ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ

«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского

Кафедра аэрогидромеханики

Направление: 010800.68 − Механика

Специализация: механика жидкости, газа и плазмы

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА НА ТЕМУ:

РАСЧЕТ ОБТЕКАНИЯ ДИПОЛЕЙ, РАСПРЕДЕЛЕННЫХ ВДОЛЬ ЛИНИИ

Работу завершил(а): "___"_____ 2014 г.

Студент 4 курса группы 05-003 очного отделения

Максудов Фархад Рашидович _____

Работу допустил к защите: "___"_____ 2014 г.

Научный руководитель
кандидат физико-математических наук,
доцент Марданов Ренат Фаритович _____

Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук, _____
Егоров Андрей Геннадьевич

Казань – 2014 г.

Оглавление

ВВЕДЕНИЕ.

Простейшим классом безвихревых течений является плоское стационарное течение идеальной несжимаемой жидкости, которая является хорошей моделью для расчета и проектирования обтекания тел, движущихся с небольшими скоростями, когда сжимаемость несущественна. В этом случае задача сводится к интегрированию уравнения Лапласа

$$\nabla^2\varphi = \frac{\partial^2\varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2\varphi}{\partial y^2} = 0 . \qquad (1)$$

Эта задача может быть разрешена при помощи методов теории функции комплексного переменного. Из уравнения несжимаемости

$$divV = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0 \qquad (2)$$

следует, что всегда можно найти функцию $\Psi(x, y)$, связанную с компонентами скорости u и v соотношениями

$$u = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \; v = -\frac{\partial\psi}{\partial x} . \qquad (3)$$

Функция $\Psi(x, y)$ называется функцией тока. При выполнении известных условий Коши-Римана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial x} = \frac{\partial\psi}{\partial y}, \; \frac{\partial\varphi}{\partial y} = -\frac{\partial\psi}{\partial x}, \qquad (4)$$

где $\varphi(x, y) = C$ − изопотенциальные линии, комплексный потенциал [1]

$$W = \varphi(x, y) + i\Psi(x, y) = W(x, y) \qquad (5)$$

будет аналитической функцией комплексной переменной $z = x + iy$.

Зная комплексный потенциал течения легко установить все его аэродинамические характеристики, такие как скорость в любой точке течения, давление, уравнение линий тока.

Можно рассматривать простейшие течения, такие как обтекание точечного диполя. Для такого течения достаточно легко построить комплексный потенциал и построить картину обтекания, но случай единичной точечной особенности не позволяет рассчитать обтекания фигур близких к крыловому профилю.

В данной работе рассмотрен достаточно распространенный метод моделирования обтекания тел в безграничном потоке − метод распределения особенностей вдоль линии, так называемые панельные методы. Эти методы основаны на суперпозиции простых точных решений уравнения (1), удовлетворяющих граничным условиям. Дополнительным преимуществом такого подхода является то, что в качестве расчетной области выступает практически лишь поверхность тела, а не вся область,

лежащая вне поверхности (что имеет место при использовании конечно-разностных методов). Это позволяет создать экономичный алгоритм и сравнительно просто рассматривать тела сложной формы. [2]

В классических монографиях использовались распределения источников, стоков и вихрей, тогда как в настоящей работе рассмотрен симметричный случай распределения вдоль прямой особенностей другого вида, а именно − диполей.

ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ.

В физической плоскости $z = x + iy$ рассматривается обтекание установившегося потока идеальной несжимаемой жидкости, прямой линии l_z, вдоль которой распределены диполи заданной интенсивности $\mu(s)$, с заданной скоростью на бесконечности v_∞. Начало координат выбрано в начале линии, ось x направим вдоль этой линии, скорость набегающего потока параллельна линии.

Требуется определить форму контура L_z, распределение скорости $v(s)$ по поверхности и картину обтекания.

РЕШЕНИЕ.

Комплексный потенциал единичного диполя, имеет следующий вид:

$$W(z) = \frac{m}{2\pi(z - z_0)}, \tag{6}$$

где m − интенсивность диполя, z_0 − координата его центра. Для построения комплексного потенциала диполей, распределенных вдоль линии используется потенциал (6). Для этого введен в рассмотрение набор диполей, которые помещены на эту линию, каждый со своей интенсивностью m_i. Согласно принципу суперпозиции комплексным потенциалом такого течения будет являться сумма комплексных потенциалов течений, индуцированных по отдельности каждым диполем.

$$W(z) = \frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{z - z_i} \tag{7}$$

Устремляя количество диполей n к бесконечности, а m_i к нулю, эту картину можно рассмотреть, как обтекание диполей распределённых вдоль линии. Введя обозначение $m_i = \mu(s)ds$, где s это дуговая абсцисса, являющаяся комплексной величиной, и перейдя к пределу в интегральной сумме

$$\sum_{i=1}^{n}\frac{m_i}{z - z_i} \xrightarrow[n\to\infty]{m_i\to 0} \int_0^l \frac{\mu(s)ds}{z - \xi(s)}. \tag{8}$$

Добавив к этому комплексный потенциал набегающего потока $W(z) = v_\infty z$, получим следующий вид рассматриваемого течения:

$$W(z) = v_\infty z + \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\mu(s)ds}{z-\xi(s)}, \qquad (9)$$

где l длина линии l_z, $\xi(s) = x(s) + iy(s)$ координата текущей точки интегрирования с дуговой абсциссой s на линии.

Чтобы построить картину обтекания, надо вычислить линии тока, а так же критические линии тока, т.е. линии тока, проходящие через критические точки, в которых скорость потока обращается в ноль.

Для вычисления линий тока воспользуемся уравнением линий тока

$\Psi(x, y) = \mathrm{Im}W(z) = C$,

где $\mathrm{Im}W(z)$ – мнимая часть функции комплексного потенциала $W(z)$, C − константа.

Для построения критических линий тока продифференцируем уравнение (9):

$$\frac{dW}{dz} = v_\infty - \frac{1}{2\pi}\int_0^l \frac{\mu(s)ds}{(z-\xi(s))^2} \qquad (10)$$

и приравняем полученное выражение к 0

$$\frac{dW}{dz} = 0. \qquad (11)$$

В дальнейших расчётах можно считать $\xi(s) = s$, так как рассматривается случай прямой линии.

Вычисление интегралов производилось с помощью составной формулы средних прямоугольников для равномерных сеток

$\int_a^b f(x)dx \approx h\sum_{i=1}^{n} f(x_i - \frac{h}{2})$, где $x_i = a + ih$, $h = \frac{b-a}{n}$.

