

УДК 514.16

РАССЛОЕНИЯ НЕЕВКЛИДОВА 3-ПРОСТРАНСТВА ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА, ПОРОЖДЕННЫЕ АЛГЕБРОЙ АНТИКВАТЕРНИОНОВ. I

Б.Н. Шапуков

Аннотация

Изучению биаксиальных и связанных с ними пространств А.П. Норден посвятил несколько своих работ. Он заинтересовался этим классом пространств с точки зрения применения алгебр комплексных, двойных и дуальных чисел, имея прежде всего ввиду приложения к линейчатой геометрии неевклидовых пространств (см., например, [2]). Из этих его работ в дальнейшем и развилась общая теория пространств над алгебрами [3].

Если \mathfrak{A} – некоторая алгебра, то ее проективизация приводит к проективному пространству, наделенному некоторой структурой. Так, при проективизации алгебры кватернионов получим 3-мерное эллиптическое пространство. Подобным же образом алгебра антикватернионов определяет 3-мерное гиперболическое пространство с линейчатым абсолютом. В этой связи представляют интерес расслоения неевклидовых пространств, возникающие с помощью подалгебр (расслоение эллиптического 3-пространства, порожденное алгеброй кватернионов, было рассмотрено в [4]). Как известно [5], алгебра антикватернионов содержит все три типа подалгебр второго порядка: комплексных, двойных и дуальных чисел. В этой статье рассматривается расслоение 3-мерного гиперболического пространства, порожденное подалгеброй комплексных чисел. Построена нормализация расслаивающей линейной конгруэнции и выяснен геометрический смысл полученных объектов.

1. Расслоение, порожденное подалгеброй комплексных чисел

Алгебра \mathfrak{A} антикватернионов [6] – это 4-мерная ассоциативная неприводимая алгебра с единицей, которая допускает сопряжение $x \rightarrow \bar{x}$ и невырожденное скалярное произведение¹

$$(x, y) = \frac{1}{2}(x\bar{y} + y\bar{x}). \quad (1)$$

Оно определяет в \mathfrak{A} структуру 4-мерного псевдоевклидова пространства E_2^4 . Элементы алгебры, для которых $a^2 = a\bar{a} \neq 0$, обратимы: $a^{-1} = \bar{a}/|a|^2$. Они образуют группу Ли $G \subset \mathfrak{A}$. Необратимые элементы образуют изотропный конус пространства: $x^2 = 0$.

Выберем в \mathfrak{A} ортонормированный базис $\{\mathbf{1}, e_i\}$, комплексные единицы которого умножаются согласно таблице

	e_1	e_2	e_3
e_1	1	e_3	e_2
e_2	$-e_3$	1	$-e_1$
e_3	$-e_2$	e_1	-1

¹Заметим, что среди алгебр 4-го порядка только алгебры кватернионов и антикватернионов имеют невырожденное скалярное произведение, соответственно евклидово и псевдоевклидово.

Отсюда видно, что всякий антикватернион $\mathbf{x} = x^0 + x^1\mathbf{e}_1 + x^2\mathbf{e}_2 + x^3\mathbf{e}_3$ можно записать в виде

$$\mathbf{x} = z_1 + z_2\mathbf{e}_2, \quad z_k \in \mathbb{R}(e_3),$$

где комплексные числа

$$z_1 = x^0 + x^3\mathbf{e}_3, \quad z_2 = x^2 + x^1\mathbf{e}_3.$$

Тогда умножение антикватернионов \mathbf{x} и $\mathbf{y} = w_1 + w_2\mathbf{e}_2$ определяется формулой

$$\mathbf{x}\mathbf{y} = (z_1w_1 + z_2\bar{w}_2) + (z_1w_2 + z_2\bar{w}_1)\mathbf{e}_2, \quad (2)$$

