Геометрический подход к граничному поведению отображений квазиконформного анализа

◇ С. К. Водопьянов

◇ Институт математики им. С. Л. Соболева,
Новосибирск

◇ Международная конференцию по алгебре, анализу и геометрии,
Август 22 – 28, 2021

◇ Казанский федеральный университет и
Академия наук Республики Татарстан при поддержке
Научно-образовательного математического центра ПФО

◇ Работа автора частично поддержана Математическим Центром
в Академгородке, соглашение с Министерством науки и высшего образования
Российской Федерации номер 075-15-2019-1613.

Пространство Соболева $L^1_p(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $p \in [1, \infty]$

- состоит из локально-суммируемых функций $f : D \to \mathbb{R}$, имеющих первые обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\int\limits_D \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D), \quad \text{и}$$

Пространство Соболева $L^1_p(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $p \in [1, \infty]$

- состоит из локально-суммируемых функций $f : D \to \mathbb{R}$, имеющих первые обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \ldots, n$:

$$\int\limits_D \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D), \quad \text{и}$$

- конечную полунорму $\|f \mid L^1_p(D)\| = \|\nabla f \mid L_p(D)\|$,

Пространство Соболева $L^1_p(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $p \in [1, \infty]$

- состоит из локально-суммируемых функций $f : D \to \mathbb{R}$, имеющих первые обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$:

$$\int\limits_D \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D), \quad \text{и}$$

- конечную полунорму $\|f \mid L^1_p(D)\| = \|\nabla f \mid L_p(D)\|$,
- где $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ — слабый градиент.

Пространство Соболева $L_p^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $p \in [1, \infty]$

- состоит из локально-суммируемых функций $f : D \to \mathbb{R}$, имеющих первые обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$:

$$\int\limits_D \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\, dx = -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\, dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D), \quad \text{и}$$

- конечную полунорму $\|f \mid L_p^1(D)\| = \|\nabla f \mid L_p(D)\|$,
- где $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ — слабый градиент.
- $W_p^1(D) = L_p(D) \cap L_p^1(D)$ с конечной нормой $\|f \mid W_p^1(D)\| = \|f \mid L_p(D)\| + \|\nabla f \mid L_p(D)\|$.

Пространство Соболева $L_p^1(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, $p \in [1, \infty]$

- состоит из локально-суммируемых функций $f : D \to \mathbb{R}$, имеющих первые обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$, $i = 1, \dots, n$:

$$\int\limits_D \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D), \quad \text{и}$$

- конечную полунорму $\|f \mid L_p^1(D)\| = \|\nabla f \mid L_p(D)\|$,
- где $\nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right)$ — слабый градиент.
- $W_p^1(D) = L_p(D) \cap L_p^1(D)$ с конечной нормой $\|f \mid W_p^1(D)\| = \|f \mid L_p(D)\| + \|\nabla f \mid L_p(D)\|$.
- $f \in W_{p,\mathrm{loc}}^1(D) \iff f \in W_p^1(D')$ для любой компактно вложенной области $D' \Subset D$.

Composition operator on Sobolev spaces

- Given a homeomorphism $\varphi\colon D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, and L_p^1-function $f : D' \to \mathbb{R}$.

Composition operator in Sobolev spaces

• Given a homeomorphism $\varphi\colon D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, and L^1_p-function $f : D' \to \mathbb{R}$.

• Under which conditions on φ does the composition $f \circ \varphi$ belong to $L^1_p(D)$?

Composition operator in Sobolev spaces

- Given a homeomorphism $\varphi\colon D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, and L^1_p-function $f : D' \to \mathbb{R}$.
- Under which conditions on φ does the composition $f \circ \varphi$ belong to $L^1_p(D)$?

Bounded composition operator in Sobolev spaces:

- Defining the composition operator φ^* for L^1_p-function $f : D' \to \mathbb{R}$ as $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ we have a homomorphism $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$.

Composition operator in Sobolev spaces

- Given a homeomorphism $\varphi\colon D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, and L^1_p-function $f : D' \to \mathbb{R}$.
- Under which conditions on φ does the composition $f \circ \varphi$ belong to $L^1_p(D)$?

Bounded composition operator in Sobolev spaces:

- Defining the composition operator φ^* for L^1_p-function $f : D' \to \mathbb{R}$ as $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ we have a homomorphism $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$.

- Under which conditions on φ is the composition operator $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ bounded in Sobolev norms?

Quasiconformal analysis since 1988

• Vodopyanov (1988): A homeomorphism $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, is p-quasiconformal, $1 \leq p < \infty$ if one of the properties is true:

Quasiconformal analysis since 1988

• Vodopyanov: A homeomorphism $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, is p-quasiconformal, $1 \le p < \infty$, if one of the properties is true:

1) the composition operator $\varphi^* : L_p^1(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L_p^1(D)$ is bounded; here $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, $u \in L_p^1(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D')$;

Quasiconformal analysis since 1988

• Vodopyanov: A homeomorphism $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, is p-quasiconformal, $1 \le p < \infty$ if one of the properties is true:

1) the composition operator $\varphi^* : L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_p(D)$ is bounded; here $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, $u \in L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D')$;

2) for any condenser $E = (F_1, F_0)$ in D' the inequality

$$\mathrm{cap}\left(\varphi^{-1}(E); L^1_p(D)\right) \le K_p^p \,\mathrm{cap}\left(E; L^1_p(D')\right)$$

holds with some constant K_p;

Quasiconformal analysis since 1988

• Vodopyanov: A homeomorphism $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, is p-quasiconformal, $1 \leq p < \infty$ if one of the properties is true:

1) the composition operator $\varphi^* : L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_p(D)$ is bounded; here $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, $u \in L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D')$;

2) for any condenser $E = (F_1, F_0)$ in D' the inequality

$$\mathrm{cap}\left(\varphi^{-1}(E); L^1_p(D)\right) \leq K_p^p \,\mathrm{cap}\left(E; L^1_p(D')\right)$$

holds with some constant K_p;

3) $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ and the estimate $|D\varphi(x)| \leq K'_p |\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}$ is valid in D a. e.

Quasiconformal analysis since 1988

• Vodopyanov: A homeomorphism $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, is p-quasiconformal, $1 \le p < \infty$ if one of the properties is true:

1) the composition operator $\varphi^* : L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_p(D)$ is bounded; here $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, $u \in L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D')$;

2) for any condenser $E = (F_1, F_0)$ in D' the inequality

$$\mathrm{cap}\left(\varphi^{-1}(E); L^1_p(D)\right) \le K_p^p \,\mathrm{cap}\left(E; L^1_p(D')\right)$$

holds with some constant K_p;

3) $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ and the estimate $|D\varphi(x)| \le K'_p |\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}$ is valid in D a. e.

4) Moreover, $K_p \le \|\varphi^*\| \le K'_p \le \alpha_p K_p$ where $\alpha_p \ge 1$.

Quasiconformal analysis since 1988

• Vodopyanov: A homeomorphism $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, is p-quasiconformal, $1 \leq p < \infty$ if one of the properties is true:

1) the composition operator $\varphi^* : L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_p(D)$ is bounded; here $\varphi^*(u) = u \circ \varphi$, $u \in L^1_p(D') \cap \mathrm{Lip}_l(D')$;

2) for any condenser $E = (F_1, F_0)$ in D' the inequality

$$\mathrm{cap}\left(\varphi^{-1}(E); L^1_p(D)\right) \leq K_p^p \, \mathrm{cap}\left(E; L^1_p(D')\right)$$

holds with some constant K_p;

3) $\varphi \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(D)$ and the estimate $|D\varphi(x)| \leq K'_p |\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}$ is valid in D a. e.

