Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2010, №2, с. 53–65 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421000123\0013*

Памяти П.Л. Ульянова

Б.П. ОСИЛЕНКЕР

О НЕКОТОРЫХ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ЗАДАЧАХ ДЛЯ АЛГЕБРАИЧЕСКИХ ПОЛИНОМОВ В НАГРУЖЕННЫХ ПРОСТРАНСТВАХ

Аннотация. В нагруженном пространстве Якоби со скалярным произведением
$\langle f,g\rangle = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\displaystyle\int_{-1}^{1} fg(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx+Lf(1)g(1)+Mf(-1)g(-1)$ $(L,M\geq 0)$
для l-й производной алгебраического полинома $\Pi_N^{(r)}(x)=\sum\limits_{k=N-r+1}^{N} a_k^0x^k+\sum\limits_{j=0}^{N-r} a_jx^j$ $(a_N^{(0)}>0)$ с фиксированными коэффициентами $a_k^{(0)}$ решены задачи: найти (при $0\leq l\leq N-r$) $\inf\langle D^l[\Pi_N^{(r)}(x)],D^l[\Pi_N^{(r)}(x)]\rangle$ $(D=\frac{d}{dx})$ и указать экстремальные полиномы.

Ключевые слова: экстремальная проблема, нагруженные пространства, нагруженные ортогональные полиномы, алгебраические полиномы, классические полиномы Якоби.

УДК: 517.538

Abstract. Let $\Pi_N^{(r)}(x)=\sum\limits_{k=N-r+1}^{N} a_k^{(0)}x^k+\sum\limits_{j=0}^{N-r} a_jx^j$ $(a_N^{(0)}>0)$ be an algebraic polynomial with fixed coefficients $a_k^{(0)}$. For the lth derivative of the mentioned polynomial we solve the following extremal problems: in a loaded Jacobi space with the inner product
$\langle f,g\rangle = \dfrac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\displaystyle\int_{-1}^{1} fg(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx+Lf(1)g(1)+Mf(-1)g(-1)$ $(L,M\geq 0)$
find $\inf\langle D^l[\Pi_N^{(r)}(x)],D^l[\Pi_N^{(r)}(x)]\rangle$ $(D=\frac{d}{dx},\ 0\leq l\leq N-r)$ and calculate extremal polynomials.

Keywords: extremal problem, loaded spaces, loaded orthogonal polynomials, algebraic polynomials, classical Jacobi polynomials.

1. Введение

Рассмотрим в пространстве вещественных полиномов $\mathbb{P}$ на отрезке $[-1,1]$ билинейную форму

$$\langle f,g\rangle=\int_{-1}^{1} f(x)g(x)d\mu(x)+\sum_{k=1}^{m} M_kf(x_k)g(x_k), \tag{1.1}$$

Поступила 29.10.2007

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (грант 08-01-00286).

где $d\mu(x)$ — вероятностная мера на $[-1,1]$, $M_k(k=1,2,\dots,m)$ — неотрицательные числа, x_k $(k=1,2,\dots,m)$ — точки из отрезка $[-1,1]$. Эта билинейная форма определяет скалярное произведение в линейном пространстве $\mathbb{P}$ полиномов с вещественными коэффициентами. Пополнение $\mathbb{P}$ по норме $\|f\|=\langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$ приводит к соответствующему нагруженному пространству функций. Такие пространства возникают в ряде задач математической физики, вычислительной математики, теории функций и функционального анализа (см., например, [1]–[5], литературу в них и статьи [6]–[17]). В частности, к ним приводят спектральные задачи для обыкновенных дифференциальных уравнений, краевые задачи со спектральным параметром в граничных условиях, дифференциальные уравнения с разрывными коэффициентами, нагруженные интегральные уравнения.

С помощью процесса ортогонализации Грама–Шмидта, примененного к каноническому базису $\mathbb{P}$, построим полиномы степени n: $\widehat{q}_n(x)(n\in\mathbb{Z}_+;x\in[-1,1])$, ортонормированные в скалярном произведении (1.1):

$$\widehat{q}_n(x)=k_n^{(n)}x^n+k_{n-1}^{(n)}x^{n-1}+\dots+k_0^{(n)},\quad k_n^{(n)}>0, \tag{1.2}$$

и

$$\langle\widehat{q}_n,\widehat{q}_s\rangle=\int_{-1}^{1}\widehat{q}_n(x)\widehat{q}_s(x)d\mu(x)+\sum_{k=1}^{m}M_k\widehat{q}_n(x_k)\widehat{q}_s(x_k)=\delta_{s,n}\quad(s,n\in\mathbb{Z}_+).$$

Пусть $\mathbb{P}^N$ — линейное пространство всех вещественных полиномов степени не выше N,

$$\Re_N^{(r)}=\left\{\Pi_N^{(r)},\;\;\Pi_N^{(r)}(x)=\sum_{j=N-r+1}^{N}a_j^0x^j+\sum_{j=0}^{N-r}a_jx^j,\;\;a_N^0>0\right\}$$

— класс всех полиномов степени N с r фиксированными коэффициентами, где $a_N^0,a_{N-1}^0,\dots,$ a_{N-r+1}^0 — фиксированные вещественные числа. Нетрудно видеть, что производная l-го порядка $(0\le l\le N-r)$ для таких полиномов имеет вид

$$D^l[\Pi_N^{(r)}(x)]=\sum_{j=N-r-l+1}^{N-l}(j+1)_la_{j+l}^0x^j+\sum_{j=0}^{N-r-l}(j+1)_la_{j+l}x^j, \tag{1.3}$$