сопряжение имеет вид $\bar{\mathbf{x}} = \bar{z}_1 - z_2\mathbf{e}_2$, а скалярный квадрат антикватерниона равен

$$\mathbf{x}^2 = (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2.$$

Как показано в [5], алгебра антикватернионов содержит 2-мерные подалгебры всех трех типов: комплексных, двойных и дуальных чисел. В этом параграфе мы рассмотрим подалгебру комплексных чисел $\mathbb{C} = \mathbb{R}(e_3)$. Она определяется уравнением $z_2 = 0$, а множество ее ненулевых элементов \mathbb{C}_o есть подгруппа Ли группы G . Рассмотрим фактор-пространство правых смежных классов G/\mathbb{C}_o . Если элементы \mathbf{x} и \mathbf{y} принадлежат одному смежному классу, то $\mathbf{x}\mathbf{y}^{-1} \in \mathbb{C}_o$, откуда получим два условия

$$z_1w_2 - z_2w_1 = 0, \quad z_1\bar{w}_1 - z_2\bar{w}_2 \neq 0.$$

Первое из них дает $z_1 : z_2 = w_1 : w_2$, и имеем каноническую проекцию $\pi : G \rightarrow \mathbb{CP}^1$ в комплексную проективную прямую, определяемую формулой

$$\pi(\mathbf{x}) = (z_1 : z_2). \quad (3)$$

Второе условие означает, что образом проекции является подмножество $M \subset \mathbb{CP}^1$, для которого $z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 \neq 0$. Тем самым исключаются точки подмножества $C \subset \mathbb{CP}^1$, соответствующие изотропному конусу.

Теорема 1. *Расслоение $\pi : G \rightarrow M$ есть несвязное обединение двух тривиальных главных расслоений.*

Доказательство. Комплексное многообразие M можно реализовать как открытое вещественное подмногообразие конформной плоскости (или 2-сферы) без окружности единичного радиуса. Поэтому M состоит из двух связных компонент: $M = U \cup V$. Рассмотрим сначала ограничение расслоения π на область $U : z_1\bar{z}_1 - z_2\bar{z}_2 > 0$. Так как в ней $z_1 \neq 0$, то можно ввести неоднородную координату $z = z_2/z_1$ и, следовательно, имеем круг единичного радиуса $z\bar{z} < 1$. Пусть антикватернион $\mathbf{x} \in \pi^{-1}(U)$. Представив его в виде $\mathbf{x} = z_1(1 + z\mathbf{e}_2)$, рассмотрим биективное отображение $\varphi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{C}_o$ по формуле $\varphi(\mathbf{x}) = (z, z_1)$. Обратно, для любого $z \in U$ и $a \in \mathbb{C}_o$ определен антикватернион $\varphi^{-1}(z, a) = a(1 + z\mathbf{e}_2)$. Нетрудно видеть, что это диффеоморфизм, определяющий тривиализацию расслоения $\pi|_U$. Чтобы доказать тривиальность расслоения $\pi|_V$, достаточно применить инверсию $U \rightarrow V : w = 1/z$. \square

Замечание 1. Впрочем, проекция (3) имеет смысл для любых $\mathbf{x} \neq 0$. Поэтому расслоение $G \rightarrow M$ можно расширить до расслоения ненулевых антикватернионов $\pi : \mathfrak{A}_o \rightarrow \mathbb{CP}^1$, что мы и будем предполагать в дальнейшем.

Рассмотрим проективизацию этого расслоения [9]. Заметим сначала, что проективизация $\lambda : \mathfrak{A}_o \rightarrow \mathbb{P}^3$, которая всякому $\mathbf{x} \in \mathfrak{A}_o$ ставит в соответствие точку $X \in \mathbb{P}^3$ проективного пространства, определяет гиперболическое пространство S_2^3 , линейчатая квадрика которого

$$Q : (x^0)^2 - (x^1)^2 - (x^2)^2 + (x^3)^2 = 0 \quad (4)$$

порождается изотропным конусом.

