Известия вузов. Математика
2019, № 12, с. 71–81

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

П.Л. ИВАНКОВ

О ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИИ ПО ПАРАМЕТРУ ГИПЕРГЕОМЕТРИЧЕСКОЙ ФУНКЦИИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

Аннотация. Предлагается эффективное построение аппроксимации Паде для гипергеометрической функции специального вида и ее производной по параметру, причем этот параметр входит как в числитель, так и в знаменатель общего члена соответствующего ряда. Для осуществления указанного построения используется модификация конструкции, применявшейся ранее в более простых ситуациях. Предложенная конструкция используется затем для получения оценок снизу числовых линейных форм от значений таких функций. Аналогичные оценки можно было бы получить и с помощью известного в теории трансцендентных чисел метода Зигеля, однако оценки, получаемые таким методом, оказываются менее точными.

Ключевые слова: гипергеометрические функции, дифференцирование по параметру, оценки линейных форм.

УДК: 511.361

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-12-71-81

Введение

Обобщенными гипергеометрическими функциями называются функции вида

$$F(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \tag{1}$$

где многочлены $a(x)$ и $b(x)$ определены равенствами (4); предполагается, что $r \leqslant m$; в случае $r < m$ получаем целые функции. Числа

$$\alpha_1, \dots, \alpha_r\,, \ \text{ и } \ \beta_1, \dots, \beta_m \tag{2}$$

называются параметрами. При изучении арифметической природы значений функций (1) обычно рассматривают не только эти функции, но и их призводные по переменной z; иногда вместо соответствующих производных рассматривают функции

$$F_j(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_j(\nu) z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)}, \tag{3}$$

где многочлены $\chi_j(\nu)$ определяются ниже равенствами (5). Известные в теории трансцендентных чисел методы позволяют также в ряде случаев исследовать не только значения производных по переменной z, но и значения производных по параметру, т. е. функций вида

$$F_{lj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_j(\nu) z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{d^l}{d\lambda^l} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x+\lambda}$$

Поступила в редакцию 08.01.2019, после доработки 03.03.2019. Принята к публикации 27.03.2019.

или
$$F_{lj}(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \chi_j(\nu) z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{a(x)}{b(x)} \frac{d^l}{d\lambda^l} \prod_{x=1}^{\nu} (x+\lambda)\,,$$
и их различные модификации; в последнем случае предполагается, что выполняется неравенство $r+1 \leqslant m$.

Для исследования арифметической природы значений обобщенных гипергеометрических функций чаще всего применяют метод Зигеля (см. [1], гл. 3) или метод, основанный на эффективном построении линейной приближающей формы (в дальнейшем — эффективный метод). В обоих случаях рассуждения начинаются с построения линейной приближающей формы, имеющей достаточно высокий порядок нуля при $z=0$. В случае метода Зигеля эту форму строят с помощью принципа Дирихле, а при применении эффективного метода такая форма строится в явном виде. Именно в способе построения линейной приближающей формы и состоит основное различие между упомянутыми методами; все прочие рассуждения отличаются лишь несущественными деталями. Достоинством метода Зигеля является общность получаемых результатов: в случаях его применимости обычно удается доказать алгебраическую независимость значений соответствующих функций. Примеры применения метода Зигеля для доказательства теорем, в которых рассматриваются продифференцированные по параметру гипергеометрические функции, содержатся в ([1], гл. 7, §3). Там же на с. 248–249 имеется краткий обзор относящихся сюда результатов. Метод, основанный на эффективном построении линейной приближающей формы, имеет достаточно узкую область применимости, и с его помощью обычно удается доказать лишь линейную независимость значений соответствующих функций. Однако при этом количественные результаты оказываются более точными (по сравнению с аналогичными результатами, полученными методом Зигеля), и эффективный метод в ряде случаев можно применить и к функциям с иррациональными параметрами (что невозможно для метода Зигеля).

Первоначально эффективный метод применялся для исследования арифметической природы значений гипергеометрических функций в случае отсутствия дифференцирований по параметру. Впервые эффективное построение линейной приближающей формы (т. е. аппроксимации Паде первого рода) для продифференцированной по параметру функции было предложено в работе [2]. С помощью этого построения были исследованы значения функций
$$\phi_\lambda(z) = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x+\lambda} \quad \text{и} \quad \frac{\partial\, \phi_\lambda(z)}{\partial\lambda} = \sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu} \frac{d}{d\lambda} \prod_{x=1}^{\nu} \frac{1}{x+\lambda}\,.$$
Именно, была получена оценка снизу модуля соответствующей линейной формы, аналогичная оценке (8). Оценить такую линейную форму можно и с помощью метода Зигеля, но оценка будет менее точной (появится радикал в показателе степени; см. замечание после формулировки теорем 1 и 2).

В настоящей работе по-видимому впервые предложена эффективная конструкция аппроксимаций Паде первого рода для функций вида (6). При получении арифметического результата используется линейная независимость над полем $\mathbb{Q}(z)$ соответствующих функций, доказанная в [3].