где “сдвинутый факториал” определяется по формуле

$$(a)_n=a(a+1)(a+2)\cdots(a+n-1)=\frac{\Gamma(n+a)}{\Gamma(a)}\quad(n\ge1),\quad(a)_0=1.$$

С другой стороны, можно разложить полученный многочлен по ортонормированному базису

$$D^l[\Pi_N^{(r)}(x)]=\sum_{i=0}^{N-l}\alpha_i^{(N-l)}\widehat{q}_i(x)=\sum_{i=0}^{N-l}\alpha_i^{(N-l)}\sum_{j=0}^{i}k_j^{(i)}x^j,$$

откуда

$$D^l[\Pi_N^{(r)}(x)]=\sum_{j=N-r-l+1}^{N-l}\left[\sum_{i=j}^{N-l}\alpha_i^{(N-l)}k_j^{(i)}\right]x^j+\sum_{j=0}^{N-r-l}\left[\sum_{i=j}^{N-l}\alpha_i^{(N-l)}k_j^{(i)}\right]x^j. \tag{1.4}$$

Сравнивая в соотношениях (1.3) и (1.4) коэффициенты при одинаковых степенях неизвестных, получаем следующую систему для определения чисел $\alpha_i^{(N-l)}$ (назовем их $\alpha_i^{(N-l),0}$) при фиксированных a_j^0:

$$\sum_{i=j}^{N-l}\alpha_i^{(N-l),0}k_j^{(i)}=(j+1)_l a_{j+l}^0 \quad (j=N-r-l+1,N-r-l+2,\ldots,N-l-1,N-l), \quad (1.5)$$

где $k_j^{(i)}$ — коэффициенты полинома $\widehat{q}_i(x)$ (см. (1.2)).

В силу ортонормированности системы $\{\widehat{q}_n(x)(n\in\mathbb{Z}_+)\}$ для $\Pi_N^{(r)}\in\Re_N^{(r)}$ получаем

$$\langle D^l[\Pi_N^{(r)}(x)],D^l[\Pi_N^{(r)}(x)]\rangle=\sum_{j=N-r+1}^{N-l}\big[\alpha_j^{(N-l),0}\big]^2+\sum_{j=0}^{N-r}\big[\alpha_j^{(N-l)}\big]^2.$$

Отсюда вытекает (при $l=0$ см. [17])

Теорема 1. *Справедливы следующие утверждения*:

i) $$\inf_{\Pi_N^{(r)}\in\Re_N^{(r)}}\{\langle D^l[\Pi_N^{(r)}(x)],D^l[\Pi_N^{(r)}(x)]\rangle\}=\sum_{j=N-r-l+1}^{N-l}\big[\alpha_j^{(N-l),0}\big]^2 \quad (0\le l\le N-r);$$

ii) *экстремальный полином, на котором реализуется последнее равенство, имеет вид*

$$\sum_{j=N-r-l+1}^{N-l}\alpha_j^{(N-l),0}\widehat{q}_j(x),$$

где $\alpha_j^{(N-l),0}$ *являются решениями системы* (1.5).

Можно восстановить исходный полином. Соответствующий полином $\overline{\Pi}_N(x)$ определяется неоднозначно, и при $l\ge 1$ положим

$$\overline{\Pi}_N(x)=\frac{1}{(l-1)!}\sum_{j=N-r-l+1}^{N-l}\alpha_j^{(N-l),0}\int_{-1}^{x}(x-s)^{l-1}\widehat{q}_j(s)ds.$$

Обозначим через $\widetilde{\Re}_N^{(r)}$ совокупность всех монических полиномов степени N с r фиксированными коэффициентами. В частности, при $r=1$ и $r=2$ имеем

$$\widetilde{\Re}_N^{(1)}=\Big\{\widetilde{\Pi}_N(x)=x^N+\sum_{j=0}^{N-1}a_jx^j\Big\};\quad \widetilde{\Re}_N^{(2)}=\Big\{\widetilde{\Pi}_N(x)=x^N-\sigma x^{N-1}+\sum_{j=0}^{N-2}a_jx^j\Big\},$$

где σ — произвольное вещественное число.

Из теоремы 1 вытекает

Следствие 1. При всех $0\le l\le N-1$

i) имеет место формула $$\inf_{\widetilde{\Pi}_N\in\widetilde{\Re}_N^{(1)}}\langle D^l[\widetilde{\Pi}_N(x)],D^l[\widetilde{\Pi}_N(x)]\rangle=\left[\frac{(N-l+1)_l}{k_{N-l}^{(N-l)}}\right]^2;$$

ii) экстремальным полиномом, на котором реализуется последнее равенство, является

$$\frac{(N-l+1)_l}{k_{N-l}^{(N-l)}}\widehat{q}_{N-l}(x),$$

где $k_{N-l}^{(N-l)}$ — старший коэффициент полинома $\widehat{q}_{N-l}(x)$, при этом $(l\ge 1)$

$$\overline{\Pi}_N(x)=\frac{(N-l+1)_l}{k_{N-l}^{(N-l)}(l-1)!}\int_{-1}^{x}(x-s)^{l-1}\widehat{q}_{N-l}(s)ds.$$

