

УДК 514.16

ОБ ИНФИНИТЕЗИМАЛЬНЫХ АВТОМОРФИЗМАХ ПОЧТИ СИМПЛЕКТИЧЕСКИХ СТРУКТУР

В.И. Панъжесенский

Аннотация

Указана максимальная размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов римановой и почти симплектической структур, естественным образом возникающих на касательном расслоении гладкого многообразия, наделенного почти симплектической структурой и линейной связностью, согласованной с этой структурой.

Введение. На касательном расслоении TM гладкого n -мерного многообразия M , наделенного почти симплектической структурой ω и линейной связностью ∇ , согласованной с этой структурой, возникает риманова метрика G , которая является эрмитовой относительно канонической почти комплексной структуры J . Фундаментальная 2-форма Ω почти эрмитовой структуры (G, J) определяет на TM почти симплектическую структуру. Линейная связность ∇ базисного многообразия M порождает на TM вполне приводимую связность $\tilde{\nabla}$, согласованную с G и Ω .

В настоящей работе доказано, что полный лифт X^C векторного поля X базисного многообразия M является инфинитезимальным автоморфизмом римановой структуры G или почти симплектической структуры Ω на TM тогда и только тогда, когда X есть инфинитезимальный автоморфизм почти симплектической структуры ω , сохраняющий связность ∇ . Размерность алгебры Ли таких автоморфизмов не превосходит $n(n+3)/2$. Наиболее общие автоморфизмы, сохраняющие слои, определяются проектируемыми векторными полями. Доказано, что размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов, сохраняющих слои и связность $\tilde{\nabla}$ не превосходит $3n(n+1)/2$ для римановой структуры G и $n(n+3)$ для почти симплектической структуры Ω .

1. Пусть ω – невырожденная 2-форма, определяющая на n -мерном гладком многообразии M почти симплектическую структуру. Векторное поле X на M является инфинитезимальным автоморфизмом почти симплектической структуры, если производная Ли от ω вдоль X обращается в нуль: $L_X\omega = 0$. В локальных координатах эти уравнения имеют следующий вид:

$$\xi^k \partial_k \omega_{ij} + \omega_{kj} \partial_i \xi^k + \omega_{ik} \partial_j \xi^k = 0, \quad (1)$$

где $\omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j$, $\omega_{ij} = -\omega_{ji}$, $\det \|\omega_{ij}\| \neq 0$, $X = \xi^k \partial_k$, $\partial_k = \partial / \partial x^k$; $i, j, k, \dots = \overline{1, n}$. Если структура симплектическая: $d\omega = 0$, то имеем

$$\partial_k \omega_{ij} + \partial_i \omega_{jk} + \partial_j \omega_{ki} = 0. \quad (2)$$

Каждому векторному полю X соответствует 1-форма $\alpha = \iota_X \omega$. Если X – инфинитезимальный автоморфизм симплектической структуры, то форма $\alpha = \omega_{ij} \xi^i dx^j$

является замкнутой: $d\alpha = 0$, что немедленно следует из (1) и (2). Обратно, каждой невырожденной 1-форме $\alpha = \alpha_j dx^j$ соответствует векторное поле X , такое, что $\alpha = \iota_X \omega$, т. е. $X = \omega^{ij} \alpha_j \partial_i$ и из $d\alpha = 0$ и $d\omega = 0$ следует, что $L_X \omega = 0$, т. е. X – инфинитезимальный автоморфизм. Поэтому алгебра Ли всех инфинитезимальных автоморфизмов симплектической структуры как векторное пространство изоморфна векторному пространству замкнутых 1-форм и, следовательно, является бесконечномерной [1].

