УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА

Том 156, кн. 2 Физико-математические науки *2014*

УДК 514.76

ОЦЕНКА РАЗМЕРНОСТЕЙ АЛГЕБРЫ ЛИ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АФФИННЫХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ КАСАТЕЛЬНОГО РАССЛОЕНИЯ $T(M)$ СО СВЯЗНОСТЬЮ ПОЛНОГО ЛИФТА

А.Я. Султанов, Г.А. Султанова

Аннотация

В работе получены точные оценки размерностей алгебр Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения $T(M)$ со связностью полного лифта в случае, когда база M является непроективно-евклидовым пространством специального случая.

Ключевые слова: дифференцируемое многообразие, полный лифт связности, инфинитезимальное аффинное преобразование, вертикально-векторное поднятие аффинора, горизонтально-векторное поднятие аффинора, алгебра Ли, непроективно-евклидово пространство.

1. Основные сведения

Пусть M – связное дифференцируемое многообразие класса C^∞ размерности n, A – алгебра дуальных чисел $R(\epsilon) = \{a_0\epsilon^0 + a_1\epsilon^1 \mid a, b \in R,\ \epsilon^0 = 1,\ (\epsilon^1)^2 = 0\}$, A^* – пространство линейных форм, заданных на A со значениями в R, (ϵ_0, ϵ_1) – дуальный базис к базису (ϵ^0, ϵ^1). Возьмем касательные пространства $T_p(M)$ к многообразию M в точках $p \in M$. Тройка $(T(M), \pi, M)$, где

$$T(M) = \bigcup_{p \in M} T_p(M),$$

называется касательным расслоением над многообразием M, а каноническая проекция $\pi : T(M) \to M$ определяется условием $\pi(t_x) = x,\ t_x \in T(M)$. Для функции $f \in C^\infty(M)$ функция $f_{(0)} = f \circ \pi$ называется вертикальным лифтом функции f с базы M в его касательное расслоение $T(M)$. На $T(M)$ возникает естественная структура гладкого многообразия над полем действительных чисел, атлас которого состоит из координатных окрестностей вида $(\pi^{-1}(U),\, x_0^i,\, x_1^i)$. Закон преобразования координат при переходе от локальной карты $(\pi^{-1}(U),\, x_0^i,\, x_1^i)$ к локальной карте $(\pi^{-1}(V),\, \bar{x}_0^i,\, \bar{x}_1^i)$ имеет вид [1]

$$\begin{cases} \bar{x}_0^i = \bar{x}_0^i(x_0^1, \ldots, x_0^n), \\ \bar{x}_1^i = \left(\dfrac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^k}\right)_{(0)} x_1^k. \end{cases} \tag{1.1}$$

Приведем определения полного лифта функции, лифтов векторных полей, полного лифта линейной связности ∇ с базы в касательное расслоение $T(M)$.

Пусть f – функция класса C^∞, заданная на M. Функция $f_{(1)} = (\partial_j f)_{(0)} x_1^j$ называется полным лифтом функции f с базы M в его касательное расслоение $T(M)$.

Для произвольного векторного поля $X \in \Im_0^1(M)$ на $T(M)$ вертикальный $X^{(1)}$ и полный $X^{(0)}$ лифты определяются условиями

$$X^{(1)} f_{(1)} = (Xf)_{(0)},$$
$$X^{(1)} f_{(0)} = 0, \tag{1.2}$$
$$X^{(0)} f_{(\alpha)} = (Xf)_{(\alpha)}, \quad \alpha = 0, 1,$$

для любой функции f из алгебры $C^\infty(M)$. В локальных координатах векторные поля $X^{(1)}$, $X^{(0)}$ имеют вид $X^{(1)} = X_0^i \partial_i^1$, $X^{(0)} = X_0^i \partial_i^0 + X_1^i \partial_i^1$ соответственно, где $X_0^i = (X^i)_{(0)}$, $X_1^i = (\partial_j X^i)_{(0)} x_1^j$.

На многообразии $T(M)$ существует единственная линейная связность $\nabla^{(0)}$, удовлетворяющая условию

$$\nabla^{(0)}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = (\nabla_X Y)^{(ab)}, \tag{1.3}$$

где $X, Y \in \Im_0^1(M)$, $a, b \in A$. Такая связность называется полным лифтом линейной связности ∇ [1, 2].

2. Инфинитезимальные аффинные преобразования в касательных расслоениях со связностью полного лифта

В настоящей работе мы будем предполагать, что линейная связность ∇ не имеет кручения.

Определение 2.1. Векторное поле $\widetilde{X}$ называется инфинитезимальным аффинным преобразованием связности $\nabla^{(0)}$ касательного расслоения $T(M)$ тогда и только тогда, когда

$$L_{\widetilde{X}} \nabla^{(0)} = 0.$$

В некоторых случаях связность $\nabla^{(0)}$ для удобства будем обозначать через $\widetilde{\nabla}$.

В координатной форме это уравнение равносильно системе дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка

$$\partial_j^\alpha \partial_k^\beta X_\sigma^i + \Gamma_{mk\sigma}^{\tau\beta i} \partial_j^\alpha X_\tau^m + \Gamma_{jm\sigma}^{\alpha\tau i} \partial_k^\beta X_\tau^m - \Gamma_{jk\tau}^{\alpha\beta m} \partial_m^\tau X_\sigma^i + X_\tau^m \partial_m^\tau \Gamma_{jk\sigma}^{\alpha\beta i} = 0. \tag{2.1}$$

Условия интегрируемости системы (2.1) представляют собой соотношения

$$L_{\widetilde{X}} \widetilde{\nabla}^k \widetilde{R} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots$$

При $k = 0$ считаем, по определению, $\widetilde{\nabla}^0 \widetilde{R} = \widetilde{R}$. Поэтому первая серия условий интегрируемости $L_{\widetilde{X}} \widetilde{R} = 0$ в локальных координатах будет равносильна системе алгебраических уравнений уравнений

$$R_{mkl\sigma}^{\tau\beta\mu i} A_{j\tau}^{\alpha m} + R_{jml\sigma}^{\alpha\tau\mu i} A_{k\tau}^{\beta m} + R_{jkm\sigma}^{\alpha\beta\tau i} A_{l\tau}^{\mu m} - R_{jkl\tau}^{\alpha\tau\mu m} A_{m\sigma}^{\tau i} + X_\tau^m \partial_m^\tau R_{jkl\sigma}^{\alpha\beta\mu i} = 0, \tag{2.2}$$

где $A_{l\tau}^{\mu m} = \partial_l^\mu X_\tau^m$.