4) Moreover, $K_p \leq \|\varphi^*\| \leq K'_p \leq \alpha_p K_p$ where $\alpha_p \geq 1$.

• n-Quasiconformal homeomorphisms $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, coincide with usual quasiconformal mappings.

Condensers

• A condenser $E = (F_1, F_0)$ in D' is a pair of disjoint continua $F_1, F_0 \subset D'$, $F_1 \cap F_0 = \emptyset$.

Condensers

• A condenser $E = (F_1, F_0)$ in D' is a pair of disjoint continua $F_1, F_0 \subset D'$, $F_1 \cap F_0 = \emptyset$.

• If $U \Subset D'$ is an open connected set and $F \subset U$ is a continuum then, then the condenser $E = (F, U)$ is written as $E = (F, \partial U)$.

Condensers

• A condenser $E = (F_1, F_0)$ in D' is a pair of disjoint continua $F_1, F_0 \subset D'$, $F_1 \cap F_0 = \emptyset$.

• If $U \Subset D'$ is an open connected set and $F \subset U$ is a continuum then, then the condenser $E = (F, U)$ is written as $E = (F, \partial U)$.

• If $F = \overline{Q(y,r)}$ and $U = Q(y,R) \Subset D'$, $r \in (0, R)$, then the condenser $E = (\overline{Q(y,r)}, Q(y,R))$ is called the cubic condenser.

Condensers

• A condenser $E=(F_1,F_0)$ in D' is a pair of disjoint continua $F_1,F_0\subset D'$, $F_1\cap F_0=\emptyset$.

• If $U\Subset D'$ is an open connected set and $F\subset U$ is a continuum then, then the condenser $E=(F,U)$ is written as $E=(F,\partial U)$.

• If $F=\overline{Q(y,r)}$ and $U=Q(y,R)\Subset D'$, $r\in(0,R)$, then the condenser $E=(\overline{Q(y,r)},Q(y,R))$ is called the cubic condenser.

• The condenser $\varphi^{-1}(E)=(\varphi^{-1}(F),\varphi^{-1}(U))$ in D is the pre-image of the condenser $E=(F,U)$ under a mapping $\varphi: D\to D'$.

Capacity of condenser

• p-Емкостью конденсатора $E=(F_1,F_0)\subset D'$ в пространстве $L^1_p(D')$, $p\in[1,\infty)$, называется величина

$$\operatorname{cap}\left(E;L^1_p(D')\right)=\inf_{u\in\mathcal{A}(E)}\left\|u\mid L^1_p(D')\right\|^p,\quad \text{where}$$

Capacity of condenser

- p-Емкостью конденсатора $E = (F_1, F_0) \subset D'$ в пространстве $L^1_p(D')$, $p \in [1, \infty)$, называется величина

$$\operatorname{cap}\Big(E; L^1_p(D')\Big) = \inf_{u \in \mathcal{A}(E)} \Big\| u \mid L^1_p(D') \Big\|^p, \quad \text{where}$$

- $\mathcal{A}(E) = \Big\{ u \in L^1_p(D') \cap C(D') : u|_{F_1} = 1,\ u|_{F_0} = 0 \Big\}$ — совокупность допустимых для конденсатора $E = (F_1, F_0) \subset D'$ функций.

Quasiadditive set function

Let D be an open set in $\mathbb{R}^n$. Assume that

- $\mathcal{O}(D)$ is a system of open sets in D such that:

1) if Q is an open cube contained in D, then $Q \in \mathcal{O}(D)$;

2) if $U_1, \dots, U_k \in \mathcal{O}(D)$ is a disjoint system of open sets, then $\bigcup\limits_{i=1}^{k} U_i \in \mathcal{O}(D)$, $k \in \mathbb{N}$ is an arbitrary numder.

- Minimal system $\mathcal{O}(D)$ consists of unions of a finite disjoint collection of cubes in D; and

- maximal system $\mathcal{O}(D)$ consists of all open sets in D.

Quasiadditive set function

- A mapping $\Phi : \mathcal{O}(D) \to [0, \infty]$ is said to be the *quasiadditive set function* if

1) $0 < \Phi(Q(x, \delta)) < \infty$ for any point $x \in D$ and $\delta \in (0, \delta(x))$ where $\delta(x) \in (0, \infty)$ depends on $x \in D$;

2) for any finite disjoint collection $U_i \in \mathcal{O}(D)$, $i = 1, \ldots, l$, of open sets such that $\bigcup\limits_{i=1}^{l} U_i \subset U$, where $U \in \mathcal{O}(D)$, the enequality

$$\sum_{i=1}^{l} \Phi(U_i) \le \Phi(U)$$

holds.

Quasiconformal analysis since 2020s

- Main theorem (Vodopyanov) (2020): *For a homeomorphism* $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, *and weighted function* $\omega : D' \to (0, \infty)$, *the following assertions are equivalent*:

Quasiconformal analysis since 2020s

• Main theorem (Vodopyanov) (2020): *For a homeomorphism* $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, *and weighted function* $\omega : D' \to (0, \infty)$, *the following assertions are equivalent:*

1) *the composition operator* $\varphi^* : L^1_p(D';\omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_q(D)$, $1 < q \le p < \infty$, *is bounded*; *here* $n \ge 2$;

Quasiconformal analysis since 2020s

• Main theorem (Vodopyanov) (2020): *For a homeomorphism $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, and weighted function $\omega : D' \to (0,\infty)$, the following assertions are equivalent:*

1) *the composition operator* $\varphi^* : L^1_p(D';\omega) \cap \mathrm{Lip}_l(D') \to L^1_q(D)$, $1 < q \le p < \infty$, *is bounded*; *here* $n \ge 2$;

2) *for any cubic condenser* $E = (\overline{Q(y,r)}, Q(y,R))$ *in* D', *relations* $(R-r)\,\mathrm{cap}^{\frac{1}{q}}\left(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\right) \le$

$$\begin{cases} K_p\omega(Q(y,R)\setminus Q(y,r))^{\frac{1}{p}}, & 1 < q = p < \infty, \\ \Psi(Q(y,R)\setminus \overline{Q(y,r)})^{\frac{1}{\sigma}}\omega(Q(y,R)\setminus Q(y,r))^{\frac{1}{q}}, & 1 < q < p < \infty, \end{cases} \tag{1}$$

hold, where Ψ *is a bounded monotone finitely-additive set function;*

3) • *the homeomorphism* $\varphi : D \to D'$ *belong to Sobolev class* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$,

• φ *is of finite distortion*: $D\varphi(x) = 0$ *a. e. in* $Z = \{x \in D \mid \det D\varphi(x) = 0\}$,

• *and the operator distortion function*

$$D \ni x \mapsto K^{1,\omega}_{q,p}(x,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}\omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))}, & \textit{if } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \textit{if } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases}$$

belongs to $L_\sigma(D)$ *where* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *if* $1 \leq q < p < \infty$,
and $\sigma = \infty$, if $q = p$.

3)• *the homeomorphism* $\varphi : D \to D'$ *belong to Sobolev class* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$,

• φ *is of finite distortion*: $D\varphi(x) = 0$ *a. e. in* $Z = \{x \in D \mid \det D\varphi(x) = 0\}$,

• *and the operator distortion function*

$$D \ni x \mapsto K^{1,\omega}_{q,p}(x,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{|D\varphi(x)|}{|\det D\varphi(x)|^{\frac{1}{p}}\omega^{\frac{1}{p}}(\varphi(x))}, & \textit{if } \det D\varphi(x) \neq 0, \\ 0, & \textit{if } \det D\varphi(x) = 0, \end{cases}$$

belongs to $L_\sigma(D)$ *where* $\frac{1}{\sigma} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$, *if* $1 \leq q < p < \infty$,
and $\sigma = \infty$, if $q = p$.

