1.1.3}$$

После необходимо проделать некоторые элементарные выкладки, с помощью которых определяются экстремумы следующей неотрицательной функции

$$T_{\sigma,\nu}(x) = x^{\nu-1}\int_x^1 \frac{dt}{t^\sigma}.$$

Очевидно, что отсюда следует

$$\int\limits_x^1 \frac{dt}{t^\sigma} = \frac{T_{\sigma,\nu}(x)}{x^{\nu-1}}.$$

Тогда, подставляя полученное выражение вместо второго интеграла в формуле (1.1.3), получим

$$\int\limits_0^1 |g'(x)| \int\limits_x^1 \frac{dt}{t^\sigma} dx = \int\limits_0^1 \frac{|g'(x)|}{x^{\nu-1}} T_{\sigma,\nu}(x) dx.$$

Точка $x(\sigma,\nu) \in [0,1)$. Определим значение этой точки в случае $\sigma < \nu = 1$.

$$T_{\sigma,\nu}(x) = x^{1-1} \int\limits_x^1 \frac{dt}{t^\sigma} = \int\limits_x^1 \frac{dt}{t^\sigma} = \left(\frac{t^{1-\sigma}}{1-\sigma} \bigg|_x^1 \right) =$$

$$= \frac{1^{1-\sigma}}{1-\sigma} - \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} = \frac{1}{1-\sigma} - \frac{x^{1-\sigma}}{1-\sigma} = \frac{(1-x^{1-\sigma})}{1-\sigma}.$$

Продифференцируем полученный результат

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{(1-x^{1-\sigma})}{1-\sigma} \right) = -\frac{1}{1-\sigma}(1-\sigma)x^{1-\sigma-1} = -x^{-\sigma} = 0.$$

Теперь рассмотрим случай $\sigma = 1 < \nu$.

$$T_{\sigma,\nu}(x) = x^{\nu-1} \int\limits_x^1 \frac{dt}{t} = -x^{\nu-1}\ln x,$$

$$\frac{d}{dx}(-x^{\nu-1}\ln x) = -(\nu-1)x^{\nu-2}\ln x + (-x^{\nu-1})\frac{1}{x}.$$

Как известно,

$$x^{\nu-2} = \frac{x^\nu}{x^2}, x^{\nu-1} = \frac{x^\nu}{x}.$$

Таким образом

$$\frac{d}{dx}(-x^{\nu-1}\ln x) = (1-\nu)\frac{x^\nu}{x^2}\ln x - \frac{x^\nu}{x^2} = \frac{x^\nu}{x^2}((1+\nu)\ln x - 1) = 0.$$

Следовательно, либо $\dfrac{x^\nu}{x^2} = 0$, либо $((1+\nu)\ln x - 1) = 0$. Решая второе уравнение получаем $x = e^{\frac{1}{1-\nu}}$.

Осталось рассмотреть случай при $\sigma \neq 1 < \nu$:

$$T_{\sigma,\nu}(x) = x^{\nu-1}\int\limits_x^1 \frac{dt}{t^\sigma} = \frac{x^{\nu-1}}{\sigma-1}(x^{1-\sigma}-1).$$

Найдем производную от функции относительно x и приравняем ее к нулю.

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{x^{\nu-1}}{\sigma-1}x^{1-\sigma} - \frac{x^{\nu-1}}{\sigma-1}\right) =$$

$$(\nu-1)x^{\nu-2}\frac{x^{1-\sigma}}{\sigma-1} + (1-\sigma)x^{-\sigma}\frac{x^{\nu-1}}{\sigma-1} - (\nu-1)x^{\nu-2}\frac{1}{\sigma-1} =$$

$$\frac{x^\nu}{x(\sigma-1)}\left(\frac{\nu-1}{x^\sigma} + \frac{(1-\sigma)}{x^\sigma} - \frac{(\nu-1)}{x}\right) = 0 \Rightarrow$$

$\Rightarrow$ либо $\dfrac{x^\nu}{x(\sigma-1)} = 0$, либо $\left(\dfrac{\nu-1}{x^\sigma} + \dfrac{(1-\sigma)}{x^\sigma} - \dfrac{(\nu-1)}{x}\right) = 0.$

