Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №2, с. 76–85 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0022*

Р.Н. ФАДЕЕВ

АНАЛОГИ ТЕОРЕМ ЛОРЕНЦА ДЛЯ ДВОЙНЫХ МУЛЬТИПЛИКАТИВНЫХ СИСТЕМ

Аннотация. В данной статье доказываем теоремы типа Лоренца, связывающие поведение коэффициентов Фурье и порядок убывания смешанного модуля непрерывности для двойных мультипликативных систем с ограниченной образующей последовательностью.

Ключевые слова: двойные мультипликативные системы, теоремы типа Лоренца, смешанный модуль непрерывности, обобщенная монотонность.

УДК: 517.518

Abstract. In this paper we prove Lorentz-type theorems connecting the behavior of Fourier coefficients and the decreasing order of the mixed modulus of continuity for double multiplicative systems with a bounded generating sequence.

Keywords: double multiplicative systems, Lorentz-type theorems, mixed modulus of continuity, generalized monotonicity.

Введение

Пусть $\{p_j\}_{j=1}^{\infty}$ — последовательность натуральных чисел такая, что $2 \le p_j \le P$ для всех $j \in \mathbb{N}$ и $\mathbb{Z}(p_j) = \{0, 1, \dots, p_j - 1\}$. Если $m_0 = 1$, $m_j = p_1 \dots p_j$ при $j \in \mathbb{N}$, то каждое $x \in [0, 1)$ имеет разложение

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}, \quad x_j \in \mathbb{Z}(p_j). \tag{1}$$

Это разложение определено однозначно, если при $x = k/m_n$, $0 < k < m_n$, $k, n \in \mathbb{Z}_+$, брать разложение с конечным числом $x_j \neq 0$. Пусть $G(\mathbf{P})$ — группа, состоящая из последовательностей вида $\widetilde{x} = (x_1, x_2, \dots)$, $x_j \in \mathbb{Z}(p_j)$, с операцией $\widetilde{x} \oplus \widetilde{y} = \widetilde{z}$, где $z_j = x_j + y_j \pmod{p_j}$, $j \in \mathbb{N}$. Аналогично определяется обратная операция $\widetilde{x} \ominus \widetilde{y}$. Отображение $\lambda_{\mathbf{P}}(\widetilde{x}) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j m_j^{-1}$ не является взаимно однозначным, поскольку элементам вида

$$x = k/m_l \in [0, 1), \quad k, l \in \mathbb{N}, \tag{2}$$

соответствуют два элемента $G(\mathbf{P})$. Определим обратное отображение $\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}$. Для x вида (2) пусть $x_j = [m_j x] \pmod{p_j}$, $j \in \mathbb{N}$. Тогда $\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) = (x_1, \dots, x_l, 0, \dots)$. Для остальных $x \in [0, 1)$ существует единственный элемент $\widetilde{x} \in G(\mathbf{P})$ со свойством $\lambda_{\mathbf{P}}(\widetilde{x}) = x$ и тогда $\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) = \widetilde{x}$. Определим обобщенные расстояние $\rho(x, y) = \lambda_{\mathbf{P}}(\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) \ominus \lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(y))$ и сложение $x \oplus y =$

Поступила 02.02.2011

$\lambda_{\mathbf{P}}(\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) \oplus \lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(y))$ на $[0,1)$. При этом $x \oplus y$ не определено, если $\lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(x) \oplus \lambda_{\mathbf{P}}^{-1}(y) = \widetilde{z}$, где $z_j = p_j - 1$ при $j \geq j_0$, т.е. $x \oplus y$ определено для почти всех (п. в.) $x \in [0,1)$ при фиксированном $y \in [0,1)$. Легко видеть, что $x \oplus 1/m_{k+1}$, $k \in \mathbb{Z}_+$, определено всегда и $\rho(x \oplus 1/m_{k+1}, x) < 1/m_k$.

Каждое $k \in \mathbb{Z}_+$ однозначно представимо в виде $k = \sum\limits_{j=1}^{\infty} k_j m_{j-1}$, $k_j \in \mathbb{Z}(p_j)$. Для чисел $x \in [0,1)$ вида (1) и $k \in \mathbb{Z}_+$ по определению положим $\chi_k(x) = \exp\Big(2\pi i \sum\limits_{j=1}^{\infty} x_j k_j/p_j\Big)$. Система $\{\chi_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L[0,1)$. При $0 \leq k < m_n$, $n \in Z_+$, функции $\chi_k(x)$ постоянны на всех $I_i^n = [i/m_n, (i+1)/m_n)$, $i = 0,1,\dots,m_n-1$, а при фиксированном $y \in [0,1)$ для п. в. $x \in [0,1)$ верно равенство $\chi_k(x \oplus y) = \chi_k(x)\chi_k(y)$, $k \in \mathbb{Z}_+$. Эти факты можно найти в ([1], § 1.5). Далее используем обозначение $I_{ij}^{nm} = I_i^n \times I_j^m$.