4) *Moreover,* $\|\varphi^*\| \leq \left\| K^{1,\omega}_{q,p}(\cdot) \mid L_\sigma(D) \right\| \leq \Psi(D')$.

Mappings of the Main Theorem are said to be $(q;p,\omega)$-morphisms.

Particular cases:

The Main Theorem includes almost all approaches to the theory of quasiconformal mappings known in the literature.

0) $n = p = q = 2$, $\omega \equiv 1$, $\|\varphi^*\| = 1$: Conformal mappings in $\mathbb{C}$

1) $n = q = p$, $\omega \equiv 1$: Classical quasiconformal mappings

2) $1 \leq q = p < \infty$, $\omega \equiv 1$: p-quasiconformal mappings (p-morphisms) (Vodopyanov, 1988).

3) $1 \leq q \leq p < \infty$, $\omega \equiv 1$: (q, p)-quasiconformal mappings ((q, p)-morphisms) (Ukhlov, Vodopyanov, 1993, 1998)

Inequality for arbitrary condensers

- Corollary. *Let relations (1):* $\mathrm{cap}^{\frac{1}{q}}\Big(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\Big) \leq$

$$\begin{cases} K_p \,\mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}(E; L^1_p\Big(D'; \omega)\Big), & 1 < q = p < \infty, \\ \Psi(Q(y,R) \setminus \overline{Q(y,r)})^{\frac{1}{\sigma}}\, \mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}\Big(E; L^1_p(D'; \omega)\Big), & 1 < q < p < \infty, \end{cases}$$

hold for cubic condensers $E = (\overline{Q(y,r)}, Q(y,R))$ *in* D' *with a constant* K_p *or a bounded monotone finitely additive function* Ψ.

Inequality for arbitrary condensers

- Corollary. *Let relations (1):* $\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\Big(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\Big) \leq$

$$\begin{cases} K_p \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}(E; L^1_p\Big(D'; \omega)\Big), & 1 < q = p < \infty, \\ \Psi(Q(y,R) \setminus \overline{Q(y,r)})^{\frac{1}{\sigma}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\Big(E; L^1_p(D'; \omega)\Big), & 1 < q < p < \infty, \end{cases}$$

hold for cubic condensers $E = (\overline{Q(y,r)}, Q(y,R))$ in D' with a constant K_p or a bounded monotone finitely additive function Ψ. Then it also holds for arbitrary condensers $E = (F_1, F_0)$ in the domain D',

Inequality for arbitrary condensers

- **Corollary.** *Let relations (1):* $\mathrm{cap}^{\frac{1}{q}}\left(\varphi^{-1}(E); L^1_q(D)\right) \leq$

$$\begin{cases} K_p\,\mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}(E; L^1_p\left(D'; \omega)\right), & 1 < q = p < \infty, \\ \Psi(Q(y,R) \setminus \overline{Q(y,r)})^{\frac{1}{\sigma}}\,\mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}\left(E; L^1_p(D'; \omega)\right), & 1 < q < p < \infty, \end{cases}$$

hold for cubic condensers $E = (\overline{Q(y,r)}, Q(y,R))$ *in* D' *with a bounded monotone finitely additive function* Ψ*,*
Then it also holds for arbitrary condensers $E = (F_1, F_0)$ *in the domain* D'*, with the constant*
$C(n,p)K_p$ *instead of* K_p *in the case* $q = p$*, and*
quasi-additive set function
$C(n,q)\Psi_{q,p}(D' \setminus (F_1 \cup F_0))^{\frac{1}{\sigma}}$ *instead of* $\Psi_{q,p}(U \setminus F)$ *for* $q < p$*.*
(Here $C(n,q)$ *is a constant depending only on the dimension of* n *and the summability of* q*).*

Modulus or capacity? What is better?

• An extension of the Main Theorem. Assertions 1)–3) of the Main Theorem are equivalent to the property:

5) *a homeomorphism* $\varphi : D \to D'$ *satisfy relations*

$$(\mathrm{mod}_q(\varphi^{-1}\Gamma))^{\frac{1}{q}} \leq \begin{cases} K_{p,p}\Big(\mathrm{mod}_p^{\omega}(\Gamma)\Big)^{\frac{1}{p}}, & n-1 < q = p < \infty, \\ \Psi_{q,p}(Q(x,R) \setminus \overline{Q(x,r)})^{\frac{1}{\sigma}}\Big(\mathrm{mod}_p^{\omega}(\Gamma)\Big)^{\frac{1}{p}}, & n-1<q<p<\infty, \end{cases}$$

with the constant $K_{p,p}$ *at* $1 < q = p < \infty$, *and bounded quasiadditive set function* $\Psi_{q,p}$ *at* $1 < q < p < \infty$, *for all cubic condensers* $(\overline{Q(x,r)}, Q(x,R))$, $r \in (0,R)$, *in* D', *and for a family* Γ *of all pathes* $\gamma : [a,b] \to D'$ *in the condenser* $E = ((\overline{Q(x,r)}, Q(x,R)))$ *such that* $\gamma(a) \in \overline{Q(x,r)}$, $\gamma(b) \in \partial Q(x,R)$.

3 set functions.

• Associate with the $(q;p,\omega)$-morphisms $\varphi : D \to D'$ three set functions:

1) $D' \supset W \mapsto \Phi(W) = \|\varphi_W^*\|^\sigma$, where $\|\varphi_W^*\|$ is the operator norm $\varphi_W^* : \overset{\circ}{L}{}_p^1(W;\omega) \cap \mathrm{Lip}_l(W) \to L_q^1(D)$, $\varphi_W^*(u) = \varphi \circ u$;

3 set functions.

• Associate with the $(q;p,\omega)$-morphisms $\varphi : D \to D'$ three set functions:

1) $D' \supset W \mapsto \Phi(W) = \|\varphi_W^*\|^\sigma$, where $\|\varphi_W^*\|$ is the operator norm $\varphi_W^* : \overset{\circ}{L}{}_p^1(W;\omega) \cap \mathrm{Lip}_l(W) \to L_q^1(D)$, $\varphi_W^*(u) = \varphi \circ u$;

2) $D' \supset W \mapsto \|K_{q,p}^{1,\omega}(\cdot) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(W))\|^\sigma = \int\limits_{\varphi^{-1}(W)} K_{q,p}(x,\varphi)^\sigma \, dx$;

3 set functions.

• Associate with the $(q;p,\omega)$-morphisms $\varphi : D \to D'$ three set functions:

1) $D' \supset W \mapsto \Phi(W) = \|\varphi^*_W\|^\sigma$, where $\|\varphi^*_W\|$ is the operator norm $\varphi^*_W : \overset{\circ}{L}{}^1_p(W;\omega) \cap \mathrm{Lip}_l(W) \to L^1_q(D)$, $\varphi^*_W(u) = \varphi \circ u$;

2) $D' \supset W \mapsto \left\|K^{1,\omega}_{q,p}(\cdot) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(W))\right\|^\sigma = \int\limits_{\varphi^{-1}(W)} K_{q,p}(x,\varphi)^\sigma \, dx;$

3) $D' \supset W \mapsto V(W) = \sup\limits_{m,\, E_i} \sum\limits_{i=1}^{m} \dfrac{\mathrm{cap}^{\frac{\sigma}{q}}\left(\varphi^{-1}(E_i); L^1_q(D)\right)}{\mathrm{cap}^{\frac{\sigma}{p}}\left(E_i; L^1_p(D';\omega)\right)},$

where $\{U_i \subset W\}$ is a disjoint collection of open sets, and $E_i = (F_i, U_i)$ are condensers, $i = 1, 2, \ldots, m \in \mathbb{N}$.