Для построения линий тока строилась прямоугольная сетка координат, в узлах которой вычислялись значения линий тока. Корни уравнения (11) находились методом половинного деления. Подставляя полученные корни в (9) и отделяя мнимую часть, получаем на критические линии тока.

Контур получаемого тела находится интегрированием дифференциального уравнения линий тока

$$\frac{dz}{d\sigma} = e^{i\theta}, \qquad (12)$$

где $d\sigma$ дуговая абсцисса линии контура, $\theta = -\arg\frac{dW}{dz}(z)$. Решение уравнения производится методом Эйлера второго порядка.

В работе было рассмотрено несколько видов распределений диполей вдоль линии:

$$\mu(s) = \cos\frac{\pi s}{2l}, \ \mu(s) = s^{\alpha}(l-s)^{\beta} f(s).$$

При распределении, заданном степенной функцией, когда вычислялась критическая точка , находящаяся справа, были возможны 2 случая: либо точка лежит на правой кромке крыла, либо находится далее в потоке. Для проверки использовался следующий метод.

$$\frac{dW}{dz}\Big|_{z=l} = v_{\infty} - \frac{1}{2\pi}\int_0^l (l-s)^{\beta-1} g(s)ds, \qquad (13)$$

$$\frac{dW}{dz}\Big|_{z=l} \geq 0. \qquad (14)$$

Если условие (14) выполнялось, то критическая точка совпадает с концом крылового профиля.

Так же был рассмотрен частный случай распределения особенностей, а именно когда $\mu(s) = const$. Этот случай был использован для тестирования В этом случае интегралы вычисляются аналитически.

$$W(z) = v_{\infty} z + \frac{\mu}{2\pi}\ln\frac{z}{z-l}, \qquad (15)$$

$$\frac{dW}{dz} = v_{\infty} - \frac{\mu l}{2\pi z(z-l)}. \qquad (16)$$

Критические точки находятся из уравнения (11). Приходим к квадратному уравнению

$$2\pi l v_{\infty} z^2 - 2\pi v_{\infty} l z - \mu l = 0, \qquad (17)$$

решая которое получаем

$$z_{1,2} = \frac{l(1 \pm \sqrt{1+\mu_1})}{2}, \text{ где } \mu_1 = \frac{2\mu}{\pi l v_{\infty}}.$$

РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТОВ.

Для проведения расчетов разработан алгоритм и составлена программа для ЭВМ на языке С++. Проведено несколько серий расчетов. Во всех расчетах полагалось $v_{\infty} = 1$, $l = 1$. В первой серии расчетов, носившей тестовый характер, рассмотрен вышеупомянутый частный случай.

На рис. 1а представлена картина течения для случая $\mu(s) = 5$, на рис.5б $\mu(s) = 1$, на рис.1в $\mu(s) = 0.5$ и на рис.1г $\mu(s) = 0.1$.

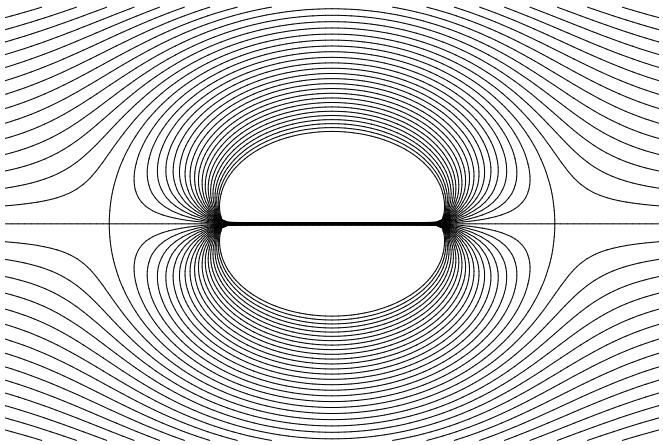

Рис.1а

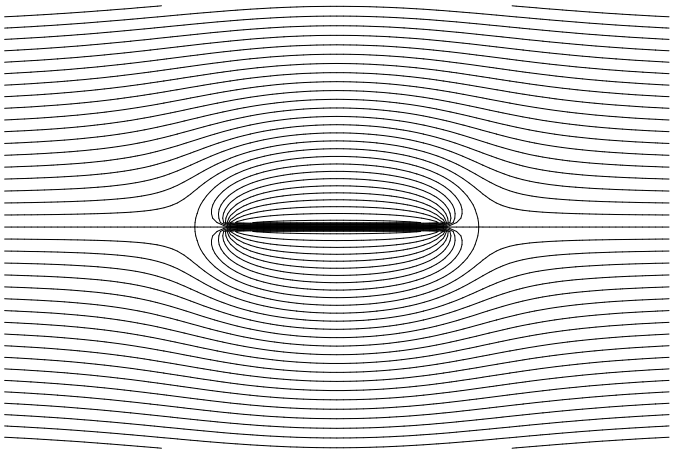

Рис.1б

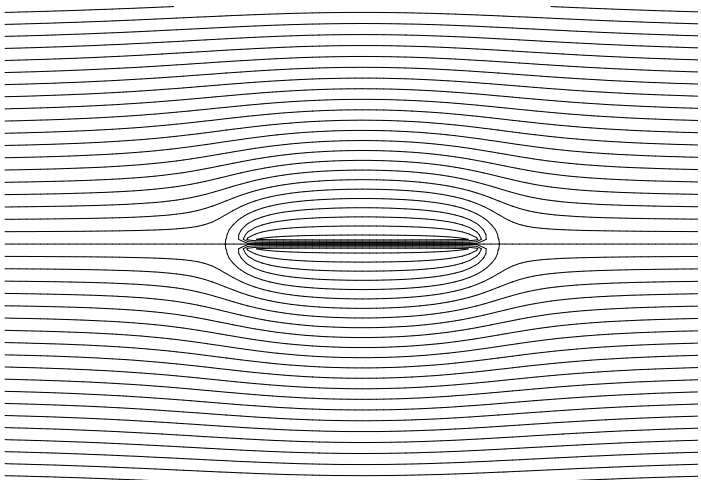

Рис.1в

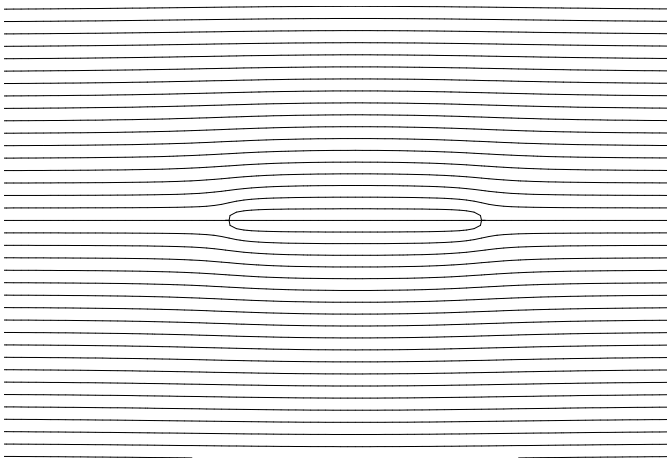

Рис.1г

На рис.2 представлены графики функций распределения.

