УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 150, кн. 4 Физико-математические науки *2008*

УДК 517.544

ЗАДАЧА РИМАНА В СЛУЧАЕ ДВОЯКОПЕРИОДИЧЕСКОГО РАСПОЛОЖЕНИЯ ДУГ. I

Е.П. Аксентьева, И.Г. Салехова

Аннотация

Рассматривается решение задачи о скачке, однородной и неоднородной задач Римана $\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)+g(t),\ t \in L$, в случае двоякопериодического расположения дуг. Исследован случай периодических коэффициента $G(t)$ и свободного члена $g(t)$. На основании результатов решения задачи Римана для счетного множества контуров дано обобщение решения задачи о скачке ($G(t) \equiv 1$) на случай непериодического скачка $g(t)$.

Ключевые слова: задача Римана, двоякопериодическое расположение дуг, эллиптическая функция, квазиэллиптическая функция, периодический коэффициент и свободный член, счетное множество дуг, непериодические скачки.

Введение

Задача Римана для разомкнутого контура в классе двоякопериодических функций рассматривалась в статье [1], где давалась общая схема решения. В п.п. 1,2 данной работы к решению этой задачи применяется иной подход с использованием квазипериодических функций [2]. Это позволило упростить исследование задачи и исправить неточность в случае нулевого индекса.

В п. 3 с учетом результатов решения задачи Римана в случае счетного множества контуров [3, с. 236–274; 4] дано обобщение задачи о скачке на случай непериодического скачка. Предложенный аппарат позволяет исследовать задачу Римана для непериодического коэффициента. Этот результат будет изложен во второй части статьи.

1. Случай периодических коэффициента и свободного члена

1.1. Постановка задачи. Пусть $R = \{z = s_1\omega_1 + s_2\omega_2,\ 0 < s_1 < 1,\ 0 < s_2 < 1\}$ есть внутренность параллелограмма с вершинами $t_1 = 0,\ t_2 = \omega_1$, $t_3 = \omega_1 + \omega_2,\ t_4 = \omega_2$; $\operatorname{Im}(\omega_2/\omega_1) > 0$. Под ∂R будем понимать границу R, проходимую против часовой стрелки. При таком обходе, начиная с точки ω_2, стороны ∂R обозначим через $l_1,\ l_2,\ l_1',\ l_2'$. Тогда $T_1(l_1) = l_1',\ T_2(l_2) = l_2'$, где $T_1 = z + \omega_1$, $T_2 = z + \omega_2$ – порождающие преобразования двоякопериодической группы T_ω

$$\{z \mapsto z + \omega;\ \omega = k_1\omega_1 + k_2\omega_2,\ k_1, k_2 \in \mathbb{Z}\}.$$

Пусть $\Pi = R \cup l_1 \cup l_2 \cup \{0\},\ L_0 = (\widehat{a_0, b_0}) \in R$ – гладкая разомкнутая дуга (рис. 1)

Определение. Назовем двоякопериодической кусочно-голоморфной с линией скачков L_0 функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую следующим условиям:
1) $\Phi(z)$ голоморфна для всех $z \in \Pi\backslash\overline{L}_0$;
2) $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на L_0 слева и справа;
3) $\Phi(z + \omega_k) = \Phi(z)$ для всех $z \in \Pi\backslash\overline{L}_0$;

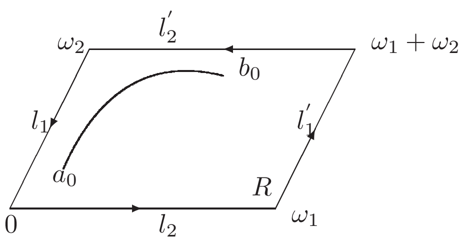

Рис. 1

4) Вблизи концов a_0, b_0 для функции $\Phi(z)$ выполняется неравенство

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c_0|^\gamma}, \quad 0 \le \gamma < 1$$

как для $c_0 = a_0$, так и для $c_0 = b_0$.

Из этого определения следует, что $\Phi(z)$ аналитически продолжима на область $\mathbb{C} \backslash T_\omega(\overline{L}_0)$ и является там двоякопериодической функцией.

Требуется найти двоякопериодическую кусочно-голоморфную с линией скачков L_0 функцию $\Phi(z)$ по краевому условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L_0, \tag{1.1}$$

где $G(t), g(t)$ – заданные функции, $G(t), g(t) \in H_\lambda(\overline{L}_0)$ и $G(t) \neq 0$ при $t \in \overline{L}_0$.

Поставленная задача равносильна краевой задаче с условием (1.1) при $t \in$ $\in T_\omega(L_0)$, где $G(t), g(t)$ удовлетворяют условию

$$G(t+\omega) = G(t), \quad g(t+\omega) = g(t), \quad t \in \overline{L}_0.$$

Основным аппаратом для решения поставленной задачи является [1] интеграл

$$I(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \varphi(\tau)\zeta(\tau - z)\, d\tau, \tag{1.2}$$

где

$$\zeta(u) = \frac{1}{u} + \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}{}' \left(\frac{1}{u-\omega} + \frac{u}{\omega^2} + \frac{1}{\omega} \right), \quad k_1^2 + k_2^2 \neq 0,$$

есть дзета-функция Вейерштрасса, $\varphi(t) \in H_\lambda(\overline{L}_0)$. Отметим следующие свойства этого интеграла.