Теорема 2. *Подалгебра комплексных чисел алгебры антикватернионов определяет тривиальное главное расслоение пространства S_2^3 с помощью линейной конгруэнции эллиптического типа.*

Доказательство. Коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccccc} \mathfrak{A}_o & \longleftrightarrow & \xrightarrow{\lambda} & \longleftrightarrow & S_2^3 \\ \pi \searrow & & & \swarrow p & \\ & & \mathbb{C}P^1 & & \end{array}$$

с проекцией $p(X) = (z_1 : z_2)$ определяет расслоение этого неевклидова пространства линейной конгруэнцией прямых \mathbb{K} . Ясно, что это расслоение также тривиально. В главном расслоении π имеется структурная группа \mathbb{C}_o , которая действует левыми сдвигами $\mathbf{x}' = a\mathbf{x}$, $a \in \mathbb{C}_o$ или согласно (2) $z'_1 = az_1$, $z'_2 = az_2$. Однако в S_2^3 это действие неэффективно и имеет ядро \mathbb{R}_o . Поэтому структурной группой расслоения p является фактор-группа $\mathbb{C}_o/\mathbb{R}_o$, изоморфная группе Ли комплексных чисел единичного модуля S . В результате получим

$$z'_1 = e^{i\varphi} z_1, \quad z'_2 = e^{i\varphi} z_2$$

или в вещественных однородных координатах

$$\begin{aligned} x^0(\varphi) &= x^0 \cos \varphi - x^3 \sin \varphi, & x^1(\varphi) &= x^1 \cos \varphi + x^2 \sin \varphi, \\ x^2(\varphi) &= -x^1 \sin \varphi + x^2 \cos \varphi, & x^3(\varphi) &= x^0 \sin \varphi + x^3 \cos \varphi. \end{aligned} \quad (5)$$

Эти преобразования, которые мы обозначим $\mathbf{x}' = A(\varphi)\mathbf{x}$, $A(\varphi) \in S$, естественно называть *левыми параметрическими сдвигами*. Так как при таких сдвигах (при согласованной нормировке) $\mathbf{x}'^2 = \mathbf{x}^2$, то если $\mathbf{x}^2 \neq 0$, орбиты не имеют точек на абсолюте, т. е. конгруэнция состоит из эллиптических прямых. Если же $\mathbf{x}^2 = 0$, то соответствующая прямая конгруэнции принадлежит абсолюту, являясь его образующей. Такие прямые образуют одно из 1-параметрических семейств образующих квадрики, являющихся прообразами точек окружности C . \square

Отождествляя $\mathbb{C}P^1$ с конформной плоскостью, проекцию расслоения локально можно записать в вещественных координатах. Пусть, например, $z \in U$. Положив $z = u + v\mathbf{e}_3$, получим

$$u = \frac{x^0 x^2 + x^1 x^3}{(x^0)^2 + (x^3)^2}, \quad v = \frac{x^0 x^1 - x^2 x^3}{(x^0)^2 + (x^3)^2}.$$

Найдем неявные уравнения слоев. В рассматриваемой области $z_2 - zz_1 = 0$, откуда получим систему двух линейных уравнений

$$\xi(\mathbf{x}) = x^1 - vx^0 - ux^3 = 0, \quad \eta(\mathbf{x}) = x^2 - ux^0 + vx^3 = 0. \quad (6)$$

С помощью инверсии $w = 1/z$, положив $w = u' + v'\mathbf{e}_3$, получим над областью V аналогичную систему

$$\xi'(\mathbf{x}) = x^0 + v'x^1 - u'x^2 = 0, \quad \eta'(\mathbf{x}) = x^3 - u'x^1 - v'x^2 = 0, \quad (7)$$

Параметры (u, v) и (u', v') семейств связаны соотношениями

$$u' = \frac{u}{u^2 + v^2}, \quad v' = \frac{-v}{u^2 + v^2}.$$

Что касается слоев над окружностью S , то в силу условия $u^2 + v^2 = 1$ обе системы совпадают.