2. Линейная связность ∇ согласована с ω , если $\nabla_X \omega = 0$ для любого векторного поля X или в локальных координатах

$$\partial_k \omega_{ij} - \omega_{pj} \Gamma_{ki}^p - \omega_{ip} \Gamma_{kj}^p = 0, \quad (3)$$

где Γ_{ij}^k – коэффициенты связности: $\nabla_{\partial_i} \partial_j = \Gamma_{ij}^k \partial_k$. Циклируя (3) и складывая, получаем

$$\omega_{pj} S_{ki}^p + \omega_{pi} S_{jk}^p + \omega_{pk} S_{ij}^p = \partial_k \omega_{ij} + \partial_i \omega_{jk} + \partial_j \omega_{ki}, \quad (4)$$

где $S_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k - \Gamma_{ji}^k$ – компоненты тензора кручения $S(X, Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X, Y]$ связности ∇ . Из (4) следует, что если структура почти симплектическая ($d\omega \neq 0$), то не существует связностей без кручения, согласованных с этой структурой. Компоненты любой связности, согласованной с почти симплектической структурой, имеют вид [2]

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2} \omega^{kp} (\partial_i \omega_{pj} + \eta_{pji}), \quad (5)$$

где η_{pji} – произвольная совокупность функций, симметричная по первым двум индексам: $\eta_{pji} = \eta_{jpi}$. Справедливость равенств (3) проверяется непосредственно подстановкой (5) в (3).

3. Рассмотрим инфинитезимальные автоморфизмы почти симплектической структуры, сохраняющие линейную связность, согласованную с этой структурой. Такие автоморфизмы назовем абсолютными. Для них $L_X \omega = 0$ и $L_X \nabla = 0$. Тогда кроме уравнений (1) еще имеем

$$\xi^p \partial_p \Gamma_{ij}^k + \partial_i \xi^p \Gamma_{pj}^k + \partial_j \xi^p \Gamma_{ip}^k - \partial_p \xi^k \Gamma_{ij}^p + \partial_{ij} \xi^k = 0. \quad (6)$$

Из уравнений (3) следует, что

$$\partial_k \omega_{ij} = \omega_{pj} \Gamma_{ki}^p + \omega_{ip} \Gamma_{kj}^p. \quad (7)$$

Кроме того, имеем

$$\partial_i \xi^k = \nabla_i \xi^k - \xi^s \Gamma_{is}^k. \quad (8)$$

Подставив (7) и (8) в (1), получим

$$(\nabla_i \xi^k - \xi^p S_{ip}^k) \omega_{kj} + (\nabla_j \xi^k - \xi^p S_{jp}^k) \omega_{ik} = 0. \quad (9)$$

Пусть

$$\xi_j^k = \nabla_j \xi^k - \xi^p S_{jp}^k, \quad (10)$$

тогда уравнения (1) примут вид

$$\omega_{kj} \xi_i^k + \omega_{ik} \xi_j^k = 0. \quad (11)$$

Аналогично, заменив в уравнениях (6) частные производные ковариантными, получим

$$\nabla_i \nabla_j \xi^k - \nabla_i \xi^p S_{jp}^k - \xi^p \nabla_i S_{jp}^k + \xi^p K_{ijp}^k = 0, \quad (12)$$

где

$$K_{ijp}^k = \partial_i \Gamma_{jp}^k - \partial_j \Gamma_{ip}^k + \Gamma_{is}^k \Gamma_{jp}^s - \Gamma_{js}^k \Gamma_{ip}^s \quad (13)$$

суть компоненты тензора кривизны $K(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_y \nabla_X Z - \nabla_{[X, Y]} Z$ связности ∇ . Учитывая (10) и (12), получим, что уравнения (6) примут вид

$$\nabla_i \xi_j^k + \xi^p K_{ijp}^k = 0. \quad (14)$$

Наряду с неизвестными функциями $\xi^k(x)$ – компонентами абсолютного инфинитезимального автоморфизма почти симплектической структуры – введем дополнительные функции

$$\xi_{ij} = \xi_i^p \omega_{pj}. \quad (15)$$

Из (10), (11), (14) и (15) следует, что для того чтобы векторное поле X являлось абсолютным автоморфизмом почти симплектической структуры, необходимо и достаточно, чтобы функции ξ^k и ξ_{ij} являлись решениями уравнений