1°. $I(z)$ является кусочно-голоморфной функцией с линией скачков L_0, удовлетворяет формулам Сохоцкого

$$I^\pm(t) = \pm \frac{\varphi(t)}{2} + I(t), \quad t \in L_0.$$

2°. $I(z)$ – квазипериодическая функция, так как

$$I(z+\omega_k) = I(z) - \frac{\eta_k}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \varphi(\tau)\, d\tau, \quad \eta_k = 2\zeta(\omega_k/2), \quad k = 1, 2.$$

3°. В окрестности конца c_0 функция имеет поведение вида

$$I(z) = \mp\frac{\varphi(c_0)}{2\pi i}\ln(z - c_0) + I_0(z),$$

где знак минус соответствует точке $c_0 = a_0$, знак плюс — точке $c_0 = b_0$, функция $I_0(z)$ имеет в c_0 конечный предел.

Заметим, что, наряду с интегралом (1.2), всеми свойствами интеграла типа Коши обладает интеграл

$$I_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \varphi(\tau)[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]\,d\tau,$$

отличающийся от интеграла (1.2) нормировкой $I_0(0) = 0$.

1.2. Задача о скачке. Рассмотрим поставленную задачу при $G(t) \equiv 1$:

$$\Phi^+(t) = \Phi^-(t) + g(t), \quad t \in L_0. \tag{1.3}$$

Справедлива

Лемма 1.1. *Необходимым условием разрешимости задачи* (1.3) *является равенство*

$$\int\limits_{L_0} g(t)\,dt = 0. \tag{1.4}$$

Доказательство. Пусть задача (1.3) имеет решение. Проинтегрируем равенство (1.3) по L_0:

$$\int\limits_{L_0} \Phi^+(t)\,dt = \int\limits_{L_0} \Phi^-(t)\,dt + \int\limits_{L_0} g(t)\,dt. \tag{1.5}$$

Применив к двусвязной области $R\backslash\overline{L}_0$ теорему Коши, получим

$$\int\limits_{\partial R} \Phi(t)\,dt + \int\limits_{L_0} \Phi^+(t)\,dt - \int\limits_{L_0} \Phi^-(t)\,dt = 0,$$

откуда следует равенство $\int\limits_{L_0} \Phi^+(t)\,dt = \int\limits_{L_0} \Phi^-(t)\,dt$, так как $\int\limits_{\partial R} \Phi(t)\,dt = 0$ в силу периодичности функции $\Phi(z)$. Теперь из (1.5) следует (1.4). □

Интеграл $I_1(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} g(\tau)\zeta(\tau - z)\,d\tau$ в силу свойств 1°–3° и условия (1.4) является частным решением задачи (1.3). Чтобы найти ее общее решение, заметим, что разность $\Phi(z) - I_1(z)$, не имея скачка на L_0, является двоякопериодической, голоморфной (после соответствующего доопределения в точке c_0) в Π и, следовательно, постоянной.

Таким образом, доказана

Теорема 1.1. *Критерием разрешимости задачи* (1.3) *является условие* (1.4). *При его выполнении общее решение задачи* (1.3) *имеет вид*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} g(\tau)\zeta(\tau - z)\,d\tau + C, \tag{1.6}$$

где C – произвольная постоянная.

Замечание. Если $g(c_0)=0$, то в окрестности c_0 функция $\Phi(z)$ ограничена, при $g(c_0)\neq 0$ она имеет в c_0 логарифмическую особенность.

1.3. Однородная задача. Найдем решение $\Phi_0(z)$ однородной задачи с краевым условием

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t),\quad t\in L_0. \tag{1.7}$$

За каноническую функцию задачи (1.7) возьмем

$$X_0(z)=\exp\Gamma(z),\quad \text{где}\ \ \Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\ln G(\tau)\zeta(\tau-z)\,d\tau,$$

причем под $\ln G(t)$ понимаем некоторую однозначную ветвь этой функции.

Функция $X_0(z)$ является кусочно-голоморфной, удовлетворяющей условию (1.7), а в окрестности концов c_0, согласно свойству 3°, имеет поведение вида

$$X_0(z)=(z-c_0)^{\alpha_0^{\mp}+i\beta_0^{\mp}}X_1(z),\quad \alpha_0^{\mp}+i\beta_0^{\mp}=\mp\frac{\ln G(c_0)}{2\pi i},$$

где знак «минус» выбирается при $c_0=a_0$, «плюс» – при $c_0=b_0$, а функция $X_1(z)$ имеет конечные пределы, отличные от нуля, при $z\to c_0$.

Назовем конец c_0 особенным, если $\alpha_0^{\pm}\in\mathbb{Z}$, и неособенным – в противном случае [5, с. 256]. Закрепим фиксацию ветви $\ln G(t)$ следующим образом:

а) если a_0 – особенный конец, то есть $\alpha_0^-=-\dfrac{\arg G(a_0)}{2\pi}\in\mathbb{Z}$, то выберем ветвь $\ln G(t)$ так, чтобы $\arg G(a_0)=0$;

б) если a_0 – неособенный конец, и в нем требуется ограниченность решения ($\Phi_0(z)\in h(a_0)$), то выберем ветвь $\ln G(t)$ так, чтобы

$$0<\alpha_0^-<1\Leftrightarrow -2\pi<\arg G(a_0)<0; \tag{1.8}$$

в) если в неособенном конце a_0 не требуется ограниченности, то выберем ветвь $\ln G(t)$ так, чтобы

$$-1<\alpha_0^-<0\Leftrightarrow 0<\arg G(a_0)<2\pi. \tag{1.9}$$

Теперь ветвь $\ln G(t)$ фиксирована на всей дуге.