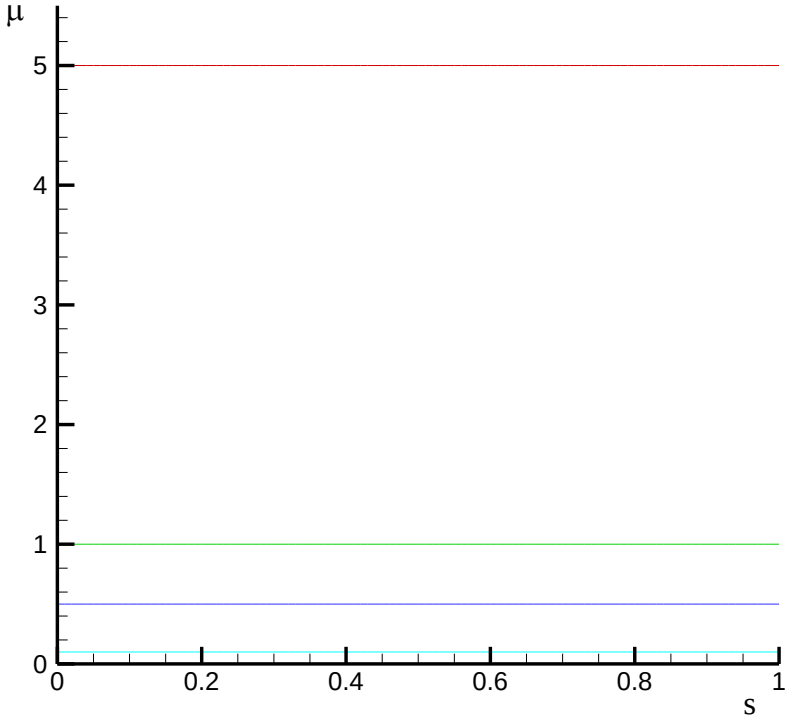

Рис.2

с (рис.3):

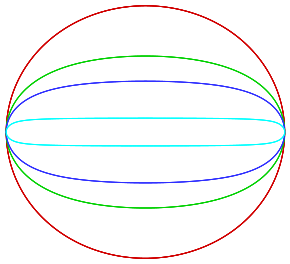

Рис.3

Здесь и далее приведены формы крыловых профилей, приведенных к единичной хорде.

Как видно из рисунков, величина $\mu(s)$ пропорциональна толщине профиля. Можно видеть, что при увеличении μ,форма профиля стремится к окружности, тогда как при $\mu(s) \to 0$ − к пластинке.

На следующем рисунке представлены распределения скоростей вдоль профиля.

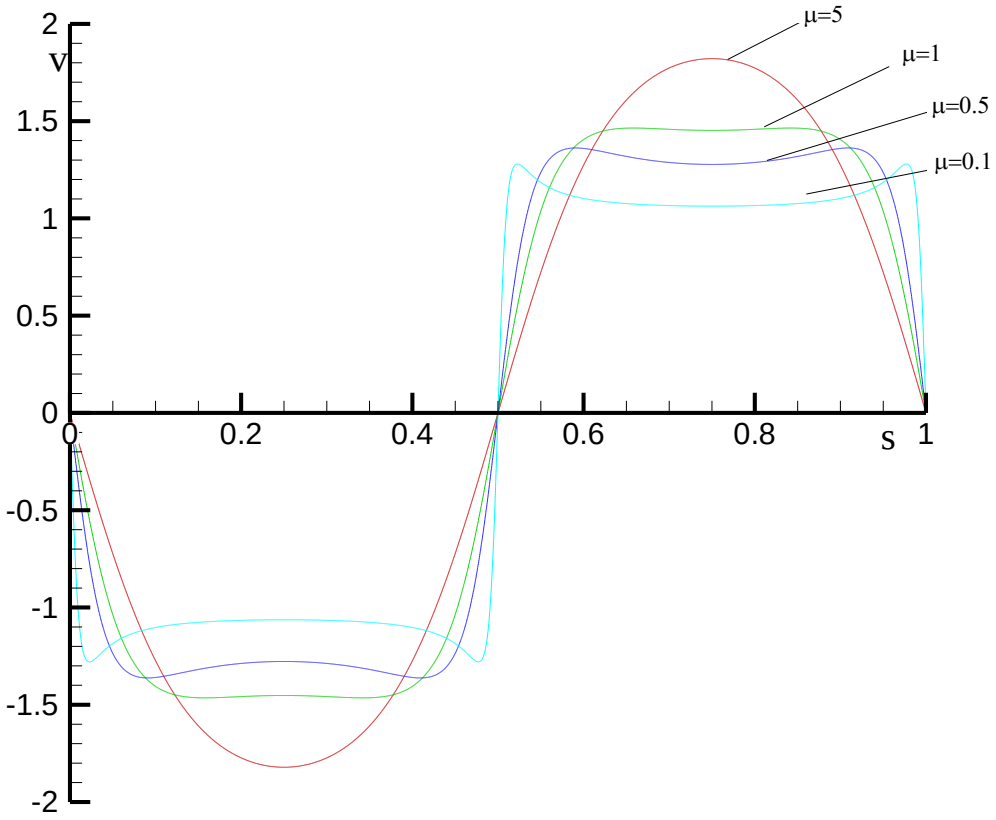

Рис.4

Во второй серии расчетов рассмотрены случаи $\mu(s) = C\cos\dfrac{\pi s}{2l}$ с различными C, на рис.5 представлены линии тока: рис.5а при $C = 5$, 5б при $C = 1$, рис. 5в $C = 0.5$ и рис 5г при $C = 0.1$.