Следствие 2. Справедлива формула

$$\inf_{\widetilde{\Pi}_N\in\Re_N^{(2)}}\langle\widetilde{\Pi}_N,\widetilde{\Pi}_N\rangle=\frac{1}{[k_N^{(N)}]^2}+\frac{1}{[k_{N-1}^{(N-1)}]^2}\left[\sigma+\frac{k_{N-1}^{(N)}}{k_N^{(N)}}\right]^2\quad(0\le l\le N-2),$$

при этом экстремальный полином имеет вид

$$\frac{1}{k_N^{(N)}}\widehat{q}_N(x)-\frac{1}{k_{N-1}^{(N-1)}}\left[\sigma+\frac{k_{N-1}^{(N)}}{k_N^{(N)}}\right]\widehat{q}_{N-1}(x).$$

Отметим, что эта задача (при двух фиксированных коэффициентах) в случае равномерной метрики была поставлена и решена Е.И. Золотаревым. Обзор результатов и постановка экстремальных проблем содержатся в [18].

В данной работе экстремальные задачи изучаются в модельном случае нагруженных пространств Якоби.

2. Экстремальные задачи в нагруженном пространстве Якоби

Классические ортогональные полиномы Якоби $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ ортогональны на промежутке $(-1,1)$ по вероятностной мере

$$d\mu_{\alpha,\beta}(x)=\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{2^{\alpha+\beta+1}\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx,\quad\alpha,\beta>-1,\tag{2.1}$$

и могут быть представлены по формуле Родрига ([19], с. 79; [20], с. 268)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{(-1)^n}{n!2^n}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}[(1-x)^{n+\alpha}(1+x)^{n+\beta}]^{(n)}\ (x\in(-1,1),\ n\in\mathbb{Z}_+,\ \alpha,\beta>-1).$$

Имеем

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=k(P_n^{(\alpha,\beta)})x^n+r(P_n^{(\alpha,\beta)})x^{n-1}+\cdots,$$

где коэффициенты при x^n и x^{n-1} соответственно равны ([20], с. 270)

$$k(P_n^{(\alpha,\beta)})=\frac{1}{n!2^n}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)},\quad r(P_n^{(\alpha,\beta)})=\frac{(\alpha-\beta)n}{n!2^n}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

Для классических полиномов Якоби при $n=0,1,2,\ldots$ значения на концах промежутка ортогональности имеют вид ([19], с. 70; [20], с. 283)

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{(\alpha+1)_n}{n!},\quad P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^n\frac{(\beta+1)_n}{n!}.$$

Норма классических ортогональных полиномов Якоби вычисляется по формуле ([19], с. 80; [20], с. 272)

$$\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2_{d\mu_{\alpha,\beta}}:=\int_{-1}^{1}[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2d\mu_{\alpha,\beta}(x)=$$

$$=\frac{1}{2n+\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}.$$

На линейном пространстве всех алгебраических полиномов $\mathbb{P}$ введем скалярное произведение

$$\langle p,q\rangle_{\alpha,\beta}=\int_{-1}^{1}p(x)q(x)d\mu_{\alpha,\beta}(x)+Lp(1)q(1)+Mp(-1)q(-1),\quad p,q\in\mathbb{P};\quad L,M\ge0.\tag{2.2}$$

Пополнение $\mathbb{P}$ по норме $\|f\|=\langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}}$ назовем нагруженным пространством Якоби.

В работе [13] Т. Корнвиндер ввел полиномы $P_n^{\alpha,\beta;L,M}(x)$ $(n \in \mathbb{Z}_+)$, ортогональные на промежутке $[-1,1]$ по отношению к скалярному произведению (2.2). Назовем их "нагруженными полиномами Якоби" (или "обобщенными полиномами Якоби"). Нагруженные полиномы в последние десятилетия интенсивно изучались в ряде работ (см., например, [3], [7]–[16] и литературу в них).

Свойства нагруженных полиномов Якоби существенно отличаются от соответствующих свойств классических полиномов Якоби (рекуррентные соотношения, распределение нулей, поведение на концах промежутка ортогональности и т. д.; см., например, [3], [7], [9]–[16] и литературу в них).

В [12] (см. также [9]) доказано представление обобщенных полиномов Якоби

$$\begin{aligned} P_n^{\alpha,\beta;L,M}(x) &= P_n^{(\alpha,\beta)}(x) + MQ_n^{(\alpha,\beta)}(x) + LR_n^{(\alpha,\beta)}(x) + LMS_n^{(\alpha,\beta)}(x) \quad (n \in \mathbb{Z}_+), \\ Q_0^{(\alpha,\beta)}(x) &= R_0^{(\alpha,\beta)}(x) = S_0^{(\alpha,\beta)}(x) = 0, \end{aligned} \tag{2.3}$$

и при $n = 1, 2, \ldots$ выполняется

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+\beta+2)_n(\beta+2)_{n-1}}{2n!(\alpha+1)_{n-1}}(x+1)P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x) \tag{2.4}$$

и

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(\alpha+\beta+2)_n(\beta+2)_{n-1}}{(n-1)!n!}, \quad Q_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = 0, \tag{2.5}$$

а также

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+\beta+2)_n(\alpha+2)_{n-1}}{(\beta+1)_{n+1}2n!}(x-1)P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x), \tag{2.6}$$

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(1) = 0, \quad R_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = \frac{(\alpha+2)_{n-1}(\alpha+\beta+2)_n}{(n-1)!n!}, \tag{2.7}$$

и

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\frac{(\alpha+\beta+2)_n(\alpha+\beta+2)_{n+1}}{4n!(n-1)!}(x^2-1)P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x), \tag{2.8}$$