Система $\{\chi_i(x)\chi_j(y)\}_{i,j=0}^{\infty}$ ортонормирована и полна в $L[0,1)^2$. Поэтому можно определить коэффициенты Фурье и частичную сумму Фурье по этой системе формулами

$$\widehat{f}(n,m) = \int_0^1 \int_0^1 f(x,y)\overline{\chi_n(x)\chi_m(y)}dx\,dy, \quad n,m \in \mathbb{Z}_+;$$

$$S_{nm}(f)(x,y) = \sum_{i=0}^{n-1}\sum_{j=0}^{m-1} \widehat{f}(i,j)\chi_i(x)\chi_j(y), \quad n,m \in \mathbb{N}.$$

Пространство $L^p[0,1)^2$, $1 \leq p < \infty$, состоит из измеримых на $[0,1)^2$ функций с конечной нормой $\|f\|_p = \Big(\int\limits_0^1\int\limits_0^1 |f(x,y)|^p\,dx\,dy\Big)^{1/p}$, а пространство $C^*[0,1)^2$ — из ограниченных функций f таких, что для любого $\varepsilon > 0$ найдется такое $\delta > 0$, что $|f(x,y) - f(u,v)| < \varepsilon$ при условии $\rho(x,u) < \delta$, $\rho(y,v) < \delta$.

Пусть $\Delta_{uv}f(x,y) = f(x\oplus u, y\oplus v) - f(x\oplus u, y) - f(x, y\oplus v) + f(x,y)$. Тогда для $f \in L^p[0,1)^2$, $1 \leq p < \infty$, полагаем $\omega_{kl}(f)_p = \sup\{\|f(x\oplus h, y\oplus t) - f(x,y)\|_p : h \in I_0^k, t \in I_0^l\}$, $\omega^*(f,\delta_1,\delta_2)_p = \sup\{\|\Delta_{uv}f\|_p : 0 \leq u < \delta_1, 0 \leq v < \delta_2\}$ и $\omega_{kl}^*(f)_p = \omega^*(f, m_k^{-1}, m_l^{-1})_p$, $k,l \in \mathbb{Z}_+$. Тогда $\omega_{kl}^*(f)_p \leq 2\omega_{kl}(f)_p$ и $\lim\limits_{k,l\to\infty} \omega_{kl}^*(f)_p = \lim\limits_{k,l\to\infty} \omega_{kl}(f)_p = 0$ для $f \in L^p[0,1)^2$. Для $f \in C^*[0,1)^2$ по определению $\omega^*(f,\delta_1,\delta_2)_\infty = \sup\{|f(x,y) - f(x,v) - f(u,y) + f(u,v)| : \rho(x,u) < \delta_1, \rho(y,v) < \delta_2\}$ и $\omega_{kl}^*(f)_\infty = \omega^*(f, 1/m_k, 1/m_l)$. Легко видеть, что $\omega_{kl}^*(f)_p \leq \omega_{kl}^*(f)_\infty$ при $1 \leq p < \infty$. Если $f \in L[0,1)^2$, то $\Delta_{uv}f(x,y)$ имеет ряд Фурье

$$\sum_{i=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{\infty} \widehat{f}(i,j)(\chi_i(u)-1)(\chi_j(v)-1)\chi_i(x)\chi_j(y). \tag{3}$$

Пусть $u \in [0, 1/m_k)$, $v \in [0, 1/m_l)$, тогда $\chi_i(u) = 1$ при $0 \leq i < m_k$, $\chi_j(v) = 1$ при $0 \leq j < m_l$, поэтому ряд Фурье $\Delta_{uv}f(x,y)$ в этом случае имеет вид

$$\sum_{i=m_k}^{\infty}\sum_{j=m_l}^{\infty} \widehat{f}(i,j)(\chi_i(u)-1)(\chi_j(v)-1)\chi_i(x)\chi_j(y). \tag{3$'$}$$

Далее для простоты считаем, что $\int\limits_0^1 f(x,y)dx = 0$ при п. в. $y \in [0,1)$ и $\int\limits_0^1 f(x,y)dy = 0$ при п. в. $x \in [0,1)$, поэтому $\widehat{f}(0,j) = \widehat{f}(i,0) = 0$, $i,j \in \mathbb{Z}_+$.

В дальнейшем понадобятся величины

$$\sigma_{rs}(p,f)=\Bigg(\sum_{i=m_r}^{\infty}\sum_{j=m_s}^{\infty}|\widehat{f}(i,j)|^p\Bigg)^{1/p}\quad \text{и}\quad \delta_{nm}(p,f)=\Bigg(\sum_{i=0}^{n}\sum_{j=0}^{m}|\widehat{f}(i,j)|^p\Bigg)^{1/p}.$$

Пусть $\mathcal{P}_n=\Big\{f\in L^1[0,1):\int\limits_0^1 f(t)\overline{\chi_k(t)}\,dt=0,\ k\geq n\Big\}$, $\mathcal{P}_n^{(1)}$ есть множество таких $f(x,y)$, что при фиксированном y верно $f(\cdot,y)\in\mathcal{P}_n$, $\mathcal{P}_n^{(2)}$ определяется аналогично. Тогда $A_{n,m}(f)_X:=\inf\{\|f-u-v\|_X:u\in\mathcal{P}_n^{(1)};\ v\in\mathcal{P}_m^{(2)}\}$. Везде далее C и C_i обозначают различные положительные константы.

Г.Г. Лоренц ([2] и [3], гл. II, § 3) получил следующие результаты.