При $\sigma \neq 1 < \nu$ функция достигает максимума в точке

$$x = \left(\frac{\nu-1}{\nu-\sigma}\right)^{\frac{1}{1-\sigma}}.$$

В итоге

$$x(\sigma,\nu) = \begin{cases} 0, & \text{если } \sigma < \nu = 1, \\ \exp(1/(1-\nu)), & \text{если } \sigma = 1 < \nu, \\ ((\nu-1)/(\nu-\sigma))^{1/(1-\sigma)}, & \text{если } \sigma \neq 1 < \nu. \end{cases}$$

Таким образом видим, что наша функция $T_{\sigma,\nu}(x)$ имеет строгий максимум лишь в единственной точке $x(\sigma,\nu) \in [0,1)$. Теперь можем привести доказательство теоремы 1.1.1.

Доказательство Теоремы 1.1.1. Положим в лемме 1 $\rho = (b-a)/2$. Достаточно применить лемму 1.1.1. к двум следующим функциям

$$g(t) = f(t+a), \qquad g(t) = f(b-t).$$

Следовательно

$$\int\limits_{a}^{(a+b)/2} \frac{|f(x)|}{(x-a)^{\sigma}}dx < M(\sigma,\nu)\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu-\sigma} \int\limits_{a}^{(a+b)/2} \frac{|f'(x)|}{(x-a)^{\nu-1}}dx,$$

$$\int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|f(x)|}{(b-x)^{\sigma}}dx < M(\sigma,\nu)\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\nu-\sigma} \int\limits_{(a+b)/2}^{b} \frac{|f'(x)|}{(b-x)^{\nu-1}}dx.$$

Сложив полученные неравенства, имеем требуемое неравенство (1.1.1). Теорема доказана. В частном случае справедливо

Следствие 1.1.1. *Верно неравенство*

$$\int\limits_{-1}^{1} \frac{|f(x)|}{1-|x|}dx \leq \frac{1}{e}\int\limits_{-1}^{1} \frac{|f'(t)|}{1-|x|}dx, f \in C_0^1((-1,1)), f \not\equiv 0,$$

где постоянная $1/e$ *точная.*

§1.2 Неравенства в пространственных областях

В этом разделе приведены многомерные аналоги неравенства Харди. Следующая теорема доказана с использованием метода Авхадиев. Метод заключается в разбиении простейшей невыпуклой области.

Теорема 1.2.1. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– произвольное открытое множество с конечным внутренним радиусом* $\delta_0(\Omega)$*, причем* $n \geq 1$*, причем* $\delta := dist(x, \partial\Omega)$*. Если* $1 \leq p < \infty$ *и* $-\infty < s < n$*, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{n-s}\right)^p \delta_0(\Omega)^{p(n-s)} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}} dx. \tag{1.2.1}$$

Доказательство: Достаточно рассмотреть неравенство (1.2.1) в случае $p = 1$

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|}{\delta^s} dx \leq \frac{\delta_0^{n-s}}{n-s} \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|}{\delta^{n-1}} dx. \tag{1.2.2}$$

Зафиксируем $p \in (1, \infty)$ и $f \in C_0^1(\Omega)$. Ясно, что $g = |f|^p \in C_0^1(\Omega)$. К $g \in C_0^1(\Omega)$ применим (1.2.2) и неравенство Гёльдера с показателями $p/(p-1)$ и p. Отсюда следует

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \frac{\delta_0^{n-s}}{n-s} p \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-1|}|\nabla f|}{\delta^{n-1}} dx \leq$$

$$\frac{p\delta_0^{n-s}}{n-s} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-p+(n-s)p}} dx\right)^{1/p}.$$

Простое преобразование дает:

$$\left(\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx\right)^p \leq \left(\frac{p}{n-s}\right)^p \delta_0^{p(n-s)} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx\right)^{(p-1)} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{s-n+(n-s)p}} dx\right).$$

Следовательно, имеем неравенство (1.2.1) для фиксированного $p \in (1, \infty)$.

Случай $n = 1$ и $p = 1$ является следствием теоремы 1.1.1. Легко увидеть, что для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ верны следующие неравенства

$$\int\limits_{a_m}^{b_m} \frac{|f(x)|}{\delta^s} dx \geq M(s,1) \left(\frac{b_m - a_m}{2}\right)^{1-s} \int\limits_{a_m}^{b_m} |f'(x)| dx \geq \frac{\delta_0(\Omega)^{1-s}}{1-s} \int\limits_{a_m}^{b_m} |f'(x)| dx.$$

Суммирование по m дает требуемое неравенство.