при этом

$$S_n^{(\alpha,\beta)}(\pm 1) = 0. \tag{2.9}$$

Рассмотрим вопрос о вычислении нормы нагруженных полиномов Якоби. По определению нормы имеем

$$\begin{aligned} \langle P_n^{\alpha,\beta;L,M}, P_n^{\alpha,\beta;L,M}\rangle_{\alpha,\beta} = \int_{-1}^{1} &[P_n^{\alpha,\beta;L,M}(x)]^2 d\mu_{\alpha,\beta}(x) + \\ &+ M[P_n^{\alpha,\beta;L,M}(-1)]^2 + L[P_n^{\alpha,\beta;L,M}(1)]^2, \end{aligned} \tag{2.10}$$

где мера Якоби $d\mu_{\alpha,\beta}(x)$ определена по формуле (2.1).

Отметим, что из соотношений (2.3), (2.5), (2.7), (2.9) вытекают равенства

$$P_n^{\alpha,\beta;L,M}(1) = P_n^{(\alpha,\beta)}(1) + MQ_n^{(\alpha,\beta)}(1) = \frac{(\alpha+1)_n}{n!} + M\frac{(\beta+2)_{n-1}(\alpha+\beta+2)_n}{(n-1)!n!}$$

и

$$P_n^{\alpha,\beta;L,M}(-1) = P_n^{(\alpha,\beta)}(-1) + LR_n^{(\alpha,\beta)}(-1) = (-1)^n\left[\frac{(\beta+1)_n}{n!} + L\frac{(\alpha+2)_{n-1}(\alpha+\beta+2)_n}{(n-1)!n!}\right].$$

Следовательно,

$$M[P_n^{\alpha,\beta;L,M}(-1)]^2+L[P_n^{\alpha,\beta;L,M}(1)]^2=M\frac{[(\beta+1)_n]^2}{(n!)^2}+L\frac{[(\alpha+1)_n]^2}{(n!)^2}+$$
$$+2LM\frac{\alpha+\beta+2}{(\alpha+1)(\beta+1)}\frac{(\alpha+1)_n(\beta+1)_n(\alpha+\beta+2)_n}{(n-1)!(n!)^2}+ML^2\left[\frac{(\alpha+2)_{n-1}(\alpha+\beta+2)_n}{(n-1)!n!}\right]^2+$$
$$+LM^2\left[\frac{(\beta+2)_{n-1}(\alpha+\beta+2)_n}{(n-1)!n!}\right]^2. \quad (2.11)$$

Рассмотрим первое слагаемое в сумме (2.10). В силу соотношения (2.3)

$$J_n=\int_{-1}^{1}[P_n^{\alpha,\beta;L,M}(x)]^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx=$$
$$=\int_{-1}^{1}[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)+MQ_n^{(\alpha,\beta)}(x)+LR_n^{(\alpha,\beta)}(x)+LMS_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx=\sum_{k=1}^{10}I_n^{(k)}, \quad (2.12)$$

Сумма первых четырех слагаемых

$$I_n^{(1)}=\int_{-1}^{1}[P_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx,\qquad I_n^{(2)}=M^2\int_{-1}^{1}[Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx,$$
$$I_n^{(3)}=L^2\int_{-1}^{1}[R_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx,\quad I_n^{(4)}=M^2L^2\int_{-1}^{1}[S_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx$$

непосредственно выражается через нормы соответствующих полиномов Якоби:

$$\sum_{k=1}^{4}I_n^{(k)}=\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2_{d\mu_{\alpha,\beta}}+M^2\left[\frac{(\alpha+\beta+2)_n(\beta+2)_{n-1}}{2n!(\alpha+1)_{n-1}}\right]^2\|P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}\|^2_{d\mu_{\alpha,\beta+2}}+$$
$$+L^2\left[\frac{(\alpha+\beta+2)_n(\alpha+2)_{n-1}}{2n!(\beta+1)_{n-1}}\right]^2\|P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}\|^2_{d\mu_{\alpha+2,\beta}}+$$
$$+M^2L^2\frac{1}{(\alpha+1)^2(\beta+1)^2}\left[\frac{(\alpha+\beta+2)_n(\alpha+\beta+2)_{n+1}}{4n!(n-1)!}\right]^2\|P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}\|^2_{d\mu_{\alpha+2,\beta+2}}.$$

Для вычисления остальных интегралов воспользуемся следующим приемом, который продемонстрируем на интеграле (учитывая (2.4))

$$I_n^{(5)}=2M\int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx=$$
$$=2M\frac{(\alpha+\beta+2)_n(\beta+2)_{n-1}}{2n!(\alpha+1)_{n-1}}\int_{-1}^{1}(x+1)P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx.$$

Разложим полином $(x+1)P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x)$ по базису $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$

$$(x+1)P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x)=\sum_{k=0}^{n}a_k^{(n)}P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$$

и вычислим $a_n^{(n)}$, сравнив коэффициенты при x^n в последнем соотношении. Учитывая значения старших коэффициентов полиномов Якоби, имеем

$$a_n^{(n)} = \frac{k(P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)})}{k(P_n^{(\alpha,\beta)})} = \frac{2n}{n+\alpha+\beta+1}.$$

Ортогональность системы классических полиномов Якоби приводит к равенству

$$\int_{-1}^{1}(x+1)P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x)P_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx = \frac{2n}{n+\alpha+\beta+1}\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2_{d\mu_{\alpha,\beta}},$$