Теорема 1. а) *Пусть 2π-периодическая функция $f\in L^1[0,2\pi]$ с тригонометрическими коэффициентами Фурье a_n, b_n принадлежит* $\mathrm{Lip}(\alpha)$, *где $\alpha>1/p-1/2$ и $1\leq p\leq 2$. Тогда*

$$\Bigg(\sum_{k=n}^{\infty}(|a_k|^p+|b_k|^p)\Bigg)^{1/p}\leq Cn^{-\alpha-1/2+1/p},\quad n\in\mathbb{N}.$$

б) *Если же в условиях п.* а) *заменить $\alpha>1/p-1/2$ на $\alpha<1/p-1/2$, то*

$$\Bigg(\sum_{k=1}^{n}(|a_k|^p+|b_k|^p)\Bigg)^{1/p}\leq Cn^{\alpha+1/2-1/p},\quad n\in\mathbb{N}.$$

Теорема 2. *Пусть $1\leq p<\infty$, $1/p+1/p'=1$, а 2π-периодическая функция $f\in L^1[0,2\pi]$ с тригонометрическими коэффициентами Фурье a_n, b_n удовлетворяет соотношению $\sum\limits_{k=n}^{\infty}(|a_k|^p+|b_k|^p)\leq Cn^{-\alpha p}$, $1/p'<\alpha<1+1/p'$. Тогда $f\in\mathrm{Lip}(\alpha-1/p')$.*

Л.П. Кагадий [4] доказала аналоги теорем 1 и 2 для двойных рядов Фурье. Аналог п. а) теоремы 1 и частный случай теоремы 2 для $\{\chi_i\}_{i=0}^{\infty}$ можно найти в ([5], гл. 4, § 2).

С. Алянчичем и М. Томичем [6] установлена

Теорема 3. *Пусть 2π-периодическая четная функция $f\in L^p[0,2\pi]$, $1<p<\infty$, имеет убывающую последовательность $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ тригонометрических коэффициентов Фурье. Тогда $n^{1-1/p}a_n\leq C\omega(f,\pi/2n)_p$, где $\omega(f,\delta)_p=\sup\limits_{0\leq h\leq\delta}\Big(\int\limits_0^{2\pi}|f(x+h)-f(x)|^p\,dx\Big)^{1/p}$.*

Целью нашей работы является получение аналогов и обобщений теорем 1, 2 и 3 для системы $\{\chi_i(x)\chi_j(y)\}_{i,j=0}^{\infty}$. При этом в отличие от [4] большое внимание уделено вопросу неулучшаемости полученных результатов.

1. Вспомогательные утверждения

Лемма 1 ([7]). *При $n\in\mathbb{N}$ существует полином $P_n(x)=\sum\limits_{k=0}^{n-1}a_k\chi_k(x)$, для которого выполняются следующие условия*:

1) $|P_n(x)|\leq\sqrt{n}$, $x\in[0,1)$;

2) *для всех $r\in[1,2]$ справедлива оценка $\Gamma(P_n,r):=\Big(\sum\limits_{k=0}^{n-1}|a_k|^r\Big)^{1/r}\geq Bn^{1/r}$, где постоянная $B>0$ не зависит от n.*

Лемма 2. *Пусть $f \in L^\nu[0,1)^2$, $1 \le \nu < \infty$, или $f \in C^*[0,1)^2$ $(\nu = \infty)$. Тогда*

$$\omega^*_{kl}(f)_\nu \le 4A_{m_k,m_l}(f)_\nu.$$

Доказательство. Пусть $1 \le \nu < \infty$ и $A_{m_k,m_l}(f)_\nu + \varepsilon \ge \|f - f_1 - f_2\|_\nu$, где $f_1 \in \mathcal{P}^{(1)}_{m_k}$, $f_2 \in \mathcal{P}^{(2)}_{m_l}$. Несложно видеть, что $\Delta_{uv} f_1 = \Delta_{uv} f_2 = 0$ при $u \in [0, 1/m_k)$, $v \in [0, 1/m_l)$. Поэтому $\|\Delta_{uv} f\|_\nu = \|\Delta_{uv}(f - f_1 - f_2)\|_\nu \le 4\|f - f_1 - f_2\|_\nu \le 4A_{m_k,m_l}(f)_\nu + 4\varepsilon$. Ввиду произвольности $\varepsilon > 0$ получаем неравенство леммы. При $\nu = \infty$ доказательство аналогично. $\square$

Лемма 3 ([1], § 1.5)**.** *Пусть $D_{m_n}(x) = \sum\limits_{k=0}^{m_n-1} \chi_k(x)$, тогда $D_{m_n}(x) = m_n X_{[0,1/m_n)}(x)$, где X_E — характеристическая функция множества E.*

2. Основные результаты

Теорема 4. а) *Пусть $f \in L^\nu[0,1)^2$, $2 \le \nu < \infty$, или $f \in C^*[0,1)^2$ $(\nu = \infty)$ и сходится ряд $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty} (\omega^*_{kl}(f)_\nu)^p (m_k m_l)^{1-p/2}$, $1 \le p \le 2$. Тогда сходится ряд $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty} |\widehat{f}(i,j)|^p$ и справедлива оценка*

$$\sigma^p_{rs}(p, f) \le C \sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty} (\omega^*_{kl}(f)_\nu)^p (m_k m_l)^{1-p/2}, \quad r, s \in \mathbb{Z}_+. \tag{4}$$

б) *Пусть $1 < p < \infty$, $\{\omega_{kl}\}_{k,l=0}^{\infty}$ — двойная последовательность, убывающая по k и l и сходящаяся к нулю, для которой $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty} \omega^p_{kl} (m_k m_l)^{1-p/2} < \infty$ и выполняется аналог условия Бари*

$$\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty} \omega_{kl} = O(\omega_{rs}). \tag{5}$$