Нетрудно проверить, что приведенные выше параметрические уравнения слоев (5) после исключения параметра сводятся к (6) или (7) в зависимости от положения точки $z = \pi(\mathbf{x})$.

Рассмотрим в \mathfrak{A}_o преобразования вида

$$\mathbf{x}' = \mathbf{a}\mathbf{x}\mathbf{b}, \quad \mathbf{x}' = \mathbf{a}\bar{\mathbf{x}}\mathbf{b}, \quad \mathbf{a}, \mathbf{b} \in G. \quad (8)$$

Известно ([6], гл. 12), что эти преобразования описывают полную группу подобий (при $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 > 0$) и антиподобий (при $|\mathbf{a}|^2|\mathbf{b}|^2 < 0$) первого и второго родов пространства антикватернионов относительно скалярного произведения (1). Отсюда следует, что формулы (8) определяют полную группу движений гиперболического пространства. Она зависит от шести параметров и состоит из 4-х связных компонент. Рассмотрим отдельно правые и левые сдвиги, положив $\mathbf{a} = a_1 + a_2\mathbf{e}_2$ и $\mathbf{b} = b_1 + b_2\mathbf{e}_2$. Здесь $a_1 = a^0 + a^3\mathbf{e}_3$, $a_2 = a^2 + a^1\mathbf{e}_3$ и аналогично b_1, b_2 – комплексные числа.

Теорема 3. Правые сдвиги $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in G$ пространства \mathfrak{A}_o определяют в S_2^3 3-параметрическую подгруппу Ли $B \subset G$ движений $\mathbf{x}' = B\mathbf{x}$ с матрицей

$$B = \begin{pmatrix} b^0 & b^1 & b^2 & -b^3 \\ b^1 & b^0 & -b^3 & b^2 \\ b^2 & b^3 & b^0 & -b^1 \\ b^3 & b^2 & -b^1 & b^0 \end{pmatrix}. \quad (9)$$

Она сохраняет расслоение и индуцирует на базе подгруппы проективных преобразований, которые в однородных координатах имеют вид

$$z'_1 = b_1 z_1 + \bar{b}_2 z_2, \quad z'_2 = b_2 z_1 + \bar{b}_1 z_2. \quad (10)$$

Доказательство. Правые сдвиги $\mathbf{x}' = \mathbf{x}\mathbf{b}$, $\mathbf{b} \in G$ преобразуют правые смежные классы в правые. Поэтому они сохраняют расслоение π , а определяемые ими движения в S_2^3 сохраняют расслоение p . Отсюда следует, что правые сдвиги индуцируют на базе $\mathbb{C}P^1$ некоторую группу преобразований. Найдем эти преобразования. Используя формулу (2), получим в \mathfrak{A}_o линейные преобразования в комплексном виде (10). Переходя к вещественным координатам и затем рассмотрев их как однородные, получим в пространстве S_2^3 3-параметрическую группу проективных преобразований с матрицей (9). С другой стороны, формулы (10) индуцируют в $\mathbb{C}P^1$ проективные преобразования однородных координат. \square

Эти преобразования можно записать в неоднородных координатах. Тогда для $z \in U$ и $w \in V$ получим соответственно

$$z' = \frac{\bar{b}_1 z + b_2}{\bar{b}_2 z + b_1}, \quad w' = \frac{b_1 \tilde{w} + \bar{b}_2}{b_2 \tilde{w} + \bar{b}_1}.$$

Заметим, что детерминант $\det B = (b_1\bar{b}_1 - b_2\bar{b}_2)^2 = |\mathbf{b}|^4 \neq 0$ определен в S_2^3 с точностью до вещественного положительного множителя. Поэтому можно считать, что $\det B = 1$. Группа (9) состоит из двух компонент – движений первого (при $|\mathbf{b}|^2 > 0$) и второго (при $|\mathbf{b}|^2 < 0$) рода. При этом связная компонента единицы изоморфна специальной псевдоунитарной группе $SU(1, 1)$. Отметим также, что преобразование группы (10), преобразующее слои в себя, может быть только тождественным.

