УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2021, Т. 163, кн. 3–4 ISSN 2541-7746 (Print)
С. 261–275 ISSN 2500-2198 (Online)

ОРИГИНАЛЬНАЯ СТАТЬЯ

УДК 519.653 doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.261-275

АНАЛИЗ ФОРМУЛ ЧИСЛЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИРОВАНИЯ ФУНКЦИЙ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ НА СЕТКЕ БАХВАЛОВА

Н.А. Задорин

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, г. Новосибирск, 630090, Россия

Аннотация

В работе проведена оценка погрешности формул численного дифференцирования на сетке Бахвалова при наличии экспоненциального пограничного слоя. Проблема состоит в том, что применение классических полиномиальных формул для вычисления производных в случае равномерной сетки при наличии пограничного слоя может приводить к существенным погрешностям. Сетка Бахвалова широко применяется при построении разностных схем для сингулярно возмущенных задач, и анализ формул численного дифференцирования на этой сетке представляет интерес. Получены оценки погрешности некоторых широко применяемых разностных формул для вычисления производных на сетке Бахвалова с учетом равномерности по малому параметру. Приведены результаты численных экспериментов, подтверждающие полученные оценки погрешностей.

Ключевые слова: функция одной переменной, пограничный слой, большие градиенты, сетка Бахвалова, формулы численного дифференцирования, оценка погрешности

Введение

На основе сингулярно возмущенных задач моделируются различные конвективно-диффузионные процессы с преобладающей конвекцией. Применение классических разностных схем на равномерной сетке для численного решения таких задач может приводить к существенным погрешностям. Для достижения равномерной по малому параметру сходимости разностных схем широко применяются сетки Бахвалова [1] и Шишкина [2].

Представляет интерес разработка формул численного дифференцирования для функций с большими градиентами в пограничном слое. В случае равномерной сетки применение классических разностных формул для вычисления производных к функциям с большими градиентами может приводить к существенным погрешностям, например, в соответствии с [3]. В некоторых работах, например [4, 5], при оценке погрешности разностных схем оценивается и погрешность вычисления производных через решение разностной схемы. При этом разностные схемы строятся на сетке Шишкина [2].

В работе [6] оценивается погрешность формул численного дифференцирования на классе функций, соответствующих решению краевой задачи при наличии экспоненциального пограничного слоя. При этом применяется декомпозиция функции на сумму регулярной и сингулярной составляющих, разработанная в [2] для решения задачи с пограничным слоем. В [6] получена оценка погрешности классических формул численного дифференцирования на сетке Шишкина. Оценка погрешности получена в общем случае, зависит от номера вычисляемой производной, числа узлов в сеточном шаблоне для производной и равномерна по малому параметру ε.

В [7] в случае равномерной сетки предложена формула численного дифференцирования с произвольно заданным числом узлов в сеточном шаблоне, построенная таким образом, чтобы формула была точной на сингулярной составляющей, задающей основной рост функции в пограничном слое. Такой подход применялся А.М. Ильиным при построении разностной схемы для сингулярно возмущенной задачи [8]. В [9] формула из [7] исследована в некоторых частных случаях, получены оценки погрешности, равномерные по малому параметру, в случае экспоненциального пограничного слоя. В [10] для разностных формул, точных на сингулярной составляющей и приближающих первую и вторую производные, получены оценки погрешности, равномерные по сингулярной составляющей общего вида.

Для вычисления производных можно применить и сплайновый подход, когда по значениям функции в узлах сетки строится сплайн. Дифференцирование такого сплайна дает гладкие функции, приближающие производные исходной функции, заданной в узлах сетки. В [11] исследовано применение экспоненциального сплайна для вычисления производных функции, заданной в узлах равномерной сетки. Построен аналог кубического сплайна, точный на сингулярной составляющей интерполируемой функции. В [12] предложено использовать кубический сплайн на сетке Шишкина. Получены ε-равномерные оценки погрешности вычисления производных на основе дифференцирования сплайна.

В настоящей работе исследуем применение классических формул численного дифференцирования на сетке Бахвалова [1]. Исследование проведем на классе функций, соответствующих решению сингулярно возмущенной задачи. Для этого применим декомпозицию Шишкина, справедливую для решения задачи при наличии экспоненциального пограничного слоя [2, 13].

Итак, предполагаем, что для функции $u(x)$ справедлива декомпозиция

$$u(x) = p(x) + \Phi(x), \quad x \in [0,1], \tag{1}$$

где

$$|p^{(j)}(x)| \le C_1, \quad |\Phi^{(j)}(x)| \le \frac{C_1}{\varepsilon^j} \exp(-\alpha x/\varepsilon), \quad 0 \le j \le m, \tag{2}$$

функции $p(x)$ и $\Phi(x)$ в явном виде не заданы, $\alpha > 0$, $\varepsilon \in (0,1]$, m будет задаваться. Согласно (2), регулярная составляющая $p(x)$ имеет производные, ограниченные до некоторого порядка, а производные сингулярной составляющей $\Phi(x)$ могут неограниченно расти с уменьшением ε.

В соответствии с [2] для заданного m можно осуществить декомпозицию (1) с ограничениями (2) для решения сингулярно возмущенной краевой задачи

$$\varepsilon u''(x) + a_1(x)u'(x) - a_2(x)u(x) = f(x), \quad u(0) = A, \quad u(1) = B, \tag{3}$$

где $a_1(x) \ge \alpha > 0$, $a_2(x) \ge 0$, $\varepsilon > 0$, функции $a_1(x)$, $a_2(x)$, $f(x)$ – достаточно гладкие. При малых значениях ε решение задачи (3) имеет область больших градиентов у границы $x = 0$, чему соответствует представление (1).

Обозначения. Всюду в работе под C и C_j подразумеваем положительные постоянные, не зависящие от ε и числа узлов сетки. Одной постоянной C_j будем ограничивать различные величины, если это понятно по тексту. Пусть $u_n^{(j)} = u^{(j)}(x_n)$, $j \ge 0$, $L_k(u,x)$ – многочлен Лагранжа для функции $u(x)$ с k последовательно расположенными узлами интерполяции, эти узлы будут задаваться.