Осталось разобрать случай $p = 1$, $n \geq 2$, когда Ω – область в $\mathbb{R}^n$ с конечным внутренним радиусом $\delta_0 = \delta_0(\Omega)$. Для доказательства применяется метод Ф.Г. Авхадиева, который состоит из нескольких этапов. Приведем краткое изложение этого метода.

На первом этапе автор показал, что достаточно ограничиться областями специального вида, которые составлены из кубиков с одинаковыми длинами сторон, параллельными осям координат. С этой целью рассматривается стандартное покрытие $\mathbb{R}^n$ кубиками $Q_{\varepsilon,\omega} = [0, \varepsilon]^n + \varepsilon\omega$, $\omega \in \mathbb{Z}^n \subset \mathbb{R}^n$. Конечное множество индексов определяется следующим образом

$$\mathbb{Z}^n(\Omega, \varepsilon) = \{\omega \in \mathbb{Z}^n : Q_{\varepsilon,\omega} \subset \Omega \cap \{v \in \mathbb{R}^n : |v| < 1/\varepsilon\}\}$$

где аппроксимация Ω: $\Omega(\varepsilon) = int \bigcup\limits_{\omega \in \mathbb{Z}^n(\Omega,\varepsilon)} Q_{\varepsilon,\omega} \subset \Omega$.

На втором этапе строится специальное разбиение области $\Omega = \Omega_1$, в которой и доказывается искомое неравенство Харди.

Пусть S — (n – k)-мерная грань некоторого кубика $Q_{1,\omega_j} \subset \overline{\Omega_1}$, кроме того $S \subset \partial\Omega_1$. Подмножество области Ω_1 определяется

$$K(S) =$$

$$= \{x \in \overline{\Omega(1)} : \text{существует точка } y \in S \text{ такая, что } \delta(x, \partial\Omega(1)) = |x - y|\}.$$

где $k \in \{1, 2, ..., n\}$, причем $\overline{\Omega_1} = \bigcup\limits_{S \subset \partial\Omega_1} K(S)$, $\forall g \in C(\overline{\Omega}_1)$.

$$\int\limits_{\Omega_1} g(x) dx = \sum_{S \subset \partial\Omega_1} \int\limits_{K(S)} g(x) dx. \qquad (1.2.3)$$

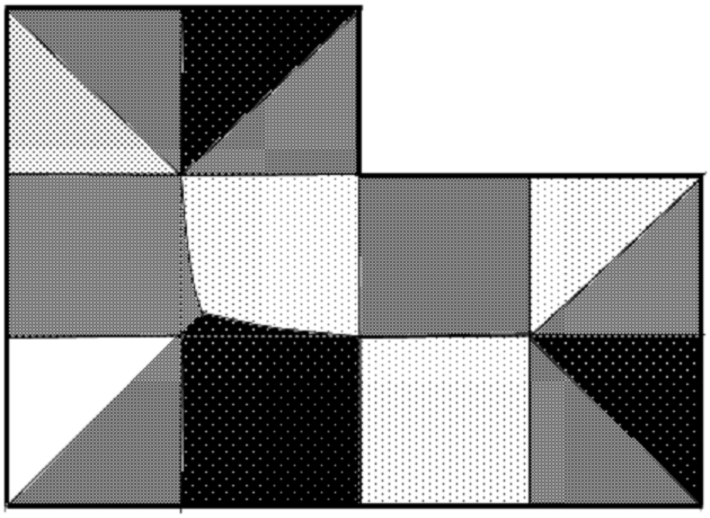

Рис. 1: Вид множества Ω_0.

Пусть $f \in C_0^1(\Omega_1)$, $s < n$, δ – расстояние от точки $x \in \Omega_1$ до границы области Ω_1, и используется формула (1.2.3) для функции

$$g(x) = \frac{|f(x)|}{\delta^s},$$

На 3 этапе доказываются неравенства типа Харди для каждого множества $K(S) \neq \emptyset$, и затем суммируются.