Рассмотрим теперь левые сдвиги $\mathbf{x}' = \mathbf{ax}$, $\mathbf{a} \in G$. Используя опять формулу (2), получим

$$z'_1 = a_1 z_1 + a_2 \bar{z}_2, \quad z'_2 = a_2 \bar{z}_1 + a_1 z_2. \quad (11)$$

В пространстве S_2^3 этим преобразованиям соответствуют преобразования однородных координат с матрицей

$$A = \begin{pmatrix} a^0 & a^1 & a^2 & -a^3 \\ a^1 & a^0 & a^3 & -a^2 \\ a^2 & -a^3 & a^0 & a^1 \\ a^3 & -a^2 & a^1 & a^0 \end{pmatrix}. \quad (12)$$

Теорема 4. Преобразования (12) образуют в пространстве S_2^3 3-параметрическую подгруппу Ли движений $A \subset G$. Она, вообще говоря, не сохраняет расслоение, но содержит 1-параметрическую подгруппу левых сдвигов структурной группы S этого расслоения. В частности, она содержит абсолютную инволюцию пространства.

Доказательство. Первое утверждение очевидно. Далее, рассматривая отношение $z'_1 : z'_2$, найдем, что оно совпадает с отношением $z_1 : z_2$ исходных координат лишь при условии $a_2 = 0$. Это значит, что $\mathbf{a} \in \mathbb{C}_o$, а преобразование $\mathbf{x}' = \mathbf{ax}$ является в этом случае левым действием структурной группы расслоения. В S_2^3 оно индуцирует преобразование $\mathbf{x}' = A(\varphi)\mathbf{x}$, рассмотренное в теореме 2. В силу (5)

$$A(\varphi) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & 0 & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & \cos \varphi & \sin \varphi & 0 \\ 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi & 0 \\ \sin \varphi & 0 & 0 & \cos \varphi \end{pmatrix}.$$

В частности, из левых сдвигов, определяемых базисными единицами \mathbf{e}_k алгебры, только преобразование $I : \mathbf{x}' = \mathbf{e}_3\mathbf{x}$ является паратактическим. Так как $I = A(\pi/2)$, оно имеет матрицу

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}. \quad (13)$$

Это абсолютная инволюция пространства S_2^3 . □

Теорема 5. Пространство S_2^3 имеет структуру биаксиального пространства эллиптического типа с аффинором абсолютной инволюции I , по отношению к которому метрика пространства является эрмитовой, а конгруэнция \mathbb{K} абсолютной линейной конгруэнцией.

Доказательство. Первое утверждение следует из свойства $I^2 = -\text{Id}$. Этот аффинор, таким образом, задает в S_2^3 инволюцию эллиптического типа. Кроме

того, I определяется левым сдвигом и поэтому сохраняет скалярное произведение (1): $(Ix, Iy) = (x, y)$. Вследствие этого при $x \in Q$ точки x и $\tilde{x} = Ix$ сопряжены относительно абсолюта Q . В силу теоремы 4 их можно взять в качестве опорных точек прямых h конгруэнции \mathbb{K} . Аффинор I , таким образом, вполне определяет конгруэнцию. При этом (в согласованной нормировке) $\tilde{x}^2 = x^2$. Отсюда следует, что прямая конгруэнции принадлежит той области $p^{-1}(U)$ или $p^{-1}(V)$, в которой находится исходная точка x . \square

Заметим, что если $x \in Q$, то также $Ix \in Q$, а прямая $h(x, Ix)$ является обра- зующей квадрики Q .