Coincidence of set functions.

• Theorem on coincidence of set functions. For $(q;p,\omega)$-morphism $\varphi : D \to D'$, $q < p$, three set functions coincide:

$$\Phi(W) = \|\varphi_W^*\|^\sigma = \left\|K_{q,p}^{1,\omega}(\cdot) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(W))\right\|^\sigma = V(W)$$

for any open set $W \in \mathcal{O}(D')$.

Coincidence of set functions.

• Theorem on coincidence of set functions. For $(q;p,\omega)$-morphism $\varphi : D \to D'$, $q < p$, $q < p$, three set functions coincide:

$$\Phi(W) = \|\varphi^*_W\|^\sigma = \|K^{1,\omega}_{q,p}(\cdot) \mid L_\sigma(\varphi^{-1}(W))\Big\|^\sigma = V(W)$$

for any open set $W \in \mathcal{O}(D')$.

• Corollary. For $(q;p,\omega)$-morphism $\varphi : D \to D'$, $q < p$, all set functions

1) are countably-additive and absolutely continuous,

2) extend uniquely to the σ-algebra of Borel sets,

4) for almost all $y \in D'$ we have

$$\Phi'(y) = \begin{cases} \left(\dfrac{|D\varphi(\varphi^{-1}(y))|}{|\det D\varphi(\varphi^{-1}(y))|^{\frac{1}{q}}\omega^{\frac{1}{p}}(y)}\right)^\sigma, & \text{if } \det D\varphi(\varphi^{-1}(y)) \neq 0, \\ 0, & \text{if } \det D\varphi(\varphi^{-1}(y)) = 0. \end{cases}$$

Coincidence of constants.

• Theorem on coincidence of constants. For $(p; p, \omega)$-morphism $\varphi : D \to D'$, $q = p$, three constants coincide:

$$\|\varphi^*\| = \left\| K^{1,\omega}_{p,p}(\cdot) \mid L_\infty(D) \right\| = K_p$$

where K_p is the best constant in capacity inequality (2).

Граничное поведение.

• Definition. A homeomorphism $f: D' \to D$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, belongs to the class $\mathcal{Q}_{q,p}(D', \omega; D)$, where $1 < q \leq p < \infty$ for $n \geq 3$ or $1 \leq q \leq p < \infty$ for $n = 2$, and $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ is a weight function

Граничное поведение.

• Definition. A homeomorphism $f : D' \to D$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, belongs to the class $\mathcal{Q}_{q,p}(D', \omega; D)$, where $1 < q \leq p < \infty$ for $n \geq 3$ or $1 \leq q \leq p < \infty$ for $n = 2$, and $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ is a weight function if

$$\mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}\Big(f(E); L^1_p(D)\Big) \leqslant K_p\, \mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}\Big(E; L^1_p(D'; \omega)\Big), \quad q = p, \tag{4}$$

$$\mathrm{cap}^{\frac{1}{q}}\Big(f(E); L^1_q(D)\Big) \leqslant \Psi_{q,p}((Q(y,R) \setminus \overline{Q(y,r)})^{\frac{1}{\sigma}}\, \mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}\Big(E; L^1_p(D'; \omega)\Big), \; q<p, \tag{5}$$

for any cubic condenser $E = (\overline{Q(y,r)}, Q(y,R))$, located in D', and the image $f(E) = (f(\overline{Q(y,r)}), Q(y,R))$

Inverse mappings

• Definition. A homeomorphism $f : D' \to D$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, belongs to the class $\mathcal{Q}_{q,p}(D', \omega; D)$, where $1 < q \leq p < \infty$ for $n \geq 3$ or $1 \leq q \leq p < \infty$ for $n = 2$, and $\omega \in L_{1,\text{loc}}(D')$ is a weight function if

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\Big(f(E); L_p^1(D)\Big) \leqslant K_p \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\Big(E; L_p^1(D'; \omega)\Big), \quad q = p, \tag{6}$$

$$\operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\Big(f(E); L_q^1(D)\Big) \leqslant \Psi_{q,p}((Q(y,R) \setminus \overline{Q(y,r)})^{\frac{1}{\sigma}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\Big(E; L_p^1(D'; \omega)\Big), \; q<p, \tag{7}$$

for any cubic condenser $E = (\overline{Q(y,r)}, Q(y,R))$, located in D', and the image $f(E) = (f(\overline{Q(y,r)}), Q(y,R))$

1) with constant K_p for $q = p$ or

2) a bounded quasi-additive function $\Psi_{q,p}$ for $q < p$.

Связь между классами отображений

Из (6)–(7) видим, что $\varphi = f^{-1}$ удовлетворяет условиям Основной Теоремы. Отсюда выводим

• Предложение. *Гомеоморфизм* $f : D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D', \omega; D)$*тогда и только тогда, когда обратный гомеоморфизм* $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ *является* $(q; p, \omega)$*-морфизмом.*

Связь между классами отображений

It follows from (2)–(3), that $\varphi = f^{-1}$ enjoy conditions of the Main Theorem. It follows

• Предложение. *Гомеоморфизм* $f : D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D', \omega; D)$ *тогда и только тогда, когда обратный гомеоморфизм* $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ *является* $(q; p, \omega)$*-морфизмом.*

• Предложение. *Если в определении класса* $\mathcal{Q}_{q,p}(D', \omega; D)$ *емкостное неравенство заменить на модульное, мы получим тот же класс отображений.*

Частные случаи $\mathcal{Q}_{q,p}(D', \omega; D)$-гомеоморфизмов

1) $n - 1 < q < p = n$, $\omega \equiv 1$: Kruglikov V. I., 1986.

2) $q = p = n$: O. Martio, V. Ryazanov, U. Srebro, E. Yakubov. Moduli in Modern Mapping Theory. NY. Springer-Verlag, 2008.

$\mathcal{Q}_{n,n}(D', \omega; D)$-mappings were called Q-homeomorphisms.

3) $n - 1 < q = p < n$: A. Golberg (2005), R. Salimov (2008).

In all cases inequality (6) is requested for an arbitrary condensers.

Основа подхода.

Полагаем, что фиксирован некоторый континуум $F_0 \subset D$ с непустой внутренностью, для которого открытое множество $D \setminus F_0$ связно.

Основа подхода.

Полагаем, что фиксирован некоторый континуум $F_0 \subset D$ с непустой внутренностью, для которого открытое множество $D \setminus F_0$ связно.

• Предложение. *Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ фиксированы шары $B_0 \Subset D$ и $B_1 \Subset D$, $\overline{B_0} \cap \overline{B_1} = \emptyset$.*

Основа подхода.

Полагаем, что фиксирован некоторый континуум $F_0 \subset D$ с непустой внутренностью, для которого открытое множество $D \setminus F_0$ связно.

• Предложение. *Пусть в области $D \subset \mathbb{R}^n$ фиксированы шары $B_0 \Subset D$ и $B_1 \Subset D$, $\overline{B_0} \cap \overline{B_1} = \emptyset$, и $n - 1 < q \le n$.*
Тогда для фиксированного континуума $F_0 \subset B_0$ и произвольного континуума $F_1 \subset \overline{B_1}$ соотношение

$$\inf_{F_1} \operatorname{cap}^{\frac{1}{q}} \Big((F_1, F_0); L^1_q(D) \Big) = 0 \qquad (10)$$

выполняется тогда и только тогда, когда $\inf\limits_{F_1} \operatorname{diam} F_1 \to 0$.