1. Задание неравномерной сетки

Построим сетку Ω^h

$$\Omega^h = \{x_n\}, \quad n = 0, 1, \dots, x_N, \quad x_0 = 0, \quad x_N = 1, \quad h_n = x_n - x_{n-1}.$$

Зададим сетку Ω^h как сетку Бахвалова [1] с учетом конкретизации [14]. Для этого определим функцию $g(t)$ следующим образом:

$$g(t) = -\frac{r\varepsilon}{\alpha} \ln\Big[1 - 2(1-\varepsilon)t\Big], \quad 0 \le t \le \frac{1}{2}, \quad \varepsilon \le e^{-1}, \tag{4}$$

$$g(t) = \sigma + (2t-1)(1-\sigma), \quad \frac{1}{2} \le t \le 1, \tag{5}$$

где r – положительное и целое, будет задаваться. Здесь

$$\sigma = \min\Big\{\frac{1}{2}, -\frac{r\varepsilon}{\alpha}\ln\varepsilon\Big\}. \tag{6}$$

Пусть $\sigma = 1/2$ при $\varepsilon > e^{-1}$. При $\sigma = 1/2$ определяем сетку Ω^h равномерной.

Если $\sigma < 1/2$, то $x_n = g(n/N)$, $n = 0, 1, \dots, N$, где $g(t)$ задается в (4)–(5). Тогда в соответствии с (4)

$$x_n = -\frac{r\varepsilon}{\alpha} \ln\Big[1 - 2(1-\varepsilon)n/N\Big], \quad n = 0, 1, \dots, N/2. \tag{7}$$

Следовательно,

$$h_n = \frac{r\varepsilon}{\alpha} \ln\Big[1 + \frac{2(1-\varepsilon)/N}{1 - 2(1-\varepsilon)n/N}\Big], \quad n = 1, 2, \dots, N/2. \tag{8}$$

Несложно убедиться, что последовательность шагов h_n, $n = 1, 2, \dots, N/2$ – строго возрастающая. Из (8) следует

$$h_{N/2} = \frac{r\varepsilon}{\alpha} \ln\Big[1 + \frac{2(1-\varepsilon)}{N\varepsilon}\Big]. \tag{9}$$

Теперь на основе (5) зададим узлы

$$x_n = \sigma + (2n/N - 1)(1-\sigma), \quad N/2 \le n \le N.$$

В этом случае сетка является равномерной с шагами $h_n = 2(1-\sigma)/N$.

При таком задании сетки для некоторой постоянной C_2 справедлива оценка

$$h_n \le \frac{C_2}{N}, \quad n = 1, 2, \dots, N. \tag{10}$$

Разностная формула с двумя узлами для вычисления первой производной на сетке Ω^h исследовалась в [15]. Получена оценка $\varepsilon|u'(x) - (u_n - u_{n-1})/h_n| \le C/N$. Ниже оценим погрешность других широко используемых разностных формул на классе функций, обладающих декомпозицией (1), на заданной выше сетке.

При обосновании оценок погрешности предполагаем, что $\sigma < 1/2$. При $\sigma = 1/2$ для некоторой постоянной C_0 $\varepsilon \ge C_0$ и производные функции $u(x)$ являются ε-равномерно ограниченными. Тогда для функции $u(x)$ применимы известные в регулярном случае оценки погрешности при вычислении производных, и эти оценки по точности не ниже, чем оценки, получаемые при $\sigma < 1/2$.

2. Формула с тремя узлами для вычисления первой производной

Предполагаем, что исходный отрезок $[0,1]$ представлен в виде объединения неперекрывающихся отрезков

$$[0,1] = \bigcup [x_{n-1}, x_{n+1}], \quad n = 1, 3, \ldots, N-1. \tag{11}$$

На произвольном отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ зададим формулу для вычисления $u'(x)$

$$L_3'(u,x) = u_{n-1}\frac{2x - x_n - x_{n+1}}{h_n(h_n + h_{n+1})} - u_n\frac{2x - x_{n-1} - x_{n+1}}{h_n h_{n+1}} + u_{n+1}\frac{2x - x_n - x_{n-1}}{h_{n+1}(h_n + h_{n+1})}. \tag{12}$$

Лемма 1. *Пусть функция $u(x)$ имеет представление* (1) *при $m \geq 3$, N кратно четырем и при задании сетки Ω^h $r \geq 3$. Тогда для некоторой постоянной C на произвольном отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ в зависимости от значения n справедливы следующие оценки погрешности:*

$$\varepsilon|L_3'(u,x) - u'(x)| \leq \frac{C}{N^2}, \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}], \quad n < \frac{N}{2} - 1, \tag{13}$$

$$\varepsilon|L_3'(u,x) - u'(x)| \leq \frac{C}{N^2}, \quad x \in [x_{n-1}, x_n], \quad n = \frac{N}{2} - 1, \tag{14}$$

$$\varepsilon|L_3'(u,x) - u'(x)| \leq \frac{C}{N^2}, \quad x \in [x_n, x_{n+1}], \quad n = \frac{N}{2} - 1, \quad \varepsilon \geq \frac{1}{N}, \tag{15}$$

$$\varepsilon|L_3'(u,x) - u'(x)| \leq \frac{C}{N^2}\ln\left[1 + \frac{1}{N\varepsilon}\right], \quad x \in [x_n, x_{n+1}], \quad n = \frac{N}{2} - 1, \quad \varepsilon \leq \frac{1}{N}, \tag{16}$$

$$|L_3'(u,x) - u'(x)| \leq \frac{C}{N^2}, \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}], \quad n > \frac{N}{2}. \tag{17}$$

Доказательство. Используем разложение в ряд Тейлора

$$u(\eta) = u(x) + (\eta - x)u'(x) + \frac{(\eta - x)^2}{2}u''(x) + \frac{1}{2}\int_x^\eta (\eta - s)^2 u^{(3)}(s)\,ds. \tag{18}$$