и, значит,

$$I_n^{(5)} = 2M\frac{(\alpha+\beta+2)_n(\beta+2)_{n-1}}{(n-1)!(\alpha+1)_{n-1}(n+\alpha+\beta+1)}\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2_{d\mu_{\alpha,\beta}}.$$

Аналогично, используя (2.6), получаем

$$I_n^{(6)} = 2L\int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)R_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx =$$
$$= 2L\frac{(\alpha+\beta+2)_n(\alpha+2)_{n-1}}{(n+\alpha+\beta+1)(n-1)!(\beta+1)_{n-1}}\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2_{d\mu_{\alpha,\beta}}.$$

Разлагая полином $(x^2-1)P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x)$ по базису $\{P_n^{(\alpha,\beta)}(x)\}$

$$(x^2-1)P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x) = \sum_{k=0}^{n}\gamma_k^{(n)}P_k^{(\alpha,\beta)}(x)$$

и сравнивая коэффициенты при x^n, получаем

$$\gamma_n^{(n)} = \frac{k(P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)})}{k(P_n^{(\alpha,\beta)})} = \frac{4(n-1)n}{(n+\alpha+\beta+1)(n+\alpha+\beta+2)}.$$

Следовательно, в силу (2.8)

$$I_n^{(7)} = 2LM\int_{-1}^{1}P_n^{(\alpha,\beta)}(x)S_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^\alpha(1+x)^\beta dx =$$
$$= 2LM\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)}\frac{(\alpha+\beta+2)_n(\alpha+\beta+2)_{n-1}}{(n-1)!(n-2)!}\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2_{d\mu_{\alpha,\beta}}.$$

Для вычисления интеграла $I_n^{(8)}$ воспользуемся формулами (48) и (49) из [12], в которых учтем соотношение ([19], с. 75; [20], с. 282):

$$DP_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{n+\alpha+\beta+1}{2}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x).$$

Тогда

$$Q_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\beta+2)_{n-1}(\alpha+\beta+2)_{n-1}}{(\alpha+1)_n n!}\Bigg[n(n+\alpha+\beta+1)P_n^{(\alpha,\beta)}(x) -$$
$$- \frac{(\beta+1)(n+\alpha+\beta+1)}{2}(x-1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\Bigg]$$

и

$$R_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(\alpha+2)_{n-1}(\alpha+\beta+2)_{n-1}}{(\beta+1)_n n!}\Big[n(n+\alpha+\beta+1)- \\ - \frac{(\alpha+1)(n+\alpha+\beta+1)}{2}P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\Big].$$

Получаем

$$I_n^{(8)} = 2LM\int_{-1}^{1} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)R_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx = \\ = 2LM\frac{(\alpha+\beta+2)_{n-1}(\alpha+\beta+2)_n(n+\alpha+\beta+1)}{(\alpha+1)(\beta+1)(n!)^2}\times \\ \times\int_{-1}^{1}\Big[nP_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{\beta+1}{2}(x-1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\Big]\times \\ \times\Big[nP_n^{(\alpha,\beta)}(x) - \frac{\alpha+1}{2}(x+1)P_{n-1}^{(\alpha+1,\beta+1)}(x)\Big](1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx.$$

Рассуждая, как и выше, имеем

$$I_n^{(8)} = 2LM\frac{(\alpha+\beta+2)_{n-1}(\alpha+\beta+2)_n}{(\alpha+1)(\beta+1)(n-1)!n!}[n^2-n-(\alpha+1)(\beta+1)]\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2_{d\mu_{\alpha,\beta}}.$$

Вычисление оставшихся двух интегралов суммы J_n проводится по той же схеме, что и вычисление слагаемых $I_n^{(5)}$ и $I_n^{(7)}$, поэтому приведем лишь окончательные результаты для

$$I_n^{(9)} = 2LM^2\int_{-1}^{1} Q_n^{(\alpha,\beta)}(x)S_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx = \\ = 2LM^2\frac{[(\alpha+\beta+2)_n]^3(\beta+2)_{n-1}}{4(\alpha+1)_{n-1}(\alpha+1)(\beta+1)(n-2)!(n!)^2}\|P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}\|^2_{d\mu_{\alpha,\beta+2}}$$

и для

$$I_n^{(10)} = 2L^2M\int_{-1}^{1} R_n^{(\alpha,\beta)}(x)S_n^{(\alpha,\beta)}(x)(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}dx = \\ = 2L^2M\frac{[(\alpha+\beta+2)_n]^3(\alpha+2)_{n-1}}{4(\beta+1)_{n-1}(\alpha+1)(\beta+1)(n-2)!(n!)^2}\|P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}\|^2_{d\mu_{\alpha+2,\beta}}.$$

Введем

$$a_n^{\alpha,\beta} = \frac{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\beta+1)}\frac{(n-2)!\Gamma(n+\beta+1)}{\Gamma(n+\alpha)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)} \tag{2.13}$$

и

$$c_n^{\alpha,\beta} = (\alpha+1)(\beta+1)\Gamma^2(\alpha+\beta+2)\frac{(n-2)!(n-1)!}{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}. \tag{2.14}$$

В таких обозначениях, подставляя значения $I_n^{(k)}$ $(k=1,2,\ldots,10)$ в формулу (2.12), используя (2.11) и выражения для нормы полиномов $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ и "сдвинутых факториалов" через