1. Формулировки результатов

Пусть даны рациональные числа $\lambda_1, \ldots, \lambda_t$, многочлены с рациональными корнями
$$a(x) = (x+\alpha_1)\ldots(x+\alpha_r) \quad \text{и} \quad b(x) = (x+\beta_1)\ldots(x+\beta_m), \tag{4}$$
и пусть $m > r$ (при этом, возможно, $r = 0$, т. е. $a(x) \equiv 1$). Будем также считать, что

$$(x+\lambda_1)\dots(x+\lambda_t)a(x)b(x)\neq 0 \quad \text{при} \quad x=1,2,\dots .$$

Обозначим $u=m+1$, определим многочлены

$$\chi_j(\nu)=\prod_{l=1}^{j-1}(\nu+\beta_l), \quad j=1,\dots,u, \tag{5}$$

и функции

$$F_{kl_kj}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty} z^{\nu}\chi_j(\nu)\prod_{x=1}^{\nu}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu}\frac{\lambda_k+\vartheta+x}{\lambda_k+x}\,, \tag{6}$$

$k=1,\dots,t,\ l_k=0,1,\dots,\tau_k-1,\ j=1,\dots,u;\ \tau_1,\dots,\tau_t$ — произвольные натуральные числа; $\vartheta\in\mathbb{Q}\setminus\mathbb{Z}$. Предположим также, что

$$\alpha_i-\beta_j,\ \alpha_i-\lambda_k,\ \lambda_k+\vartheta-\beta_j,\ \lambda_{k_1}-\lambda_{k_2} \tag{7}$$

не являются числами из $\mathbb{Z}$, $i=1,\dots,r,\ j=1,\dots,m,k,k_1,k_2=1,\dots,t,\ k_1\neq k_2$. Положительная постоянная γ, встречающаяся в формулировках нижеследующих теорем, зависит от параметров функций (6) и от числа ξ; в дальнейшем такие постоянные будем обозначать через $\gamma_1,\gamma_2,\dots$.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{I}$ — мнимое квадратичное поле или поле рациональных чисел, и пусть $\xi\in\mathbb{I}$ — ненулевое число. Пусть h_{kl_kj}, $k=1,\dots,t$, $l_k=0,1,\dots,\tau_k-1$, $j=1,\dots,u$, — нетривиальный набор целых чисел из поля $\mathbb{I}$, $h_0\in\mathbb{Z}_{\mathbb{I}}$. Тогда*

$$\Bigg|\ h_0+\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u}h_{kl_kj}F_{kl_kj}(\xi)\ \Bigg|>H^{\,-uT-\frac{\gamma}{\ln\ln(H+2)}}\,, \tag{8}$$

где $T=\tau_1+\dots+\tau_t$, а число H есть максимум модулей коэффициентов h_{kl_kj}.

Аналогичная теорема справедлива и в однородном случае.

Теорема 2. *Пусть $b(0)=0$ и остаются в силе все предположения предыдущей теоремы. Тогда для соответствующей однородной формы имеем оценку*

$$\Bigg|\ \sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u}h_{kl_kj}F_{kl_kj}(\xi)\ \Bigg|>H^{\,1-uT-\frac{\gamma}{\ln\ln(H+2)}}\,, \tag{9}$$

где T, h_{kl_kj} и H определяются, как в теореме 1.

Применение метода Зигеля к функциям, рассматриваемым в настоящей работе, привело бы к оценкам вида (8) и (9) с заменой в показателе степени величины $\ln\ln(H+2)$ на $\sqrt{\ln\ln(H+2)}$.

2. Вспомогательные утверждения

Пусть n и ν — натуральные числа, причем $\nu\geqslant n$. Рассмотрим вспомогательную функцию

$$\Phi(\nu)=\frac{(n!)^m}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma}\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}(\zeta+\vartheta+N_1+x)}{\prod_{x=1}^{\nu}(\zeta+x)}\phi(\zeta)\,d\zeta\,, \tag{10}$$

где $N_1=u(n+1)-1$,

$$\phi(\zeta)=\frac{\prod_{x=1}^{N_2-1}(\zeta+x)}{\prod_{k=1}^{t}\prod_{\sigma=0}^{N_1}(\zeta-\lambda_k+\sigma)^{\tau_k}}\,, \tag{11}$$

$N_2 = n + Tu(n+1) - 1$, $T = \tau_1 + \dots + \tau_t$, Γ — положительно ориентированный простой замкнутый кусочно гладкий контур, охватывающий все нули знаменателя дроби (11), и при этом все точки $-N_2, -N_2 - 1, \dots$ лежат в его внешности. Такой контур существует при всех достаточно больших значениях n. В случае $\tau_1 = \dots = \tau_t = 1$ аналогичная функция использовалась ранее в [4].