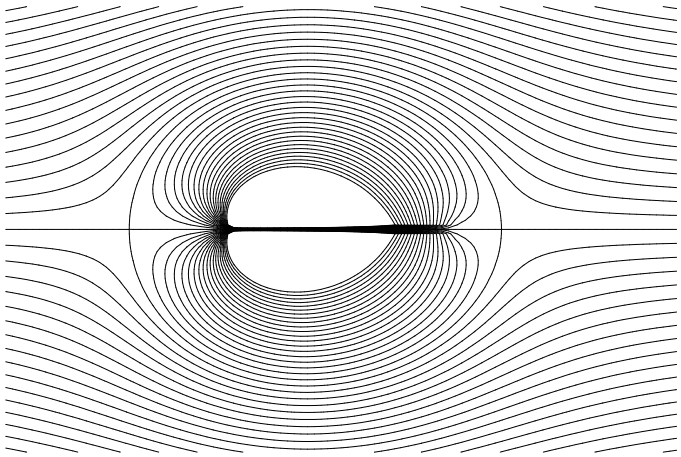

Рис.5а

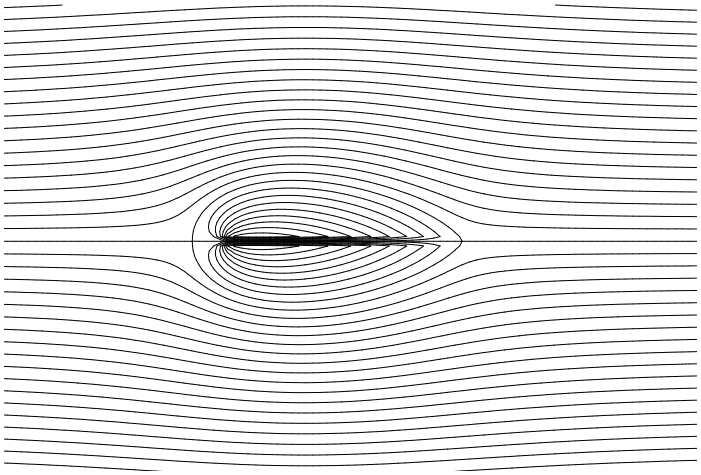

Рис.5б

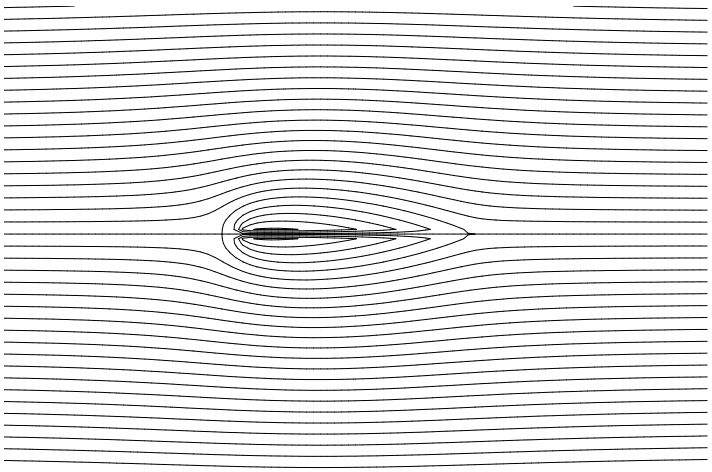

Рис.5в

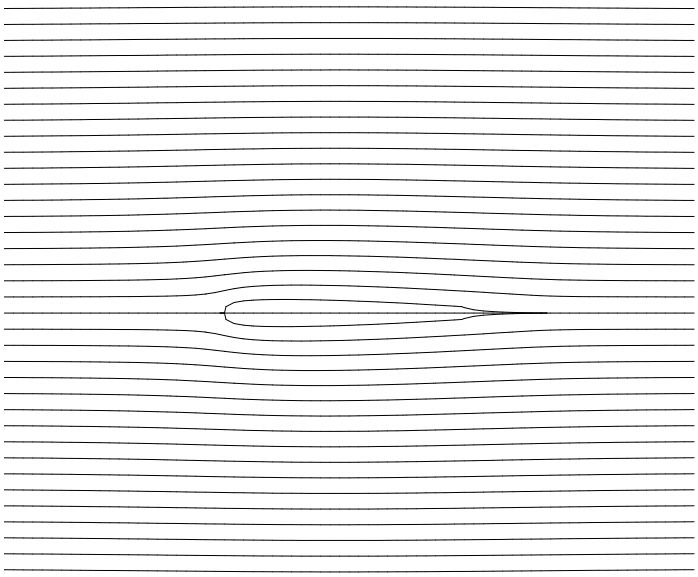

Рис.5г

Как видно из рисунков, так же как и в предыдущем случае изменение величины $\mu(s)$, вызванное изменением константы перед функцией, пропорционально толщине профиля.

На следующем графике представлена функция распределения для рассмотренных случаев