Систему (2.2) представим в развернутой форме, придавая индексам α, β, σ, μ значения 0, 1. Тогда

$$\begin{aligned}
&R_{jkl}^m A_{m0}^{1i} = 0, \quad R_{mkl}^i A_{j0}^{1m} = 0,\\
&R_{mkl}^i A_{j0}^{0m} + R_{jml}^i A_{k0}^{0m} + R_{jkm}^i A_{l0}^{0m} - R_{jkl}^m A_{m0}^{0i} - (R_{jkl}^m)_{(1)} A_{m0}^{1i} + X_0^m \partial_m^0 R_{jkl}^i = 0,\\
&(R_{mkl}^i)_{(1)} A_{j0}^{0m} + (R_{jml}^i)_{(1)} A_{k0}^{0m} + (R_{jkm}^i)_{(1)} A_{l0}^{0m} + R_{mkl}^i A_{j1}^{0m} + R_{jml}^i A_{k1}^{0m} +\\
&\quad + R_{jkm}^i A_{l1}^{0m} - R_{jkl}^m A_{m1}^{0i} - (R_{jkl}^m)_{(1)} A_{m1}^{1i} + X_0^m \partial_m^0 \partial_p^0 R_{jkl}^i x_1^p + X_1^m \partial_m^0 R_{jkl}^i = 0,\\
&-R_{mkl}^i A_{j0}^{0m} + R_{jkl}^m A_{m0}^{0i} + (R_{jkl}^m)_{(1)} A_{m0}^{1i} + (R_{mkl}^i)_{(1)} A_{j0}^{1m} + R_{mkl}^i A_{j1}^{1m} - R_{jkl}^m A_{m1}^{1i} = 0.
\end{aligned} \tag{2.3}$$

Систему (2.3) мы рассмотрим, учитывая структуру инфинитезимального аффинного преобразования $\widetilde{X}$.

Известно, что инфинитезимальное аффинное преобразование $\widetilde{X}$ полного лифта линейной связности без кручения Γ^i_{jk} в касательное расслоение $T(M)$ имеет вид [3]

$$\widetilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + \gamma G + F^{H\gamma}, \tag{2.4}$$

где $X,\ Y$ – векторные поля, $F,\ G$ – тензорные поля типа (1,1) на многообразии M, удовлетворяющие условиям

$$L_X \nabla = 0; \tag{2.5}$$

$$L_Y \nabla = 0; \tag{2.6}$$

$$\nabla G = 0; \tag{2.7}$$

$$\nabla F = 0; \tag{2.8}$$

$$R^i_{mkl} F^m_j = R^m_{jkl} F^i_m = 0; \tag{2.9}$$

$$R^i_{mkl} G^m_j - R^m_{jkl} G^i_m = 0. \tag{2.10}$$

Здесь векторное поле γG в локальных координатах определяется условием

$$\gamma G = G^j_i x^i_1 \partial^1_j$$

и называется вертикально-векторным поднятием аффинора G. Векторное поле $F^{H\gamma}$, в локальных координатах имеющее вид

$$F^{H\gamma} = F^j_i x^i_1 D_j,$$

где $D_j = \partial_j - \Gamma^p_{js} x^s_1 \partial^1_p$, называется горизонтально-векторным поднятием аффинора F.

Теорема 2.1. *Разложение инфинитезимального аффинного преобразования в виде* (2.4) *– единственное.*

Доказательство. Достаточно установить, что если $\widetilde{X} = X^{(0)} + Y^{(1)} + \gamma G + F^{H\gamma} = 0$, то тензорные поля $X = Y = 0,\ G = F = 0$.

Для любой функции $f \in C^\infty(M)$ имеем

$$\widetilde{X} f_{(0)} = X^{(0)} f_{(0)} + F^{H\gamma} f_{(0)} = 0,$$

$$\widetilde{X} f_{(1)} = Y^{(1)} f_{(1)} + \gamma G f_{(1)} = 0.$$

Полагая в этих равенствах вместо f координатные функции x^i, получим

$$(X^i)_{(0)} + F^i_j x^j_1 = 0,$$

$$(Y^i)_{(0)} + G^i_j x^j_1 = 0.$$

Откуда следует, что $X = Y = 0,\ G = F = 0$. □

Совокупность всевозможных инфинитезимальных аффинных преобразований образует алгебру Ли относительно операции коммутирования. Алгебру Ли векторных полей вида (2.4) обозначим через $\widetilde{L}$, через L^α, $\alpha = 0, 1$, – множество векторных полей вида $X^{(\alpha)}$, через L^2 и L^3 – соответственно совокупности векторных полей вида γG и $F^{H\gamma}$, входящих в разложение (2.4).

Из условий (2.5)–(2.10) заключаем, что каждое из множеств L^0, L^1, L^2, L^3 замкнуто относительно операций сложения и умножения на скаляр из $\mathbb{R}$, то есть они являются векторными пространствами. При этом в силу теоремы 2.1 векторное пространство $\widetilde{L}$ представляет собой прямую сумму подпространств L^0, L^1, L^2, L^3. Поэтому

$$\dim_{\mathbb{R}}\widetilde{L} = \dim_{\mathbb{R}}L^0 + \dim_{\mathbb{R}}L^1 + \dim_{\mathbb{R}}L^2 + \dim_{\mathbb{R}}L^3.$$

Теорема 2.2. *Подпространства L^0, L^1, L^2, L^3 являются подалгебрами алгебры Ли $\widetilde{L}$.*

Доказательство. Для векторных полей $X \in \Im^1_0(M)$ имеем [1]

$$[X^{(0)}, Y^{(0)}] = [X, Y]^{(0)}, \quad [X^{(1)}, Y^{(1)}] = 0.$$

Отсюда следует, что подпространства L^0 и L^1 являются подалгебрами алгебры Ли $\widetilde{L}$, причем подалгебра L^1 – абелева.