Лемма 1. *Функция $\Phi(\nu)$ обладает следующими свойствами:*

1) $\Phi(\nu) = 0$ *при* $\nu = n, n+1, \dots, N_2 - 1$,

2) $\Phi(N_2) \neq 0$, *если* $n \geqslant \gamma_1$,

3) $$\Phi(\nu) = \sum_{k=1}^{t} \sum_{l_k=0}^{\tau_k - 1} \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \left(\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}(\lambda_k + \vartheta + x)}{\prod_{x=1}^{\nu}(\lambda_k + x)} \right) B_{kl_k}(\nu)\,, \tag{12}$$

где

$$B_{kl_k}(\nu) = \frac{(n!)^m}{l_k!(\tau_k - l_k - 1)!} \sum_{\sigma=0}^{N_1} \frac{\partial^{\tau_k - l_k - 1}}{\partial \zeta^{\tau_k - l_k - 1}} \left(\prod_{x=1}^{\sigma} \frac{\zeta + \nu + x}{\zeta + x} \times \right.$$
$$\left. \times \prod_{x=1}^{N_1 - \sigma} \frac{\zeta + \sigma + \vartheta + \nu - n + x}{\zeta + \sigma + \vartheta + x} \phi(\zeta)(\zeta - \lambda + \sigma)^{\tau_k} \right) \Bigg|_{\zeta = \lambda_k - \sigma} \tag{13}$$

— многочлен от символа ν, степень которого не превосходит N_1.

Доказательство. Первое свойство выполняется, потому что степень числителя на две единицы меньше степени знаменателя подинтегральной функции, а контур интегрирования при указанных значениях ν охватывает все полюсы этой функции. Для того, чтобы убедиться в справедливости второго свойства, достаточно заметить, что с точностью до знака $\Phi(N_2)$ равно вычету подинтегральной функции в точке $\zeta = -N_2$. Для доказательства третьего свойства запишем интеграл из правой части (10) с помощью теоремы о вычетах. Имеем

$$\Phi(\nu) = (n!)^m \sum_{k=1}^{t} \sum_{\sigma=0}^{N_1} \frac{1}{(\tau_k - 1)!} \frac{\partial^{\tau_k - 1}}{\partial \zeta^{\tau_k - 1}} \left(\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}(\zeta + \vartheta + N_1 + x)}{\prod_{x=1}^{\nu}(\zeta + x)} \phi(\zeta)(\zeta - \lambda_{k_1} + \sigma)^{\tau_k} \right) \Bigg|_{\zeta = \lambda_k - \sigma}.$$

Затем воспользуемся очевидным равенством

$$\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}(\zeta + \vartheta + N_1 + x)}{\prod_{x=1}^{\nu}(\zeta + x)} = \frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}(\zeta + \sigma + \vartheta + x)}{\prod_{x=1}^{\nu}(\zeta + \sigma + x)} \prod_{x=1}^{\sigma} \frac{\zeta + \nu + x}{\zeta + x} \prod_{x=1}^{N_1 - \sigma} \frac{\zeta + \sigma + \vartheta + \nu - n + x}{\zeta + \sigma + \vartheta + x}$$

и применим формулу Лейбница для дифференцирования произведения функций. После этого для получения (12) останется лишь применить равенство

$$\frac{\partial^{l_k}}{\partial \zeta^{l_k}} \frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}(\zeta + \sigma + \vartheta + x)}{\prod_{x=1}^{\nu}(\zeta + \sigma + x)} \Bigg|_{\zeta = \lambda_k - \sigma} = \frac{\partial^{l_k}}{\partial \lambda_k^{l_k}} \frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}(\lambda_k + \vartheta + x)}{\prod_{x=1}^{\nu}(\lambda_k + x)}\,,$$

которое проверяется непосредственно, и заметить, что последнее выражение не зависит от σ. □

Определим в дополнение к (5) многочлены

$$\chi_{kj}(\nu) = \chi_j(\nu),\ j = 1, \dots, u,\ \chi_{k,u+1}(\nu) = \chi_u(\nu)(\nu + \lambda_k),\ k = 1, \dots, t\,. \tag{14}$$

Далее, определим числа $c_{k1}, \dots, c_{k,u+1}$ так, чтобы тождественно по ζ выполнялось равенство

$$a(\zeta)(\zeta + \lambda_k + \vartheta) = c_{k1}\chi_{k1}(\zeta - 1) + \dots + c_{k,u+1}\chi_{k,u+1}(\zeta - 1)\,,$$

и обозначим

$$U_{kjs}(\zeta) = \begin{cases} a(\zeta+1)(\zeta+\lambda_k+\vartheta+1), \ s=0, \ j=1,\dots,u; \\ c_{k1}\chi_{k1}(\zeta)+\dots+c_{kj}\chi_{kj}(\zeta), \ s=1,\dots,n, \ j=1,\dots,u. \end{cases}$$