Назовем *индексом* задачи (1.7) такое целое число $\varkappa$, что если b_0 – особенный конец, то $\varkappa=\alpha_0^+$, если b_0 – неособенный конец, то

$$0<\alpha_0^+-\varkappa<1, \tag{1.10}$$

когда требуется ограниченность решения в точке b_0 ($\Phi_0(z)\in h(b_0)$), и

$$-1<\alpha_0^+-\varkappa<0, \tag{1.11}$$

когда ограниченности не требуется.

Функция $\Phi_0(z)\in h(a_0,b_0)$, если она ограничена в неособенных концах a_0,b_0, а $\Phi_0(z)\in h_0$ означает, что в обоих концах допускается неограниченность.

Функция $X_0(z)$ является квазипериодической [2], так как

$$X_0(z+\omega_k)=X_0(z)\exp(-\eta_k\alpha),\quad k=1,2,\quad \alpha=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\ln G(\tau)\,d\tau.$$

Заметим, что постоянная α зависит от значения α_0, а следовательно, и от класса, в котором ищется решение $\Phi_0(z)$.

Рассмотрим отношение $f(z) = \Phi_0(z)/X_0(z)$. Это квазиэллиптическая функция с условием $f(z+\omega_k) = f(z)\exp(\eta_k\alpha)$. В точке a_0 функция $f(z)$ ограничена, а в конце b_0 имеет порядок не ниже $(-\varkappa)$ (так как при указанном выборе $\varkappa$ произведение $f(z)(z-b_0)^{\varkappa}$ допускает в точке b_0 интегрируемую особенность).

1) Пусть $\varkappa > 0$, тогда $f(z)$ допускает в конце b_0 полюс порядка $\varkappa$, а следовательно, в Π содержится $\varkappa$ нулей. Обозначим через $\widetilde{b}_1, \widetilde{b}_2, \ldots, \widetilde{b}_{\varkappa}$ полную систему нулей $f(z)$ с условием

$$\sum_{j=1}^{\varkappa}(b_0 - \widetilde{b}_j) = \alpha. \tag{1.12}$$

Тогда имеем $f(z) = C\prod\limits_{j=1}^{\varkappa}\dfrac{\sigma(z-\widetilde{b}_j)}{\sigma(z-b_0)}$, где C – произвольная постоянная, $\sigma(z)$ – сигма-функция Вейерштрасса. Отсюда $\Phi_0(z) = X_0(z)f(z)$.

Полученное решение как решение однородной задачи можно представить и в виде линейной комбинации линейно-независимых решений, используя результаты из [2]. Для этого представим $f(z)$ в виде

$$f(z) = \left[\frac{\sigma(z-b_0+\alpha/\varkappa)}{\sigma(z-b_0)}\right]^{\varkappa}\left[C_0 + \sum_{j=2}^{\varkappa}C_j\zeta^{(j-1)}(z-b_0+\alpha/\varkappa)\right], \tag{1.13}$$

где $C_0,\ C_j,\ j=2,\ldots,\varkappa,$ – произвольные постоянные, при $\varkappa=1$ сумма $\sum\limits_{j=2}^{\varkappa}$ отсутствует.

Формула (1.13) справедлива и для случая $\alpha/\varkappa = \widetilde{\omega}$ (здесь и в дальнейшем $\widetilde{\omega} = n_1\omega_1 + n_2\omega_2$ – фиксированный период, $\widetilde{\eta} = n_1\eta_1 + n_2\eta_2$, $n_1, n_2 \in \mathbb{Z}$), но допускает упрощение:

$$f(z) = \exp(\widetilde{\eta}z\varkappa)\left[C_0 + \sum_{j=2}^{\varkappa}C_j\zeta^{(j-1)}(z-b_0)\right]. \tag{1.14}$$

2) Пусть $\varkappa = 0$. Критерием существования голоморфной квазиэллиптической функции $f(z) \not\equiv 0$ является равенство $\alpha = \widetilde{\omega}$. При его выполнении имеем $f(z) = C\exp(\widetilde{\eta}z)$.

3) Пусть $\varkappa < 0$. Функция $f(z)$, являясь голоморфной и имеющей нуль порядка $(-\varkappa)$ в точке b_0, будет равна нулю тождественно.

Таким образом, доказана

Теорема 1.2. *Однородная задача* (1.7) *при* $\varkappa > 0$ *имеет* $\varkappa$ *линейно-независимых решений. Множество всех решений задается формулой*

$$\Phi_0(z) = C\exp\Gamma(z)\prod_{j=1}^{\varkappa}\frac{\sigma(z-\widetilde{b}_j)}{\sigma(z-b_0)}, \quad \Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\ln G(\tau)\zeta(\tau-z)\,d\tau,$$

где $C,\ \widetilde{b}_j,\ j=1,\ldots,\varkappa$ *связаны соотношением* (1.12)*, в остальном произвольны, или* $\Phi_0(z) = f(z)\exp\Gamma(z)$*, где* $f(z)$ *определяется формулами* (1.13), (1.14)*. При* $\varkappa = 0$, $\alpha = \widetilde{\omega}$*, решение задачи* (1.7) *имеет вид* $\Phi_0(z) = C\exp[\Gamma(z) + \widetilde{\eta}z]$*. При* $\varkappa = 0$*, когда* $\alpha \neq \widetilde{\omega}$*, и при* $\varkappa < 0$ *задача не имеет отличных от нуля решений.*

Замечание. В особенном конце c_0 функция $\Phi_0(z)$ всегда ограничена. В случае, когда выполняются условия (1.8), (1.10), получим все решения задачи $\Phi_0(z) \in h(a_0, b_0)$. Если же выполняются условия (1.8), (1.11), то $\Phi_0(z) \in h(a_0)$. При выполнении условий (1.9), (1.10) $\Phi_0(z) \in h(b_0)$. И, наконец, при выполнении условий (1.9), (1.11) $\Phi_0(z) \in h_0$.