Как показано в [4], при вычислении интегралов по $K(S)$ необходимо ввести новую систему координат с заменой переменных

$$x' = A(x - x_0), x_0 \in S.$$

Кроме этого, в новой системе $\delta = \delta(x', \Omega_1) = r$ во всех случаях.

Таким образом, интегралы по множеству $K(S)$ в новой системе координат представляются одной из следующих формул, которые содержат непрерывные функции $\varphi_{n-k}(y, \omega) = \varphi_{n-k}(y, \omega; S, \Omega_1) \in [0, \delta_0(\Omega(1)))$:

(i) если $\dim S = n - 1$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)dx = \int\limits_{S} dy \int\limits_{0}^{\varphi_{n-1}(y,\omega_0)} g(y + r\omega_0)dr, \tag{1.2.4}$$

(ii) если $\dim S = n - k$ и $2 \leq k \leq n-1$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)dx = \int\limits_{S} dy \int\limits_{S_+^k} d\omega \int\limits_0^{\varphi_{n-k}(y,\omega)} g(y + r\omega)r^{k-1}dr, \tag{1.2.5}$$

(iii) если $\dim S = 0$, то

$$\int\limits_{K(S)} g(x)dx = \int\limits_{S_+^n} d\omega \int\limits_0^{\varphi_0(x_0,\omega)} g(y + r\omega)r^{n-1}dr, \tag{1.2.6}$$

где $\mathbb{R}_+^k = \{(t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k : t_1 \geq 0, ..., t_k \geq 0\}$ и $S_+^k = \{t \in \mathbb{R}_+^k : |t| = 1\}$. Возьмем $g(x) = f(x)/r^\sigma$. Необходимо применить лемму 1.1. к интегралам (1.2.4) - (1.2.6), когда $\sigma = s - k + 1$, $\nu = n - k + 1$, $k = 1, 2, ..., n$. Учитывая

$$M(\sigma, \nu) \geq \frac{1}{\nu - \sigma}, \left|\frac{\partial f}{\partial r}\right| \geq |\nabla f|,$$

$$0 \geq \phi_{n-k}(y, \omega) = \phi_{n-k}(y, \omega; S, \Omega_1) \geq \delta_0(\Omega(1)),$$

приходим к

$$\int\limits_{K(S)} \frac{|f|}{\delta^s}dx \leq \frac{\delta_0(\Omega(1))n - s}{n - s} \int\limits_{K(S)} \frac{|\nabla f|}{\delta^{n-1}}dx.$$

Можно считать, что неравенство (1.2.1) доказано.

Имеет место следующее утверждение.

Лемма 1.2.1. *Предположим, что Ω – область в евклидовом пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 1$, $\omega_1 = \omega_1(x) > 0$, $\omega_2 = \omega_2(x) \geq 0$ на Ω и функции $\omega_1[\omega_2/\omega_1]^l$ локально интегрируема в Ω для любого $l \in [1, p]$. Если $J : C_0^1(\Omega) \to \mathbb{R}$ – некоторый функционал и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$ имеет место неравенство*

$$J(f) + \int\limits_\Omega |f|\omega_1 dx \leq c \int\limits_\Omega |\nabla f|\omega_2 dx, \qquad c = const > 0,$$

то для любых $p \in (1, \infty)$, $l \in [1, p]$ и для любой функции $f \in C_0^1(\Omega)$

$$lJ(|f|^p) + \int\limits_\Omega |f|^p\omega_1 dx \leq (cp)^l \int\limits_\Omega |f|^{p-l}|\nabla f|^l {\omega_1}^{1-l}{\omega_2}^l dx.$$

Из леммы 1.2.1 вытекает слудующая теорема для произвольной открытой области.

Теорема 1.2.2. *Пусть* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *– произвольное открытое множество, причем* $\delta_0(\Omega) < \infty$, *и пусть* $p \in [1, +\infty)$ *и* $l \in [1, p)$. *Тогда для любого* $s \in (-\infty, n)$ *и для любой функции* $f \in C_0^1(\Omega)$ *имеет место неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p\delta_0^{n-s}}{n-s} \right)^l \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-l} |\nabla f|^l}{\delta^{s+l(n-1-s)}} dx.$$

§1.3 Случай выпуклых областей

Следующая рассматриваемая нами теорема доказывается по той же схеме, что и теорема 1.2.1. Результаты Хадвигера показывают, что имеется аппроксимирующая последовательность $\Omega_m \subset \Omega$, $\forall \Omega \subset \mathbb{R}$, где Ω_m – выпуклые многогранники. Применим схему рассуждений, изложенную при доказательстве теоремы 1.2.1. Так как у нас область выпуклая, нам достаточно использовать интегралы вида (1.2.4). Тем самым, применяя лемму 1.1.1 при такой схеме, получится следующее утверждение.