Для тензорных полей $P, G \in \Im^1_1(M)$ вычислим коммутаторы $[\gamma P, \gamma G]$, $[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}]$, используя локальные координаты на $T(M)$:

$$[\gamma P, \gamma G] = [P^m_k x^k_1 \partial^1_m, G^s_p x^p_1 \partial^1_s] = \\ = P^m_k x^k_1 G^s_m \partial^1_s - G^s_p x^p_1 P^m_s \partial^1_m = (P^m_k G^s_m - G^m_k P^s_m) x^k_1 \partial^1_s.$$

Пусть $\widetilde{G}^s_k = P^m_k G^s_m - G^m_k P^s_m$. Вычислим ковариантную производную $\nabla_l \widetilde{G}^s_k$:

$$\nabla_l \widetilde{G}^s_k = \nabla_l P^m_k G^s_m - G^m_k \nabla_l P^s_m = 0$$

в силу условия (2.7) разложения (2.4). Прямые вычисления показывают, что $\widetilde{G}^s_k$ удовлетворяют равенствам (2.10). Отсюда следует, что L^3 является абелевой подалгеброй алгебры Ли $\widetilde{L}$.

Перейдем к вычислению коммутатора $[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}]$. Имеем

$$[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}] = [P^j_i x^i_1 \partial^0_j - P^j_i x^i_1 \Gamma^p_{js} x^s_1 \partial^1_p, G^k_m x^m_1 \partial^0_k - G^k_m x^m_1 \Gamma^q_{kz} x^z_1 \partial^1_q] = \\ = (P^j_i \partial_j G^k_m - P^j_i \Gamma^p_{mj} G^k_p - G^j_m \partial_j P^k_i + G^j_m \Gamma^p_{ji} P^k_q) x^m_1 x^i_1 \partial^0_k + \\ + (-P^j_i \partial_j G^k_m + P^j_i \Gamma^p_{jm} G^k_p + G^j_m \partial_j P^k_i - G^j_m \Gamma^p_{ji} P^k_q) \Gamma^q_{ks} x^m_1 x^i_1 x^s_1 \partial^1_q + \\ + P^j_i G^k_m (-\partial_j \Gamma^q_{ks} + \partial_k \Gamma^q_{js} + \Gamma^p_{js} \Gamma^q_{kp} - \Gamma^p_{ks} \Gamma^q_{jp}) x^m_1 x^i_1 x^s_1 \partial^1_q = \\ = (P^j_i \nabla_j G^k_m - G^j_m \nabla_j P^k_i) x^m_1 x^i_1 (\partial^0_k - \Gamma^q_{ks} x^s_1 \partial^1_q) + P^j_i G^k_m R^q_{skj} x^m_1 x^i_1 x^s_1 \partial^1_q = \\ = (P^j_i \nabla_j G^k_m - G^j_m \nabla_j P^k_i) x^m_1 x^i_1 \partial^H_k + P^j_i G^k_m R^q_{skj} x^m_1 x^i_1 x^s_1 \partial^1_q.$$

Откуда вытекает, что если $P^{H\gamma}, G^{H\gamma}$ принадлежат L^3, то в силу равенств (2.8), (2.9) имеем $[P^{H\gamma}, G^{H\gamma}] = 0$, то есть L^3 – абелева подалгебра алгебры Ли $\widetilde{L}$. □

3. Условия интегрируемости уравнений инфинитезимальных аффинных преобразований для векторного поля вида (2.4)

Рассмотрим первую серию условий интегрируемости (2.2) системы (2.1) применительно к разложению (2.4). Подставив (2.4) в (2.3), получаем следующую систему уравнений:

$$
\begin{aligned}
&R^i_{mkl}\partial_j X^m_0 + R^i_{jml}\partial_k X^m_0 + R^i_{jkm}\partial_l X^m_0 - R^m_{jkl}\partial_m X^i_0 + V^m_0\partial_m R^i_{jkl} = 0,\\
&R^i_{mkl}\partial_j Y^m_0 + R^i_{jml}\partial_k Y^m_0 + R^i_{jkm}\partial_l Y^m_0 - R^m_{jkl}\partial_m Y^i_0 + Y^m_0\partial_m R^i_{jkl} = 0,\\
&R^m_{jkl}F^i_m = 0,\\
&R^i_{mkl}F^m_j = 0,\\
&R^i_{mkl}G^m_j - R^m_{jkl}G^i_m = 0,\\
&R^i_{mkl}\partial_j F^m_p + R^i_{jml}\partial_k F^m_p + R^i_{jkm}\partial_l F^m_p - R^m_{jkl}\partial_m F^i_p - \partial_p R^m_{jkl}F^i_m + \partial_m R^i_{jkl}F^m_p = 0,\\
&\partial_q R^i_{mkl}\partial_j X^m + \partial_q R^i_{jml}\partial_k X^m + \partial_q R^i_{jkm}\partial_l X^m + R^i_{mkl}\partial_j(\partial_q X^m + G^m_q) +\\
&\qquad + R^i_{jml}\partial_k(\partial_q V^m + G^m_q) + R^i_{jkm}\partial_l(\partial_q X^m + G^m_q) - R^m_{jkl}\partial_m(\partial_q X^i + G^i_q) -\\
&\qquad - \partial_q R^m_{jkl}\partial_m X^i - \partial_q R^m_{jkl}G^i_m + X^m\partial_m\partial_q R^i_{jkl} + \partial_m R^i_{jkl}(\partial_q X^m + G^m_q) = 0, \qquad (3.1)\\
&\partial_q R^i_{mkl}\partial_j F^m_r + \partial_q R^i_{jml}\partial_k F^m_r + \partial_q R^i_{jkm}\partial_l F^m_r - R^i_{mkl}\partial_j(\Gamma^m_{pr}F^p_q) -\\
&\quad - R^i_{jml}\partial_k(\Gamma^m_{pr}F^p_q) - -R^i_{jkm}\partial_l(\Gamma^m_{pr}F^p_q) + R^m_{jkl}\partial_m(\Gamma^i_{pr}F^p_q) + \partial_q R^m_{jkl}\Gamma^i_{pm}F^p_r +\\
&\qquad\qquad + \partial_q R^m_{jkl}\Gamma^i_{pr}F^p_m + F^m_r\partial_m\partial_q R^i_{jkl} - \Gamma^m_{pr}F^p_q\partial_m R^i_{jkl} = 0,\\
&- R^i_{mkl}\partial_j F^m_p + R^m_{jkl}\partial_m F^i_p + \partial_p R^m_{jkl}F^i_m + \partial_p R^i_{mkl}F^m_j - R^i_{mkl}\Gamma^m_{qj}F^q_p -\\
&\qquad\qquad - R^i_{mkl}\Gamma^m_{rp}F^r_j + R^m_{jkl}\Gamma^i_{qm}F^q_p + R^m_{jkl}\Gamma^i_{rp}F^r_m = 0.
\end{aligned}
$$