Тогда существует такая $f_0 \in C^*[0,1)^2$, что $\omega^*_{kl}(f)_p \le C\omega_{kl}$ и

$$\sigma^p_{rs}(p, f_0) \ge C \sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=s+1}^{\infty} \omega^p_{kl} (m_k m_l)^{1-p/2}, \quad r, s \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. а) Как отмечено во введении, при $u \in [0, 1/m_k)$, $v \in [0, 1/m_l)$ ряд Фурье $\Delta_{uv} f$ имеет вид $(3')$. Так как $f \in L^2[0,1)^2$, то согласно равенству Парсеваля имеем

$$\sum_{i=m_k}^{\infty}\sum_{j=m_l}^{\infty} |\widehat{f}(i,j)|^2 |\chi_i(u) - 1|^2 |\chi_j(v) - 1|^2 = \|\Delta_{uv} f\|_2^2 \le (\omega^*_{kl}(f)_\nu)^2.$$

Пусть $u = m_{k+1}^{-1}$, $v = m_{l+1}^{-1}$. Поскольку при $j \in [m_l, m_{l+1}) \cap \mathbb{Z}$ имеем $j = \gamma m_l + j'$, $0 \le j' < m_l$, $\gamma \in \mathbb{Z} \cap [1, p_{l+1})$, то

$$|\chi_j(v) - 1| = |\exp(2\pi i\gamma/p_{l+1}) - 1| = 2|\sin \pi\gamma/p_{l+1}| \ge 2\sin \pi/P,$$

где $2 \le p_i \le P$. Аналогичная оценка $|\chi_i(u) - 1| \ge 2\sin \pi/P$ верна при $m_k \le i < m_{k+1}$, поэтому

$$4\sin^2 \pi/P \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1} |\widehat{f}(i,j)|^2 \le (\omega^*_{kl}(f)_\nu)^2. \tag{6}$$

Отсюда при $p<2$ по неравенству Гёльдера с показателями $2/p$ и $2/(2-p)$ получаем

$$\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1}|\widehat{f}(i,j)|^p\le\left(\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1}|\widehat{f}(i,j)|^2\right)^{p/2}((m_{k+1}-m_k)(m_{l+1}-m_l))^{1-p/2}\le$$
$$\le(4\sin^2\pi/P)^{-p}(P-1)^{2-p}(\omega^*_{kl}(f)_\nu)^p\,(m_km_l)^{1-p/2}. \quad (7)$$

При $p=2$ вместо (7) используем (6). Суммируя равенства (7) по $k\ge 0$, $l\ge 0$, доказываем сходимость ряда $\sum\limits_{i=1}^{\infty}\sum\limits_{j=1}^{\infty}|\widehat{f}(i,j)|^p$. Производя суммирование неравенств (7) по $k\ge r, l\ge s$, получаем неравенство (4).

б) Рассмотрим

$$f_0(x,y)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}(m_km_l)^{-1/2}\omega_{kl}P_{m_{k-1}}(x)\chi_{m_{k-1}}(x)P_{m_{l-1}}(y)\chi_{m_{l-1}}(y),$$

где P_n — полином из леммы 1. Ясно, что $P_{m_{k-1}}\chi_{m_{k-1}}\in\mathcal{P}_{m_k}$, $P_{m_{l-1}}\chi_{m_{l-1}}\in\mathcal{P}_{m_l}$, поэтому при $\rho(x,u)<1/m_k$, $\rho(y,v)<1/m_l$ и $g(x,y)=P_{m_{k-1}}(x)\chi_{m_{k-1}}(x)P_{m_{l-1}}(y)\chi_{m_{l-1}}(y)$ находим $g(x,y)-g(x,v)-g(u,y)+g(u,v)=0$. В результате

$$\omega^*_{rs}(f_0)_\infty\le 4\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}(m_km_l)^{-1/2}\omega_{kl}\|P_{m_{k-1}}(x)\|_\infty\|P_{m_{l-1}}(y)\|_\infty\le 4\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\omega_{kl}\le C_1\omega_{rs}$$

в силу (5) для $r,s\in\mathbb{N}$. Аналогично доказывается, что $\omega_{rs}(f)_\infty:=\sup\{|f(x,y)-f(u,v)|:\rho(x,u)<1/m_r,\ \rho(y,v)<1/m_s\}=O(\omega_{rs})$, откуда следует $f\in C^*[0,1)^2$. С другой стороны,

$$\sum_{i=m_r}^{\infty}\sum_{j=m_s}^{\infty}|\widehat{f_0}(i,j)|^p=\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1}|\widehat{f_0}(i,j)|^p=$$
$$=\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=s+1}^{\infty}(m_km_l)^{-p/2}\omega^p_{kl}\Gamma^p(P_{m_{k-1}},p)\Gamma^p(P_{m_{l-1}},p)\ge C_2\sum_{k=r+1}^{\infty}\sum_{l=s+1}^{\infty}(m_km_l)^{1-p/2}\omega^p_{kl}.\quad\square$$

Следствие 1. Утверждение п. а) теоремы 4, утверждения п. а) следствия 2 и следствие 3 верны при замене $\omega^*_{kl}(f)_\nu$ на $A_{m_k,m_l}(f)_\nu$.

Следствие 2. а) Пусть $1\le p\le 2$ и $\alpha,\beta>1/p-1/2$, $f\in L^\nu[0,1)^2$ и $\omega^*_{kl}(f)_\nu=O(m_k^{-\alpha}m_l^{-\beta})$, $2\le\nu\le\infty$, тогда $\sigma_{rs}(p,f)=O(m_r^{-\alpha+1/p-1/2}m_s^{-\beta+1/p-1/2})$, $r,s\in\mathbb{Z}_+$.

б) Если $1\le p\le 2$ и $\alpha,\beta>1/p-1/2$, то существует такая $f_0\in C^*[0,1)^2$, что $\omega^*_{kl}(f_0)_\infty=O(m_k^{-\alpha}m_l^{-\beta})$ и при этом $\sigma_{rs}(p,f_0)\ge Cm_r^{-\alpha+1/p-1/2}m_s^{-\beta+1/p-1/2}$.