Теорема 1.3.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, компоненты которого являются выпуклыми множествами, с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, и пусть $\delta := dist(x, \partial\Omega)$. Если $1 \leq p < \infty$ и $-\infty < s < 1$, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta^s} dx \leq \left(\frac{p}{1-s} \right)^p \delta_0(\Omega)^{p(1-s)} \int\limits_{\Omega} \frac{\nabla f|^p}{\delta^{s-sp}} dx. \tag{1.3.1}$$

Ясно, что неравенство (1.3.1) при $s = 1$ теряет смысл. Этот недостаток можно устранить при помощи логарифмического веса. Например, в [2] автор доказал следующую

Теорема 1.3.2. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – открытое множество, компоненты которого являются выпуклыми множествами, с конечным внутренним радиусом $\delta_0(\Omega)$, и пусть $\delta := dist(x, \partial\Omega)$. Если $1 \leq p < \infty$, то*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta} dx \leq p^p \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{1-p}} \left(\ln \frac{\delta_0}{\delta} \right)^p dx, \qquad f \in C_0^1(\Omega).$$

Теорема 1.3.2 доказывается с помощью следующей леммы.

Теорема 1.3.3. *Пусть $\rho > 0$, функция $g : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет граничному условию $g(0) = 0$. Если $\beta \geq 0$, $\alpha \leq \beta$, $g \not\equiv 0$ и $g' \ln t / t^\beta \in L^1(0, \rho)$, то справедливо неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^{\alpha+1}} dt < \rho^{\beta-\alpha} \int\limits_0^\rho \frac{|g'(t)|}{t^\beta} \ln \frac{\rho}{t} dt.$$

Доказательство леммы 1.3.1. Ясно, что

$$\int\limits_0^\rho \frac{|g(t)|}{t^{\alpha+1}}dt \le \int\limits_0^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}} \int\limits_0^t |g'(x)|dx = \int\limits_0^\rho |g'(x)| \int\limits_x^t \frac{dt}{t^{\alpha+1}}dx.$$

Сделав следующую замену

$$T(x) = x^\alpha \int\limits_0^\rho \frac{dt}{t^{\alpha+1}} = \int\limits_1^{\rho/x} \frac{dt}{t^{\alpha+1}},$$

и подставив, нетрудно увидеть

$$\int\limits_0^\rho |g'(x)| \int\limits_x^t \frac{dt}{t^{\alpha+1}}dx = \int\limits_0^\rho \frac{|g'(x)|}{x^\alpha}T(x)dx.$$

Для $T(x)$ верны два случая: $\alpha < 0$ и $\alpha \ge 0$. При $\alpha < 0$, используя $\frac{x}{\rho} \le 1$ и $\beta - \alpha \ge 0$, получится

$$T(x) \le \int\limits_1^{\rho/x} \frac{t^{-\alpha}dt}{t} \le \left(\frac{\rho}{x}\right)^{-\alpha} \int\limits_1^{\rho/x} \frac{dt}{t} \le \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\beta-\alpha} \ln\frac{\rho}{x},$$

В случае $\alpha \ge 0$ справедливо

$$T(x) \le \int\limits_1^{\rho/x} \frac{1}{t^\alpha}\frac{1}{t}dt \le \int\limits_1^{\rho/x} \frac{dt}{t} = \ln\frac{\rho}{x} \le \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\beta-\alpha} \ln\frac{\rho}{x}.$$

Для двух вышеразобранных случаев для $T(x)$ выполняется

$$T(x) \le \left(\frac{\rho}{x}\right)^{\beta-\alpha} \ln\frac{\rho}{x}$$

для произвольного $\alpha \le \beta$. Отсюда вытекает утверждение леммы.

Доказательство теоремы 1.3.2. Используется лемма 1.3.1 в случае $\alpha = \beta = 0$. Следуя рассуждениям доказательства леммы,получено доказательство теоремы.