Систему (3.1) можно представить в виде следующих соотношений:

$$L_{\vec{X}}R = 0, \tag{3.2}$$

$$L_{\vec{Y}}R = 0, \tag{3.3}$$

$$R^m_{jkl}F^i_m = 0, R^i_{mkl}F^m_j = 0, \tag{3.4}$$

$$R^i_{mkl}G^m_j - R^m_{jkl}G^i_m = 0. \tag{3.5}$$

Равенства (3.2) и (3.3) являются условиями интегрируемости для уравнений (2.5), (2.6), а равенства (3.4), (3.5) совпадают с условиями (2.9), (2.10) разложения (2.4) соответственно.

4. Оценка размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения $T(M)$ со связностью полного лифта в случае, когда база является непроективно-евклидовой специального случая

Линейная связность, заданная на (M, ∇) $(n > 2)$, является непроективно-евклидовой тогда и только тогда, когда тензорное поле Г. Вейля этой связности отлично от нулевого. Это условие локально эквивалентно выполнению одного из следующих условий [4].

I. Существует карта гладкого атласа (U, φ) такая, что составляющая тензорного поля кривизны вида $R^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}$ отлична от нуля для некоторых попарно различных индексов.

II. В каждой карте (V, ψ) все составляющие тензорного поля кривизны вида $R^{i_1}_{i_2 i_2 i_3}$ равны нулю, но существует карта (U, φ) такая, что составляющая вида $R^{i_1}_{i_2 i_3 i_4}$ отлична от нуля для некоторых попарно различных индексов.

В этой части работы мы рассмотрим случай I.

И.П. Егоровым установлено [5], что размерность алгебры Ли $\mathfrak{g}(M)$ инфинитезимальных аффинных преобразований непроективно-евклидова пространства

(M, ∇) не более n^2-2n+5. Из рассмотренного выше следует, что для пространств разложения (2.4)

$$\mathrm{dim}L^0 + \mathrm{dim}L^1 \leq 2n^2 - 4n + 10.$$

Оценим размерность подалгебры L^2. Для этого рассмотрим пространство решений уравнения $\nabla G = 0$, равносильного в локальных координатах системе дифференциальных уравнений первого порядка

$$\partial_j G^i_k - G^i_p \Gamma^p_{kj} + G^p_k \Gamma^i_{pj} = 0, \tag{4.1}$$

где $G \in \Im^1_1(M)$.

Предложение 4.1. *Первую серию условий интегрируемости системы* (4.1) *можно записать в виде*

$$G^m_k R^i_{mjl} - G^i_m R^m_{kjl} = 0. \tag{4.2}$$

Доказательство. Продифференцируем уравнения (4.1) по ∂_l, получим

$$\partial_l \partial_j G^i_k - \partial_l G^i_p \Gamma^p_{kj} + G^i_p \partial_l \Gamma^p_{kj} + \partial_l G^p_k \Gamma^i_{pj} + G^p_k \partial_l \Gamma^i_{pj} = 0, \tag{4.3}$$

В соотношениях (4.3) поменяем индексы l и j местами и из (4.3) вычтем полученные соотношения. В результате будем иметь

$$-\partial_l G^i_p \Gamma^p_{kj} + \partial_j G^i_p \Gamma^p_{kl} + G^i_p \partial_l \Gamma^p_{kj} - G^i_p \partial_j \Gamma^p_{kl} + \partial_l G^p_k \Gamma^i_{pj} - \partial_j G^p_k \Gamma^i_{pl} + G^p_k \partial_l \Gamma^i_{pj} - G^p_k \partial_j \Gamma^i_{pl} = 0,$$

Переходя к ковариантным производным в этих уравнениях и учитывая, что $\nabla G = 0$, получим равенство (4.2).

□

Уравнения (4.2) дают соотношения вида $T(^j_{klm}|^h_i)G^m_h = 0$, где по определению

$$T(^j_{klm}|^h_i) = \delta^h_k R^j_{ilm} - \delta^j_i R^h_{klm}.$$

Рассмотрим матрицу B системы, составленную из коэффициентов

$$\binom{j}{232}, \quad \binom{1}{s23}, \quad \binom{1}{223}, \quad j > 1, \quad s > 2$$

при неизвестных G^i_1 $(i > 1)$, G^2_k $(k > 2)$, G^1_1 в уравнениях $T(^j_{klm}|^h_i)G^m_h = 0$.