Γ-функцию, норму (2.10) нагруженных полиномов Якоби записываем в виде

$$\langle P_n^{\alpha,\beta;L,M}, P_n^{\alpha,\beta;L,M}\rangle_{\alpha,\beta} = \frac{1}{(\alpha+1)^2(\beta+1)^2\Gamma^4(\alpha+\beta+2)}\times$$
$$\times\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma^2(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+3)}{(n-2)![(n-1)!]^2n!}\times$$
$$\times\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2_{d\mu_{\alpha,\beta}}[LM+a_n^{\alpha,\beta}M+a_n^{\beta,\alpha}L+c_n^{\alpha,\beta}][ML+a_{n+1}^{\alpha,\beta}M+a_{n+1}^{\beta,\alpha}L+c_{n+1}^{\alpha,\beta}].$$

Положим

$$\omega_n^{\alpha,\beta;L,M} = \frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma^2(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{(n-2)!(n-1)!}\times$$
$$\times[LM+a_n^{\alpha,\beta}M+a_n^{\beta,\alpha}L+c_n^{\alpha,\beta}], \quad (2.15)$$

где $a_n^{\alpha,\beta}$ и $c_n^{\alpha,\beta}$ определены формулами (2.13) и (2.14).

Теорема 2. *Для нормы нагруженных полиномов Якоби справедливо представление*

$$\|P_n^{\alpha,\beta;L,M}\|^2_{\alpha,\beta} = \langle P_n^{\alpha,\beta;L,M}, P_n^{\alpha,\beta;L,M}\rangle_{\alpha,\beta} = \omega_n^{\alpha,\beta;L,M}\omega_{n+1}^{\alpha,\beta;L,M}\|P_n^{(\alpha,\beta)}\|^2_{d\mu_{\alpha,\beta}},$$

где для $\omega_n^{\alpha,\beta;L,M}$ *имеет место соотношение* (2.15).

Рассмотрим нагруженные ортогональные полиномы Якоби

$$P_n^{\alpha,\beta;L,M}(x) = k(P_n^{\alpha,\beta;L,M})x^n + r(P_n^{\alpha,\beta;L,M})x^{n-1}+\cdots$$

Лемма 1. *Для старшего коэффициента нагруженного полинома Якоби* $P_n^{\alpha,\beta;L,M}(x)$ *справедливо представление*

$$k(P_n^{\alpha,\beta;L,M}) = \omega_n^{\alpha,\beta;L,M}k(P_n^{(\alpha,\beta)}), \quad (2.16)$$

где $\omega_n^{\alpha,\beta;M,N}$ *определено формулой* (2.15).

Доказательство. Воспользуемся формулой (2.3) и сравним коэффициенты при x^n. Тогда

$$k(P_n^{\alpha,\beta;L,M}) = k(P_n^{(\alpha,\beta)}) + Mk(Q_n^{(\alpha,\beta)}) + Lk(R_n^{(\alpha,\beta)}) + LMk(S_n^{(\alpha,\beta)}). \quad (2.17)$$

Из формулы (2.4) получаем

$$k(Q_n^{(\alpha,\beta)}) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{(n-1)!\Gamma(n+\alpha)}k(P_n^{(\alpha,\beta)}). \quad (2.18)$$

Аналогично

$$k(R_n^{(\alpha,\beta)}) = \frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+1)}{(n-1)!\Gamma(n+\beta)}k(P_n^{(\alpha,\beta)}) \quad (2.19)$$

и

$$k(S_n^{(\alpha,\beta)}) = \frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+2)}{(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma^2(\alpha+\beta+2)}\frac{1}{(n-2)!(n-1)!}k(P_n^{(\alpha,\beta)}). \quad (2.20)$$

Подставляя соотношения (2.18)–(2.20) в (2.17) и учитывая (2.15), получаем формулу (2.16). □

Лемма 2. *Для коэффициента* $r(P_n^{\alpha,\beta;L,M})$ *полинома* $P_n^{\alpha,\beta;L,M}(x)$ *(при* $\alpha\neq\beta$*) справедливо представление*

$$\begin{aligned} r(P_n^{\alpha,\beta;L,M}) = \Big\{\omega_n^{\alpha,\beta;L,M} &+ 2M\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+1)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{1}{\alpha-\beta}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha)}- \\ &- L\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{1}{\alpha-\beta}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(n+\beta)}- \\ &- LM\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma^2(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{(n-2)!n!}\Big\}r(P_n^{(\alpha,\beta)}), \end{aligned} \tag{2.21}$$

где $\omega_n^{\alpha,\beta;M,N}$ *определены формулой* (2.15).

В случае $\alpha=\beta$ *имеет место формула*

$$r(P_n^{\alpha,\alpha;L,M}) = (M-L)\frac{1}{\Gamma(2\alpha+2)}\frac{(n+\alpha)\Gamma(n+2\alpha+1)}{2^{n-1}(n-1)!n!}. \tag{2.22}$$

Доказательство. Рассмотрим случай $\alpha\neq\beta$. Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} (x+1)P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}(x) &= k(P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)})x^n + [k(P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}) + r(P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)})]x^{n-1}+\cdots; \\ (x-1)P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}(x) &= k(P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)})x^n + [r(P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}) - k(P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)})]x^{n-1}+\cdots; \\ (x^2-1)P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}(x) &= k(P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)})x^n + r(P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)})x^{n-1}+\cdots \end{aligned}$$