Лемма 2. *Пусть $Q(\nu)$ — многочлен степени не выше $N_1 = un+m$. Тогда при выполнении условий теоремы 1 для чисел*

$$w_{kjs} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma} \frac{U_{kjs}(\zeta-s)Q(\zeta)\,d\zeta}{\chi_{k,\,j+1}(\zeta-s)\prod_{x=0}^{s-1} b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s+1} a(\zeta-n+x)(\zeta+\lambda_k+\vartheta-n+x)} \tag{15}$$

тождественно по ν выполняется равенство

$$\sum_{j=1}^{u}\sum_{s=0}^{n} w_{kjs}\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1} b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s} a(\nu-n+x)(\nu+\lambda_k+\vartheta-n+x) = Q(\nu)\,. \tag{16}$$

Простой замкнутый кусочно гладкий положительно ориентированный контур Γ в правой части (15) выбирается так, что он охватывает все нули многочлена

$$\prod_{x=0}^{n} b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)$$

и точку ν, а все нули многочлена

$$\prod_{x=1}^{n} a(\zeta-n+x)(\zeta+\lambda_k+\vartheta-n+x)$$

лежат во внешности Γ.

Доказательство. (Приведем лишь схему доказательства; подробное доказательство аналогичной леммы дано в [5].) Существование контура Γ из правой части (15) с указанными свойствами обеспечивается тем, что числа (7) не лежат в $\mathbb{Z}$; при этом такое же требование относительно разностей $\lambda_{k_1}-\lambda_{k_2}$ при доказательстве данной леммы не применяется. Доказательство леммы 2 основано на использовании тождества

$$\begin{aligned} \frac{1}{\zeta-\nu}\prod_{x=1}^{n}\frac{a(\nu-n+x)(\nu+\lambda_k+\vartheta-n+x)}{a(\zeta-n+x)(\zeta+\lambda_k+\vartheta-n+x)} &= \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}\frac{U_{kjs}(\zeta-s)\,\chi_{kj}(\nu-s)}{\chi_{k,\,j+1}(\zeta-s)}\times \\ &\times\prod_{x=0}^{s-1}\frac{b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)}{b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)}\frac{\prod_{x=1}^{n-s} a(\nu-n+x)(\nu+\lambda_k+\vartheta-n+x)}{\prod_{x=1}^{n-s+1} a(\zeta-n+x)(\zeta+\lambda_k+\vartheta-n+x)}+ \\ &+\frac{1}{\zeta-\nu}\prod_{x=0}^{n}\frac{b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)}{b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)}\,, \end{aligned} \tag{17}$$

которое является обобщением известного тождества из теории интерполирования (см., например, [6], формула (4.4:7), с. 450). Чтобы получить (17), следует записать ([5], равенство (2.21)) при $q=n$ для случая, когда фигурирующие там многочлены $a(z)$ и $b(z)$ заменены соответственно на $a(z)(z+\lambda_k+\vartheta)$ и $b(z)(z+\lambda_k)$. Для доказательства (16) надо умножить (17) на $Q(\zeta)/(2\pi i)$ и проинтегрировать получившееся равенство по контуру Γ. Так как

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{Q(\zeta)}{\zeta-\nu}\prod_{x=1}^{n}\frac{a(\nu-n+x)(\nu+\lambda_k+\vartheta-n+x)}{a(\zeta-n+x)(\zeta+\lambda_k+\vartheta-n+x)}\,d\zeta = Q(\nu)$$

$$\text{и} \qquad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma}\frac{Q(\zeta)}{\zeta-\nu}\prod_{x=0}^{n}\frac{b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)}{b(\zeta-x)(\zeta+\lambda_k-x)}\,d\zeta=0\,,$$

то отсюда получим (15) и (16). Из двух последних равенств первое очевидно (поскольку контур интегрирования содержит лишь один полюс $\zeta=\nu$ подинтегральной функции), а второе справедливо потому, что контур интегрирования охватывает все полюсы подинтегральной функции, и при этом степень многочлена $Q(\zeta)$ не превышает N_1. □

Рассмотрим многочлены

$$P_{kl_kj}(z)=\sum_{s=0}^{n}p_{kl_kjs}z^s,\quad k=1,\ldots,t,\quad l_k=0,1,\ldots,\tau_k-1,\quad j=1,\ldots,u, \tag{18}$$

с неопределенными коэффициентами. Пусть

$$\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u}P_{kl_kj}(z)F_{kl_kj}(z)=\sum_{\nu=0}^{\infty}C_\nu z^\nu. \tag{19}$$

Лемма 3. *При $\nu\geqslant n$ справедливо равенство*

$$C_\nu=\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}a(x)}{\prod_{x=1}^{\nu}b(x)}\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\left(\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}(\lambda_k+\vartheta+x)}{\prod_{x=1}^{\nu}(\lambda_k+x)}\right)D_{kl_k}(\nu)\,, \tag{20}$$

где

$$D_{kl_k}(\nu)=\sum_{\mu=l_k}^{\tau_k-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}\binom{\mu}{l_k}p_{k\mu js}\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x)\times$$
$$\times\frac{\partial^{\mu-l_k}}{\partial\lambda_k^{\mu-l_k}}\left(\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s}(\nu+\lambda_k+\vartheta-n+x)\right). \tag{21}$$