Доказательство. б) Для f_0 из п. б) теоремы 1, построенной по $\omega_{kl}=m_k^{-\alpha}m_l^{-\beta}$, имеем

$$\sigma^p_{rs}(p,f_0)\ge C_1\left(\sum_{k=r+1}^{\infty}m_k^{1-p/2-\alpha p}\right)\left(\sum_{l=s+1}^{\infty}m_l^{1-p/2-\beta p}\right)\ge Cm_r^{1-p/2-\alpha p}m_s^{1-p/2-\beta p},$$

откуда вытекает утверждение следствия. $\square$

Следствие 3. Пусть $1\le p\le 2$ и $f\in L^\nu[0,1)^2$, $2\le\nu\le\infty$, такова, что $\omega^*_{kl}(f)_\nu\le\omega_{kl}$, где $\{\omega_{kl}\}_{k,l=0}^\infty$ — убывающая по k и l последовательность такая, что $\sum\limits_{k=0}^{\infty}\sum\limits_{l=0}^{\infty}\omega_{kl}(m_km_l)^{1-p/2}$

сходится и

$$\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\omega_{kl}^p(m_km_l)^{1-p/2}=O\big((m_rm_s)^{1-p/2}\omega_{rs}^p\big),$$

тогда $\sigma_{rs}(p,f)=O\big((m_rm_s)^{1-p/2}\omega_{rs}^p\big)$.

Для оценки $\delta_{nm}(p,f)$ удобней рассматривать мажоранту $\omega^*(f,\delta_1,\delta_2)_\nu$. Далее $W(x,y)$ определена на $[0,1)^2$, возрастает по x и y, $W(x,0)=W(0,y)=0$.

Теорема 5. *Пусть* $1\le p\le 2$, $f\in L^\nu[0,1)^2$, $2\le\nu\le\infty$, *и* $\omega^*(f,\delta_1,\delta_2)_\nu\le W(\delta_1,\delta_2)$, *тогда справедливо неравенство*

$$\delta_{nm}(p,f)\le C\bigg(\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}W^p(1/i,1/j)(ij)^{-p/2}\bigg)^{1/p}.$$

Доказательство. Пусть $n\in[m_r,m_{r+1})$, $m\in[m_s,m_{s+1})$, где $r,s\in\mathbb{Z}_+$. Аналогично доказательству п. а) теоремы 1 имеем

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}|\widehat{f}(i,j)|^p\le\sum_{i=1}^{m_{r+1}-1}\sum_{j=1}^{m_{s+1}-1}|\widehat{f}(i,j)|^p=\sum_{k=0}^{r}\sum_{l=0}^{s}\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1}|\widehat{f}(i,j)|^p\le\\ \le C_1\sum_{k=0}^{r}\sum_{l=0}^{s}\|\Delta_{m_{k+1}^{-1},m_{l+1}^{-1}}f\|_\nu^p(m_km_l)^{1-p/2}\le\\ \le C_1\sum_{k=0}^{r}\sum_{l=0}^{s}W^p\big((m_{k+1}-1)^{-1},(m_{l+1}-1)^{-1}\big)(m_km_l)^{1-p/2}.\end{aligned}$$

Вводя обозначение $a_k=(m_k-1)^{-1}$, отметим

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{r-1}(m_km_s)^{1-p/2}W^p(a_{k+1},a_{s+1})+W^p(a_{r+1},a_{s+1})(m_rm_s)^{1-p/2}+\\ +\sum_{l=0}^{s-1}(m_rm_l)^{1-p/2}W^p(a_{r+1},a_{l+1})\le\sum_{k=0}^{r-1}(Pm_km_{s-1})^{1-p/2}W^p(a_{k+1},a_s)+\\ +(P^2m_{r-1}m_{s-1})^{1-p/2}W^p(a_r,a_s)+\sum_{l=0}^{s-1}(Pm_{r-1}m_l)^{1-p/2}W^p(a_r,a_{l+1}).\end{aligned}$$

Поэтому

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big|\widehat{f}(i,j)\Big|^p\le C_2\sum_{k=0}^{r-1}\sum_{l=0}^{s-1}(m_km_l)^{1-p/2}W^p\left((m_{k+1}-1)^{-1},(m_{l+1}-1)^{-1}\right).\tag{8}$$

Наконец, в силу монотонности $W(x,y)$ находим

$$(m_km_l)^{1-p/2}W^p\big((m_{k+1}-1)^{-1},(m_{l+1}-1)^{-1}\big)\le P^p\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1}(ij)^{-p/2}W^p\left(1/i,1/j\right).\tag{9}$$

Подставляя (9) в (8), получаем

$$\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}\Big|\widehat{f}(i,j)\Big|^p\le C_3\sum_{i=1}^{m_r-1}\sum_{j=1}^{m_s-1}W^p\left(1/i,1/j\right)(ij)^{-p/2}\le C_3\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{m}W^p\left(1/i,1/j\right)(ij)^{-p/2}.\quad\square$$

Следствие 4. Пусть $1 \le p \le 2$, $f \in L^\nu[0,1)^2$, $2 \le \nu < \infty$, тогда для $r, s \in \mathbb{N}$

$$\delta_{m_r-1,m_s-1}(p,f) \le C \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{s-1} \left(\omega^*_{kl}(f)_\nu\right)^p (m_k m_l)^{1-p/2}.$$

Следствие 5. Пусть $1 \le p \le 2$, $f \in L^\nu[0,1)^2$, $2 \le \nu < \infty$. Если $\omega^*(f,\delta_1,\delta_2)_\nu \le W(\delta_1,\delta_2)$ для всех $(\delta_1,\delta_2) \in [0,1)^2$ и W удовлетворяет условию типа Бари–Стечкина

$$\sum_{i=1}^{n} \sum_{j=1}^{m} W^p\left(1/i, 1/j\right)(ij)^{-p/2} = O\big((nm)^{1-p/2} W^p\left(1/n, 1/m\right)\big),$$

то $\delta_{nm}(p,f) = O\big((nm)^{1-p/2} W^p(1/n,1/m)\big)$.