Имеем

$$T(^j_{232}|^1_i) = -\delta^j_i R^1_{232}, \quad i, j > 1,$$

$$T(^1_{s23}|^1_i) = 0, \quad T(^1_{s23}|^k_2) = \delta^k_s R^1_{223}, \quad i > 1, \quad k, s > 2,$$

$$T(^1_{223}|^1_i) = 0, \quad T(^1_{223}|^k_2) = 0, \quad i, s > 1, \quad k > 2, \quad T(^1_{223}|^1_1) = -R^1_{223}.$$

Полагая $R^1_{223} = a$, получим следующую матрицу B:

$$B = \begin{pmatrix} aI_{n-1} & * & * \\ 0 & aI_{n-2} & * \\ 0 & 0 & -a \end{pmatrix},$$

где I_k – единичная матрица порядка k.

Ранг данной матрицы равен $2n-2$. Следовательно, размерность пространства решений $\nabla G = 0$ не более $n^2 - 2n + 2$. Для разложения (2.4) заключаем, что $\dim L^2 \leq n^2 - 2n + 2$.

Оценим размерность подалгебры L^3. Рассмотрим пространство решений уравнения $\nabla F = 0$, которое равносильно в локальных координатах системе дифференциальных уравнений
$$\partial_j F^i_k - F^i_p \Gamma^p_{kj} + F^p_k \Gamma^i_{pj} = 0,$$
где $F \in \Im^1_1(M)$. Условия интегрируемости $F^m_j R^i_{mkl} = 0$, $F^m_k R^i_{jml} = 0$, $F^m_l R^i_{jkm} = 0$, $F^i_m R^m_{jkl} = 0$ этой системы дают соотношения вида $N_\alpha\left({}^{i}_{jkl}\big|{}^{h}_{m}\right)F^m_h = 0$, $\alpha = 1,2,3$, где по определению
$$N_1\left({}^{i}_{jkl}\big|{}^{h}_{m}\right) = \delta^h_j R^i_{mkl}, \quad N_2\left({}^{i}_{jkl}\big|{}^{h}_{m}\right) = \delta^h_k R^i_{jml}, \quad N_3\left({}^{i}_{jkl}\big|{}^{h}_{m}\right) = \delta^i_m R^h_{jkl}.$$

Рассмотрим матрицу C системы, составленную из коэффициентов
$$\begin{pmatrix} p \\ 223 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ s23 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ 2j2 \end{pmatrix}, \quad s,\, j > 1$$
при неизвестных F^i_1, F^2_k $(k > 1)$, F^3_l $(l > 1)$ в уравнениях $N_\alpha\left({}^{i}_{jkl}\big|{}^{h}_{m}\right)F^m_h = 0$, $\alpha = 1,2,3$.

Имеем
$$N_3\left({}^{p}_{223}\big|{}^{1}_{i}\right) = -\delta^p_i R^1_{223},$$
$$N_1\left({}^{1}_{s23}\big|{}^{1}_{i}\right) = 0, \quad s,\, k > 1, \quad N_1\left({}^{1}_{s23}\big|{}^{k}_{2}\right) = \delta^k_s R^1_{223},$$
$$N_2\left({}^{1}_{2j2}\big|{}^{1}_{i}\right) = 0, \quad N_2\left({}^{1}_{2j2}\big|{}^{k}_{2}\right) = 0, \quad N_2\left({}^{1}_{2j2}\big|{}^{l}_{3}\right) = \delta^l_j R^1_{232}, \quad s,\, j,\, l > 1.$$

Полагая $R^1_{223} = a$, преобразуем матрицу C
$$C = \begin{pmatrix} -aI_n & * & * \\ 0 & aI_{n-1} & * \\ 0 & 0 & -aI_{n-1} \end{pmatrix},$$
где I_k – единичная матрица порядка k.

Так как ранг матрицы C равен $3n-2$, то размерность пространства решений уравнения $\nabla F = 0$ не более $n^2 - 3n + 2$. Отсюда следует, что $\dim L^3 \le n^2 - 3n + 2$.

Таким образом, имеет место

Теорема 4.1. *Если тензорное поле R связности ∇ имеет в некоторой координатной окрестности составляющую $R^1_{223} \neq 0$, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований $\nabla^{(0)}$ не более чем $4n^2 - 9n + 14$.*

Для установления точности оценки, данной в теореме 4.1, рассмотрим пространство (R^n, ∇), где линейная связность ∇ определяется следующими коэффициентами: $\Gamma^1_{23} = x^2$, остальные равны нулю $\Gamma^i_{jk} = 0$. Тензорное поле кривизны R этого пространства имеет отличные от нуля компоненты $R^1_{223} = -R^1_{232} = 1$, тензорное поле Г. Вейля при этом имеет такие же компоненты $W^1_{223} = -W^1_{232} = 1$. Иначе говоря, это пространство является непроективно-евклидовым.

Алгебра Ли $g(R^n)$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (R^n, ∇) имеет размерность $n^2 - 2n + 5$, базисом которой будут векторные поля [5]:
$$\partial_1, \ \ \partial_3, \ \ \partial_h \ \ (h > 3), \ \ x^2\partial_1, \ \ x^3\partial_1, \ \ x^s\partial_1 \ \ (s > 3),$$
$$\partial_2 - x^2x^3\partial_1, \ \ x^2\partial_2 + 2x^1\partial_1, \ \ x^2\partial_3 - \frac{(x^2)^3}{3}\partial_1,$$
$$x^1\partial_1 + x^3\partial_3, \ \ x^m\partial_h \ \ (m > 1, \ h > 3).$$