Доказательство. Запишем и преобразуем выражение для C_ν, которое непосредственно вытекает из (6), (18) и (19). Имеем

$$C_\nu=\sum_{k=1}^{t}\sum_{\mu=0}^{\tau_k-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}p_{k\mu js}\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{\partial^\mu}{\partial\lambda_k^\mu}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{\lambda_k+\vartheta+x}{\lambda_k+x}=\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}a(x)}{\prod_{x=1}^{\nu}b(x)}\times$$
$$\times\sum_{k=1}^{t}\sum_{\mu=0}^{\tau_k-1}\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u}p_{k\mu js}\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1}b(\nu-x)\prod_{x=1}^{n-s}a(\nu-n+x)\times$$
$$\times\frac{\partial^\mu}{\partial\lambda_k^\mu}\left(\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}(\lambda_k+\vartheta+x)}{\prod_{x=1}^{\nu}(\lambda_k+x)}\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s}(\nu+\lambda_k+\vartheta-n+x)\right). \tag{22}$$

Последнюю частную производную заменим выражением

$$\sum_{l_k=0}^{\mu}\binom{\mu}{l_k}\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\left(\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}(\lambda_k+\vartheta+x)}{\prod_{x=1}^{\nu}(\lambda_k+x)}\right)\frac{\partial^{\mu-l_k}}{\partial\lambda_k^{\mu-l_k}}\left(\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s}(\nu+\lambda_k+\vartheta-n+x)\right),$$

полученным с помощью правила Лейбница. После этого перегруппируем слагаемые, заменив $\sum_{\mu=0}^{\tau_k-1}\sum_{l_k=0}^{\mu}$ на $\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{\mu=l_k}^{\tau_k-1}$. В результате получим требуемое. □

Подберем теперь коэффициенты p_{kl_kjs} многочленов (18) так, чтобы тождественно по ν выполнялись равенства

$$B_{kl_k}(\nu) = D_{kl_k}(\nu), \quad k = 1, \ldots, t, \quad l_k = 0, 1, \ldots, \tau_k - 1. \tag{23}$$

Многочлены, входящие в эти равенства, определяются соответственно формулами (13) и (21). Выполнения (23) можно добиться, рассуждая по индукции с использованием леммы 2. Зафиксируем k и определим сначала коэффициенты многочленов $P_{k,\tau_k-1,\,j}(z)$ с помощью равенства

$$\sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u} p_{k,\tau_k-1,js}\chi_{kj}(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1} b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s} a(\nu-n+x)(\nu+\lambda_k+\vartheta-n+x) = B_{k,\tau_k-1}(\nu)\,, \tag{24}$$

которое должно выполняться тождественно по ν. Из леммы 2 следует, что требуемые коэффициенты существуют, и их можно записать в виде интегралов (15), в которых следует $Q(\zeta)$ заменить на $B_{k,\tau_k-1}(\zeta)$. В результате, учитывая (21) при $l_k = \tau_k$, получим, что при таком выборе коэффициентов $p_{k,\tau_k-1,js}$ требуемое равенство $B_{k,\tau_k-1}(\nu) = D_{k,\tau_k-1}(\nu)$ выполняется. Пусть $0 \leqslant l_k < \tau_k - 1$, и пусть уже определены коэффициенты многочленов $P_{k,\tau_k-1,j}(z), \ldots, P_{k,l_k+1,j}(z)$, $j = 1, \ldots, u$, так, что (23) выполняется при $l_k = \tau_k - 1, \ldots, \mu + 1$. Потребуем, чтобы тождественно по ν выполнялось равенство

$$\begin{gathered}
B_{k\mu}(\nu) - \sum_{l_k=\mu+1}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{s}\sum_{s=0}^{n} p_{kl_kjs}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=0}^{s-1} b(\nu-x)\prod_{x=1}^{n-s} a(\nu-n+x)\binom{l_k}{\mu}\times \\
\times\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\biggl(\prod_{x=0}^{s-1}(\nu+\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s}(\nu+\lambda_k+\vartheta-n+x)\biggr) = \sum_{s=0}^{n}\sum_{j=1}^{u} p_{k\mu js}\chi_j(\nu-s)\times \\
\times\prod_{x=0}^{s-1} b(\nu-x)(\nu+\lambda_k-x)\prod_{x=1}^{n-s} a(\nu-n+x)(\nu+\lambda_k+\vartheta-n+x).
\end{gathered}$$

Все коэффициенты p_{kl_kjs}, входящие в левую часть, определены по индуктивному предположению, а коэффициенты $p_{k\mu js}$ из правой части определяются с помощью леммы 2. Таким образом, все неопределенные коэффициенты многочленов (18) определены с помощью индукции.