Поэтому

$$\begin{aligned} r(P_n^{\alpha,\beta;L,M}) &= r(P_n^{(\alpha,\beta)})+ \\ &+ M\frac{\Gamma(\alpha+1)}{2\Gamma(\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\beta+1)}{n!\Gamma(n+\alpha)}[k(P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}) + r(P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)})]+ \\ &+ L\frac{\Gamma(\beta+1)}{2\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+1)}{n!\Gamma(n+\beta)}[r(P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}) - k(P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)})]+ \\ &+ LM\frac{1}{4(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma^2(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)\Gamma(n+\alpha+\beta+3)}{(n-1)!n!}r(P_{n-2}^{(\alpha+2,\beta+2)}). \end{aligned}$$

Учитывая

$$r(P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}) + k(P_{n-1}^{(\alpha,\beta+2)}) = \frac{1}{(n-1)!2^{n-1}}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}[(\alpha-\beta)n+2(\beta+1)]$$

и

$$r(P_{n-1}^{\alpha+2,\beta)}) - k(P_{n-1}^{(\alpha+2,\beta)}) = \frac{1}{(n-1)!2^{n-1}}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}[(\alpha-\beta)n-2(\alpha+1)],$$

имеем

$$\begin{aligned}
r(P_n^{\alpha,\beta;L,M}) &= r(P_n^{(\alpha,\beta)})+\\
&+ M\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\beta+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{(n-1)!n!2^n\Gamma(n+\alpha)}[(\alpha-\beta)n+2(\beta+1)]\times\\
&\times L\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\alpha+1)\Gamma(2n+\alpha+\beta)}{(n-1)!n!2^n\Gamma(n+\beta)}[(\alpha-\beta)n-2(\alpha+1)]+\\
&+ LM\frac{\alpha-\beta}{(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma^2(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(2n+\alpha+\beta)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{(n-3)!(n-1)!n!2^n} =\\
= r(P_n^{(\alpha,\beta)})\Big\{1 &+ M\frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\beta+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\beta+1)}{(\alpha-\beta)\Gamma(n+\alpha)n!}[(\alpha-\beta)n+2(\beta+1)]+\\
&+ L\frac{\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+2)\Gamma(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+1)}{(\alpha-\beta)\Gamma(n+\beta)n!}[(\alpha-\beta)n-2(\alpha+1)]+\\
&+ LM\frac{1}{(\alpha+1)(\beta+1)\Gamma^2(\alpha+\beta+2)}\frac{\Gamma(n+\alpha+\beta+1)\Gamma(n+\alpha+\beta+2)}{(n-3)!n!}\Big\},
\end{aligned}$$

что доказывает формулу (2.21). В случае $\alpha=\beta$ доказательство (2.22) аналогично, но проще. □

Применим полученные результаты к экстремальным задачам.

Из следствий 1 и 2 теоремы 1 и леммы 1 вытекает

Теорема 3. *Справедлива формула*

$$\begin{aligned}
\inf_{\widetilde\Pi_N\in\widetilde{\Re}_N^{(1)}}\langle D^l[\widetilde\Pi_N(x)],D^l[\widetilde\Pi_N(x)]\rangle_{\alpha,\beta} &= \frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}\frac{\Gamma^2(N+1)}{\Gamma^2(N-l+1)}\times\\
&\times\frac{\Gamma(N-l+\alpha+1)\Gamma(N-l+\beta+1)\Gamma(N-l+\alpha+\beta+1)}{\Gamma^2(2N-2l+\alpha+\beta+1)}\times\\
&\times\frac{2^{2(N-l)}(N-l)!}{2N-2l+\alpha+\beta+1}\frac{\omega_{N-l+1}^{\alpha,\beta;L,M}}{\omega_{N-l}^{\alpha,\beta;L,M}},
\end{aligned}\tag{2.23}$$

где $\omega_n^{\alpha,\beta;L,M}$ *определены соотношениями* (2.13)–(2.15). *При этом полином, на котором реализуется равенство в* (2.23), *имеет вид*

а) *при* $l\geq 1$

$$\begin{aligned}
&\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}}\frac{\Gamma(N+1)}{\Gamma(N-l+1)}\frac{2^{N-l}\sqrt{(N-l)!}}{\sqrt{2N-2l+\alpha+\beta+1}}\times\\
&\times\frac{\sqrt{\Gamma(N-l+\alpha+1)\Gamma(N-l+\beta+1)\Gamma(N-l+\alpha+\beta+1)}}{\Gamma(2N-2l+\alpha+\beta+1)}\times\\
&\times\sqrt{\frac{\omega_{N-l+1}^{\alpha,\beta;L,M}}{\omega_{N-l}^{\alpha,\beta;L,M}}}\frac{1}{(l-1)!}\int_{-1}^{x}(x-u)^{l-1}\widehat{P}_{N-l}^{\alpha,\beta;L,M}(u)du;
\end{aligned}$$

b) *при* $l=0$

$$\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}}\frac{2^N\sqrt{N!}}{\sqrt{2N+\alpha+\beta+1}}\frac{\sqrt{\Gamma(N+\alpha+1)\Gamma(N+\beta+1)\Gamma(N+\alpha+\beta+1)}}{\Gamma(2N+\alpha+\beta+1)}\times$$
$$\times\sqrt{\frac{\omega_{N+1}^{\alpha,\beta;L,M}}{\omega_N^{\alpha,\beta;L,M}}}\widehat{P}_N^{\alpha,\beta;L,M}(x).$$

Левая часть последнего соотношения есть квадрат расстояния от функции x^N до линейного подпространства $\mathbb{P}^{N-1}$ в метрике $\langle\cdot,\cdot\rangle_{\alpha,\beta}$.