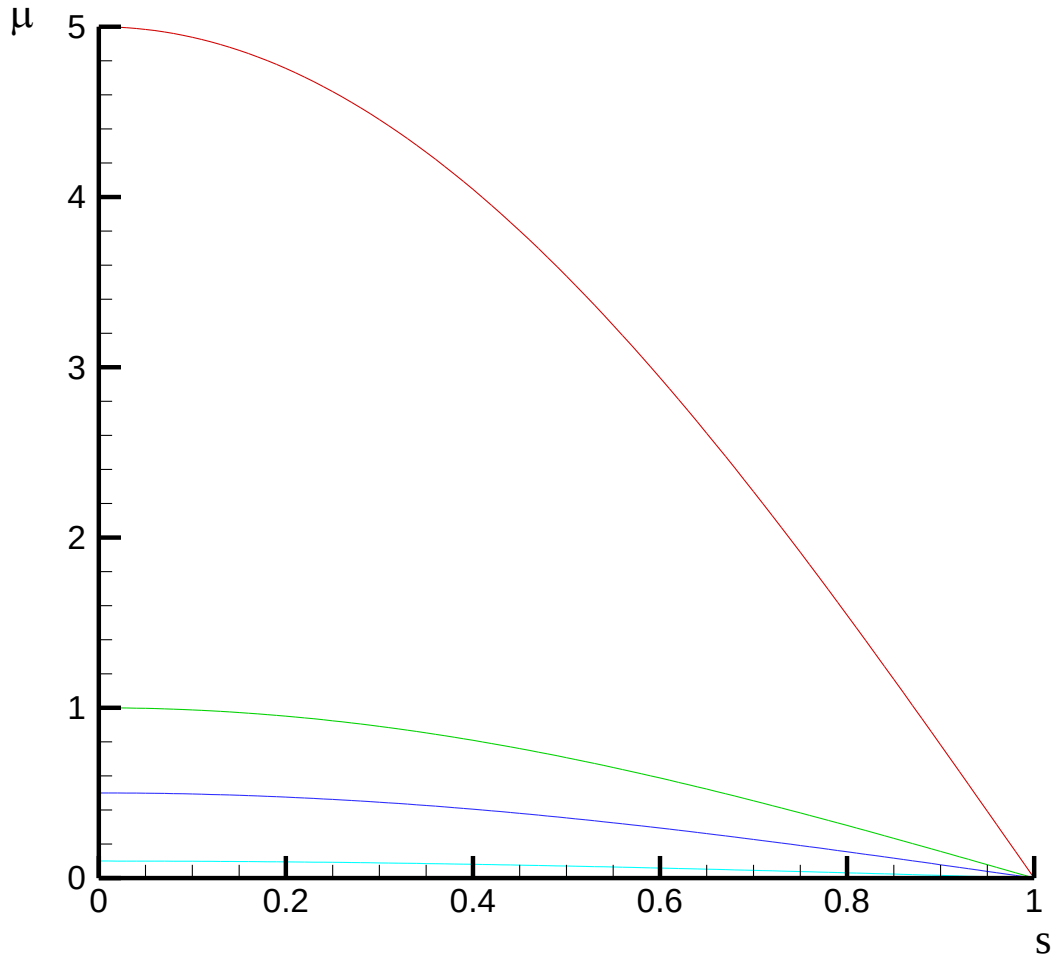

Рис.6

На рис.7 – формы полученных контуров.

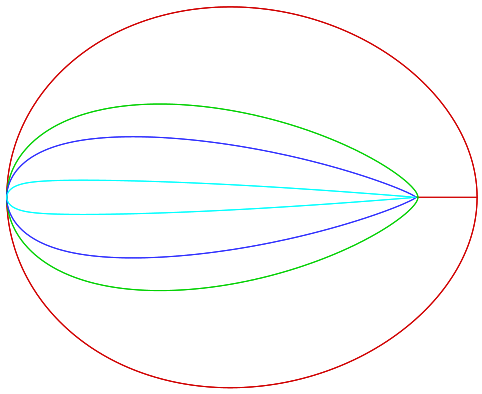

Рис.7

На рисунке видно, что в зависимости от C имеем 2 случая – когда задняя кромка профиля совпадает с последней точкой линии распределения диполей и случай, когда задняя кромка профиля уходит в поток и этот контур представляет собой гладкое тело, а не крыловой профиль с острой кромкой. На рис.8 представлены распределения скоростей вдоль профиля.

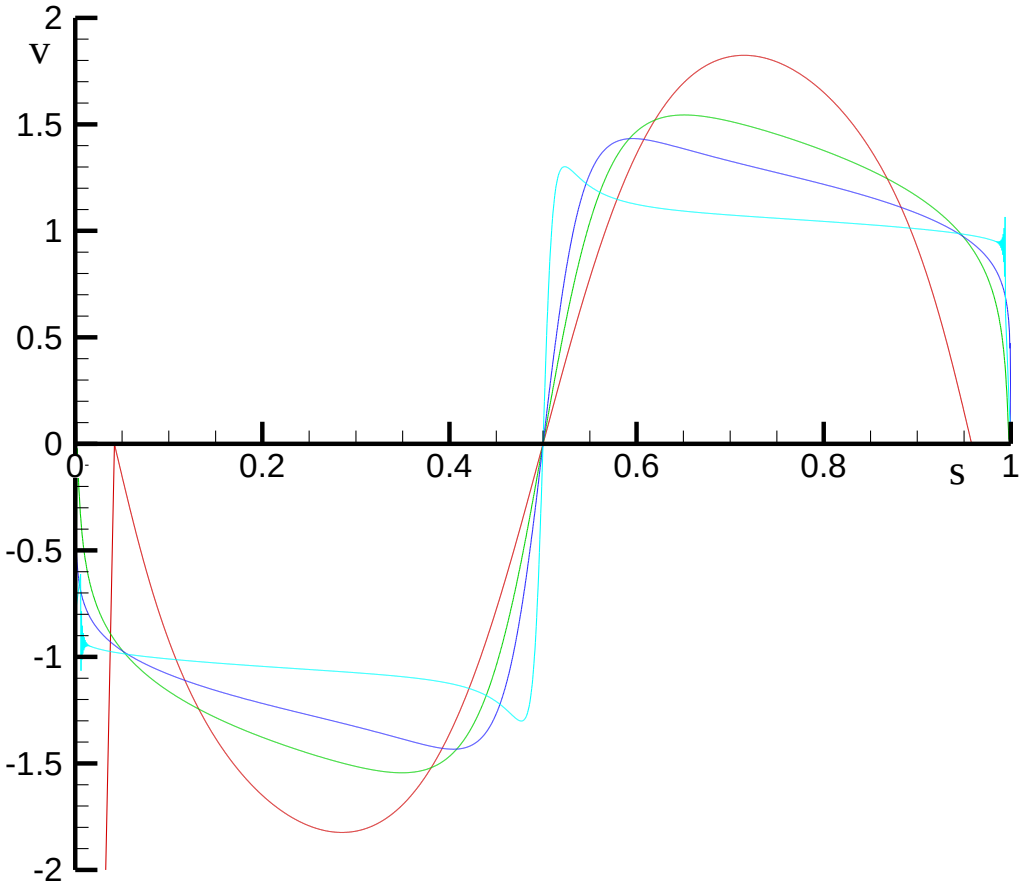

Рис.8

Для того чтобы проектировать тела, имеющие форму крылового профиля, в последней серии расчетов функцию распределения выбрали в виде $\mu(s) = s^{\alpha}(l-s)^{\beta}$, с заданным поведением вблизи передней и задней кромки. На рис. 9 варьируется α, при фиксированном $\beta = 1.5$ (рис.9а $\alpha = 1$, рис 9б $\alpha = 0.5$, рис 9в $\alpha = 0.1$).