Из (23), (20) и (12) следует равенство

$$C_\nu = \frac{\prod_{x=1}^{\nu-n} a(x)}{\prod_{x=1}^{\nu} b(x)}\Phi(\nu) \tag{25}$$

при условии, что коэффициенты многочленов (18) определены указанным выше способом.

3. Доказательства теорем

В предыдущем разделе мы подобрали многочлены (18) так, что коэффициент при z^ν, $\nu = n, n+1, \ldots, N_2 - 1$, линейной формы (19) равен нулю. Это следует из (25) и первого свойства функции $\Phi(\nu)$ из леммы 1. Рассмотрим неоднородную линейную форму

$$R(z) = P_0(z) + \sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u} P_{kl_kj}(z)F_{kl_kj}(z)\,, \tag{26}$$

причем зададим многочлен $P_0(z)=\sum_{\nu=0}^{n-1}p_{0\nu}z^\nu$ так, чтобы эта форма имела при $z=0$ порядок нуля не меньше, чем N_2. Для этого, очевидно, следует положить

$$p_{0\nu}=-\sum_{k=1}^{t}\sum_{l_k=0}^{\tau_k-1}\sum_{j=1}^{u}\sum_{s=0}^{\nu}p_{kl_kjs}\chi_j(\nu-s)\prod_{x=0}^{\nu-s}\frac{a(x)}{b(x)}\frac{\partial^{l_k}}{\partial\lambda_k^{l_k}}\prod_{x=1}^{\nu-s}\frac{\lambda_k+\vartheta+x}{\lambda_k+x}\,. \tag{27}$$

При этом получившаяся линейная форма не будет равняться нулю тождественно, поскольку коэффициент при z^{N_2} отличен от нуля в силу второго свойства функции $\Phi(\nu)$ из леммы 1.

Таким образом, имеем эффективно построенную функциональную линейную приближающую форму для функций (6), имеющую при $z=0$ максимально возможный порядок нуля (то, что этот порядок нуля действительно является максимально возможным, не используется при установлении справедливости теоремы 1, поэтому не рассматриваем этот вопрос подробно).

Для дальнейшего важно получить оценку сверху модуля неоднородной линейной формы (26), а также оценку сверху модулей многочленов $P_{kl_kj}(z)$ при $z=\xi$. Для многочленов $P_0(z)$ и $P_{kl_kj}(z)$ потребуется еще и оценка сверху общего наименьшего знаменателя их коэффициентов. Для получения требуемой оценки запишем $R(\xi)$ в виде

$$R(\xi)=\sum_{\nu=N_2}^{\infty}\xi^\nu\frac{\prod_{x=1}^{\nu-n}a(x)}{\prod_{x=1}^{\nu}b(x)}\Phi(\nu),$$

используя (19) и (25). Отсюда следует оценка

$$|R(\xi)|\leqslant e^{\gamma_2 n}(n!)^{-Tu(m-r)}\,,$$

которая получается применением формулы Стирлинга и стандартной формулы для оценки контурного интеграла (10). Несколько сложнее получаются другие упомянутые выше оценки. Из равенства (24) и леммы 2 вытекает, что $p_{k\tau_kjs}$ можно записать в виде интеграла (15), в котором следует заменить $Q(\zeta)$ на $B_{k,\tau_k-1}(\zeta)$. Далее к интегралу из правой части получившегося равенства следует применить теорему Коши о вычетах. Модуль получившегося выражения можно затем оценить сверху с помощью формулы Стирлинга. Аналогично оцениваются и прочие коэффициенты p_{kl_kjs} при $0\leqslant l_k<\tau_k-1$, но здесь следует привлечь также и рассуждение по индукции. Оценка общего наименьшего знаменателя коэффициентов многочленов $P_0(z)$ и $P_{kl_kj}(z)$ осуществляется с помощью указанных выше интегральных представлений этих коэффициентов, теоремы о вычетах и леммы 2 из ([1], с. 186). Для $P_0(z)$ используется равенство (27). Основным моментом здесь является рациональность параметров функций (6). В результате получаем оценку сверху модулей многочленов $P_{kl_kj}(z)$ в виде $e^{\gamma_3 n}(n!)^{m-r}$ и оценку общего наименьшего знаменателя этих коэффициентов в виде $e^{\gamma_4 n}$.

Дальнейшие рассуждения скопируем с доказательства первой основной теоремы из ([1], с. 91). Для этого заметим сначала, что функция (6) при $j=1$ и $l_k=0$ удовлетворяет уравнению $(\delta+\lambda_k)b(\delta)y=a(\delta)zy+\lambda_k b(0)$, где $\delta=zd/dz$. Дифференцируя последнее соотношение по λ_k, получим уравнения, которым удовлетворяют функции (6) при различных значениях l_k. Далее, от функций (6) перейдем к функциям

$$\tilde F_{kl_k1}(z)=\frac{d^{j-1}}{dz^{j-1}}F_{kl_kj}(z), \tag{28}$$

$k=1,\dots,t$, $l_k=0,1,\dots,\tau_k-1$, $j=2,\dots,u$. Нетрудно проверить, что теоремы 1 и 2 достаточно доказать для функций $\tilde F_{kl_kj}(z)$. Добавим к функциям (28) функцию, тождественно равную единице, и занумеруем получившиеся функции в произвольном порядке, обозначив их

$$f_1(z), \ldots, f_M(z), \tag{29}$$

$M = uT + 1$. Из вышесказанного следует, что функции (29) удовлетворяют системе дифференциальных уравнений

$$y'_v = \sum_{i=1}^{M} Q_{vi} y_i, \quad v = 1, \ldots, M, \quad Q_{vi} \in \mathbb{C}(z).$$