Глава 2

Основная часть

§2.1 Одномерные неравенства

В этой главе получены одномерные и многомерные неравенства типа Харди, которые являются аналогами неравенств (1.1.1) и (1.2.1). Рассмотрим сначала одномерный случай, который является частным случаем леммы 1.2.1 при $\sigma = 1$, $\nu = 5$. Имеет место следующее утверждение.

Следствие 2.1.1. *Верно неравенство*

$$\int\limits_0^\rho \frac{|g(t)|}{t}dt \leq \frac{1}{4e}\rho^4 \int\limits_0^\rho \frac{|g'(t)|}{t^4}dt.$$

Справедлива

Теорема 2.1.1. *Предположим, что* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *абсолютно непрерывная функция, которая удовлетворяет граничным условиям* $f(a) = f(b) = 0$, *и пусть* $0 < b - a < \infty$, $\delta(x) = \min\{x - a, b - x\}$. *При* $f \not\equiv 0$ *и* $f'/\delta(x)^4 \in L^1(a, b)$ *верно строгое неравенство*

$$\int\limits_a^b \frac{|f(x)|}{\delta(x)}dx < \frac{1}{4e}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \int\limits_a^b \frac{|f'(x)|}{\delta(x)^4}dx, \tag{2.1.1}$$

Доказательство теоремы 2.1.1. Положим в лемме 1.1.1 $\rho = (b-a)/2$. Определим функции

$$g(t) = f(t + a), \qquad g(t) = f(b - t),$$

то есть $x = t + a$, $x = b - t$. Тогда

$$\rho + a = \frac{b-a}{2} + a = \frac{b-a+2a}{2} = \frac{a+b}{2},$$

$$b-\rho=b-\frac{b-a}{2}=\frac{2b-b+a}{2}=\frac{a+b}{2},$$

и верны следующие равенства

$$\int\limits_a^{(a+b)/2}\frac{|f(x)|}{(x-a)}dx<\frac{1}{4e}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4\int\limits_a^{(a+b)/2}\frac{|f'(x)|}{(x-a)^4}dx,$$

$$\int\limits_{(a+b)/2}^{b}\frac{|f(x)|}{(b-x)}dx<\frac{1}{4e}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4\int\limits_{(a+b)/2}^{b}\frac{|f'(x)|}{(b-x)^4}dx.$$

Если сложим эти два равенства, получим формулу (2.1.1). Тем самым теорема 2.1.1 доказана.

§2.2 Пространственные аналоги

В этом разделе будем рассматривать многомерный случай неравенства (1.1.2). Отметим, что мы получим пространственные аналоги неравенств, используя метод Авхадиева Ф.Г. (см., например, [2], [3]).

Теорема 2.2.1. *Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное открытое множество. Известно, что $n \geq 1$. При $1 \leq p < \infty$ справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta} dx \leq \left(\frac{{\delta_0}^4 p}{4e}\right)^p \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{3p+1}} dx, \tag{2.2.1}$$

где $\delta = \delta_0(\Omega) := \sup\{dist(x, \partial\Omega) : x \in \Omega\}$, $\partial\Omega$ – граница Ω.

Доказательство теоремы 2.2.1. Если следовать методу Ф.Г. Авхадиева, то достаточно разобрать случай, когда $p = 1$. То есть

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|}{\delta} dx \leq \frac{1}{4e} \delta_0(\Omega)^4 \int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|}{\delta^4} dx. \tag{2.2.2}$$

Действительно, пусть $p \in (1, \infty)$ и $f \in C_0^1(\Omega)$. Ясно, что $g = |f|^p \in C_0^1(\Omega)$. Далее применяется неравенство (1.2.2) к функции $g \in C_0^1(\Omega)$,

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|}{\delta} dx \leq \frac{1}{4e} \delta_0(\Omega)^4 p \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-1|} |\nabla f|}{\delta^4} dx.$$

К интегралу в правой части полученного неравенства применим неравенство Гёлдера с показателями $p/(p-1)$ и p

$$\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta} dx \leq \frac{1}{4e} \delta_0^4 p \int\limits_{\Omega} \frac{|f|^{p-1|} |\nabla f|}{\delta^4} dx \leq$$

$$\frac{1}{4e} \delta_0^4 p \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta} dx\right)^{(p-1)/p} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{3p+1}} dx\right)^{1/p}.$$

Чтобы получить требуемое неравенство, надо возвести обе части в степень p.

$$\left(\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta} dx\right)^p \leq \left(\frac{\delta_0^4 p}{4e}\right)^p \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|f|^p}{\delta} dx\right)^{(p-1)} \left(\int\limits_{\Omega} \frac{|\nabla f|^p}{\delta^{3p+1}} dx\right).$$

Сокращая множители при соответствующих степенях, получаем неравенство (2.2.1).