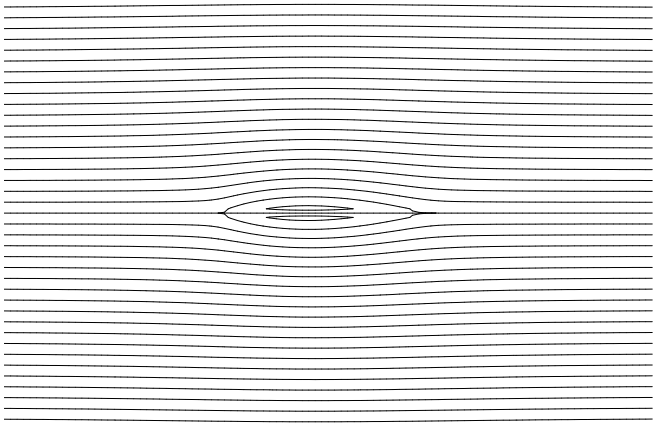

Рис. 9а

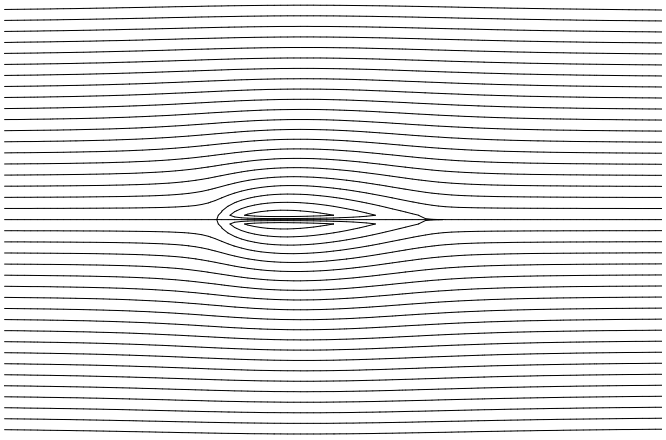

Рис. 9б

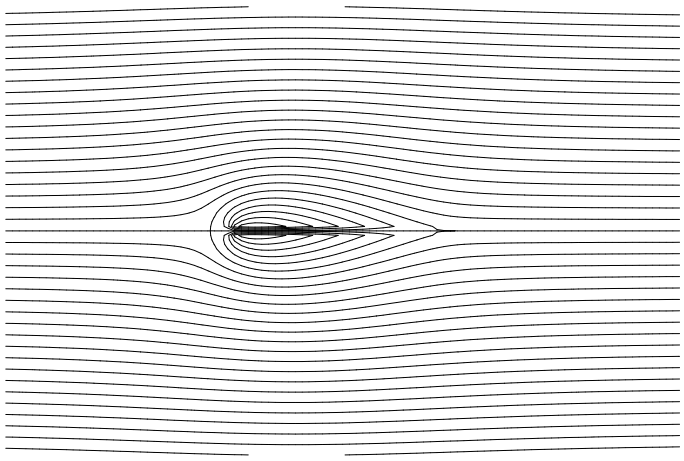

Рис. 9в

На следующем графике представлена функция распределения для рассмотренных случаев.

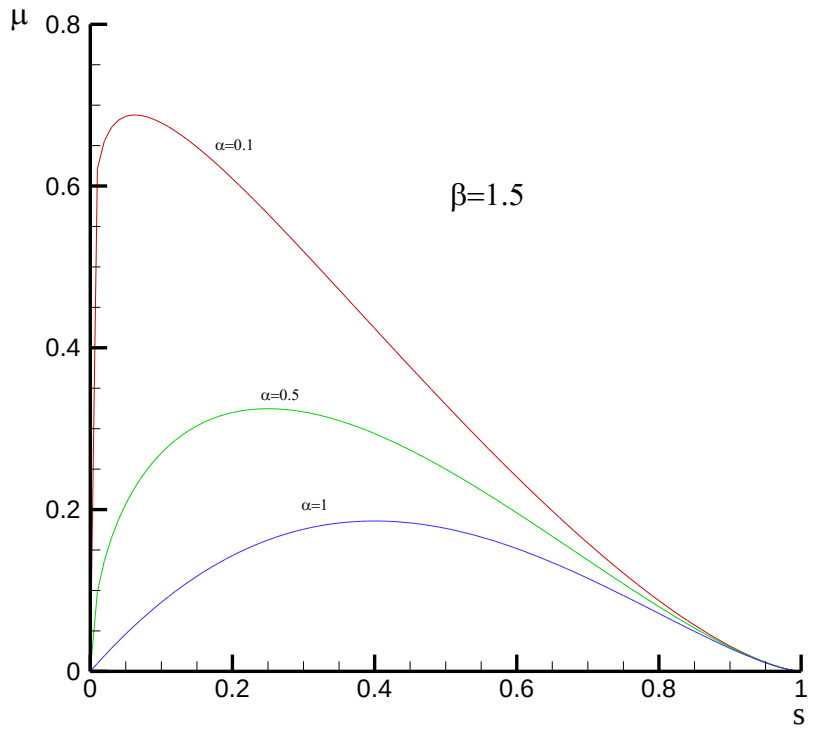

Рис.10

На рис.11 имеем полученные формы контуров.

β=1.5

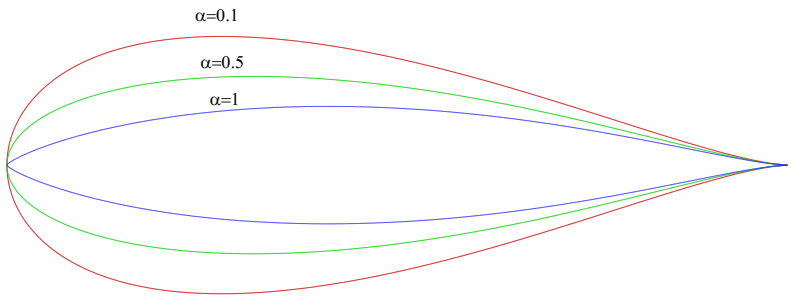

Рис.11

На рис.12 представлены распределения скоростей вдоль профиля.