Обозначим через $q = q(z)$ общий наименьший знаменатель рациональных функций $Q_{vi}(z)$. В нашем случае $q(z)$ есть некоторая степень z. Новые обозначения введены для того, чтобы было удобнее следовать рассуждениям, доказывающим первую основную теорему из ([1], с. 91). Запишем форму (26) в виде

$$R(z) = R_1(z) = \sum_{i=1}^{M} P_{1i}(z) f_i(z).$$

Далее, как и при доказательстве упомянутой первой основной теоремы из [1], положим

$$R_k = qR'_{k-1}, \quad k = 2, 3, \ldots .$$

В результате получим совокупность приближающих линейных форм для функций (29). Согласно лемме 9 из ([1], с. 106) определитель

$$\Delta(z) = |P_{vi}(z)|_{v,i=1,\ldots,M}$$

отличен от тождественного нуля и имеет вид

$$\Delta(z) = z^{Mn-\gamma_5} \Delta_1(z),$$

причем определитель $\Delta_1(z)$ не равен нулю тождественно. При доказательстве последнего утверждения существенно используется доказанная в [3] линейная независимость рассматриваемых функций над полем рациональных дробей. Затем осуществим переход к числовым формам. В силу леммы 10 из ([1], с. 107) матрица

$$(P_{vi}(\xi))_{\substack{v=1,\ldots,M+\gamma_6 \\ i=1,\ldots,M}}$$

имеет ранг M. Повторяя с очевидными изменениями рассуждения, доказывающие лемму 16 из ([1], с. 118–119), получаем аналог этой леммы для нашего случая.

Лемма 4. *Существуют целые в поле $\mathbb{I}$ числа g_{vi}, $v, i = 1, \ldots, M$, такие, что выполняются следующие условия:*

1) *определитель $|g_{vi}|_{v,i=1,\ldots,M}$ отличен от нуля;*
2) $\left|\sum_{i=1}^{M} g_{vi} f_i(\xi)\right| \leqslant e^{\gamma_7 n} (n!)^{-Tu(m-r)}$, $v = 1, \ldots, M$;
3) $|g_{vi}| \leqslant e^{\gamma_7 n} (n!)^{m-r}$, $v, i = 1, \ldots, M$.

Пользуясь последней леммой, нетрудно доказать теорему 1. Пусть задана нетривиальная линейная форма

$$L = \sum_{i=1}^{M} h_i f_i(\xi)$$

с целыми в поле $\mathbb{I}$ коэффициентами, причем $\max\limits_{1 \leqslant i \leqslant M} |h_i| \leqslant H$. Из первого условия леммы 4 следует, что одну из строк указанного там определителя можно заменить строкой $h_1, \ldots, h_M$

так, что получится отличный от нуля определитель. Пусть для определенности это будет первая строка. Тогда получим отличный от нуля определитель

$$D = \begin{vmatrix} h_1 & h_2 & \cdots & h_M \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{M1} & g_{M2} & \cdots & g_{MM} \end{vmatrix},$$

который равен определителю

$$\begin{vmatrix} L & h_2 & \cdots & h_M \\ \sum_{i=1}^{M} g_{2i} f_i(\xi) & g_{22} & \cdots & g_{2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{i=1}^{M} g_{Mi} f_i(\xi) & g_{M2} & \cdots & g_{MM} \end{vmatrix}.$$

Отсюда и из леммы 4 следует оценка

$$|D| \leqslant L e^{\gamma_8 n} (n!)^{(M-1)(m-r)} + H e^{\gamma_8 n} (n!)^{-(m-r)}$$

для модуля определителя D. Поскольку D — целое число в поле $\mathbb{I}$, то $|D| \geqslant 1$, и мы получаем неравенство

$$L e^{\gamma_5 n} (n!)^{M(m-r)} + H e^{\gamma_5 n} (n!)^{m-r} \geqslant 1.$$

Далее, рассуждая, как при доказательстве теоремы 1 из ([1], с. 354), получаем требуемую оценку. Оценка получится точнее, чем в упомянутой теореме из [1]. Причина заключается в том, что построенная эффективно линейная приближающая форма (26) имеет более высокий порядок нуля при $z = 0$, чем построенная с помощью принципа Дирихле приближающая форма, используемая при доказательстве теоремы 1 из ([1], с. 354).