$$\xi_{ij} - \xi_{ji} = 0, \quad (16)$$

$$\nabla_j \xi^k = \omega^{ks} \xi_{sj} + \xi^p S_{jp}^k, \quad (17)$$

$$\nabla_j \xi_{jk} = -\xi^p K_{ijkp}, \quad (18)$$

где $K_{ijkp} = \omega_{sk} K_{ijp}^s$, $\omega^{ks} \omega_{sj} = \delta_j^k$. Уравнения (17) и (18) представимы в каноническом виде, т. е. в виде, разрешенном относительно первых производных от $n + n^2$ неизвестных функций ξ^k , ξ_{ij} , а уравнения (16) накладывают на ξ_{ij} $n(n-1)/2$ алгебраических условий. Если теперь условия интегрируемости уравнений (17) и (18) выполняются тождественно, то общее решение $\xi^k(x)$ зависит от $n^2 + n - n(n-1)/2 = n(n+3)/2$ произвольных постоянных [3]. Следовательно, справедлива

Теорема 1. *Размерность алгебры Ли абсолютных инфинитезимальных автоморфизмов почти симплектической структуры не превосходит $n(n+3)/2$.*

4. На касательном расслоении TM гладкого многообразия M , наделенного почти симплектической структурой ω и согласованной с ней связностью ∇ , рассмотрим риманову метрику G , определенную следующими условиями:

$$\begin{aligned} G(X^h, Y^h) &= G(X^v, Y^v) = 0, \\ G(X^h, Y^v) &= \omega(X, Y)^v, \quad G(X^v, Y^h) = -\omega(X, Y)^v, \end{aligned} \quad (19)$$

где горизонтальное лифтингование ведется относительно симметрической части связности ∇ . В координатах метрика G имеет вид

$$G = \omega_{ij} dx^i \otimes dx^j - \omega_{ij} \delta y^i \otimes \delta y^j, \quad (20)$$

где $\delta y^i = dy^i + \widehat{\Gamma}_{kp}^i y^p dx^k$, $\widehat{\Gamma}_{kp}^i = 2\Gamma_{(kp)}^i$ – компоненты линейной связности $\widehat{\nabla}$ – симметрической части связности ∇ , $(x^i, x^{n+i} = y^i) = (x^A)$ – естественные локальные координаты на TM . Эта метрика является эрмитовой относительно канонической почти комплексной структуры J

$$JX^h = X^v, JX^v = -X^h, \quad (21)$$

т. е. $G(J\tilde{X}, J\tilde{Y}) = G(\tilde{X}, \tilde{Y})$ для любых векторных полей \tilde{X}, \tilde{Y} на TM . Фундаментальная 2-форма $\Omega(\tilde{X}, \tilde{Y}) = G(\tilde{X}, J\tilde{Y})$ почти эрмитовой структуры (G, J) определяет на TM почти симплектическую структуру

$$\begin{aligned}\Omega(X^h, Y^h) &= \Omega(X^v, Y^v) = \omega(X, Y)^v, \\ \Omega(X^h, Y^v) &= \Omega(X^v, Y^h) = 0.\end{aligned}\quad (22)$$

В координатах

$$\Omega = \omega_{ij} dx^i \wedge dx^j + \omega_{ij} \delta y^i \wedge \delta y^j. \quad (23)$$

На TM рассмотрим линейную связность $\tilde{\nabla}$:

$$\tilde{\nabla}_{X^h} Y^h = (\nabla_X Y)^h, \tilde{\nabla}_{X^v} Y^h = \tilde{\nabla}_{X^v} Y^v = 0, \tilde{\nabla}_{X^h} Y^v = (\nabla_X Y)^v. \quad (24)$$