Следствие 6. Пусть $1 \le p \le 2$, $f \in L^\nu[0,1)^2$, $2 \le \nu < \infty$ и $\omega^*(f,\delta_1,\delta_2)_\nu \le C\delta_1^\alpha \delta_2^\beta$, где $\alpha, \beta < 1/p - 1/2$, тогда $\delta_{nm}(p,f) = O\left(n^{1/p-1/2-\alpha} m^{1/p-1/2-\beta}\right)$.

Замечание. Аналоги п. а) следствия 2 и следствия 5 для двойных тригонометрических рядов доказаны Л.П. Кагадий [4].

Докажем неулучшаемость следствий 4 и 6.

Предложение 1. *Пусть* $1 \le p \le 2$, $\{\omega_{kl}\}_{k,l=0}^\infty$ *убывает по* k *и* l, $\omega_{kl} > 0$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^\infty \sum\limits_{l=0}^\infty \omega_{kl}^p (m_k m_l)^{1-p/2}$ *расходится и выполняется условие типа Бари* (5), *то найдется такая* $f_0 \in C^*[0,1)^2$, *что* $\omega^*_{kl}(f_0)_\infty \le C\omega_{kl}$ *и* $\delta_{m_r-1,m_s-1}(p) \ge C \sum\limits_{k=1}^{r} \sum\limits_{l=1}^{s} \omega_{kl}^p (m_k m_l)^{1-p/2}$.

Доказательство. Рассмотрим функцию f_0 из доказательства п. б) теоремы 1. Тогда $\omega^*_{kl}(f_0) \le C\omega_{kl}$. С другой стороны, с помощью леммы 1 получаем

$$\sum_{i=1}^{m_r-1} \sum_{j=1}^{m_s-1} \left|\widehat{f}_0(i,j)\right|^p = \sum_{k=0}^{r-1} \sum_{l=0}^{s-1} \sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1} \sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1} \left|\widehat{f}_0(i,j)\right|^p \ge$$

$$\ge \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} (m_k m_l)^{-p/2} \omega_{kl}^p \Gamma^p(P_{m_{k-1}}, p) \Gamma^p(P_{m_{l-1}}, p) \ge C_1 \sum_{k=1}^{r} \sum_{l=1}^{s} (m_k m_l)^{1-p/2} \omega_{kl}^p. \quad \square$$

Следствие 7. Пусть $1 \le p \le 2$, $\alpha, \beta < 1/p - 1/2$, тогда существует такая $f_0 \in C^*[0,1)^2$, что $\omega^*_{kl}(f_0)_\infty = O\big(m_k^{-\alpha} m_l^{-\beta}\big)$ и $\delta_{m_r-1,m_s-1}(p,f_0) \ge C m_r^{1/p-1/2-\alpha} m_s^{1/p-1/2-\beta}$.

Теорема 6. *Пусть* $1 \le p \le 2$, $1/p + 1/q = 1$, $f \in C^*[0,1)^2$ *и* $\sigma_{rs}(p,f) = O(\omega_{rs})$, *где* $\{\omega_{kl}\}_{k,l=0}^\infty$ *убывает по* k *и* l, $\omega_{kl} > 0$. *Если ряд* $\sum\limits_{k=0}^\infty \sum\limits_{l=0}^\infty \omega_{kl} (m_k m_l)^{1/q}$ *сходится и*

$$\sum_{k=r}^{\infty} \sum_{l=s}^{\infty} \omega_{kl} (m_k m_l)^{1/q} = O(\omega_{rs} (m_r m_s)^{1/q}), \tag{10}$$

то $\omega^*_{kl}(f)_\infty \le C(\omega_{kl}(m_k m_l)^{1/q})$ *и* $\omega^*_{kl}(f)_q \le C\omega_{kl}$.

Доказательство. Второе неравенство теоремы вытекает из теоремы Хаусдорфа–Юнга–Рисса ([3], гл. 2, § 4). Пусть $u \in [0, 1/m_k)$, $v \in [0, 1/m_l)$, тогда согласно (3′)

$$\|\Delta_{uv} f\|_q \le \left(\sum_{i=m_k}^\infty \sum_{j=m_l}^\infty \left|\widehat{f}(i,j)\right|^p \right)^{1/p} = O(\omega_{kl}),$$

откуда $\omega^*_{kl}(f)_q = O(\omega_{kl})$.

Для доказательства первого неравенства теоремы отметим, что

$$\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1}\left|\widehat{f}(i,j)\right|^p \le C_1\omega^p_{kl},$$

поэтому по неравенству Гёльдера

$$\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1}\left|\widehat{f}(i,j)\right| \le C_2\Bigg(\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1}\left|\widehat{f}(i,j)\right|^p\Bigg)^{1/p}(m_k m_l)^{1/q} \le C_3\omega_{kl}(m_k m_l)^{1/q}. \quad (11)$$

Поскольку $\omega^*_{rs}(f)_\infty \le 4\sum\limits_{i=m_r}^{\infty}\sum\limits_{j=m_s}^{\infty}\left|\widehat{f}(i,j)\right|$ аналогично доказательству п. б) теоремы 4, то, складывая неравенства (11) по $k \ge r, l \ge s$ и применяя (10), доказываем теорему.