Доказательство теоремы 2 мало отличается от доказательства теоремы 1. Поэтому ограничимся лишь указанием основных отличий. Рассмотрим вспомогательную функцию вида (10), но число N_2, входящее в правую часть формулы (11), заменим на $Tu(n+1) - 1$. Выражение $\prod_{x=1}^{\nu-n}(\lambda_k + \vartheta + x)$ из правой части (12) заменим на

$$\frac{\prod_{x=1}^{\nu} (\lambda_k + \vartheta + x)}{\prod_{x=0}^{n-1} (\nu + \lambda_k + \vartheta - x)}.$$

Аналогичным образом следует изменить и встречающиеся по ходу доказательства выражения вида $\prod_{x=1}^{\nu-n} a(x)$. Функциональной линейной приближающей формой здесь служит (19), а не (26), и в связи с этим возникает еще одно отличие, состоящее в том, что если $0 \leqslant \nu \leqslant n-1$, то при вычислении коэффициентов линейной формы (19) индекс s изменяется от нуля до ν (см. левую часть равенства (22)). Однако после вынесения за знаки суммирования произведения $\prod_{x=1}^{\nu}(b(x))^{-1}$ это ν можно заменить на n, используя условие $b(0) = 0$. В остальном доказательство теоремы 2 вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Заключение

Эффективно построенную в данной работе приближающую функциональную форму можно применить и для решения других задач, относящихся к арифметической природе значений функций (6). Распространить результаты настоящей работы на случай, когда значения этих функций берутся в различных точках или когда увеличено число параметров, по которым производится дифференцирование, пока не удается. Не видно также, каким способом можно уточнить оценки (8) и (9) по аналогии с тем, как это сделано в работах [7]–[11]. Можно, однако, попробовать применить эффективную конструкцию формы $R_1(z)$

для функций вида (6), не все параметры которых рациональны. При этом, по-видимому, придется заменить многочлен $a(x)$ на тождественную единицу и ввести другие ограничения. Не исключено также, что потребуется привлечь сведения из теории делимости в полях алгебраических чисел, как это сделано в работе [12].

Литература

[1] Шидловский А.Б. *Трансцендентные числа* (Наука, М., 1987).

[2] Иванков П.Л. *О дифференцировании гипергеометрической функции по параметру*, Фундамент. и прикл. матем. **16** (6), 91–94 (2010).

[3] Иванков П.Л. *О линейной независимости некоторых функций над полем рациональных дробей*, Матем. и матем. моделирование, № 4, 1–12 (2015). DOI: 10.7463 / mathm. 0415.0817328.

[4] Иванков П.Л. *Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций с различными параметрами*, Матем. заметки **52** (6), 25–31 (1992).

[5] Иванков П.Л. *Об арифметических свойствах значений гипергеометрических функций*, Матем. сб., **182** (2), 283–302 (1991).

[6] Маркушевич А.И. *Теория аналитических функций*, т. 1 (Наука, М., 1967).

[7] Галочкин А.И. *Уточнение оценок некоторых линейных форм*, Матем. заметки **20** (1), 35–45 (1976).

[8] Коробов А.Н. *Оценки некоторых линейных форм,* Вестн. МГУ. Сер. 1, матем., механ., № 6, 36–40 (1981).

[9] Галочкин А.И. *О неулучшаемых по высоте оценках некоторых линейных форм*, Матем. сб. **124** (3), 416–430 (1984).

[10] Иванков П.Л. *О вычислении постоянных, входящих в оценки линейных форм*, Изв. вузов. Матем., № 1, 31–36 (2000).

[11] Булатов З.В. *О точных по высоте оценках некоторых линейных форм*, Фундамент. и прикл. матем. **7** (3), 659–671 (2001).

[12] Галочкин А.И. *Об арифметических свойствах значений некоторых целых гипергеометрических функций*, Сиб. матем. журн. **17** (6), 1220–1235 (1976).

Павел Леонидович Иванков

Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана,
ул. 2-я Бауманская, д. 5, стр. 1, г. Москва, 105005, Россия,

`e-mail:` ivankovpl@mail.ru

P.L. Ivankov

On differentiation with respect to parameter of a hypergeometric function of a special type

Abstract. We propose an effective construction of Padé approximation for the hypergeometric function of special type and its derivative with respect to parameter and this parameter is included both in numerator and denominator of the general term of the corresponding series. The aforementioned construction has been realized by means of a modification of the method that was applied earlier in simpler situations. Thus obtained approximation is made use of afterwards to establish the lower estimates of the numerical linear forms in the values of the functions under consideration. Analagous estimates one could obtain by the known in the theory of transcendental numbers Siegel's method but the estimates obtained by this method would be of less exactness.

Keywords: hypergeometric functions, differentiation with respect to parameter, estimates of linear forms.

Pavel Leonidovich Ivankov

Bauman Moscow State Technical University,
5/1 2-ya Baumanskaya str., Moscow, 105005 Russia,

`e-mail:` ivankovpl@mail.ru