Если $\tilde{\nabla}_{\delta_A} \delta_B = \tilde{\Gamma}_{AB}^K \delta_K$, где $\delta_A = (\delta_i, \partial_{n+i})$ – локальный базис векторных полей на TM , адаптированный к связности $\tilde{\nabla}$, то ненулевые компоненты этой связности имеют вид

$$\tilde{\Gamma}_{ij}^k = \Gamma_{ij}^k, \tilde{\Gamma}_{in+j}^{n+k} = \Gamma_{in+j}^k. \quad (25)$$

Заметим, что $\tilde{\nabla}$ является вполне приводимой связностью Шапукова [4] с формами связности

$$\omega_B^A = \begin{pmatrix} \omega_j^k & 0 \\ 0 & \omega_j^k \end{pmatrix}, \quad (26)$$

где $\omega_j^k = \Gamma_{ij}^k dx^i$ – формы связности ∇ . Нетрудно убедиться, что связность $\tilde{\nabla}$ согласована как с G , так и с Ω : $\tilde{\nabla}G = 0, \tilde{\nabla}\Omega = 0$.

Векторное поле $\tilde{X} = \xi^A \delta_A$ на TM является инфинитезимальным автоморфизмом римановой структуры G (почти симплектической структуры Ω), если $L_{\tilde{X}} G = 0$ ($L_{\tilde{X}} \Omega = 0$). В адаптированном базисе (δ_A) уравнения инфинитезимальных автоморфизмов имеют следующий вид:

$$\xi^C (\delta_C G_{AB} - G_{PB} R_{CA}^P - G_{AP} R_{CB}^P) + \delta_A \xi^P G_{PB} + \delta_B \xi^P G_{AP} = 0 \quad (27)$$

для G и

$$\xi^C (\delta_C \Omega_{AB} - \Omega_{PB} R_{CA}^P - \Omega_{AP} R_{CB}^P) + \delta_A \xi^P \Omega_{PB} + \delta_B \xi^P \Omega_{AP} = 0 \quad (28)$$

для Ω , где R_{AB}^C – компоненты объекта неголономности, входящие в структурные уравнения: $[\delta_A, \delta_B] = R_{AB}^C \delta_C$.

Пусть $X^C = \xi^i(x) \delta_i + y^k \hat{\nabla}_k \xi^i \partial_{n+i}$ – полный лифт векторного поля $X = \xi^i(x) \delta_i$ базисного многообразия M . Поле X^C назовем естественным автоморфизмом структуры G (Ω) на TM , если $L_{X^C} G = 0$ ($L_{X^C} \Omega = 0$). Расписывая уравнения (27) и (28) для различных серий индексов, можно убедиться, что $L_{X^C} G_{AB} = 0$ ($L_{X^C} \Omega_{AB} = 0$) тогда и только тогда, когда $L_X \omega_{ij} = 0$ и $L_X \Gamma_{ij}^k = 0$. Поэтому имеет место

Теорема 2. Для того чтобы полный лифт X^C векторного поля X почти симплектического многообразия M был инфинитезимальным автоморфизмом римановой структуры G или почти симплектической структуры Ω на TM , необходимо и достаточно, чтобы поле X было абсолютным автоморфизмом почти симплектической структуры ω .

Из этой и предыдущей теорем следует

Теорема 3. *Размерность алгебры Ли естественных автоморфизмов римановой структуры G или почти симплектической структуры Ω на TM не превосходит $n(n+3)/2$.*

5. Естественные инфинитезимальные автоморфизмы на TM , как известно, сохраняют расслоенную структуру TM (сохраняют слои). Наиболее общие автоморфизмы, сохраняющие слои, определяются проектируемыми векторными полями на TM [5]. Векторное поле \tilde{X} на TM является проектируемым, если $d\pi\tilde{X}$ – есть векторное поле на M ($\pi : TM \rightarrow M$ – каноническая проекция расслоения). Такое поле в координатах имеет вид

$$\tilde{X} = \xi^i(x)\delta_i + \xi^{n+i}(x,y)\partial_{n+i}. \quad (29)$$

Рассмотрим на TM сохраняющие слои абсолютные инфинитезимальные автоморфизмы римановой структуры G и почти симплектической структуры Ω . Тогда имеем