1.4. Неоднородная задача. Найдем решение $\Phi(z)$ неоднородной задачи с краевым условием (1.1).

1) Пусть $\varkappa > 0$. За каноническую функцию задачи (1.1) возьмем

$$X(z) = \exp\Gamma(z)\left[\frac{\sigma(z-\theta)}{\sigma(z-b_0)}\right]^{\varkappa} = X_0(z)\left[\frac{\sigma(z-\theta)}{\sigma(z-b_0)}\right]^{\varkappa}, \tag{1.15}$$

где $\Gamma(z)$ и индекс $\varkappa$ определим так же, как и в однородной задаче. Функция (1.15) удовлетворяет условию

$$X(z+\omega_k) = X_0(z)\exp(\eta_k\beta), \quad k = 1, 2,$$

где $\beta = \varkappa(b_0-\theta)-\alpha$, а точку θ выберем так, что $\theta \notin T_\omega(L_0)$ и число β не совпадает с периодом. Учитывая свойства функции $X_0(z)$, получим, что $X(z)$ удовлетворяет на L_0 условию (1.7), а по поведению на конце c_0 принадлежит тому же классу, что и искомая функция $\Phi(z)$. Краевое условие (1.1) запишем в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+(t)}, \quad t \in L_0. \tag{1.16}$$

Для решения полученной задачи о скачке для квазиэллиптической функции $\Phi(z)/X(z)$ используем квазипериодический по z аналог ядра Коши

$$A(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z + \beta)}{\sigma(\beta)\sigma(\tau - z)}. \tag{1.17}$$

Функция $\widetilde{\Phi}(z) = X(z)\Psi(z)$, где

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} A(\tau, z)\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau,$$

является частным решением задачи (1.1). Действительно, поскольку $A(\tau, z) \sim$ $\sim 1/(\tau - z)$ при $z \to \tau$, то $\Psi^+(t) = \Psi^-(t) + g(t)/(X^+(t))$, $t \in L_0$, и, следовательно, $\widetilde{\Phi}(z)$ удовлетворяет условию (1.1). Далее, так как $A(\tau, z+\omega_k) = A(\tau, z)\exp(-\eta_k\beta)$, то $\widetilde{\Phi}(z+\omega_k) = \widetilde{\Phi}(z)$. Обоснование поведения $\widetilde{\Phi}(z)$ в окрестности точки c_0 аналогично [5, § 80] в случае задачи Римана для разомкнутого контура. Доказана

Теорема 1.3. *Неоднородная задача* (1.1) *при* $\varkappa > 0$ *разрешима, и ее общее решение имеет вид* $\Phi(z) = \Phi_0(z) + \widetilde{\Phi}(z)$, *где функция* Φ_0 *определена теоремой* 1.2,

$$\widetilde{\Phi}(z) = \left[\frac{\sigma(z-\theta)}{\sigma(z-b_0)}\right]^{\varkappa}\frac{\exp\Gamma(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0} A(\tau, z)\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau,$$

$A(\tau, z)$ *имеет вид* (1.17), $\beta = \varkappa(b_0 - \theta) - \alpha$, *точка* $\theta \notin T_\omega(L_0)$ *и выбрана так, что число* β *не равно периоду.*

2) Пусть $\varkappa < 0$. За каноническую функцию $X(z)$ возьмем функцию вида (1.16), положив в ней $\theta = b_0 - \alpha/\varkappa$, откуда $\beta = 0$. Заметим, что при $\varkappa > 0$ требование $\beta =$ $= 0$ могло привести к расходимости интеграла $\Psi(z)$ при попадании точки θ на L_0. Теперь задача о скачке (1.16) исследуется в классе двоякопериодических функций $\Phi(z)/X(z)$. На основании теоремы 1.1 заключаем, что необходимым условием ее разрешимости является равенство

$$\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau = 0. \tag{1.18}$$

Решение $\Phi(z)$ имеет вид

$$\Phi(z) = [I_2(z) + C]X(z), \quad \text{где} \;\; I_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\zeta(\tau - z)\,d\tau,$$

если дополнительно потребовать, чтобы функция $I_2(z)+C$ имела нуль порядка не меньше $(-\varkappa)$ в точке θ. Тогда $C = -I_2(\theta)$ и

$$\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\zeta^{(k)}(\tau - \theta)\,d\tau = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1. \tag{1.19}$$

Результат не изменится, но упростится, когда $\alpha/\varkappa$ равно периоду. Таким образом, доказана

Теорема 1.4. *Неоднородная задача* (1.1) *при* $\varkappa < 0$ *разрешима тогда и только тогда, когда выполняются* $(-\varkappa)$ *условий разрешимости* (1.19) *(при* $\varkappa < -1$*) и* (1.18). *При их выполнении единственное решение задачи определяется формулой*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - \theta)]\,d\tau,$$

где

$$X(z) = \exp\Gamma(z)\left[\frac{\sigma(z-\theta)}{\sigma(z - b_0)}\right]^{\varkappa}, \quad \theta = b_0 - \alpha/\varkappa.$$

3) Пусть $\varkappa = 0$. Существенно различными являются здесь случаи совпадения и несовпадения числа α с периодом.