Заменяя в (12) $u(x_{n-1}), u(x_n), u(x_{n+1})$ на основе разложения (18) около точки x и приводя подобные, получаем

$$\begin{gathered}
L_3'(u,x) - u'(x) = \left[A_n(x) + \frac{1}{2}\int_x^{x_{n-1}} (x_{n-1} - s)^2 u^{(3)}(s)\,ds\right]\frac{2x - x_n - x_{n+1}}{h_n(h_n + h_{n+1})} + \\
+ \left[B_n(x) + \frac{1}{2}\int_x^{x_n} (x_n - s)^2 u^{(3)}(s)\,ds\right]\frac{2x - x_{n-1} - x_{n+1}}{h_n h_{n+1}} + \\
+ \left[C_n(x) + \frac{1}{2}\int_x^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)^2 u^{(3)}(s)\,ds\right]\frac{2x - x_n - x_{n-1}}{h_{n+1}(h_n + h_{n+1})} - u'(x), \\
x \in [x_{n-1}, x_{n+1}],
\end{gathered} \tag{19}$$

где

$$A_n(x) = u(x) + (x_{n-1} - x)u'(x) + \frac{(x_{n-1} - x)^2}{2}u''(x),$$

$$B_n(x) = u(x) + (x_n - x)u'(x) + \frac{(x_n - x)^2}{2}u''(x),$$

$$C_n(x) = u(x) + (x_{n+1} - x)u'(x) + \frac{(x_{n+1} - x)^2}{2}\, u''(x).$$

Докажем, что при всех $x \in [x_{n-1}, x_{n+1}]$

$$A_n(x)\,\frac{2x - x_n - x_{n+1}}{h_n(h_n + h_{n+1})} + B_n(x)\,\frac{2x - x_{n-1} - x_{n+1}}{h_n h_{n+1}} + \\ + C_n(x)\,\frac{2x - x_n - x_{n-1}}{h_{n+1}(h_n + h_{n+1})} = u'(x). \quad (20)$$

Соотношение (20) приводим к виду

$$\widetilde{A}_n(x)u(x) + \widetilde{B}_n(x)u'(x) + \widetilde{C}_n(x)u''(x) = 0.$$

Несложно показать, что при всех x $\widetilde{A}_n(x) = \widetilde{B}_n(x) = 0$. Выпишем $\widetilde{C}_n(x)$

$$\widetilde{C}_n(x) = \frac{(x_{n-1} - x)^2}{2}\,\frac{2x - x_n - x_{n+1}}{h_n(h_n + h_{n+1})} + \\ + \frac{(x_n - x)^2}{2}\,\frac{2x - x_{n-1} - x_{n+1}}{h_n h_{n+1}} + \frac{(x_{n+1} - x)^2}{2}\,\frac{2x - x_n - x_{n-1}}{h_{n+1}(h_n + h_{n+1})}.$$

Теперь несложно получить, что $\widetilde{C}_n(x) = 0$ при всех x.

Итак, соотношение (20) доказано. Тогда из (19) получаем

$$L_3'(u,x) - u'(x) = \frac{2x - x_n - x_{n+1}}{2h_n(h_n + h_{n+1})} \int\limits_x^{x_{n-1}} (x_{n-1} - s)^2 u^{(3)}(s)\,ds + \\ + \frac{2x - x_{n-1} - x_{n+1}}{2h_n h_{n+1}} \int\limits_x^{x_n} (x_n - s)^2 u^{(3)}(s)\,ds + \\ + \frac{2x - x_n - x_{n-1}}{2h_{n+1}(h_n + h_{n+1})} \int\limits_x^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)^2 u^{(3)}(s)\,ds, \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}].$$

Из этой формулы следует

$$|L_3'(u,x) - u'(x)| \le C h_n \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |u^{(3)}(s)|\,ds, \quad x \in [x_{n-1}, x_n]. \quad (21)$$

$$|L_3'(u,x) - u'(x)| \le C h_{n+1} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |u^{(3)}(s)|\,ds, \quad x \in [x_n, x_{n+1}]. \quad (22)$$

В силу того, что N кратно четырем, каждый отрезок $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ полностью находится в пограничном слое $[0, \sigma]$ или вне его.

Пусть этот отрезок находится в пограничном слое, при этом $x_{n+1} \le \sigma$. Обозначим $K = 2(1 - \varepsilon)$. Учитывая (2), (7) и условие $r \ge 3$, получаем

$$\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} |\Phi^{(3)}(s)|\,ds \le \frac{C}{\varepsilon^3} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} \exp(-\alpha s/\varepsilon)\,ds = \frac{C_1}{\varepsilon^2}\Big[\exp(-\alpha x_{n-1}/\varepsilon) - \exp(-\alpha x_{n+1}/\varepsilon)\Big] = \\ = \frac{C_1}{\varepsilon^2}\Big[\Big(1 - K(n-1)/N\Big)^r - \Big(1 - K(n+1)/N\Big)^r\Big] \le \frac{C_2}{\varepsilon^2 N}\,(1 - K(n-1)/N). \quad (23)$$

При обосновании оценки (23) применили неравенство

$$b_n^r - a_n^r \le r b_n^{r-1}(b_n - a_n), \quad r > 1, \quad 1 > b_n > a_n > 0.$$

Учитывая соотношения (8), (21), (23), для некоторой постоянной C получаем

$$\varepsilon|L_3'(\Phi,x)-\Phi'(x)| \le \frac{C}{N^2}\ln\left[1+\frac{K}{N-Kn}\right](N-Kn+K), \ x \in [x_{n-1},x_n], \ n < \frac{N}{2}. \quad (24)$$

Используя ограниченность производных составляющей $p(x)$, оценки (21), (24), получаем требуемые оценки (13), (14).

Рассмотрим случай $x \in [x_{N/2-1}, x_{N/2}]$. С учетом (9) из (22), (23) получаем

$$\varepsilon|L_3'(\Phi,x) - \Phi'(x)| \le \frac{C_1}{N}\ln\left[1+\frac{K}{N\varepsilon}\right]\left(\varepsilon + \frac{1}{N}\right), \quad x \in [x_n, x_{n+1}], \quad n+1 = \frac{N}{2}. \quad (25)$$

Из (2), (25), (22) следуют оценки (15), (16).

В случае $n > N/2$ оценка (17) следует из (2), (6), (21), (22).