Теорема 4. *Справедлива формула*

$$\inf_{\widetilde{\Pi}_N^{(2)}\in\widetilde{\mathfrak{R}}_N^{(2)}}\langle\widetilde{\Pi}_N^{(2)},\widetilde{\Pi}_N^{(2)}\rangle_{\alpha,\beta}=\frac{1}{k^2(\widehat{P}_N^{\alpha,\beta;L,M})}+\frac{1}{k^2(\widehat{P}_{N-1}^{\alpha,\beta;L,M})}\left[\sigma+\frac{r(P_N^{\alpha,\beta;L,M})}{k(P_N^{\alpha,\beta;L,M})}\right]^2.$$

Экстремальный полином имеет вид

$$\frac{1}{k(\widehat{P}_N^{\alpha,\beta;L,M})}\widehat{P}_N^{\alpha,\beta;L,M}(x)-\left[\sigma+\frac{r(P_N^{\alpha,\beta;L,M})}{k(P_N^{\alpha,\beta;L,M})}\right]\widehat{P}_{N-1}^{\alpha,\beta;L,M}(x).$$

Подставляя, как в теореме 3, вместо $k(\widehat{P}_n^{\alpha,\beta;L,M})$, $r(\widehat{P}_n^{\alpha,\beta;L,M})$ их значения из соотношений (2.16), (2.21), (2.22), получаем эффективные формулы.

Литература

[1] Аткинсон Ф. *Непрерывные и дискретные граничные задачи.* – М.: Мир, 1968. – 750 с.

[2] Курант Р., Гильберт Д. *Методы математической физики.* Т. 1. – М.: Гостехиздат, 1951. – 476 с.

[3] Krall A.M. *Hilbert space, boundary value problems and orthogonal polynomials.* – Operator theory: Advances and applications, V. 133. – Birkhauser Verlag: Basel, 2002. – 183 p.

[4] Смирнов В.И. *Курс высшей математики.* Т. IV. – М.: ГИТТЛ, 1957. – 812 с.

[5] Тихонов А.Н., Самарский А.А. *Уравнения математической физики.* М.: Наука, 1966. – 724 с.

[6] Базов И.А., Задорожный А.И. *Ряды Фурье по системе собственных функций задачи о колебаниях нагруженного стержня* // Международный симпозиум “Ряды Фурье и их приложения”. Тезисы докладов. – Ростов-на-Дону, 2005. – С. 9–10.

[7] Марчелан Ф., Осиленкер Б.П. *Оценки для полиномов, ортогональных по отношению к скалярному произведению Лежандра–Соболева* // Матем. заметки. – 1997. – Т. 62. – С. 871–880.

[8] Хаиров А.Р. *О трех новых системах ортогональных многочленов* // Международная конференция “Функциональные пространства, теория приближений, нелинейный анализ”. Тезисы докладов. – Москва, 2005. – С. 238.

[9] Bavinck H. *A note on the Koekoeks' differential equiation for generalized Jacobi polynomials* // J. Comp. Appl. Math. – 2000. – V. 115. – P. 87–92.

[10] Fulton C.T., Pruess S. *Numerical methods for a singular eigenvalue problem in the boundary conditions* // J.Math. Anal. Appl. – 1979. – V. 71. – P. 431–462.

[11] Koekoek R. *Differential equations for symmetric generalized ultraspherical polynomials* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1994. – V. 345. – P. 47–72.

[12] Koekoek J., Koekoek R. *Differential equations for generalized Jacobi polynomials* // J. Comp. Appl. Math. – 2000. – V. 126. – P. 1–31.

[13] Koornwider T. *Orthogonal polynomials with weight function* $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta+M\delta(x+1)+N\delta(x-1)$ // Canad. Math. Bull. – 1984. – V. 27. – P. 205–214.

[14] Krall A.M. *Orthogonal polynomials satisfying fourth order differential equations* // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. – 1981. – V. 87a. – P. 271–288.

[15] Littlejohn L.L. *The Krall polynomials: a new class of orthogonal polynomials* // Quaest. Math. – 1982. – V. 5. – P. 255–265.

[16] Osilenker B.P. *Generalized trace formula and asymptotics of the averaged Turan determinant for polynomials orthogonal with a discrete Sobolev inner product* // J. Approx. Theory. – 2006. – V. 141. – P. 70–97.
[17] Осиленкер Б.П. *Об одной экстремальной задаче для алгебраических полиномов в симметричном дискретном пространстве Гегенбауэра–Соболева* // Матем. заметки. – 2007. – Т. 82. – № 3. – С. 411–425.
[18] Тихомиров В.М. *Теория приближений.* II // Итоги науки и техники. Современные проблемы математики. Фундаментальные направления. – Москва, 1987. – Т. 14. – С. 103–260.
[19] Сеге Г. *Ортогональные многочлены.* – М.: Физматлит, 1962. – 500 с.
[20] Суетин П.К. *Классические ортогональные многочлены.* – М.: Наука, 1979. – 416 с.

Б.П. Осиленкер

профессор, кафедра высшей математики,
Московский государственный строительный университет,
129337, г. Москва, Ярославское шоссе, д. 26,

e-mail: b_osilenker@mail.ru

B.P. Osilenker

Professor, Chair of Higher Mathematics,
Moscow State Building University,
26 Yaroslavskoe highway, Moscow, 129337 Russia,

e-mail: b_osilenker@mail.ru