Получим теперь оценку скорости убывания к нулю обобщенно-монотонных коэффициентов Фурье функции из $L^p[0,1)^2$. Тригонометрический аналог теоремы 6 в одномерном случае есть теорема 3, а в двумерном случае принадлежит Л.П. Кагадий [8]. Далее $\Re z$ и $\Im z$ обозначают соответственно действительную и мнимую части $z \in \mathbb{C}$.

Теорема 7. *Пусть* $f \in L^p[0,1)^2$, $1 < p < \infty$, *такова, что* $\widehat{f}(n,m) = a_{nm} > 0$, $n, m \in Z_+$ *и* $a_{ij} \ge C a_{i'j'}$, $i' \in [i, 2i-1]$, $j' \in [j, 2j-1]$, *тогда*

$$(m_{k+1}m_{l+1})^{1-1/p}a_{m_{k+1}-1,m_{l+1}-1} = O\left(\omega^*_{kl}(f)_p\right), \quad k,l \in \mathbb{Z}_+.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию $A_{kl}(x,y) = \Delta_{m^{-1}_{k+1},m^{-1}_{l+1}}f(x,y)$. Согласно (3) ее ряд Фурье имеет вид $\sum\limits_{i=0}^{\infty}\sum\limits_{j=0}^{\infty}\widehat{f}(i,j)\left(\chi_i\left(1/m_{k+1}\right)-1\right)\left(\chi_j\left(1/m_{l+1}\right)-1\right)$. В силу ортонормированности системы $\{\chi_i(x)\chi_j(y)\}^\infty_{i,j=0}$ имеем

$$\left|\int_0^1\int_0^1 A_{kl}(x,y)\left(D_{m_{k+1}}(x)-D_{m_k}(x)\right)\left(D_{m_{l+1}}(y)-D_{m_l}(y)\right)dx\,dy\right| =$$

$$= \left|\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1}a_{ij}\left(1-\chi_i\left(1/m_{k+1}\right)\right)\left(1-\chi_j\left(1/m_{l+1}\right)\right)\right|. \quad (12)$$

Если $p_{k+1} = p_{l+1} = 2$, то $\left(1-\chi_i\left(1/m_{k+1}\right)\right)\left(1-\chi_j\left(1/m_{l+1}\right)\right) = 4$. Если $p_{k+1} = 2, p_{l+1} \ne 2$, то $\Re\left(1-\chi_i\left(1/m_{k+1}\right)\right)\left(1-\chi_j\left(1/m_{l+1}\right)\right) = 2(1-\cos 2\pi\alpha/p_{l+1}) \ge 4\sin^2\pi/P$, где $\alpha \in [1, p_{l+1}-1]$. Из этих оценок, (12) и неравенства Гёльдера $(1/p+1/q=1)$ следует

$$\omega^*_{kl}(f)_p m^{1/p}_{k+1}m^{1/p}_{l+1} \ge C_1\|A_{kl}\|_p\left\|\left(D_{m_{k+1}}(x)-D_{m_k}(x)\right)\left(D_{m_{l+1}}(y)-D_{m_l}(y)\right)\right\|_q \ge$$

$$\ge C_2\sum_{i=m_k}^{m_{k+1}-1}\sum_{j=m_l}^{m_{l+1}-1}a_{ij} \ge C_3 m_{k+1}m_{l+1}a_{m_{k+1},m_{l+1}}. \quad (13)$$

Если же $p_{k+1} \neq 2$, $p_{l+1} \neq 2$, то вместо (12) рассматриваем равенство

$$\left|\int_0^1 \int_0^1 A_{kl}(x,y)\left(D_{2m_k}(x) - D_{m_k}(x)\right)\left(D_{2m_l}(y) - D_{m_l}(y)\right)dxdy\right| = \\ = \left|\sum_{i=m_k}^{2m_k-1}\sum_{j=m_l}^{2m_l-1} a_{ij}\left(1 - \chi_i\left(1/m_{k+1}\right)\right)\left(1 - \chi_j\left(1/m_{l+1}\right)\right)\right|.$$

Для $j \in [m_l, 2m_l - 1]$ имеем $\chi_j\left(1/m_{l+1}\right) = e^{2\pi i/p_{l+1}}$. Значит, для $i \in [m_k, 2m_k - 1]$, $j \in [m_l, 2m_l - 1]$ находим

$$\Im\left(1 - \chi_i\left(1/m_{k+1}\right)\right)\left(1 - \chi_j\left(1/m_{l+1}\right)\right) = \left(1 - \cos\frac{2\pi}{p_{k+1}}\right)\sin\frac{2\pi}{p_{l+1}} + \left(1 - \cos\frac{2\pi}{p_{l+1}}\right)\sin\frac{2\pi}{p_{k+1}} = \\ = 4\sin\frac{\pi}{p_{l+1}}\sin\frac{\pi}{p_{k+1}}\left(\sin\frac{\pi}{p_{k+1}}\cos\frac{\pi}{p_{l+1}} + \sin\frac{\pi}{p_{l+1}}\cos\frac{\pi}{p_{k+1}}\right) = \\ = 4\sin\frac{\pi}{p_{l+1}}\sin\frac{\pi}{p_{k+1}}\sin\left(\frac{\pi}{p_{k+1}} + \frac{\pi}{p_{l+1}}\right).$$