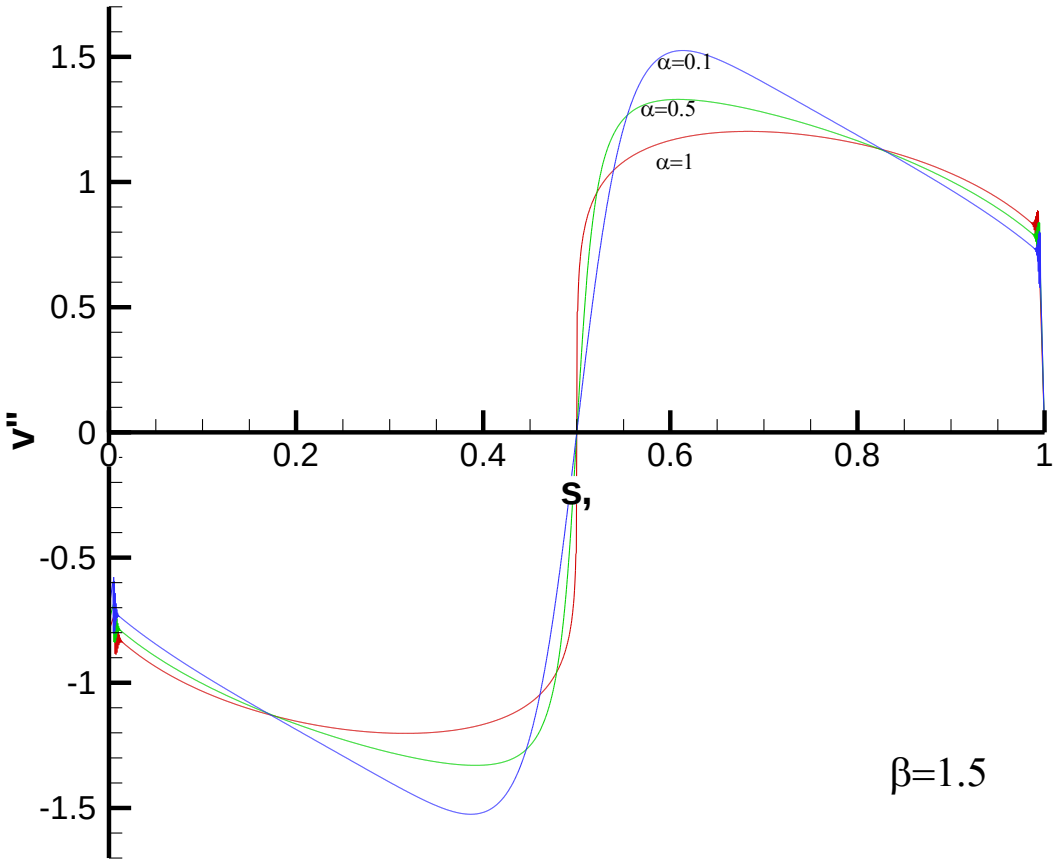

Рис.12

Далее варьируется β, при фиксированном $\alpha = 0.5$ (рис.13а $\beta = 1$, рис. 13б $\beta = 2$, рис.13в $\beta = 3$)