Лемма доказана. □

3. Формула для вычисления второй производной

Предполагаем, что справедливо разбиение (11). Пусть $L_3(u,x)$ – многочлен Лагранжа с узлами интерполяции x_{n-1}, x_n, x_{n+1} на отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$. Рассмотрим формулу для производной $u''(x)$

$$u''(x) \approx L_3''(u,x) = \frac{2u_{n-1}}{h_n(h_n+h_{n+1})} - \frac{2u_n}{h_n h_{n+1}} + \frac{2u_{n+1}}{h_{n+1}(h_n+h_{n+1})}. \quad (26)$$

Лемма 2. *Пусть функция $u(x)$ имеет представление (1) при $m \ge 3$, N кратно четырем и при задании сетки Ω^h $r \ge 3$. Тогда для некоторой постоянной C на произвольном отрезке $[x_{n-1}, x_{n+1}]$ справедливы следующие оценки погрешности:*

$$\varepsilon^2\Big|L_3''(u,x) - u''(x)\Big| \le \frac{C}{N}, \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}], \quad n < \frac{N}{2}, \quad (27)$$

$$\Big|L_3''(u,x) - u''(x)\Big| \le \frac{C}{N}, \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+1}], \quad n > \frac{N}{2}. \quad (28)$$

Доказательство. Из (26) следует

$$\varepsilon^2\Big(L_3''(u,x) - u''(x)\Big) = \frac{\varepsilon^2}{h_n h_{n+1}(h_n+h_{n+1})}\times$$
$$\times\Big[2h_{n+1}u_{n-1} - 2(h_n+h_{n+1})u_n + 2h_n u_{n+1} - h_n h_{n+1}(h_n+h_{n+1})u_n''\Big] +$$
$$+\varepsilon^2(u_n'' - u''(x)). \quad (29)$$

Применяя разложение в ряд Тейлора (18), получаем

$$u_{n-1} = u_n - h_n u_n' + \frac{1}{2}h_n^2 u_n'' + \frac{1}{2}\int\limits_{x_n}^{x_{n-1}} (x_n - s)^2 u'''(s)\,ds, \quad (30)$$

$$u_{n+1} = u_n + h_{n+1} u_n' + \frac{1}{2}h_{n+1}^2 u_n'' + \frac{1}{2}\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}} (x_n - s)^2 u'''(s)\,ds. \quad (31)$$

Подставляя (30), (31) в (29) и приводя подобные, имеем

$$\varepsilon^2\Big(L_3''(u,x)-u''(x)\Big)=\frac{\varepsilon^2}{h_n h_{n+1}(h_n+h_{n+1})}\times$$
$$\times\left[h_{n+1}\int\limits_{x_n}^{x_{n-1}}(x_n-s)^2u'''(s)\,ds-h_n\int\limits_{x_n}^{x_{n+1}}(x_n-s)^2u'''(s)\,ds\right]+\varepsilon^2\int\limits_{x}^{x_n}u'''(s)\,ds.$$

Из этого соотношения следует

$$\varepsilon^2\big|L_3''(u,x)-u''(x)\big|\le 3\varepsilon^2\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}|u'''(s)|\,ds. \tag{32}$$

При $m\ge 3$ в декомпозиции (1)-(2) производная $p'''(x)$ является ограниченной, поэтому в соответствии с (10), (32) для некоторой постоянной C

$$\big|L_3''(p,x)-p''(x)\big|\le\frac{C}{N},\quad x\in[x_{n-1},x_{n+1}],\quad n=1,3,\dots,N-1. \tag{33}$$

Остановимся на оценке погрешности на составляющей $\Phi(x)$.

Рассмотрим случай $n<N/2$. С учетом оценок (2), (32) для некоторой постоянной C_2 получаем

$$\varepsilon^2\big|L_3''(\Phi,x)-\Phi''(x)\big|\le\frac{C_2}{\varepsilon}\int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}}e^{-\alpha s/\varepsilon}\,ds=\frac{C_2}{\alpha}\Big[e^{-\alpha x_{n-1}/\varepsilon}-e^{-\alpha x_{n+1}/\varepsilon}\Big].$$

Учитывая (7), по аналогии с обоснованием оценки (23) имеем

$$\varepsilon^2\Big|L_3''(\Phi,x)-\Phi''(x)\Big|\le\frac{C}{N},\ x\in[x_{n-1},x_{n+1}],\ n=1,3,\dots,\frac{N}{2}-1. \tag{34}$$

Рассмотрим случай $n>N/2$. Тогда $x_{n-1}\ge\sigma$ и, учитывая (2), (6), из (32) получаем

$$\Big|L_3''(\Phi,x)-\Phi''(x)\Big|\le\frac{C}{N},\quad x\in[x_{n-1},x_{n+1}],\quad n=\frac{N}{2}+1,\frac{N}{2}+3,\dots,N-1. \tag{35}$$

Из оценок (33), (34), (35) следуют оценки (27), (28). Лемма доказана.

□

4. Формула для вычисления третьей производной

Предполагаем, что N кратно шести и исходный отрезок $[0,1]$ представлен в виде объединения неперекрывающихся отрезков

$$[0,1]=\bigcup[x_{n-1},x_{n+2}],\quad n=1,4,\dots,N-2. \tag{36}$$

Пусть $L_4(u,x)$ – многочлен Лагранжа с узлами интерполяции x_{n-1}, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}. Тогда разностная формула для вычисления третьей производной на отрезке $[x_{n-1},x_{n+2}]$ имеет вид

$$u^{(3)}(x)\approx L_4^{(3)}(u,x)=-\frac{6u_{n-1}}{h_n(h_n+h_{n+1})(h_n+h_{n+1}+h_{n+2})}+\frac{6u_n}{h_nh_{n+1}(h_{n+1}+h_{n+2})}-$$
$$-\frac{6u_{n+1}}{h_{n+1}h_{n+2}(h_n+h_{n+1})}+\frac{6u_{n+2}}{h_{n+2}(h_{n+1}+h_{n+2})(h_n+h_{n+1}+h_{n+2})}. \tag{37}$$