Определение метрической функции в D':

Определение. Точки $x, y \in D' \setminus F_0$, $x \neq y$, соединим кривой $\overline{xy} \subset D' \setminus F_0$. *Емкостная (ω, p)-метрическая функция* между точками $x, y \in D' \setminus F_0$, $x \neq y$, относительно множества F_0 определяется как величина

$$\rho^{\omega}_{p,F_0}(x,y) = \inf_{\overline{xy}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{p}}\Big((\overline{xy}, F_0); L^1_p(D'; \omega)\Big)$$

где нижняя грань берется по всем кривым $\overline{xy}$ в $D' \setminus F_0$ с концевыми точками $x, y \in D' \setminus F_0$.

Определение метрической функции в D:

Аналогично предыдущему определим *емкостную q-метрическую функцию* $\rho_{q,f(F_0)}(a,b)$ между точками $a,b \in D\setminus f(F_0)$ относительно континуума $f(F_0)$:

$$\rho_{q,f(F_0)}(a,b) = \inf_{\overline{ab}} \operatorname{cap}^{\frac{1}{q}}\Big((\overline{ab}, f(F_0)); L_q^1(D)\Big). \qquad (11)$$

Соотношения между метрическими функциями:

• Предложение. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D'\to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, $n-1<q\le p\le\infty$ *при* $n\ge 3$, *и* $1\le q\le p\le 2$ *при* $n=2$.

Соотношения между метрическими функциями:

• Предложение. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D'\to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, $n-1<q\le p\le\infty$ *при* $n\ge 3$, *и* $1\le q\le p\le 2$ *при* $n=2$.
Тогда справедливы следующие соотношения между емкостными метрическими функциями:

$$\begin{cases}\rho_{p,f(F_0)}(f(x),f(y))\leqslant K_p\rho^{\omega}_{p,F_0}(x,y), & \text{если } q=p,\\ \rho_{q,f(F_0)}(f(x),f(y))\leqslant \Psi_{q,p}(D'\setminus F_0)^{\frac{1}{\sigma}}\rho^{\omega}_{p,F_0}(x,y), & \text{если } q<p,\end{cases} \tag{13}$$

для всех точек $x,y\in D'\setminus F_0$, *где* $\frac{1}{\sigma}=\frac{1}{q}-\frac{1}{p}$.

Свойства метрических функций:

• Предложение. *В случае* $n-1 < q \leq p \leq n$ *при* $n \geq 3$, *и* $1 \leq q \leq p \leq 2$ *при* $n = 2$ *емкостная* (ω, p)*-метрическая функция* $\rho^{\omega}_{p,F_0}(x,y)$ *обладает свойствами*

1) $\rho^{\omega}_{p,F_0}(x,y) = \rho^{\omega}_{p,F_0}(y,x)$ *для всех точек* $x, y \in D' \setminus F_0$;

Свойства метрических функций:

• Предложение. *В случае* $n-1<q\le p\le n$ *при* $n\ge 3$, *и* $1\le q\le p\le 2$ *при* $n=2$ *емкостная* (ω,p)*-метрическая функция* $\rho^{\omega}_{p,F_0}(x,y)$ *обладает свойствами*

1) $\rho^{\omega}_{p,F_0}(x,y)=\rho^{\omega}_{p,F_0}(y,x)$ *для всех точек* $x,y\in D'\setminus F_0$;

2) $\rho^{\omega}_{p,F_0}(x,z)\le\rho^{\omega}_{p,F_0}(x,y)+\rho^{\omega}_{p,F_0}(y,z)$ *для всех точек* $x,y,z,\in D'\setminus F_0$.

Свойства метрических функций:

• Предложение. *В случае* $n-1 < q \le p \le n$ *при* $n \ge 3$, *и* $1 \le q \le p \le 2$ *при* $n = 2$ *емкостная* (ω, p)*-метрическая функция* $\rho^{\omega}_{p,F_0}(z,y)$ *обладает свойствами*

1) $\rho^{\omega}_{p,F_0}(z,y) = \rho^{\omega}_{p,F_0}(y,z)$ *для всех точек* $z, y \in D' \setminus F_0$;

2) $\rho^{\omega}_{p,F_0}(x,z) \le \rho^{\omega}_{p,F_0}(x,y) + \rho^{\omega}_{p,F_0}(y,z)$ *для всех точек* $x, y, z, \in D' \setminus F_0$.

• Предложение. *Пусть* $x \in D' \setminus F_0$. *Условие* $\rho^{\omega}_{p,F_0}(y,y) = 0$ *выполняется тогда и только тогда, когда*

$$\lim_{r \to 0} \operatorname{cap}\Big((\overline{B(y,r)}, F_0); L^1_p(D'; \omega)\Big) = 0. \tag{16}$$

ПРИМЕР

Фиксируем произвольную ограниченную область $D' \subset \mathbb{R}^n$, континуум F_0 с непустой внутренностью, и число α такое, что $p-n-\alpha > 0$, $\alpha > -n$. С каждой точкой y_i некоторого счетного всюду плотного множества в D' ассоциируем функцию

$$D' \ni x \mapsto \omega_i(y) = \begin{cases} \omega(y - y_i), & \text{если } x \in B(y_i, 2) \cap D', \\ 2^\alpha, & \text{если } y \in D' \setminus B(y_i, 2), \end{cases}$$

где $\omega(y) = |y|^\alpha$.

ПРИМЕР

Фиксируем произвольную ограниченную область $D' \subset \mathbb{R}^n$, континуум F_0 с непустой внутренностью, и число α такое, что $p-n-\alpha > 0$, $\alpha > -n$. С каждой точкой y_i некоторого счетного всюду плотного множества в D' ассоциируем функцию

$$D' \ni x \mapsto \omega_i(y) = \begin{cases} \omega(y-y_i), & \text{если } x \in B(y_i,2) \cap D', \\ 2^\alpha, & \text{если } y \in D' \setminus B(y_i,2), \end{cases}$$

где $\omega(y) = |y|^\alpha$.
В качестве весовой функции на области D' рассмотрим

$$D' \ni y \mapsto \sigma(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \omega_i(y).$$

Функция $\sigma(y) \in L_1(D')$.

ПРИМЕР

Фиксируем произвольную ограниченную область $D' \subset \mathbb{R}^n$, континуум F_0 с непустой внутренностью, и число α такое, что $p-n-\alpha > 0$, $\alpha > -n$. С каждой точкой y_i некоторого счетного всюду плотного множества в D' ассоциируем функцию

$$D' \ni x \mapsto \omega_i(y) = \begin{cases} \omega(y - y_i), & \text{если } x \in B(y_i, 2) \cap D', \\ 2^\alpha, & \text{если } y \in D' \setminus B(y_i, 2), \end{cases}$$

где $\omega(y) = |y|^\alpha$.
В качестве весовой функции на области D' рассмотрим

$$D' \ni y \mapsto \sigma(y) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \omega_i(y).$$

Функция $\sigma(y) \in L_1(D')$. Более того,

$$\rho^\sigma_{p,F_0}(y_j, y_j) = \mathrm{cap}^{\frac{1}{p}}\Big((\{y_j\}, F_0); L^1_p(D'; \sigma)\Big) \neq 0 \quad \text{для } \forall j \in \mathbb{N}.$$

Емкостная метрика и пополнение области

• Определение. Метрическое пространство $D'_{\rho,p}$ — это совокупность точек

$$\{y \in D' \setminus F_0 \mid \rho^{\omega}_{p,F_0}(y,y) = 0\}$$

с метрикой ρ^{ω}_{p,F_0}.

Предполагаем далее, что метрическое пространство $D'_{\rho,p}$ недискретное.