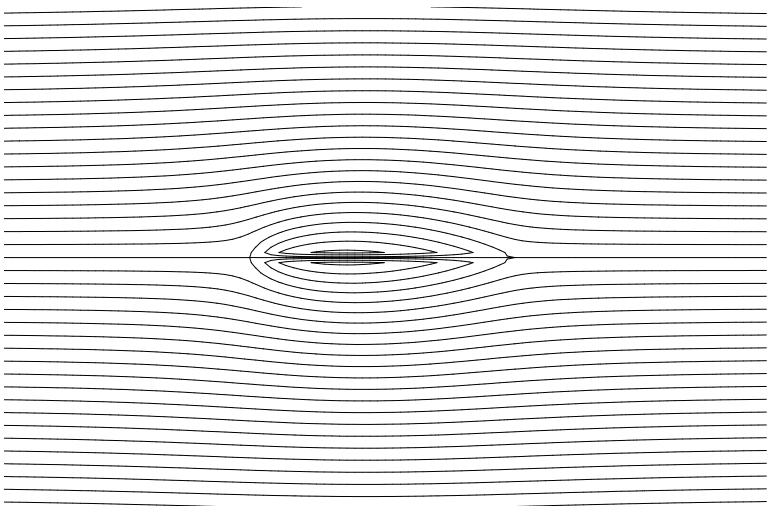

Рис.13а

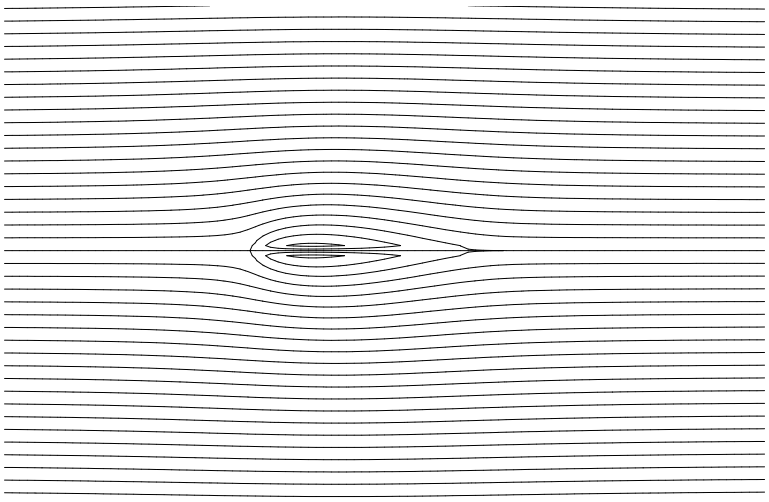

Рис.13б

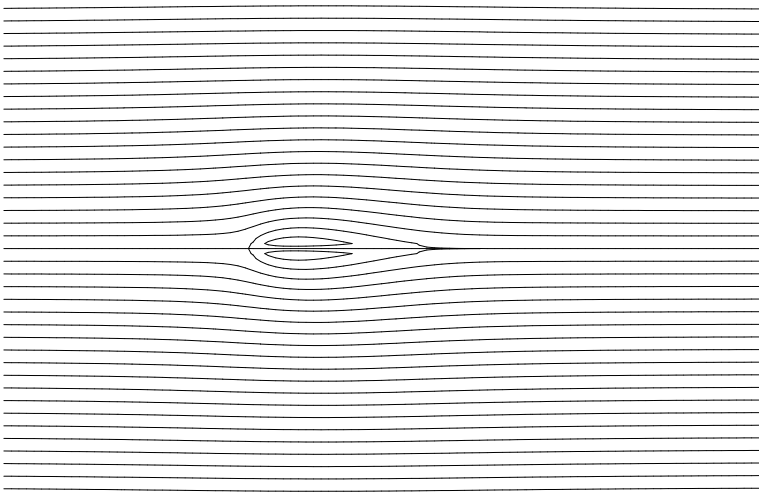

Рис.13в

На рис. 14 представлена функция распределения

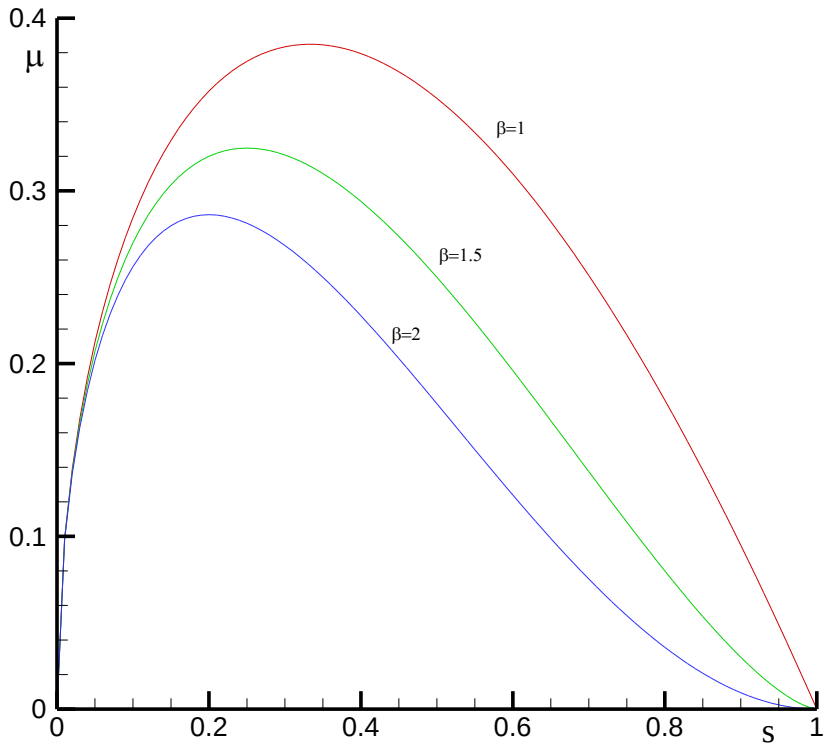

Рис.14

Далее можно видеть формы контуров для описанных случаев

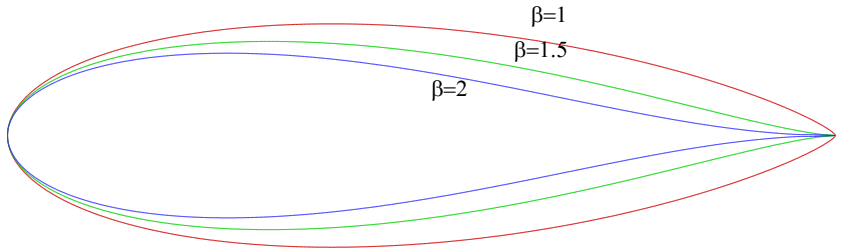

Рис.15

На рис. 16 представлены распределения скоростей

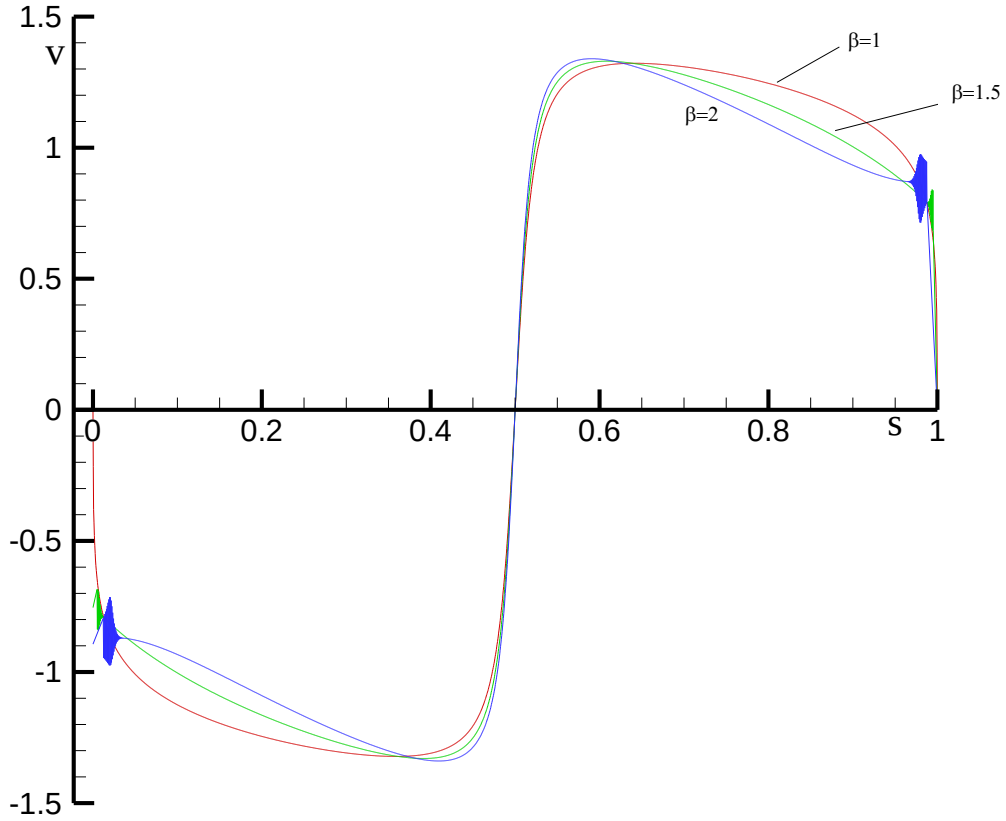

Рис.16

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Таким образом, проведен расчет обтекания диполей, распределенных вдоль прямой линии, получены фигуры, близкие к крыловым профилям, определены формы контура L_z, полученные при различных видах $\mu(s)$, получены распределения скоростей. Проведены серии тестовых и проектировочных расчетов. В дальнейшем планируется исследование распределения особенностей, распределенных вдоль некоторой кривой, что позволит проектировать крыловые профили, обладающие подъёмной силой. Сделаны следующие выводы о влиянии параметров задачи на форму крылового профиля:

- величина $\mu(s)$ пропорциональна толщине профиля;

- в случае с $\mu(s) = C\cos\frac{\pi s}{2l}$ при больших C задняя кромка профиля уходит в поток и контур представляет собой гладкое тело;

- в случае с $\mu(s) = s^{\alpha}(l-s)^{\beta}$ множитель s^{α} задаёт поведение вблизи передней кромки − толщина профиля тем больше, чем меньше параметр α, множитель $(l-s)^{\beta}$ задаёт поведение вблизи задней кромки – её толщина тем меньше, чем больше β.

СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

1. Лойцянский Л.Г. Механика жидкости и газа. 1987.
2. *Флетчер К.* Вычислительные методы в динамике жидкостей. Том 2 Методы расчета различных течений // Москва «Мир» 1991.