Лемма 3. *Пусть функция* $u(x)$ *имеет представление* (1) *при* $m \geq 4$, N *кратно шести и при задании сетки* Ω^h $r \geq 4$. *Тогда для некоторой постоянной* C *на произвольном отрезке* $[x_{n-1}, x_{n+2}]$ *в зависимости от* n *справедливы оценки погрешности:*

$$\varepsilon^3 \big| L_4^{(3)}(u,x) - u^{(3)}(x) \big| \leq \frac{C}{N}, \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+2}], \quad n+2 \leq \frac{N}{2}, \tag{38}$$

$$\big| L_4^{(3)}(u,x) - u^{(3)}(x) \big| \leq \frac{C}{N}, \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+2}], \quad n-1 \geq \frac{N}{2}. \tag{39}$$

Доказательство. Используя разложение в ряд Тейлора

$$u(\eta) = u(x_{n-1}) + (\eta - x_{n-1})u'(x_{n-1}) + \frac{(\eta - x_{n-1})^2}{2} u''(x_{n-1}) +$$
$$+ \frac{(\eta - x_{n-1})^3}{6} u^{(3)}(x_{n-1}) + \frac{1}{6} \int\limits_{x_{n-1}}^{\eta} (\eta - s)^3 u^{(4)}(s)\, ds$$

при $\eta = x_n,\ x_{n+1},\ x_{n+2}$, из (37) получаем

$$L_4^{(3)}(u,x) - u^{(3)}(x) = \frac{1}{h_n h_{n+1}(h_{n+1} + h_{n+2})} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_n} (x_n - s)^3 u^{(4)}(s)\, ds -$$
$$- \frac{1}{h_{n+1} h_{n+2}(h_n + h_{n+1})} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+1}} (x_{n+1} - s)^3 u^{(4)}(s)\, ds +$$
$$+ \frac{1}{h_{n+2}(h_{n+1} + h_{n+2})(h_n + h_{n+1} + h_{n+2})} \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+2}} (x_{n+2} - s)^3 u^{(4)}(s)\, ds + u^{(3)}(x_{n-1}) - u^{(3)}(x).$$

Из этого соотношения для некоторой постоянной C имеем

$$\big| L_4^{(3)}(u,x) - u^{(3)}(x) \big| \leq C \int\limits_{x_{n-1}}^{x_{n+2}} |u^{(4)}(s)|\, ds. \tag{40}$$

В соответствии с (2) при $m \geq 4$ $|p^{(4)}(x)| \leq C_1$. С учетом (40) на каждом отрезке $[x_{n-1}, x_{n+2}]$ справедлива оценка

$$\big| L_4^{(3)}(p,x) - p^{(3)}(x) \big| \leq \frac{C}{N}. \tag{41}$$

Остается оценить погрешность на функции $\Phi(x)$. С учетом (2), (40) получаем

$$\varepsilon^3 \big| L_4^{(3)}(\Phi,x) - \Phi^{(3)}(x) \big| \leq C_2 \big[\exp(-\alpha x_{n-1}/\varepsilon) - \exp(-\alpha x_{n+2}/\varepsilon) \big]. \tag{42}$$

При $n + 2 \leq N/2$ из (42) по аналогии с (34) имеем

$$\varepsilon^3 \big| L_4^{(3)}(\Phi,x) - \Phi^{(3)}(x) \big| \leq \frac{C}{N}, \quad x \in [x_{n-1}, x_{n+2}]. \tag{43}$$

С учетом оценок (41), (43) получаем требуемую оценку (38).

Оценка (39) следует из (40) и ограниченности производной $\Phi^{(4)}(x)$ при $x \in$ $\in [x_{n-1}, x_{n+2}]$. Лемма доказана. □

Табл. 1

Погрешность вычисления второй производной на равномерной сетке

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$1.74e-1$	$8.74e-2$	$4.38e-2$	$2.19e-2$	$1.10e-2$	$5.48e-3$
16^{-1}	$4.19e-1$	$2.86e-1$	$1.68e-1$	$9.17e-2$	$4.79e-2$	$2.45e-2$
32^{-1}	$4.83e-1$	$4.19e-1$	$2.86e-1$	$1.68e-1$	$9.17e-2$	$4.79e-2$
64^{-1}	$3.89e-1$	$4.83e-1$	$4.19e-1$	$2.86e-1$	$1.68e-1$	$9.17e-2$
128^{-1}	$1.86e-1$	$3.89e-1$	$4.83e-1$	$4.19e-1$	$2.86e-1$	$1.68e-1$
256^{-1}	$3.69e-2$	$1.86e-1$	$3.89e-1$	$4.83e-1$	$4.19e-1$	$2.86e-1$
512^{-1}	$9.77e-4$	$3.69e-2$	$1.86e-1$	$3.89e-1$	$4.83e-1$	$4.19e-1$

5. Результаты численных экспериментов

Проведем сравнение точности при вычислении производных на равномерной сетке, сетках Шишкина и Бахвалова.

Зададим сетку Шишкина [2] на $[0,1]$, используя соотношения

$$\sigma = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{k\varepsilon}{\alpha}\ln N\right\}, \quad h_n = \frac{2\sigma}{N}, \quad n \le \frac{N}{2}; \quad h_n = \frac{2(1-\sigma)}{N}, \quad n > \frac{N}{2},$$

где k – число узлов интерполяции многочлена Лагранжа $L_k(u,x)$, применяемого на неперекрывающихся отрезках $[x_i, x_{i+k-1}]$ для вычисления производной. В соответствии с [6], в случае функции вида (1) и сетки Шишкина для некоторой постоянной C при всех i

$$\varepsilon^j \left|u^{(j)}(x) - L_k^{(j)}(u,x)\right| \le C\left(\frac{\ln N}{N}\right)^{k-j}, \quad x \in [x_i, x_{i+k-1}]. \tag{44}$$

Для численных экспериментов зададим функцию вида (1)

$$u(x) = \cos\frac{\pi x}{2} + \exp(-x/\varepsilon), \ x \in [0,1], \quad \varepsilon \in (0,1].$$

Тогда в (1) $\Phi(x) = \exp(-x/\varepsilon)$.