Пусть $\alpha \neq \omega$. Исследуем задачу (1.1) так же, как при $\varkappa > 0$, полагая во всех формулах $\varkappa = 0$. Тогда имеем

$$X(z) = \exp\Gamma(z), \quad X(z + \omega_k) = X(z)\exp(-\eta_k\alpha),$$

$$A(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z - \alpha)}{\sigma(-\alpha)\sigma(\tau - z)}, \quad A(\tau, z + \omega_k) = A(\tau, z)\exp(\eta_k\alpha), \quad k = 1, 2.$$

Единственным решением здесь будет функция

$$\Phi(z) = \frac{\exp\Gamma(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0} A(\tau, z)\frac{g(\tau)\,d\tau}{\exp\Gamma^+(\tau)}. \tag{1.20}$$

При $\alpha = \widetilde{\omega}$ рассуждаем по аналогии со случаем $\varkappa < 0$. За каноническую функцию возьмем $X(z) = \exp[\Gamma(z) + \widetilde{\eta}z]$. Тогда $X(z+\omega_k) = X(z)\exp(\widetilde{\eta}\omega_k - \eta_k\widetilde{\omega}) = X(z)$, а решение задачи о скачке для $\Phi(z)/X(z)$ приводит к функции

$$\Phi(z) = X(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\zeta(\tau - z)\,d\tau + C\right] \tag{1.21}$$

при выполнении условия (1.18). Доказана

Теорема 1.5. *Неоднородная задача* (1.1) *при* $\varkappa = 0$, $\alpha = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int\limits_{L_0} \ln G(\tau)\,d\tau \neq$ $\neq \omega$ *безусловно разрешима и имеет единственное решение вида* (1.20). *При* $\alpha = \widetilde{\omega}$ *критерием разрешимости задачи является условие*

$$\int\limits_{L_0} g(\tau)\exp[-\Gamma^+(\tau) - \widetilde{\eta}\tau]\,d\tau = 0.$$

При его выполнении существует однопараметрическое решение вида (1.21).

Табл. 1

Класс	α_0	$\varkappa$	$f(z)$ (при $\alpha \neq \omega$)	$f(z)$ (при $\alpha = \widetilde{\omega}$)
$h(a_0)$	$-1 < \alpha_0 < 0$	0	0	$C\exp(\widetilde{\eta}z)$
$h(b_0)$	$0 < \alpha_0 < 1$	0	0	$C\exp(\widetilde{\eta}z)$
$h(a_0, b_0)$	$-1 < \alpha_0 < 0$	-1	0	0
h_0	$0 < \alpha_0 < 1$	1	$C\dfrac{\sigma(z+\alpha-b_0)}{\sigma(z-b_0)}$	$C\exp(\widetilde{\eta}z)$

2. Случай постоянного коэффициента

Рассмотрим задачу (1.1) при $G(t) = G_0 = \mathrm{const}$. Обратим внимание на отличие полученных решений от случая задачи Римана для разомкнутого контура на плоскости.

2.1. Однородная задача. За каноническую функцию возьмем

$$X_0(z) = \exp\Gamma_0(z),$$

где

$$\Gamma_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \ln G_0[\zeta(\tau-z)-\zeta(\tau)]\,d\tau = (\alpha_0+i\beta_0)\ln\frac{\sigma(z-b_0)\,\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\,\sigma(b_0)}, \quad \alpha_0+i\beta_0 = \frac{\ln G_0}{2\pi i},$$

то есть $\alpha_0 = \alpha_0^+ = -\alpha_0^-$, ветвь логарифма в правой части фиксирована в соответствии с левой частью так, что при $z = 0$ она равна нулю. Отсюда

$$X_0(z) = \left[\frac{\sigma(z-b_0)\,\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\,\sigma(b_0)}\right]^{\alpha_0+i\beta_0}.$$

Постоянная α определяется равенством

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \ln G_0\,d\tau = (\alpha_0+i\beta_0)(b_0-a_0).$$

Если концы a_0, b_0 особенные, то есть $G_0 > 0$, то $\alpha_0 = 0$, $\varkappa = 0$. Тогда $\Phi_0(z) = 0$ при $\alpha \neq \omega$ и $\Phi_0(z) = CX_0\exp(\widetilde{\eta}z)$ при $\alpha = \widetilde{\omega}$. Если концы неособенные, то $\Phi_0(z) = X_0(z)f(z)$, где $f(z)$ определяется в зависимости от класса решений (см. табл. 1).