Последнее выражение положительно и не меньше $4\sin^3\pi/P$. Аналогично (13) получаем

$$\omega^*_{kl}(f)_p m_{k+1}^{1/p} m_{l+1}^{1/p} \geq C_4\|A_{kl}\|_p \|\left(D_{2m_k}(x) - D_{m_k}(x)\right)\left(D_{2m_l}(y) - D_{m_l}(y)\right)\|_q \geq \\ \geq C_5 \sum_{i=m_k}^{2m_k-1}\sum_{j=m_l}^{2m_l-1} a_{ij} \geq C_6 m_{k+1}m_{l+1}a_{2m_k,2m_l} \geq C_7 m_{k+1}m_{l+1}a_{m_{k+1}-1,m_{l+1}-1}.$$

Отсюда вытекает утверждение теоремы. □

Докажем неулучшаемость второго неравенства теоремы 6.

Предложение 2. *Пусть* $1 \leq p \leq 2$, $1/p + 1/q = 1$, $\{\omega_{kl}\}_{k,l=0}^{\infty}$ *удовлетворяет условиям теоремы* 3, *тогда существует такая* $f_0 \in C^*[0,1)^2$, *что* $\sigma_{rs}(p, f_0) = O(\omega_{rs})$ *и*

$$\omega^*_{kl}(f_0)_q \geq C\omega_{kl}, \quad k, l \in \mathbb{N}.$$

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$f_0(x,y) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=1}^{\infty}\omega_{kl}m_k^{-1/p}m_l^{-1/p}\left(D_{m_{k+1}}(x) - D_{m_k}(x)\right)\left(D_{m_{l+1}}(y) - D_{m_l}(y)\right).$$

В силу (10) и леммы 3 имеем оценку

$$\omega_{rs}(f_0)_\infty \leq 2\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\omega_{kl}(m_k m_l)^{-1/p}\|D_{m_{k+1}} - D_{m_k}\|_\infty \|D_{m_{l+1}} - D_{m_l}\|_\infty \leq \\ \leq C_1\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\omega_{kl}(m_k m_l)^{1/q} \leq C_2(m_r m_s)^{1/q}\omega_{rs},$$

откуда $f \in C^*[0,1)^2$. Тогда

$$\sigma^p_{rs}(p,f) = \sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\omega^p_{kl}(m_{k+1} - m_k)(m_{l+1} - m_l)m_k^{-1}m_l^{-1} \leq C_3\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\omega^p_{kl}.$$

Из неравенства (10) следует

$$\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\omega_{kl} \le (m_r m_s)^{-1/q}\sum_{k=r}^{\infty}\sum_{l=s}^{\infty}\omega_{kl}(m_k m_l)^{1/q} \le C_4\left((m_r m_s)^{-1/q}(m_r m_s)^{1/q}\omega_{rs}\right) = C_4\omega_{rs}.$$

С другой стороны, так как $p \ge 1$, то $\sum\limits_{k=r}^{\infty}\sum\limits_{l=s}^{\infty}\omega_{kl}^p \le \left(\sum\limits_{k=r}^{\infty}\sum\limits_{l=s}^{\infty}\omega_{kl}\right)^p \le C_4^p\omega_{rs}^p$. В результате $\sigma_{rs}(p,f) \le C_5\omega_{rs}$. Для оценки снизу применим теорему 4. Имеем

$$\omega_{kl}^*(f_0)_q \ge C_6\widehat{f}(m_{k+1}-1, m_{l+1}-1)(m_{k+1}m_{l+1})^{1-1/q} = \\ = C_6\omega_{k,l}(m_k m_l)^{-1/p}(m_{k+1}m_{l+1})^{1-1/q} \ge C_7\omega_{kl}. \quad \square$$

Литература

[1] Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения* (Наука, М., 1987).

[2] Lorentz G.G. *Fourier-Koeffizienten und Funktionenklassen*, Math. Z. **51** (2), 135–149 (1948).

[3] Бари Н.К. *Тригонометрические ряды* (Физматгиз, М., 1961).

[4] Кагадий Л.П. *Классы функций $\Lambda_p(\alpha,\beta)$ и коэффициенты Фурье*, Укр. матем. журн. **26** (3), 367–374 (1974).

[5] Агаев Г.Н., Виленкин Н.Я., Джафарли Г.М., Рубинштейн А.И. *Мультипликативные системы функций и гармонический анализ на нуль-мерных группах* (Элм, Баку, 1981).

[6] Aljancić S., Tomić M. *Über den Stetigkeitsmodul von Fourier-Reihen mit monotonen Koeffizienten*, Math. Z. **88** (3), 274–284 (1965).

[7] Волосивец С.С. *Сходимость рядов Фурье по мультипликативным системам и p-флуктуационный модуль непрерывности*, Сиб. матем. журн. **47** (2), 241–258 (2006).

[8] Кагадий Л.П. *Коэффициенты Фурье и модули гладкости функций двух переменных*, Учен. зап. Тартуск. ун-та **253** (9), 229–243 (1970).

Р.Н. Фадеев

аспирант, кафедра теории функций и приближений,
Саратовский государственный университет,
ул. Астраханская, д. 83, г. Саратов, 410028, Россия,

e-mail: belal_templier@mail.ru

R.N. Fadeev

Postgraduate, Chair of Function Theory and Approximation,
Saratov State University,
83 Astrakhanskya str., Saratov, 410028 Russia,

e-mail: belal_templier@mail.ru