В табл. 1–3 приведена относительная погрешность

$$\Delta_{N,\varepsilon} = \varepsilon^2 \max_{n,j}\left|L_3''(u, \widetilde{x}_{n,j}) - u''(\widetilde{x}_{n,j})\right|,$$

в табл. 2, 3 дополнительно приведен вычисленный порядок точности

$$M_{N,\varepsilon} = \log_2\frac{\Delta_{N,\varepsilon}}{\Delta_{2N,\varepsilon}}$$

в случаях равномерной сетки, сеток Шишкина и Бахвалова, где $\widetilde{x}_{n,j}$ – узлы сгущенной сетки, полученной из исходной делением каждого сеточного интервала $[x_{n-1}, x_n]$ на 10 равных частей. В таблицах $e-l$ обозначает 10^{-l}.

Из табл. 1 следует, что применение равномерной сетки неприемлемо, так как при $\varepsilon = 1/N$ погрешность не уменьшается с ростом числа узлов N. Данные табл. 2 соответствуют сетке Шишкина и согласуются с оценкой (44). Результаты табл. 3 для сетки Бахвалова согласуются с оценкой (27). На сетках Бахвалова и Шишкина при заданном N погрешность стабилизируется с уменьшением параметра ε.

Теперь приведем результаты вычислений первой производной по формуле (12). Относительная погрешность, задаваемая формулой

$$\Delta_{N,\varepsilon} = \varepsilon \max_{n,j}\left|L_3'(u, \widetilde{x}_{n,j}) - u'(\widetilde{x}_{n,j})\right|,$$

Табл. 2

Погрешность и порядок точности при вычислении второй производной на сетке Шишкина

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$1.74e-1$	$8.74e-2$	$4.38e-2$	$2.19e-2$	$1.10e-2$	$5.48e-3$
	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
16^{-1}	$3.50e-1$	$2.58e-1$	$1.68e-1$	$9.17e-2$	$4.79e-2$	$2.45e-2$
	0.44	0.62	0.88	0.94	0.97	0.98
32^{-1}	$3.50e-1$	$2.58e-1$	$1.74e-1$	$1.09e-1$	$6.52e-2$	$3.77e-2$
	0.44	0.57	0.67	0.74	0.79	0.83
64^{-1}	$3.50e-1$	$2.58e-1$	$1.74e-1$	$1.09e-1$	$6.52e-2$	$3.77e-2$
	0.44	0.57	0.67	0.74	0.79	0.83

Табл. 3

Погрешность и порядок точности при вычислении второй производной на сетке Бахвалова

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$1.74e-1$	$8.74e-2$	$4.38e-2$	$2.19e-2$	$1.10e-2$	$5.48e-3$
	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00	1.00
16^{-1}	$2.38e-1$	$1.30e-1$	$6.76e-2$	$3.45e-2$	$1.74e-2$	$8.75e-3$
	0.87	0.94	0.97	0.99	0.99	1.00
32^{-1}	$2.44e-1$	$1.34e-1$	$6.98e-2$	$3.56e-2$	$1.80e-2$	$9.04e-3$
	0.87	0.94	0.97	0.99	0.99	1.00
64^{-1}	$2.48e-1$	$1.36e-1$	$7.08e-2$	$3.62e-2$	$1.83e-2$	$9.18e-3$
	0.87	0.94	0.97	0.99	0.99	1.00
128^{-1}	$2.49e-1$	$1.37e-1$	$7.14e-2$	$3.64e-2$	$1.84e-2$	$9.25e-3$
	0.87	0.94	0.97	0.99	0.99	1.00

Табл. 4

Погрешность при вычислении первой производной по формуле (12) на равномерной сетке

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$2.25e-3$	$5.68e-4$	$1.42e-4$	$3.57e-5$	$8.92e-6$	$2.23e-6$
16^{-1}	$6.67e-2$	$2.56e-2$	$8.14e-3$	$2.30e-3$	$6.12e-4$	$1.58e-4$
32^{-1}	$1.26e-1$	$6.67e-2$	$2.56e-2$	$8.14e-3$	$2.30e-3$	$6.12e-4$
64^{-1}	$1.32e-1$	$1.26e-1$	$6.67e-2$	$2.56e-2$	$8.14e-3$	$2.30e-3$
128^{-1}	$1.04e-1$	$1.32e-1$	$1.26e-1$	$6.67e-2$	$2.56e-3$	$8.14e-3$
256^{-1}	$6.71e-2$	$1.04e-1$	$1.32e-1$	$1.26e-1$	$6.67e-2$	$2.56e-2$
512^{-1}	$3.90e-2$	$6.71e-2$	$1.04e-1$	$1.32e-1$	$1.26e-1$	$6.67e-2$

приведена в табл. 4–5 соответственно на равномерной сетке и на сетке Бахвалова по аналогии с таблицами для второй производной. Данные табл. 4 показывают, что применение равномерной сетки приводит к значительным погрешностям при $\varepsilon \leq 1/N$. Результаты вычислений на сетке Бахвалова показывают ε-равномерную точность и согласуются с оценками погрешности леммы 1.

В табл. 6, 7 приведены погрешность при вычислении третьей производной по формуле (37)

$$\Delta_{N,\varepsilon} = \varepsilon^3 \max_{n,j} \left| L_4^{(3)}(u, \widetilde{x}_{n,j}) - u^{(3)}(\widetilde{x}_{n,j}) \right|$$

и вычисленный порядок точности на сетках Шишкина и Бахвалова. Полученные

Табл. 5

Погрешность и порядок точности при вычислении первой производной по формуле (12) на сетке Бахвалова