В отличие от задачи Римана для разомкнутого контура на плоскости функция $\Phi_0(z)$ зависит не только от $\varkappa$, но и от величины α. Рассмотрим подробнее случай $\varkappa = 1$. Положим $\alpha = \alpha^{(1)}$, если $-1 < \alpha_0 < 0$, и $\alpha = \alpha^{(2)}$, если $0 < \alpha_0 < 1$. Так как $\alpha^{(2)} = \alpha^{(1)} + b_0 - a_0$, то $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ одновременно периодами быть не могут. Здесь неограниченные в обоих концах решения существуют только при $\alpha^{(1)} \neq \omega$ и $\alpha^{(2)} \neq \omega$. При $\alpha^{(2)} = \widetilde{\omega}$ получим $f(z) = C\exp(\widetilde{\eta}z)$, откуда $h_0 = h(b_0)$. При $\alpha^{(1)} = \widetilde{\omega}$ имеем

$$f(z) = C\frac{\sigma(z+\alpha^{(2)}-b_0)}{\sigma(z-b_0)} = C\frac{\sigma(z+\alpha^{(1)}-a_0)}{\sigma(z-b_0)} = C_1\frac{\sigma(z-a_0)\exp(\widetilde{\eta}z)}{\sigma(z-b_0)},$$

откуда $h_0 = h(a_0)$.

2.2. Неоднородная задача. Пусть функции $\Phi_0(z)$, $X_0(z)$, числа α_0 и $\varkappa$ определены так же, как и в однородной задаче.

Если решение $\Phi(z)$ искать в классе h_0, то $\varkappa = 1$, каноническая функция берется в виде $X(z) = X_0(z)\sigma(z-\theta)/\sigma(z-b_0)$, где точка θ выбрана так, что $\theta \notin T_\omega(L_0)$, число $\beta = b_0 - \theta - \alpha$ не совпадает с периодом. Тогда

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0} A(\tau,z)\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau + \Phi_0(z), \quad A(\tau,z) = \frac{\sigma(\tau-z+\beta)}{\sigma(\beta)\sigma(\tau-z)}.$$

При $\Phi(z) \in h(a_0,b_0)$ индекс $\varkappa = -1$, тогда $X(z) = X_0\,\sigma(z-b_0)/\sigma(z-b_o-\alpha)$, и при выполнении условия

$$\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\,d\tau = 0 \tag{2.1}$$

имеем

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0} \frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}[\zeta(\tau-z) - \zeta(\tau-b_0-\alpha)]\,d\tau.$$

При $\alpha = \widetilde{\omega}$ результат сохранится.

Если решение ищется в классах $h(a_0)$, $h(b_0)$ или концы особенные, то $\varkappa = 0$. Тогда при $\alpha \neq \omega$ имеем $X(z) = X_0(z)$, $A(\tau,z) = \dfrac{\sigma(\tau-z-\alpha)}{\sigma(-\alpha)\sigma(\tau-z)}$,

$$\Phi(z) = \frac{X_0(z)}{2\pi i}\int\limits_{L_0} A(\tau,z)\frac{g(\tau)}{X_0^+(\tau)}\,d\tau.$$

При $\alpha = \widetilde{\omega}$ имеем $X(z) = X_0\exp(\widetilde{\eta}z)$ и

$$\Phi(z) = X(z)\left[\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{g(\tau)}{X^+(\tau)}\zeta(\tau-z)\,d\tau + C\right]$$

при выполнении условия (2.1), где $X(z) = X_0\exp(\widetilde{\eta}z)$.

3. Задача о скачке в случае непериодического скачка

Пусть $L_0 = (\widehat{a_0,b_0}) \in R$. Обозначим $L = \bigcup\limits_{k=0}^{\infty} L_k$, где L_k получены из L_0 преобразованиями группы T_ω.

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую краевому условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g_k(t), \quad t \in L_k. \tag{3.1}$$

На основании известных результатов о решении задачи в случае счетного множества гладких разомкнутых дуг частным решением задачи (3.1) является функция [4]

$$\mathcal{F}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^{n_k}}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau^{n_k}(\tau-z)}, \tag{3.2}$$

где последовательность целых чисел $\{n_k\}$ подобрана так, что ряд (3.2) сходится абсолютно и равномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов, соответствующих тем L_k, которые лежат внутри этого компакта.

Имея $\mathcal{F}(z)$, можно записать общее решение задачи в виде

$$\Phi(z) = \mathcal{F}(z) + \mathcal{P}(z),$$

где $\mathcal{P}(z)$ – произвольная целая функция.

Для того чтобы сформулировать дополнительные требования, которые нужно наложить на функцию $g(t) = g_k(t),\ t \in \overline{L}_k$, чтобы задача имела конечное число линейно-независимых решений, введем

Определение. Последовательность $\Gamma = \{\Gamma_m\}_1^\infty$ замкнутых контуров назовем правильной системой контуров, если она обладает следующими свойствами:

1) Γ_1 содержит внутри точку $z = 0$;
2) Γ_m лежит в области, ограниченной контуром Γ_{m+1};
3) если $d_m = \min\limits_{z\in\Gamma_m} |z|$, то $\lim\limits_{m\to\infty} d_m = \infty$;
4) $l_m/d_m \leqslant a$, где l_m – длина Γ_m, $a > 0$ – постоянная, не зависящая от m.

Имеет место [3, с. 243]

Теорема 3.1. *Если существует правильная система контуров* Γ, *не пересекающаяся с контурами* L_k, *то все решения задачи* (3.1), *удовлетворяющие на всех* Γ_m *условию*

$$|\Phi(z)| \leqslant \mathcal{M}|z|^{n-1}, \quad \mathcal{M} > 0, \quad n \in \mathbb{N},$$

определяются формулой

$$\Phi(z) = \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_m^*} \frac{g_m^*(\tau)}{(\tau - z)} \left(\frac{z}{\tau}\right)^n d\tau + \mathcal{P}_{n-1}(z),$$

причем ряд равномерно сходится на любом компакте, не содержащем точек L_k, $\mathcal{P}_{n-1}(z)$ *– полином степени* $n-1$, *через* L_m^* *обозначена совокупность контуров* L_k, *расположенных в* D_m (*область между* Γ_m *и* Γ_{m+1}), *а через* $g_m^*(t)$ *обозначена функция на* L_m^*, *совпадающая на каждом* $L_k \subset L_m^*$ *с заданным скачком* $g_k(t)$.