Емкостная метрика и пополнение области

• Определение. Две *фундаментальные* относительно метрики ρ^{ω}_{p,F_0} последовательности $\{y_l \in D'\}$, $\{z_l \in D'\}$, $l \in \mathbb{N}$, называются *эквивалентными*, если $\rho^{\omega}_{p,F_0}(y_l, z_l) \to 0$ при $l \to \infty$.

Емкостная метрика и пополнение области

• Определение. Две *фундаментальные* относительно метрики ρ^{ω}_{p,F_0} последовательности $\{y_l \in D'\}$, $\{z_l \in D'\}$, $l \in \mathbb{N}$, называются *эквивалентными*, если $\rho^{\omega}_{p,F_0}(y_l, z_l) \to 0$ при $l \to \infty$.

• Определим новое метрическое пространство $(\widetilde{D'}_{\rho,p}, \widetilde{\rho}^{\omega}_{p,F_0})$:

•1) его элементами являются *классы* $\{Y\}$ *эквивалентностых* фундаментальных последовательностей, а

Емкостная метрика и пополнение области

• Определение. Две *фундаментальные* относительно метрики ρ^{ω}_{p,F_0} последовательности $\{y_l \in D'\}$, $\{z_l \in D'\}$, $l \in \mathbb{N}$, называются *эквивалентными*, если $\rho^{\omega}_{p,F_0}(y_l, z_l) \to 0$ при $l \to \infty$.

• Определим новое метрическое пространство $(\widetilde{D}'_{\rho,p}, \widetilde{\rho}^{\omega}_{p,F_0})$:

•1) его элементами являются *классы* $\{Y\}$ *эквивалентных фундаментальных последовательностей*, а

•2) расстояние между двумя элементами X, $Y \in \widetilde{D}'_{\rho,p}$ равно

$$\widetilde{\rho}^{\omega}_{p,F_0}(X, Y) = \lim_{l\to\infty} \rho^{\omega}_{p,F_0}(x_l, y_l), \tag{19}$$

где $\{x_l\}$, $\{y_l\}$ — фундаментальные последовательности из классов X, Y, соответственно.

Теорема о продолжении $\mathcal{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов

• Теорема. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, $n-1 < q \leq p \leq n$ *при* $n \geq 3$, *и* $1 \leq q \leq p \leq 2$ *при* $n = 2$.

Теорема о продолжении $\mathcal{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов

• Теорема. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D'\to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, $n-1<q\le p\le n$ *при* $n\ge 3$, *и* $1\le q\le p\le 2$ *при* $n=2$.
Тогда отображение $f\colon D'\to D$ *индуцирует липшицево отображение*

$$\tilde{f}\colon \left(\widetilde{D}'_{\rho,p},\tilde{\rho}^{\omega}_{p,F_0}\right)\to\left(\widetilde{D}_{\rho,q},\tilde{\rho}_{q,f(F_0)}\right)$$

пополненных метрических пространств:
элементу $X\in\left(\widetilde{D}'_{\rho,p},\tilde{\rho}^{\omega}_{p,F_0}\right)$ *сопоставим элемент* $\tilde{f}(X)\in\left(\widetilde{D}_{\rho,q},\tilde{\rho}_{q,f(F_0)}\right)$, *содержащий фундаментальную последовательность* $\{f(x_l)\}$, *где* $\{x_l\}\in X$,

Теорема о продолжении $\mathcal{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов

• Теорема. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D', \omega; D)$, $n-1 < q \le p \le n$ *при* $n \ge 3$, *и* $1 \le q \le p \le 2$ *при* $n = 2$.
Тогда отображение $f\colon D' \to D$ *индуцирует липшицево отображение*

$$\tilde{f}\colon \left(\widetilde{D}'_{\rho,p}, \tilde{\rho}^{\omega}_{p,F_0}\right) \to \left(\widetilde{D}_{\rho,q}, \tilde{\rho}_{q,f(F_0)}\right)$$

пополненных метрических пространств:
элементу $X \in \left(\widetilde{D}'_{\rho,p}, \tilde{\rho}^{\omega}_{p,F_0}\right)$ *сопоставим элемент* $\tilde{f}(X) \in \left(\widetilde{D}_{\rho,q}, \tilde{\rho}_{q,f(F_0)}\right)$, *содержащий фундаментальную последовательность* $\{f(x_l)\}$, *где* $\{x_l\} \in X$, *со следующей оценкой метрических расстояний*:

$$\begin{cases} \tilde{\rho}_{p,f(F_0)}(\tilde{f}(X), \tilde{f}(Y)) \leqslant K_p \tilde{\rho}^{\omega}_{p,F_0}(X, Y), & \text{если } q = p, \\ \tilde{\rho}_{q,f(F_0)}(\tilde{f}(X), \tilde{f}(Y)) \leqslant \Psi_{q,p}(D' \setminus F_0)^{\frac{1}{\sigma}} \tilde{\rho}^{\omega}_{p,F_0}(X, Y), & \text{если } q < p, \end{cases}$$

для элементов $X, Y \in \widetilde{D}'_{\rho,p}$.

Присоединенная граница

- Определение. Совокупность элементов дополнения

$$H^{\omega}_{\rho,p}(D') = \widetilde{D'}_{\rho,p} \setminus D' \quad (H_{\rho,q}(D) = \widetilde{D}_{\rho,q} \setminus D)$$

называется *емкостной границей* области D' (D). Метрика на границе индуцируется из объемлющего пространства.

Присоединенная граница

• Определение. Совокупность элементов дополнения

$$H^{\omega}_{\rho,p}(D') = \widetilde{D'}_{\rho,p} \setminus D' \quad (H_{\rho,q}(D) = \widetilde{D}_{\rho,q} \setminus D)$$

называется *емкостной границей* области D' (D). Метрика на границе индуцируется из объемлющего пространства.

Емкостные граничные элементы области D' (D) — это точки емкостной границы $H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ $(H_{\rho,q}(D))$.

Граничное соответствие отображений

• Теорема о граничном соответствии $\mathcal{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов.

Пусть гомеоморфизм $f\colon D'\to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, $n-1<q\leq p\leq n$ *при* $n\geq 3$, *и* $1\leq q\leq p\leq 2$ *при* $n=2$.

Граничное соответствие отображений

• Теорема о граничном соответствии $\mathcal{Q}_{q,p}$-гомеоморфизмов.
Пусть гомеоморфизм $f\colon D'\to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, $n-1<q\leq p\leq n$ *при* $n\geq 3$, *и* $1\leq q\leq p\leq 2$ *при* $n=2$.
Тогда ограничение $\tilde f\mid_{H^{\omega}_{\rho,p}(D')}$ *является липшицевым отображением*

$$\tilde f\mid_{H^{\omega}_{\rho,p}(D')}\colon \Big(H^{\omega}_{\rho,p}(D'),\tilde\rho^{\omega}_{p,F_0}\Big)\to\Big(H_{\rho,q}(D),\tilde\rho_{q,f(F_0)}\Big) \qquad (21)$$

емкостных границ.

Носитель граничного элемента

• Определение. Пусть D' — область в $\mathbb{R}^n$. *Носитель* $\mathcal{S}_h$ граничного элемента $h \in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ — это совокупность всех частичных в топологии расширенного пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ пределов для всех фундаментальных в емкостной метрике последовательностей, входящих в класс эквивалентности, определяющий h.

Носитель граничного элемента

• Определение. Пусть D' — область в $\mathbb{R}^n$. *Носитель* $\mathcal{S}_h$ граничного элемента $h \in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ — это совокупность всех частичных в топологии расширенного пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ пределов для всех фундаментальных в емкостной метрике последовательностей, входящих в класс эквивалентности, определяющий h.