ε	N					
	16	32	64	128	256	512
1	$2.25e-3$	$5.68e-4$	$1.42e-4$	$3.57e-5$	$8.92e-6$	$2.23e-6$
	1.99	2.00	2.00	2.00	2.00	2.00
16^{-1}	$1.81e-2$	$4.84e-3$	$1.25e-3$	$3.17e-4$	$7.99e-5$	$2.00e-5$
	1.90	1.95	1.98	1.99	1.99	2.00
32^{-1}	$1.92e-2$	$5.16e-3$	$1.33e-3$	$3.38e-4$	$8.53e-5$	$2.14e-5$
	1.90	1.95	1.98	1.99	1.99	2.00
64^{-1}	$1.98e-2$	$5.32e-3$	$1.38e-3$	$3.49e-4$	$8.80e-5$	$2.21e-5$
	1.90	1.95	1.98	1.99	1.99	2.00
128^{-1}	$2.01e-2$	$5.40e-3$	$1.40e-3$	$3.55e-4$	$8.94e-5$	$2.24e-5$
	1.89	1.95	1.98	1.99	1.99	2.00
256^{-1}	$2.02e-2$	$5.44e-3$	$1.41e-3$	$3.58e-4$	$9.01e-5$	$2.26e-5$
	1.89	1.95	1.98	1.99	1.99	2.00

Табл. 6

Погрешность и порядок точности при вычислении третьей производной на сетке Шишкина

ε	N					
	24	48	96	192	384	768
1	$4.11e-1$	$2.06e-1$	$1.03e-1$	$5.16e-2$	$2.58e-2$	$1.29e-2$
	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	
10^{-1}	$4.13e-1$	$2.44e-1$	$1.33e-1$	$6.97e-2$	$3.56e-2$	$1.80e-2$
	0.76	0.87	0.93	0.97	0.98	
10^{-2}	$7.24e-1$	$5.86e-1$	$3.90e-1$	$2.28e-1$	$1.23e-1$	$6.44e-2$
	0.31	0.59	0.78	0.88	0.94	
10^{-3}	$7.35e-1$	$6.82e-1$	$5.05e-1$	$3.15e-1$	$1.78e-1$	$9.46e-2$
	0.11	0.43	0.68	0.83	0.91	
10^{-4}	$7.06e-1$	$7.24e-1$	$5.86e-1$	$3.90e-1$	$2.28e-1$	$1.23e-1$
	0.04	0.31	0.59	0.78	0.88	

Табл. 7

Погрешность и порядок точности при вычислении третьей производной на сетке Бахвалова

ε	N					
	24	48	96	192	384	768
1	$4.11e-1$	$2.06e-1$	$1.03e-1$	$5.16e-2$	$2.58e-2$	$1.29e-2$
	1.0	1.0	1.0	1.0	1.0	
10^{-1}	$4.13e-1$	$2.44e-1$	$1.33e-1$	$6.97e-2$	$3.56e-2$	$1.80e-2$
	0.76	0.87	0.93	0.97	0.98	
10^{-2}	$3.79e-1$	$2.10e-1$	$1.10e-1$	$5.64e-2$	$2.85e-2$	$1.44e-2$
	0.86	0.93	0.96	0.98	0.99	
10^{-3}	$3.82e-1$	$2.11e-1$	$1.11e-1$	$5.69e-2$	$2.88e-2$	$1.45e-2$
	0.85	0.93	0.96	0.98	0.99	
10^{-4}	$3.82e-1$	$2.11e-1$	$1.11e-1$	$5.69e-2$	$2.88e-2$	$1.45e-2$
	0.85	0.93	0.96	0.98	0.99	

результаты согласуются с оценкой (44) при $k = 4$ и $j = 3$ в случае сетки Шишкина и с оценкой (38) в случае сетки Бахвалова.

Заключение

Получены оценки погрешности разностных формул для вычисления первой, второй и третьей производных на сетке Бахвалова при наличии экспоненциального пограничного слоя. Проведены эксперименты по вычислению производных на равномерной сетке, сетках Шишкина и Бахвалова. В соответствии с численными результатами применение равномерной сетки при наличии пограничного слоя приводит к значительным погрешностям. Результаты экспериментов согласуются с полученными оценками погрешностей.

Благодарности. Исследование выполнено при финансовой поддержке РФФИ в рамках научного проекта № 19-31-60009.

Литература

1. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1969. – Т. 9, № 4. – С. 841–890.
2. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 233 с.
3. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2010. – Т. 50, № 2. – С. 221–233.
4. *Kopteva N.V., Stynes M.* Approximation of derivatives in a convection-diffusion two-point boundary value problem // Appl. Numer. Math. – 2001. – V. 39. – P. 47–60.
5. *Shishkin G.I.* Approximations of solutions and derivatives for a singularly perturbed elliptic convection-diffusion equations // Math. Proc. R. Ir. Acad. – 2003. – V. 103A, No 2. – P. 169–201.
6. *Задорин А.И.* Анализ формул численного дифференцирования на сетке Шишкина при наличии пограничного слоя // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2018. – Т. 21, № 3. – С. 243–254. – doi: 10.15372/SJNM20180301.
7. *Zadorin A.I., Zadorin N.A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Sib. Èlektron. Mat. Izv. – 2012. – V. 9. – P. 445–455.
8. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6, № 2. – С. 237–248.
9. *Zadorin A., Tikhovskaya S.* Formulas of numerical differentiation on a uniform mesh for functions with the exponential boundary layer // Int. J. Numer. Anal. Model. – 2019. – V. 16, No 4. – P. 590–608.
10. *Il'in V.P., Zadorin A.I.* Adaptive formulas of numerical differentiation of functions with large gradients // J. Phys.: Conf. Ser. – 2019. – V. 1260. – Art. 042003, P. 1–7.– doi: 10.1088/1742-6596/1260/4/042003.
11. *Blatov I.A., Zadorin A.I., Kitaeva E.V.* An application of the exponential spline for the approximation of a function and its derivatives in the presence of a boundary layer // J. Phys.: Conf. Ser. – 2018. – V. 1050. – Art. 012012, P. 1–7. – doi: 10.1088/1742-6596/1050/1/012012.
12. *Blatov I.A., Zadorin A.I., Kitaeva E.V.* Approximation of a function and its derivatives on the basis of cubic spline interpolation in the presence of a boundary layer // Comput. Math. Math. Phys. – 2019. – V. 59, No 3. – P. 343–354. – doi: 10.1134/S0965542519030047.

13. *Linß T.* The necessity of Shishkin decompositions // Appl. Math. Lett. – 2001. – V. 14, No 7. – P. 891–896. – doi: 10.1016/S0893-9659(01)00061-1.