Можно конкретизировать набор целых чисел n_k при построении частного решения (3.2). Справедлива [4]

Теорема 3.2. *Если* $n \geqslant 0$ *есть целое число, при котором ряд*

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k (R_k)^{-(n+1)}, \quad A_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} |g_k(\tau)||d\tau|, \quad R_k = \min_{\tau\in L_k} |\tau| \tag{3.3}$$

сходится, то ряд (3.2) *при всех* $n_k = n$ *сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем точек контуров* L_k (*после отбрасывания соответствующего числа членов*).

Задача (3.1) *в данном случае имеет частное решение*

$$\widetilde{\mathcal{F}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^n}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau^n(\tau - z)}.$$

Используя приведенные выше результаты, построим решение задачи (3.1) с заданным поведением при $z \to \infty$. В нашем случае в качестве системы Γ можно взять следующую последовательность: за Γ_1 примем границу параллелограмма, составленного из 9 конгруэнтных параллелограммов, центром которого является R, за Γ_2 – границу параллелограмма, составленного из 25 конгруэнтных параллелограммов, центром которого является R, и т. д. (в данном случае $a = [6(|\omega_1| + |\omega_2|)]/d_1$).

Требуется найти кусочно-голоморфное решение $\Phi(z)$ задачи (3.1), удовлетворяющее на Γ условию

$$|\Phi(z)| \leqslant \mathcal{M}|z|, \quad \mathcal{M} > 0, \tag{3.4}$$

причем функция $g(t)$ удовлетворяет условию $g_k(t) \in H_{\lambda_k}(\overline{L}_k)$ и неравенству

$$\sup_{t\in\overline{L}} |g(t)| \leqslant N, \quad 0 < N < \infty. \tag{3.5}$$

В силу условия (3.5) имеем, что

$$A_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k} |g_k(\tau)||d\tau| \leqslant \frac{N}{2\pi}S_0,$$

где S_0 – длина L_0, следовательно, сходимость ряда (3.3) обеспечивается сходимостью ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k^{-(n+1)}, \quad R_k = |\tau + \omega|, \quad \tau \in L_0. \tag{3.6}$$

Ряд (3.6) можно представить в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty} R_k^{-(n+1)} = \frac{1}{R_0^{n+1}} + \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{|\tau+\omega|^{n+1}} = \frac{1}{R_0^{n+1}} + \sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{|\omega|^{n+1}|\frac{\tau}{\omega}+1|^{n+1}}.$$

Учитывая, что $\left|\dfrac{\tau}{\omega}+1\right|^{n+1} \to 1$ при $k_1, k_2 \to \pm\infty$, имеем, что сходимость ряда (3.6) эквивалентна сходимости ряда

$$\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}{}' \frac{1}{|\omega|^{n+1}}. \tag{3.7}$$

Из теории двоякопериодических функций [3, с. 212] известно, что наименьшее n, при котором сходится ряд (3.7), будет равно 2.

Таким образом, задача (3.1) имеет частное решение

$$\widetilde{\mathcal{F}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^2}{2\pi i}\int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)\,d\tau}{\tau^2(\tau - z)}. \tag{3.8}$$

Тогда из теоремы 3.1 следует

Теорема 3.3. *Все решения задачи* (3.1)*, удовлетворяющие условию* (3.4)*, определяются формулой*

$$\Phi(z) = \widetilde{\mathcal{F}}(z) + \mathcal{P}_1(z), \tag{3.9}$$

где $\widetilde{\mathcal{F}}(z)$ *имеет вид* (3.8)*,* $\mathcal{P}_1(z)$ *– полином первой степени, причем ряд сходится абсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем точек* L_k*.*

Рассмотрим теперь решение задачи (3.1) при условии, что функция $g(t)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k = N_1 < \infty, \quad B_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} |g_k(\tau)|\,|d\tau|. \tag{3.10}$$

При условии (3.10) ряд

$$\mathcal{F}_1(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)\,d\tau}{\tau(\tau - z)} \tag{3.11}$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов. Действительно, пусть $|z| \leqslant r$, $0 < r < \infty$, $\tau \in L_k$, $\tau \neq z$, тогда

$$|\mathcal{F}_1(z)| \leqslant \frac{|z|}{2\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int\limits_{L_k} \frac{|g_k(\tau)|\,|d\tau|}{|1 - \dfrac{z}{\tau}|}.$$

При всех достаточно больших k величина z/τ будет сколь угодно малой, так как $|z| \leqslant r$. Поэтому можно подобрать такой номер K, чтобы при $k \geqslant K$ выполнялось неравенство

$$\left|1 - \frac{z}{\tau}\right| \geqslant \frac{1}{2}. \tag{3.12}$$

Тогда с учетом (3.12) имеем

$$|\mathcal{F}_1(z)| \leqslant \frac{r}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int\limits_{L_k} |g_k(\tau)\,d\tau| \leqslant \frac{r}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{B_k}{R_k^2} < N_2 < \infty.$$