Далее, при $p = 1$ и $n = 1$ нам нужно доказать неравенство вида

$$\int\limits_a^b \frac{|f(x)|}{\delta(x)} dx < \frac{1}{4e}\left(\frac{b-a}{2}\right)^4 \int\limits_a^b \frac{|f'(x)|}{\delta(x)^4} dx.$$

Ясно, что это неравенство является следствием теоремы 1.1.1.

Таким образом, остается доказать случай $p = 1$ для $n \geq 2$. Следуем схеме, которая описана в параграфе 1.2. Но, так как у нас область выпуклая, достаточно использовать формулу (1.2.4). Таким образом, покажем следующее неравенство:

$$\int\limits_0^{\varphi_{n-1}} \frac{|g(y + r\omega_0)|}{r} dr \leq \frac{1}{4e} {\delta_0}^4 \int\limits_0^{\varphi_{n-1}} \frac{g'(y + r\omega_0)}{r^4} dr.$$

Очевидно, что это неравенство также является следствием теоремы 1.1.1. Тем самым завершается доказательство теоремы.

Далее применим лемму 1.3.1 к неравенству (2.2.1) и получим следующий результат:

Теорема 2.2.2. *Положим $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ – произвольное открытое множество, кроме того $\delta_0(\Omega) < \infty$. Пусть $p \in [1, +\infty)$ и $l \in [1, p]$. Справедливо следующее неравенство*

$$\int\limits_\Omega \frac{|f|^p}{\delta} dx \leq \left(\frac{{\delta_0}^4 p}{4e}\right)^l \int\limits_\Omega \frac{|\nabla f|^l |f|^{p-l}}{\delta^{3l+1}} dx,$$

$\forall s \in (-\infty, n)$ *и* $\forall f \in C_0^1(\Omega)$.

Заключение

Итак, в работе мы рассмотрели неравенства типа Харди в выпуклых областях с конечным внутренним радиусом. Привели доказательства неравенств в одномерном случае для получения неравенств в многомерном случае. Доказательства взяты из статьи [4], но с более побробными изложениями. Также рассмотрели частные случаи этих неравенств, и получили их доказательства.

Литература

[1] Авхадиев, Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* / Ф.Г. Авхадиев // Матем. сборник. - 1998. - Т. 189. - № 12. - С. 3–12.

[2] Авхадиев, Ф.Г. *Неравенства типа Харди в плоских и пространственных открытых множествах* / Ф.Г. Авхадиев // Тр. МИАН. - 2006. - Т. 255. - С. 8–18.

[3] Авхадиев, Ф.Г. *Введение в геометрическую теорию функций*: учебное пособие / Ф.Г. Авхадиев - Казань: Казан. ун-т. - 2012. - 140 с.: ил. 19

[4] Авхадиев Ф.Г., *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом*/ Ф.Г. Авхадиев, Р.Г. Насибуллин // Сибирский математический журнал. Март-Апрель, 2014. - Том 55, - №2 - С. 239–250.

[5] Насибуллин Р.Г. *Неравенства типа Харди с весами, имеющими степенные и логарифмические особенности*/ Р.Г. Насибуллин // Казань - 2013. - С. 4–32.

[6] Соболев, Л.С. *Избранные вопросы теории функциональных пространств и обобщенных производных* / Л.С. Соболев. - М.: Наука, 1989. - 254 С. ISBN 5-02-000052-3.

[7] Laptev, A. *Hardy inequalities for magnetic Dirichlet forms* / A. Laptev, T. Weidl // Operator Theory: Advances and Applications. - 1999. - V. 108. - P. 299–305

[8] Hardy, G.H. *Inequalities* / G.H. Hardy, J.E. Littlewood, G. Polya. - Cambridge University Press, Cambridge, 1973.