14. *Linß T.* Layer-Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems. – Berlin: Springer, 2010. – 233 p.

15. *Блатов И.А., Задорин Н.А.* Интерполяция на сетке Бахвалова при наличии экспоненциального пограничного слоя // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2019. – Т. 161, кн. 4. – С. 497–508. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.4.497-508.

Поступила в редакцию
03.02.2021

Задорин Никита Александрович, кандидат физико-математических наук, старший научный сотрудник

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН
пр. Академика Коптюга, д. 4, г. Новосибирск, 630090, Россия
E-mail: *nik-zadorin@yandex.ru*

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2021, vol. 163, no. 3–4, pp. 261–275

ORIGINAL ARTICLE

doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.261-275

Analysis of Formulas for Numerical Differentiation of Functions with Large Gradients on a Bakhvalov Mesh

N.A. Zadorin

Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch,
Russian Academy of Sciences, Novosibirsk, 630090 Russia
E-mail: *nik-zadorin@yandex.ru*

Received February 3, 2021

Abstract

The article gives an estimate of the error of the classical formulas for the numerical differentiation of a function of one variable with large gradients in the exponential boundary layer. It is assumed that the function is decomposed in the form of the sum of the regular and singular components, which is valid for the solution of a boundary value problem for the ordinary second-order differential equation with a small parameter ε affecting the highest derivative. It is known that the application of the classical polynomial formulas of numerical differentiation to such a function in the case of a uniform mesh can lead to unacceptable errors. The article estimates the error of the formulas for numerical differentiation on the Bakhvalov mesh, which is condensed in the boundary layer region. Bakhvalov's mesh is widely used to construct uniformly converging difference schemes; therefore, the error estimation of the numerical differentiation formulas on this mesh is of interest. The estimates of the error on the Bakhvalov mesh are obtained taking into account the uniformity in the small parameter for the classical difference formulas widely used to calculate the first, second, and third derivatives. The results of numerical experiments are presented, which agree with the obtained error estimates. A numerical comparison of the obtained errors on the Bakhvalov and Shishkin meshes and on a uniform mesh is carried out.

Keywords: function of one variable, boundary layer, large gradients, Bakhvalov mesh, formulas for numerical differentiation, error estimation

Acknowledgments. The study was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 19-31-60009).

References

1. Bakhvalov N.S. The optimization of methods of solving boundary value problems with a boundary layer. *USSR Comput. Math. Math. Phys.*, 1969, vol. 9, no. 4, pp. 139–166. doi: 10.1016/0041-5553(69)90038-X.
2. Shishkin G.I. *Setochnye approksimatsii singulyarno vozmushchennykh ellipticheskikh i parabolicheskikh uravnenii* [Grid Approximations of Singular Perturbation Elliptic and Parabolic Equations]. Yekaterinburg, Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk, 1992. 233 p. (In Russian)
3. Zadorin A.I., Zadorin N.A. Spline interpolation on a uniform grid for functions with a boundary-layer component. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 2, pp. 211–223. doi: 10.1134/S0965542510020028.
4. Kopteva N.V., Stynes M. Approximation of derivatives in a convection-diffusion two-point boundary value problem. *Appl. Numer. Math.*, 2001, vol. 39, pp. 47–60.
5. Shishkin G.I. Approximations of solutions and derivatives for a singularly perturbed elliptic convection-diffusion equations. *Math. Proc. R. Ir. Acad.*, 2003. vol. 103A, no. 2, pp. 169–201.
6. Zadorin A.I. Analysis of numerical differentiation formulas in a boundary layer on a Shishkin grid. *Numer. Anal. Appl.*, 2018, vol. 11, no. 3, pp. 193–203. doi: 10.1134/S1995423918030011.
7. Zadorin A.I., Zadorin N.A. Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation. *Sib. Elektron. Mat. Izv.*, 2012, vol. 9, pp. 445–455.
8. Il'in A.M. Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative. *Math. Notes*, 1969, vol. 6, no. 2, pp. 596–602. doi: 10.1007/BF01093706.
9. Zadorin A., Tikhovskaya S. Formulas of numerical differentiation on a uniform mesh for functions with the exponential boundary layer. *Int. J. Numer. Anal. Model.*, 2019, vol. 16, no. 4, pp. 590–608.
10. Il'in V.P., Zadorin A.I. Adaptive formulas of numerical differentiation of functions with large gradients. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2019, vol. 1260, art. 042003. doi: 10.1088/1742-6596/1260/4/042003.
11. Blatov I.A., Zadorin A.I., Kitaeva E.V. An application of the exponential spline for the approximation of a function and its derivatives in the presence of a boundary layer. *J. Phys.: Conf. Ser.*, 2018, vol. 1050, art. 012012, pp. 1–7. doi: 10.1088/1742-6596/1050/1/012012.
12. Blatov I.A., Zadorin A.I., Kitaeva E.V. Approximation of a function and its derivatives on the basis of cubic spline interpolation in the presence of a boundary layer. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2019, vol. 59, no. 3, pp. 343–354. doi: 10.1134/S0965542519030047.

13. Linß T. The necessity of Shishkin decompositions. *Appl. Math. Lett.*, 2001, vol. 14, no. 7, pp. 891–896. doi: 10.1016/S0893-9659(01)00061-1.

14. Linß T. *Layer–Adapted Meshes for Reaction-Convection-Diffusion Problems*. Berlin, Springer, 2010. 233 p.

15. Blatov I.A., Zadorin N.A. Interpolation on the Bakhvalov mesh in the presence of an exponential boundary layer. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 4, pp. 497–508. doi: 10.26907/25417746.2019.4.497-508. (In Russian)

⟨ ***Для цитирования*:** *Задорин Н.А.* Анализ формул численного дифференцирования функций с большими градиентами на сетке Бахвалова // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2021. – Т. 163, кн. 3–4. – С. 261–275. – doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.261-275. ⟩

⟨ ***For citation*:** Zadorin N.A. Analysis of formulas for numerical differentiation of functions with large gradients on a Bakhvalov mesh. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2021, vol. 163, no. 3–4, pp. 261–275. doi: 10.26907/2541-7746.2021.3-4.261-275. (In Russian) ⟩