Покажем ограниченность (3.11) на Γ. В силу свойств Γ и L существует такая постоянная $\delta > 0$, что $|\tau - z| \geqslant \delta$ при всех $\tau \in L$, $z \in \Gamma$, и

$$|\mathcal{F}_1(z)| \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi} \left| \int\limits_{L_k} g_k(\tau) \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} \right) d\tau \right| \leqslant$$

$$\leqslant \delta^{-1} \sum_{k=0}^{\infty} B_k + \sum_{k=0}^{\infty} B_k R_k^{-1} = \delta^{-1} N_2 + N_3.$$

Таким образом, доказана

Теорема 3.4. *Все решения задачи* (3.1) *при условии* (3.10)*, удовлетворяющие неравенству*

$$|\Phi(z)| \leqslant \mathcal{M}, \quad z \in \Gamma,$$

определяются формулой

$$\Phi(z) = \mathcal{F}_1(z) + C,$$

где $\mathcal{F}_1(z)$ *имеет вид* (3.11)*, а* C *– постоянная.*

Рассмотрим частный случай, когда функция $g(t)$ удовлетворяет условиям

$$g_0(t) = g_k(t + \omega), \quad t \in L_0, \quad g_0(t) \in H_\lambda(\overline{L}_0). \tag{3.13}$$

Будем отыскивать двоякопериодические решения задачи (3.1) с периодами ω_1 и ω_2.

Из леммы 1.1 следует равенство

$$\int\limits_{L_0} g_0(\tau)\,d\tau = 0. \tag{3.14}$$

В силу ограниченности решений на ∂R они удовлетворяют условию (3.4), поэтому на основании теоремы 3.3 достаточно из решений (3.9) выделить двоякопериодические решения. Для этого, положив $\mathcal{P}_1(z) = Az + B$, сделаем следующие преобразования:

$$\widetilde{\mathcal{F}}(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{z^2}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)\,d\tau}{\tau^2(\tau - z)} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau) \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} - \frac{z}{\tau^2} \right) d\tau +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_k} g_k(\tau) \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} - \frac{z}{\tau^2} \right) d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau) \left[\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} - \frac{z}{\tau^2} + {\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}}' \left(\frac{1}{\tau + \omega - z} - \frac{1}{\tau + \omega} - \right.\right.$$

$$\left.\left. - \frac{z}{(\tau + \omega)^2} \right) \right] d\tau = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau) \left[\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} - \frac{z}{\tau^2} + \right.$$

$$\left. + {\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}}' \left(\frac{1}{\tau + \omega - z} - \frac{1}{\tau + \omega} - \frac{z}{(\tau + \omega)^2} + \frac{1}{\omega} - \frac{1}{\omega} + \frac{\tau - z}{\omega^2} - \frac{\tau - z}{\omega^2} \right) \right] d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]\,d\tau + \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)\zeta'(\tau)\,d\tau. \tag{3.15}$$

Требуя периодичность, с учетом (3.14) получим

$$\Phi(z + \omega_k) = \Phi(z) + \frac{\omega_k}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)\zeta'(\tau) d\tau + A\omega_k, \quad k = 1, 2,$$

откуда $A = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)\zeta'(\tau) d\tau$. Тем самым получено решение вида (1.6) при $g(t) = g_0(t)$.

Отметим следующий интересный факт. Функция (3.15) не является двоякопериодической, но из нее можно получить двоякопериодическую функцию, имеющую в параллелограмме периодов полярную особую линию второго порядка [6, с. 98–103]. Эта функция является аналогом функции Вейерштрасса $\wp(u)$, имеющей в R полюс второго порядка. Действительно,

$$\mathcal{F}_2(z) = \widetilde{\mathcal{F}}'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)[\wp(\tau - z) - \wp(\tau)]\,d\tau.$$

Summary

E.P. Aksenteva, I.G. Salekhova. Riemann Problem in a Case of Doubly Periodic Arrangements of Arches. I.

The paper considers the decision of Riemann problem in a case of doubly periodic arrangements of arches. The case of periodic factor and a free member is regarded. On the basis of results for Riemann problem decision in case of accounting set of contours, generalization on the case of non-periodic jumps is given.

Key words: Riemann problem, doubly periodic arrangements of arches, elliptic function, quasielliptic function, periodic factor and a free member, accounting set of arches, non-periodic gallop.

Литература

1. *Чибрикова Л.И.* О граничных задачах для прямоугольника // Учен. зап. Казан. ун-та. – 1964. – Т. 123, кн. 9. – С. 15–39.
2. *Аксентьева Е.П.* Функции Вейерштрасса в краевых задачах. Методическая разработка к специальному курсу. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1994. – 42 с.
3. *Чибрикова Л.И.* Основные граничные задачи для аналитических функций. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1977. – 302 с.
4. *Салехова И.Г.* Однородная задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 124–135.
5. *Мусхелишвили Н.И.* Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Физматгиз, 1968. – 512 с.
6. *Голубев В.В.* Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. – М.: Физматгиз, 1961. – 455 с.

Поступила в редакцию
02.12.08

Аксентьева Евгения Павловна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей математики Казанского государственного университета.

E-mail: *Evgenija.Aksenteva@ksu.ru*

Салехова Илюся Гаруновна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры дифференциальных уравнений Казанского государственного университета.

E-mail: *Ilysia.Salekhova@ksu.ru*