Теорема 6. *Группа движений пространства S_2^3 распадается в прямое произведение своих подгрупп A и B .*

Доказательство. Всякое движение пространства S_2^3 в силу (8) определяется композицией правого и левого сдвигов, причем в любом порядке. С другой стороны, $A \cap B = \text{Id}$. В самом деле, предположим, что существуют элементы $a, b \in G$ такие, что $ax = xb$ для любого $x \neq 0$. Вследствие линейности здесь в качестве x достаточно выбрать базисные элементы алгебры \mathfrak{A} . Тогда получим $a = b = \lambda \in \mathbb{R}_+$. Но гомотетии $x' = \lambda x$ определяют в пространстве S_2^3 лишь тождественное преобразование. \square

Аналогично возникает расслоение пространства S_2^3 , определяемое левыми смежными классами по подгруппе \mathbb{C}_o . Элементы x и y группы G принадлежат одному левому смежному классу по этой подгруппе, если $x^{-1}y \in \mathbb{C}_o$. Отсюда получаем условия

$$\bar{z}_1 w_2 - z_2 \bar{w}_1 = 0, \quad \bar{z}_1 w_1 - z_2 \bar{w}_2 \neq 0.$$

Из них следует $\bar{z}_1 : z_2 = \bar{w}_1 : w_2$. Это означает, что имеем расслоение $p' : S_2^3 \rightarrow M \subset \mathbb{CP}^1$, которое определяется проекцией $p'(\mathbf{x}) = (\bar{z}_1 : z_2)$. Его слоями являются прямые линейной конгруэнции эллиптического типа \mathbb{K}' . Например, для $z = z^2/\bar{z}^1 \in U$ они имеют уравнения

$$x^1 - vx^0 + ux^3 = 0, \quad x^2 - ux^0 - vx^3 = 0,$$

аналогичные (6). Отсюда видно, что симметрия $x^3 \rightarrow -x^3$ переводит конгруэнцию \mathbb{K} в конгруэнцию \mathbb{K}' , взаимную с \mathbb{K} .

Что касается группы движений, то теорема 6 остается справедливой и в этом случае, однако подгруппы A и B меняются ролями. Преобразования подгруппы A , порожденные левыми сдвигами $x' = ax$, сохраняют расслоение p' . Подгруппа B этим свойством в целом не обладает, но содержит подгруппу S , действующую на расслоении p' справа. В самом деле, преобразования (10) индуцируют тождественное преобразование базы этого расслоения при условии $b_2 = 0$. Здесь можно считать, что $b_1 \in S$, и тогда эти преобразования принимают вид

$$z'_1 = e^{i\psi} z_1, \quad z'_2 = e^{-i\psi} z_2.$$

В S_2^3 им соответствуют преобразования 1-параметрической группы $B(\psi)$, которые в однородных координатах имеют вид

$$x^0(\psi) = x^0 \cos \psi - x^3 \sin \psi, \quad x^1(\psi) = x^1 \cos \psi - x^2 \sin \psi,$$

$$x^2(\psi) = x^1 \sin \psi + x^2 \cos \psi, \quad x^3(\psi) = x^0 \sin \psi + x^3 \cos \psi.$$

Эти преобразования, орбитами которых являются прямые взаимной конгруэнции, аналогичны (5). Назовем их *правыми паратактическими сдвигами*. В частности,

$J = B(\pi/2)$, $J^2 = -\text{Id}$ есть аффинор взаимной абсолютной инволюции эллиптического типа. Отметим, что при $\mathbf{x} \in Q$ соответствующие прямые конгруэнции образуют второе семейство образующих этой квадрики.

2. Нормализация конгруэнции

Рассмотрим конгруэнцию \mathbb{K} , порожденную правыми смежными классами. Для точек пространства, не принадлежащих абсолюту, выберем каноническое нормирование $\mathbf{x}^2 = \varepsilon = \pm 1$. Другими словами, мы задаем их точками 3-сфер единичного и мнимоединичного радиуса псевдоевклидова пространства, которые 2-листно накрывают пространство S_2^3 .