Вычислим полные и вертикальные лифты этих векторных полей.
Полные лифты векторных полей есть

$$\partial_1^0,\ \ \partial_3^0,\ \ \partial_h^0\ \ (h>3),\ \ x_0^2\partial_1^0+x_1^2\partial_1^1,\ \ x_0^3\partial_1^0+x_1^3\partial_1^1,\ \ x_0^s\partial_1^0+x_1^s\partial_1^1\ \ (s>3),$$
$$\partial_2^0-x_0^2x_0^3\partial_1^0-x_1^2x_0^3\partial_1^1-x_0^2x_1^3\partial_1^1,\ \ x_0^2\partial_2^0+x_1^2\partial_2^1+2x_0^1\partial_1^0+2x_1^1\partial_1^1,$$
$$x_0^2\partial_3^0+x_1^2\partial_3^1-\frac{(x_0^2)^3}{3}\partial_1^0-(x_0^2)^2x_1^2\partial_1^1, x_0^1\partial_1^0+x_1^1\partial_1^1+x_0^3\partial_3^0+x_1^3\partial_3^1,$$
$$x_0^m\partial_h^0+x_1^m\partial_h^1\ \ (m>1,\ h>3).$$

Вертикальные лифты векторных полей представляются следующим образом:

$$\partial_1^1,\ \ \partial_3^1,\ \ \partial_h^1\ \ (h>3),\ \ x_0^2\partial_1^1,\ \ x_0^3\partial_1^1,\ \ x_0^s\partial_1^1\ \ (s>3),$$
$$\partial_2^1-x_0^2x_0^3\partial_1^1,\ \ x_0^2\partial_2^1+2x_0^1\partial_1^1,$$
$$x_0^2\partial_3^1-\frac{(x_0^2)^3}{3}\partial_1^1, x_0^1\partial_1^1+x_0^3\partial_3^1,\ \ x_0^m\partial_h^1\ \ (m>1,\ h>3).$$

Таким образом, $\dim L^0(R^n)+\dim L^1(R^n)=2n^2-4n+10$.
Условия интегрируемости системы $\nabla_j G_i^h=0$ составляют соотношения

$$G_1^i=0\ \ (i>1),\quad G_k^2=0\ \ (k>2),\quad G_2^2-G_1^1=0.$$

Общее решение системы дифференциальных уравнений $\nabla_j G_i^h=0$ зависит от n^2-2n+2 произвольных постоянных и является линейной комбинацией следующих линейно-независимых тензорных полей типа (1,1):

$$\partial_1\otimes dx^1+\frac{(x^2)^2}{2}\partial_1\otimes dx^3+\partial_2\otimes dx^2,\ \ \partial_1\otimes dx^2,\ \ \partial_1\otimes dx^3,\ \ \partial_1\otimes dx^k\ (k>3),$$
$$\partial_3\otimes dx^2-\frac{(x^2)^2}{2}\partial_1\otimes dx^2,\ \ \partial_3\otimes dx^k-\frac{(x^2)^2}{2}\partial_1\otimes dx^k\ (k>2),\ \ \partial_h\otimes dx^k\ (h>3,\ k>1).$$

Базис алгебры $L^2(R^n)$ составляют векторные поля вида

$$\left(x_1^1+\frac{(x_0^2)^2}{2}x_1^3\right)\partial_1^1+x_1^2\partial_2^1,\quad x_1^k\partial_1^1\ \ (k>1),$$
$$-\frac{(x_0^2)^2}{2}x_1^k\partial_1^1+x_1^k\partial_3^1\ \ (k>1),\quad x_1^k\partial_h^1\ \ (h>3,\ k>1).$$

Отсюда следует, что размерность алгебры Ли $L^2(R^n)$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (R^n,∇) равна n^2-2n+2.

Для тензорного поля $F\in\Im_1^1(M)$ первая серия условий интегрируемости системы $\nabla F=0$ представлена соотношениями

$$F_1^i=0,\quad F_k^2=0\ \ (k>1),\quad F_l^3=0\ \ (l>1).$$

Общее решение системы $\nabla_j F_i^h=0$ зависит от n^2-3n+2 произвольных постоянных и является линейной комбинацией следующих линейно-независимых тензорных полей типа (1,1):

$$\partial_1\otimes dx^k\ \ (k>1),\quad \partial_h\otimes dx^k\ \ (h>3,\ k>1).$$

$H\gamma$-лифты этих тензорных полей образуют базис алгебры $L^3(R^n)$ и имеют вид

$$x_1^k\partial_1^0\ (k>1),\quad x_1^k\partial_h^0\ \ (h>3,\ k>1).$$

Следовательно, размерность алгебры Ли $L^3(R^n)$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства (R^n, ∇) равна $n^2 - 3n + 2$.

Учитывая, что пространство $\widetilde{L}(R^n)$ есть прямая сумма подпространств $L^0(R^n)$, $L^1(R^n)$, $L^2(R^n)$, $L^3(R^n)$, будет иметь место

Теорема 4.2. *Размерность алгебры Ли $\widetilde{L}(R^n)$ инфинитезимальных аффинных преобразований пространства $T(M)$ равна $4n^2 - 9n + 14$.*

5. О верхней границе размерности алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований синектического расширения полного лифта линейной связности А.П. Широкова на касательное расслоение

На касательном расслоении $T(M)$ гладкого многообразия M можно построить синектическое расширение ∇^{Sh} А.П. Широкова полного лифта $\nabla^{(0)}$ линейной связности ∇ с помощью тензорного поля Γ_1 типа (1,2), заданного на базе M расслоения. Линейная связность ∇^{Sh} определяется условием

$$\nabla^{\mathrm{Sh}}_{X^{(a)}} Y^{(b)} = \nabla^{(0)}_{X^{(a)}} Y^{(b)} + (\Gamma_1(X,Y))^{(\epsilon^1 ab)} \tag{5.1}$$

для любых векторных полей $X, Y \in \Im^1_0(M)$ и любых дуальных чисел a, b из алгебры $R(\epsilon)$ дуальных чисел над полем R. В равенстве (5.1) полагаем $\epsilon^1 = \epsilon$; единицу алгебры $R(\epsilon) = \{x + y\epsilon \mid x, y \in R\}$ мы обозначим через ϵ^0. Это позволяет сократить записи выражений. Например, вместо записи $X^{(\epsilon^\alpha)}$ будем использовать запись $X^{(\alpha)}$, $\alpha = 0, 1$.