$$L_{\tilde{X}}G_{AB} = 0 \quad (30)$$

для римановой структуры,

$$L_{\tilde{X}}\Omega_{AB} = 0 \quad (31)$$

для почти симплектической структуры

и

$$L_{\tilde{X}}\tilde{\Gamma}_{AB}^C = 0 \quad (32)$$

для обеих структур. Так же, как и в случае инфинитезимальных автоморфизмов базисного многообразия, введем новые переменные

$$\xi_B^C = \nabla_B\xi^C - \xi^P S_{BP}^C. \quad (33)$$

Уравнения (30) и (31) примут вид

$$\xi_{AB} + \xi_{BA} = 0, \quad (34)$$

$$\xi_{AB} - \xi_{BA} = 0, \quad (35)$$

где $\xi_{AB} = \xi_A^P G_{PB}$ в уравнениях (34) и $\xi_{AB} = \xi_A^P \Omega_{PB}$ в уравнениях (35). Уравнения (32) представимы в виде, разрешенном относительно ковариантных производных от функций ξ_B^C

$$\tilde{\nabla}_A\xi_B^C = -\xi^P \tilde{K}_{ABP}^C, \quad (36)$$

где \tilde{K}_{ABP}^C – компоненты тензора кривизны связности $\tilde{\nabla}$. Если условия интегрируемости уравнений (36) и уравнений

$$\nabla_B\xi^C = \xi_B^C + \xi^P S_{BP}^C \quad (37)$$

выполняются тождественно, то размерность алгебры Ли инфинитезимальных автоморфизмов максимальна и равна $r = n^2 + n - s$, где s – число независимых алгебраических условий в (34) для римановой структуры G или в (35) для почти симплектической структуры Ω . Так как векторное поле \tilde{X} является проектируемым, то, как нетрудно проверить, $\xi_{n+j}^k = 0$, а $s = n^2 + n(n+1)/2$ – для (34) и $s = n^2 + n(n-1)$ – для уравнений (35) и, следовательно, $r = 3n(n+1)/2$ – для римановой структуры G и $r = n(n+3)$ – для почти симплектической структуры Ω . Таким образом, справедлива

Теорема 4. *Размерность алгебры Ли абсолютных инфинитезимальных автоморфизмов, сохраняющих слои касательного расслоения, не превосходит $3n(n+1)/2$ – для римановой структуры G и $n(n+3)$ – для почти симплектической структуры Ω .*

Summary

V.I. Panzhenskii. On infinitesimal automorphisms of almost symplectic structures.

On the tangent bundle TM of a manifold M endowed with an almost symplectic structure ω and a linear connection ∇ compatible with ω , we consider the Riemannian metric G which is Hermitian with respect to the canonical almost complex structure J and the corresponding almost symplectic structure Ω . We study the infinitesimal automorphisms of these structures on TM , and, in particular, prove that the dimension of the Lie algebra of natural automorphisms of G and of Ω is less than or equal to $n(n+3)/2$.

Литература

1. *Libermann P.* Automorphismes infinitésimaux d'une structure symplectique // C. R. Acad. Sci. – 1956. – V. 242, No 9. – P. 1114–1117.
2. *Левин Ю.И.* Об аффинных связностях, присоединенных к кососимметрическому тензору // Докл.АН СССР. – 1959. – Т. 128, № 4. – С. 668–671.
3. *Эйзенхарт Л.П.* Непрерывные группы преобразований. – М.: ИЛ, 1947.
4. *Шапуков Б.Н.* Линейные связности векторного расслоения // Тр. геом. сем. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1975. – Вып. 8. – С. 118–131.
5. *Шапуков Б.Н.* Автоморфизмы расслоенных пространств // Тр. геом. сем. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – Вып. 14. – С. 97–108.

Поступила в редакцию
25.12.04

Паньженский Владимир Иванович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры алгебры Пензенского государственного педагогического университета.