• Свойство. 1) *Для $h \in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ имеем*

$$\mathcal{S}_h \subset \partial D' \cup \{\infty\}.$$

2) Носитель $\mathcal{S}_h$ граничного элемента $h \in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ связен в топологии пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$.
3) Для любой последовательности $\{x_m\} \in h$ имеем сходимость $x_m \to \mathcal{S}_h$ в топологии расширенного пространства $\overline{\mathbb{R}^n}$ при $m \to \infty$.

Критерий одноточечности носителя

• Предложение. *Пусть* $h \in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ *— некоторый граничный элемент область* D'. *Носитель* $\mathcal{S}_h$ *состоит из одной точки тогда и только тогда, когда для любых фундаментальных в емкостной метрике последовательностей* $\{x_m\}, \{y_m\} \in h$ *существуют кривые* $\overline{x_m y_m}$, $m \in \mathbb{N}$, *для которых справедливо* $\mathrm{diam}(\overline{x_m y_m}) \to 0$ *при* m.

Граничное поведение гомеоморфизмов

• Теорема. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, *где* $n-1 < q \le p \le n$ *при* $n \ge 3$, *и* $1 \le q \le p \le 2$ *при* $n = 2$, *а* $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ *— весовая функция.*

Граничное поведение гомеоморфизмов

• Теорема. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, *где* $n-1<q\le p\le n$ *при* $n\ge 3$, *и* $1\le q\le p\le 2$ *при* $n=2$, *а* $\omega\in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ *— весовая функция.*
Пусть еще область D'
1) *локально связна в граничной точке* $y\in\partial D'$,

Граничное поведение гомеоморфизмов

• Теорема. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, *где* $n-1 < q \le p \le n$ *при* $n \ge 3$, *и* $1 \le q \le p \le 2$ *при* $n = 2$, *а* $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ *— весовая функция. Пусть еще область* D'

1) *локально связна* в граничной точке $y \in \partial D'$,

2) *носитель* $\mathcal{S}_h$ *граничного элемента* $h \in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ *содержит точку* y,

Граничное поведение гомеоморфизмов

• Теорема. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, *где* $n-1 < q \le p \le n$ *при* $n \ge 3$, *и* $1 \le q \le p \le 2$ *при* $n=2$, *а* $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ — *весовая функция.*
Пусть еще область D'

1) *локально связна* в граничной точке $y \in \partial D'$,

2) *носитель* $\mathcal{S}_h$ *граничного элемента* $h \in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ *содержит точку* y,

3) $\operatorname{cap}\Big((\{y\},F_0);L^1_p(D';\omega)\Big)=0$.

Граничное поведение гомеоморфизмов

• Теорема. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, *где* $n-1 < q \leq p \leq n$ *при* $n \geq 3$, *и* $1 \leq q \leq p \leq 2$ *при* $n = 2$, *а* $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ *— весовая функция.*
Пусть еще область D'

1) *локально связна в граничной точке* $y \in \partial D'$,

2) *носитель* $\mathcal{S}_h$ *граничного элемента* $h \in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ *содержит точку* y,

3) $\operatorname{cap}\Big((\{y\}, F_0); L^1_p(D';\omega)\Big) = 0$.

Тогда

$$f(z) \to \mathcal{S}_{\tilde{f}(h)} \quad \textit{при} \quad z \to y,\ z \in D',$$

в топологии расширенного пространства $\mathbb{R}^n$.

Критерий одноточечности носителя

• Предложение. *Пусть* $h \in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ *— некоторый граничный элемент область* D'*. Носитель* $\mathcal{S}_h$ *состоит из одной точки тогда и только тогда, когда для любых фундаментальных в емкостной метрике последовательностей* $\{x_m\}, \{y_m\} \in h$ *существуют кривые* $\overline{x_m y_m}$*,* $m \in \mathbb{N}$*, для которых справедливо* $\operatorname{diam}(\overline{x_m y_m}) \to 0$ *при* m*.*

О непрерывном продолжении на евклидову границу

• Следствие. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D'\to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, *где* $1<q\le p<\infty$ *при* $n\ge 3$ *или* $1\le q\le p<\infty$ *при* $n=2$, *а* $\omega\in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ *— весовая функция.*

О непрерывном продолжении на евклидову границу

• Следствие. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, *где* $1 < q \le p < \infty$ *при* $n \ge 3$ *или* $1 \le q \le p < \infty$ *при* $n = 2$, *а* $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ — *весовая функция. Пусть еще область* D'

1) *локально связна* в произвольной точке y носителя $\mathcal{S}_h$ граничного элемента $h \in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ и $\operatorname{cap}\Big((\{y\},F_0);L^1_p(D';\omega)\Big) = 0$,

О непрерывном продолжении на евклидову границу

• Следствие. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D' \to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, *где* $1 < q \le p < \infty$ *при* $n \ge 3$ *или* $1 \le q \le p < \infty$ *при* $n = 2$, *а* $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ — *весовая функция. Пусть еще область* D'

1) *локально связна* в произвольной точке y носителя $\mathcal{S}_h$ граничного элемента $h \in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ и $\operatorname{cap}\Big((\{y\},F_0);L^1_p(D';\omega)\Big) = 0$,

2) *носитель* $\mathcal{S}_{\tilde f(h)}$ *граничного элемента* $\tilde f(h)$ *одноточечный*: $\mathcal{S}_{\tilde f(h)} = \{x\} \in \partial D$.

О непрерывном продолжении на евклидову границу

• Следствие. *Пусть гомеоморфизм* $f\colon D'\to D$ *принадлежит классу* $\mathcal{Q}_{q,p}(D',\omega;D)$, *где* $1<q\leq p<\infty$ *при* $n\geq 3$ *или* $1\leq q\leq p<\infty$ *при* $n=2$, *а* $\omega\in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$ — *весовая функция. Пусть еще область* D'

1) *локально связна в произвольной точке* y *носителя* $\mathcal{S}_h$ *граничного элемента* $h\in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$ *и* $\operatorname{cap}\Big((\{y\},F_0);L^1_p(D';\omega)\Big)=0$,

2) *носитель* $\mathcal{S}_{\tilde f(h)}$ *граничного элемента* $\tilde f(h)$ *одноточечный*: $\mathcal{S}_{\tilde f(h)}=\{x\}\in\partial D$.

Тогда отображение $f\colon D'\to D$ *продолжается по непрерывности в точки* $y\in\mathcal{S}_h$ *граничного элемента* $h\in H^{\omega}_{\rho,p}(D')$, *и*

$$\lim_{z\to y,\, z\in D'} f(z)=x \quad \textit{для любой точки } y\in\mathcal{S}_h$$

О свойствах отображений класса $\mathcal{Q}_{n,n}(D',\omega)$

• Теорема. *Гомеоморфизм* $f : D' \to D$ *класса* $\mathcal{Q}_{n,n}(D',\omega)$ *обладает следующими свойствами*:

О свойствах отображений класса $\mathcal{Q}_{n,n}(D',\omega)$

• Теорема. *Гомеоморфизм* $f : D' \to D$ *класса* $\mathcal{Q}_{n,n}(D',\omega)$ *обладает следующими свойствами*:

а) $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$;

О свойствах отображений класса $\mathcal{Q}_{n,n}(D', \omega)$

• Теорема. *Гомеоморфизм* $f : D' \to D$ *класса* $\mathcal{Q}_{n,n}(D', \omega)$ *обладает следующими свойствами*:
a) $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$*;*
b) отображение f *имеет* *конечное искажение*: $Df(y) = 0$ *п. в. на множестве* $Z' = \{y \in D' \mid \det Df(y) = 0\}$*;*