Из определения связности ∇^{Sh} А.П. Широкова следуют тождества вида

$$\begin{aligned}
&\nabla^{\mathrm{Sh}}_{X^{(0)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(0)} + (\Gamma_1(X,Y))^{(1)},\\
&\nabla^{\mathrm{Sh}}_{X^{(0)}} Y^{(1)} = (\nabla_X Y)^{(1)},\\
&\nabla^{\mathrm{Sh}}_{X^{(1)}} Y^{(0)} = (\nabla_X Y)^{(1)},\\
&\nabla^{\mathrm{Sh}}_{X^{(1)}} Y^{(1)} = 0.
\end{aligned}$$

Обозначим через T^{Sh}, и R^{Sh} тензорные поля кручения и кривизны связности ∇^{Sh} соответственно. Предположим, что синектическая связность ∇^{Sh} не имеет кручения: $T^{\mathrm{Sh}} = 0$. Тогда имеет место

Теорема 5.1. *Если тензорное поле Г. Вейля W^{Sh} связности ∇^{Sh} равно нулю, то связность ∇^{Sh} локально плоская, то есть $R^{\mathrm{Sh}} = 0$.*

Доказательство. Пусть в точке t_x касательного расслоения $T(M)$ $W^{\mathrm{Sh}}(t_x) = 0$. В координатной окрестности $(\pi^{-1}(U), x^i_0, x^i_1)$ все компоненты тензора $W^{\mathrm{Sh}}(t_x) = 0$ будут равны нулю:

$$W^{\mathrm{Sh}}_{t_x}\left(\partial^\beta_j, \partial^\gamma_k, \partial^\alpha_i\right) = 0$$

для всех $\alpha, \beta, \gamma = 0, 1$ и $i, j, k = 1, 2, \ldots, n$. Тогда компоненты $R^{\mathrm{Sh}}_{t_x}(\partial^\beta_j, \partial^\gamma_k)\partial^\alpha_i$ тензора кривизны R^{Sh} в точке t_x будут удовлетворять соотношениям [4]

$$\begin{aligned}
\widetilde{R}^{\alpha\beta\gamma h}_{ijk\sigma} = {}&\frac{1}{2n+1}\,\delta^h_i \delta^\alpha_\sigma \left(R^{\gamma\beta}_{kj} - R^{\beta\gamma}_{jk}\right) + \\
&+ \frac{1}{4n^2-1}\left(\left(2nR^{\alpha\beta}_{ij} + R^{\beta\alpha}_{ji}\delta^h_k\delta^\gamma_\sigma\right) - \left(2nR^{\alpha\gamma}_{ik} + R^{\gamma\alpha}_{ki}\delta^h_j\delta^\beta_\sigma\right)\right),
\end{aligned} \tag{5.2}$$

где $\widetilde{R}_{ij}^{\alpha\beta}$ – компоненты тензора Риччи связности ∇^{Sh}. В силу коммутативности алгебры дуальных чисел компоненты $\widetilde{R}_{ijk\sigma}^{\alpha\beta\gamma h}$, $\widetilde{R}_{ij}^{\alpha\beta}$ будут инвариантными при любых перестановках индексов α, β, γ (здесь использован символ $\widetilde{R}$ для обозначения R^{Sh}).

В соотношениях (5.2) поменяем α и β местами и полученные соотношения вычтем из (5.2). В результате получим

$$0 = \delta_i^h \left(\left(\delta_\sigma^\alpha R_{kj}^{\gamma\beta} - R_{jk}^{\beta\gamma} \right) - \delta_\sigma^\beta \left(R_{kj}^{\gamma\alpha} - R_{jk}^{\alpha\gamma} \right) \right) - \\ - \frac{1}{2n-1}\, \delta_j^h \left(2n \left(\delta_\sigma^\beta R_{ik}^{\alpha\gamma} - \delta_\sigma^\alpha R_{ik}^{\beta\gamma} \right) + \left(\delta_\sigma^\beta R_{ki}^{\gamma\alpha} - \delta_\sigma^\alpha R_{ki}^{\gamma}\beta \right) \right).$$

Свернем эти соотношения по α и σ. Тогда

$$\delta_i^h \left(R_{kj}^{\gamma\beta} - R_{jk}^{\beta\gamma} \right) + \frac{1}{2n-1}\, \delta_j^h \left(2n \left(R_{ik}^{\beta\gamma} + R_{ki}^{\gamma\beta} \right) \right) = 0.$$

Полученные соотношения свернем по индексам i и h:

$$n \left(R_{kj}^{\gamma\beta} - R_{jk}^{\beta\gamma} \right) + \frac{1}{2n-1}\, \delta_j^h \left(2n \left(R_{jk}^{\beta\gamma} + R_{kj}^{\gamma\beta} \right) \right) = 0.$$

Отсюда

$$\left(n + \frac{1}{2n-1} \right) \left(R_{kj}^{\gamma\beta} + \left(\frac{2n}{2n-1} - n \right) R_{jk}^{\beta\gamma} \right) = 0. \tag{5.3}$$

Учитывая, что $R_{kj}^{\gamma\beta} = R_{kj}^{\beta\gamma}$, и поменяв местами j и k, из (3) находим

$$\left(\frac{2n}{2n-1} - n \right) R_{kj}^{\gamma\beta} + \left(n + \frac{1}{2n-1} \right) R_{jk}^{\beta\gamma} = 0. \tag{5.4}$$

Из соотношений (5.3) и (5.4) следует, что $R_{jk}^{\beta\gamma} = 0$. Следовательно, $R_{t_x}^{\mathrm{Sh}} = 0$. □

Следствие 5.1. *Если линейная связность ∇^{Sh} не является локально плоской, то она не является и проективно-плоской.*

На основании следствия 5.1 и теоремы И.П. Егорова о том, что максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований непроективно-евклидовой линейной связности без кручения не больше чем $d^2 - 2d + 5$, где d – размерность пространства, заключаем, что имеет место

Теорема 5.2. *Размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований касательного расслоения $T(M)$, снабженного синектической связностью ∇^{Sh} А.П. Широкова, не больше чем $4n^2 - 4n + 5$ при условии, что ∇^{Sh} не является локально плоской.*

Рассмотрим теперь на $T(M)$ синектические связности ∇^{Sh} с отличными от нуля тензорными полями кручения T^{Sh}.

Теорема 5.3. *Если $T^{\mathrm{Sh}} \neq 0$, то не существует 1-формы $\widetilde{\Phi}$, удовлетворяющей тождеству*

$$T^{\mathrm{Sh}}(X^{(a)}, Y^{(b)}) = \widetilde{\Phi}(X^{(a)})Y^{(b)} - \widetilde{\Phi}(Y^{(b)})X^{(a)}, \tag{5.5}$$

$a, b \in R(\epsilon)$, $X, Y \in \Im_0^1(M)$.

Доказательство. Пусть t_x – произвольная точка касательного расслоения $T(M)$, (π^{-1}, x_0^i, x_1^i) – координатная окрестность, содержащая эту точку. Предположим, что существует 1-форма $\widetilde{\Phi}$, удовлетворяющая тождеству (5.5). Тогда для векторных полей ∂_i^α имеем

$$T^{\mathrm{Sh}}(\partial_i^\alpha, \partial_j^\beta) = \Phi_i^\alpha \partial_i^\beta - \Phi_j^\beta \partial_i^\alpha. \tag{5.6}$$

Положим

$$T^{\mathrm{Sh}}(\partial_i^\alpha, \partial_j^\beta) = \widetilde{T}_{ij\sigma}^{\alpha\beta h} \partial_h^\sigma.$$

В силу коммутативности алгебры $R(\epsilon)$ имеем

$$T^{\mathrm{Sh}}(\partial_i^\alpha, \partial_j^\beta) = T^{\mathrm{Sh}}(\partial_i^\beta, \partial_j^\alpha).$$

Поэтому соотношения (5.6) можно переписать следующим образом:

$$\Phi_i^\alpha \partial_i^\beta - \Phi_j^\beta \partial_i^\alpha = \Phi_i^\beta \partial_i^\alpha - \Phi_j^\alpha \partial_i^\beta.$$

Отсюда

$$\Phi_i^\alpha \delta_j^h \delta_\sigma^\beta - \Phi_j^\beta \delta_i^h \delta_\sigma^\alpha = \Phi_i^\beta \delta_j^h \delta_\sigma^\alpha - \Phi_j^\alpha \delta_i^h \delta_\sigma^\beta.$$

Свернем эти соотношения по α и σ:

$$\delta_j^h \Phi_i^\beta - 2\delta_i^h \Phi_j^\beta = 2\Phi_i^\beta \delta_j^h - \Phi_j^\beta \delta_i^h.$$

Значит,

$$\phi_i^\beta \delta_j^h + \Phi_j^\beta \delta_i^h = 0.$$

Свернув полученные соотношения по h и i, получим

$$(n+1)\Phi_j^\beta = 0,$$

откуда $\Phi_j^\beta = 0$.

Итак, $T_{t_x}^{\mathrm{Sh}} = 0$ в каждой точке расслоения $T(M)$, что противоречит условию $T^{\mathrm{Sh}} \neq 0$.

□

Доказанная теорема позволяет сформулировать

Следствие 5.2. *Если $T^{\mathrm{Sh}} \neq 0$, то для любой 1-формы $\widetilde{\Phi}$, заданной на $T(M)$*

$$T^{\mathrm{Sh}} \neq \widetilde{\Phi} \otimes \widetilde{I} - \widetilde{I} \otimes \widetilde{\Phi},$$

где $\widetilde{I}$ – единичный аффинор на $T(M)$.

На основании следствия 5.2 и известного результата И.П. Егорова заключаем, что имеет место

Теорема 5.4. *Если тензорное поле кручения T^{Sh} ненулевое, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных аффинных преобразований синектической связности ∇^{Sh} на $T(M)$ не больше чем $4n^2 - 4n + 6$.*

Summary

A.Ya. Sultanov, G.A. Sultanova. An Estimate of the Dimension of the Lie Algebra of Infinitesimal Affine Transformations in the Tangent Bundle $T(M)$ with Complete Lift Connection.

In this article we obtain the exact dimensions of the Lie algebra of infinitesimal affine transformations in the tangent bundle $T(M)$ with a complete lift, when the base M is a non-projective Euclidean space of special type.

Keywords: differentiable manifold, complete lift connection, infinitesimal affine transformation, vertical-vector lift of affinor, horizontal-vector lift of affinor, Lie algebra, non-projective Euclidean space.

Литература

1. *Yano K., Ishihara S.* Tangent and cotangent bundles: differential geometry. – N. Y.: Marcel Dekker, Inc., 1973. – 423 p.
2. *Султанов А.Я.* Продолжения тензорных полей и связностей в расслоения Вейля // Изв. вузов, Матем. – 1994. – № 9. – С. 64–72.
3. *Шадыев Х.* Аффинная коллинеация синектической связности в касательном расслоении // Труды геом. семинара. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1984. – Вып. 16. – С. 117–127.
4. *Синюков Н.С.* Геодезические отображения римановых пространств. – М.: Наука, 1979. – 256 с.
5. *Егоров И.П.* Движения в пространствах аффинной связности. – М.: Либроком, 2009. – 184 с.

Поступила в редакцию
07.05.14

Султанов Адгам Яхиевич – кандидат физико-математических наук, профессор кафедры «Алгебра и методика обучения математике и информатике», Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия.

E-mail: *sultanovaya@rambler.ru*

Султанова Галия Алиевна – аспирант кафедры «Алгебра и методика обучения математике и информатике», Пензенский государственный университет, г. Пенза, Россия.

E-mail: *sultgaliya@yandex.ru*