О свойствах отображений класса $\mathcal{Q}_{n,n}(D',\omega)$

• Теорема. *Гомеоморфизм* $f : D' \to D$ *класса* $\mathcal{Q}_{n,n}(D',\omega)$ *обладает следующими свойствами*:
a) $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$;
b) отображение f *имеет* *конечное искажение*: $Df(y) = 0$ *п. в. на множестве* $Z' = \{y \in D' \mid \det Df(y) = 0\}$;
c) *внешняя операторная функция искажения*

$$K^{\theta,1}_{n,n}(y,f) = \begin{cases} \dfrac{\theta(y)^{\frac{1}{n}}|Df(y)|}{|\det Df(y)|^{\frac{1}{n}}}, & \text{если } \det Df(y) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det Df(y) = 0, \end{cases} \tag{25}$$

где $\theta(y) = \omega^{-(n-1)}(y)$ *принадлежит* $L_\infty(D')$;

Свойства отображений класса $\mathcal{Q}_{n,n}(D',\omega)$

• Теорема. *Гомеоморфизм $f : D' \to D$ класса $\mathcal{Q}_{n,n}(D',\omega)$ обладает следующими свойствами*:
a) $f \in W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$;
b) отображение f имеет конечное искажение*: $Df(y) = 0$ п. в. на множестве $Z' = \{y \in D' \mid \det Df(y) = 0\}$;*
c) внешняя операторная функция искажения

$$K^{\theta,1}_{n,n}(y,f) = \begin{cases} \dfrac{\theta(y)^{\frac{1}{n}}|Df(y)|}{|\det Df(y)|^{\frac{1}{n}}}, & \text{если } \det Df(y) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det Df(y) = 0, \end{cases} \tag{26}$$

где $\theta(y) = \omega^{-(n-1)}(y)$ принадлежит $L_\infty(D')$;
d) гомеоморфизм f индуцирует по правилу замены переменной ограниченный оператор

$$f^* : L^1_n(D) \cap \mathrm{Lip}_l(D) \to L^1_n(D';\theta).$$

Publications

1. *Водопьянов С. К.* О регулярности отображений, обратных к соболевским. Матем. сб. 2012 Т. 203, № 10. С. 1383–1410.

2. *Vodopyanov S. K.* Composition operators on weighted Sobolev spaces and the theory of Q_p-homeomorphisms. Dokl. Math. 2020. V. 102, № 2. P. 371–375.

3. *Vodopyanov S. K.* On the Analytic and Geometric Properties of Mappings in the Theory of $Q_{q,p}$-Homeomorphisms // Math. Notes. 2020. V. 108, № 6. P. 889-894.

4. *Vodopyanov S. K.* The regularity of inverses to Sobolev mappings and the theory of $Q_{q,p}$-homeomorphisms // Sib. Math. Zh. 2020. V. 61, No 6. P. 1002–1038.

5. *Vodopyanov S. K., Tomilov A. O.* Functional and analytical properties of a class of mappings of quasiconformal analysis // Izvestiya: Mathematics. 2021. V. 85, № 5.

6. *Molchanova A., Vodopyanov S. K.* Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity // Calculus of Variations and PDE. 2020. V. 59, Article number 17. P. 1-25.

7. *Vodopyanov S. K., Evseev N. A.* Functional and analytical properties of a class of mappings of quasiconformal analysis on Carnot groups // Sib. Math. Zh. 2021. V. 62.

8. *Jain P., Molchanova A., Singh M., Vodopyanov S.* On grand Sobolev spaces and pointwise description of Banach function spaces // Nonlinear Analysis, Theory, Methods and Applications. 2021. V. 202, No 1. (available online)

9. *Vodopyanov S. K.* Moduli inequalities for $W^1_{n-1,\text{loc}}$-mappings with weighted bounded (q,p)-distortion // Complex Variables and Elliptic Equations. 2021. V. 66, No 6–7. P. 1002–1038. (available online)

10. *Vodopyanov S. K., Molchanova A. O.* Extension of homeomorphisms with bounded (q,p)-distortion to the adjoint boundary // Sib. Math. Zh., submitted

11. *Vodopyanov S. K.* On the equivalence of two approaches to problems of quasiconformal analysis // Sib. Math. Zh. 2021. V. 62, accepted.

ПРИМЕР

• E. Afanas'eva, V. Ryazanov, R. Salimov, and E. Sevost'yanov. On Boundary Extension of Sobolev Classes with Critical Exponent by Prime Ends // Lobachevskii Journal of Mathematics, 2020, Vol. 41, № 11, pp. 2091–2102.

Дан $W_{1,1}$-гомеоморфизм $f : D' \to D$ с конечным искажением, *внешняя операторная функция искажения* которого

$$K^{1,1}_{n,n}(y,f) = \begin{cases} \dfrac{|Df(y)|}{|\det Df(y)|^{\frac{1}{n}}}, & \text{если } \det Df(y) \neq 0, \\ 0, & \text{если } \det Df(y) = 0, \end{cases} \tag{27}$$

принадлежит $L_{(n-1)n}(D')$.

СВОЙСТВА

1) гомеоморфизм f индуцирует ограниченный оператор композиции

$$f^* : L^1_n(D) \to L^1_{n-1}(D');$$

СВОЙСТВА

1) гомеоморфизм f индуцирует ограниченный оператор композиции

$$f^* : L^1_n(D) \to L^1_{n-1}(D');$$

2) обратный гомеоморфизм $\varphi = f^{-1} : D \to D'$ принадлежит классу $W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$ и имеет конечное искажение [1];

СВОЙСТВА

1) гомеоморфизм f индуцирует ограниченный оператор композиции

$$f^* : L^1_n(D) \to L^1_{n-1}(D');$$

2) обратный гомеоморфизм $\varphi = f^{-1} : \Omega \to \Omega'$ принадлежит классу $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и имеет конечное искажение [1] ;
3) $\varphi : D \to D'$ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^* : L^1_n(D'; \omega) \to L^1_n(D)$$

с весовой функцией $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, определяемой по формуле

$$\omega(y) = \begin{cases} \frac{|\operatorname{adj} Df(y)|^n}{|\det Df(y)|^{n-1}}, & \text{если } y \in D' \setminus Z', \\ 1 & \text{иначе}, \end{cases} \tag{36}$$

где $Z' = \{y \in D' : Df(y) = 0\}$ [2,4];

СВОЙСТВА

1) гомеоморфизм f индуцирует ограниченный оператор композиции

$$f^*: L^1_n(D) \to L^1_{n-1}(D');$$

2) обратный гомеоморфизм $\varphi = f^{-1}: \Omega \to \Omega'$ принадлежит классу $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$ и имеет конечное искажение [1];
3) $\varphi: \Omega \to \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор композиции

$$\varphi^*: L^1_n(D;\omega) \to L^1_n(D)$$

с весовой функцией $\omega \in L_{1,\mathrm{loc}}(D')$, определяемой по формуле

$$\omega(y) = \begin{cases} \dfrac{|\operatorname{adj} Df(y)|^n}{|\det Df(y)|^{n-1}}, & \text{если } y \in D' \setminus Z', \\ 1 & \text{иначе,} \end{cases} \tag{36}$$

где $Z' = \{y \in D' : Df(y) = 0\}$ [2,4];
4) гомеоморфизм $f: D' \to D$ принадлежит классу $\mathcal{Q}_{n,n}(D', \omega)$ [2,5].

5) оператор композиции $f^* : L^1_n(D) \cap \mathrm{Lip}_l(D) \to L^1_n(D'; \theta)$ ограничен, $\theta(y) = \omega^{-(n-1)}(y)$.

Отсюда вытекает возможность описать граничное поведение гомеоморфизма $\varphi = f^{-1} : D \to D'$