Пусть h – прямые конгруэнции, принадлежащие для определенности области $p^{-1}(U)$ над кругом U . Учитывая (6), их базисные точки можно выбрать, например, так:

$$\mathbf{a} = \frac{1}{\sqrt{R}}(0 : u : -v : 1), \quad \tilde{\mathbf{a}} = \frac{1}{\sqrt{R}}(1 : v : u : 0), \quad (14)$$

где в рассматриваемой области $R = 1 - u^2 - v^2 > 0$, а точка \mathbf{a} выбрана в плоскости $x^0 = 0$. Тогда параметрические уравнения прямых получим в виде

$$h : \quad \mathbf{x}(\varphi) = \mathbf{a} \cos \varphi + \tilde{\mathbf{a}} \sin \varphi. \quad (15)$$

Здесь φ имеет смысл кратчайшего расстояния точки $\mathbf{x}(\varphi)$ до начальной точки \mathbf{a} .

Введем в этой области пространства S_2^3 криволинейные координаты, адаптированные к расслоению. В качестве базисных координат выберем гауссовые координаты $(u^i) = (u, v)$ точки $z = p(\mathbf{x})$, а слоевой координаты – параметр φ левого паратактического сдвига в соответствии с уравнением (15). Тогда операторы $\{\partial_A\} = \{\partial_i, \partial_\varphi\}$ образуют натуральный репер в точке \mathbf{x} , применив которые к \mathbf{x} , получим

$$\partial_1 \mathbf{x} = \partial_1 \mathbf{a} \cos \varphi + \partial_1 \tilde{\mathbf{a}} \sin \varphi, \quad \partial_2 \mathbf{x} = \partial_2 \mathbf{a} \cos \varphi + \partial_2 \tilde{\mathbf{a}} \sin \varphi, \quad \partial_3 \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}.$$

Найдем матрицу метрического тензора в этом репере. Так как левые паратактические сдвиги являются движениями пространства, то компоненты этой матрицы $g_{AB} = (\partial_A \mathbf{x}, \partial_B \mathbf{x})$ достаточно вычислить в точке $\mathbf{a} = \mathbf{x}(0)$. В результате получим

$$(g_{AB}) = \frac{1}{R^2} \begin{pmatrix} v^2 - 1 & -uv & -Rv \\ -uv & u^2 - 1 & Ru \\ -Rv & Ru & R^2 \end{pmatrix}. \quad (16)$$

Это метрика пространства постоянной отрицательной кривизны. В силу ее S -инвариантности компоненты метрического тензора, как и следовало ожидать, зависят лишь от базисных координат.

Построим нормализацию конгруэнции, применяя результаты А.П. Широкова [7]. С этой целью присоединим к произвольной точке рассматриваемой области проективный репер, за две вершины которого примем точки $\mathbf{x} \in h$ и $\tilde{\mathbf{x}} = I\mathbf{x} \in h$. Еще две вершины \mathbf{y}_i ($i = 1, 2$) выберем на поляре \tilde{h} прямой h , положив

$$\mathbf{y}_i = \partial_i \mathbf{x} - \Gamma_i \tilde{\mathbf{x}}, \quad (17)$$

где Γ_i – некоторые функции криволинейных координат $(u^A) = (u, v, \varphi)$. Условием $\mathbf{y}_i \in \tilde{h}$ эти функции определяются однозначно: $\Gamma_i = (\tilde{\mathbf{x}}, \partial_i \mathbf{x})$. Проективный репер $\{\mathbf{r}_A\} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}_1, \tilde{\mathbf{x}}\}$, связанный с точкой \mathbf{x} , назовем *сопровождающим репером* конгруэнции. Применяя терминологию А.П. Нордена [1], точки y_i можно назвать вершинами нормали первого рода слоев расслоения, а $\tilde{\mathbf{x}}$ – опорной точкой нормали второго рода.

Теорема 7. Поляра \tilde{h} есть прямая конгруэнции \mathbb{K} .

Доказательство. Так как \mathbf{y}_i – опорные точки поляры, то $(\mathbf{x}, \mathbf{y}_i) = 0$ и $(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_i) = 0$. Тогда в силу I -инвариантности скалярного произведения $(\tilde{\mathbf{x}}, \tilde{\mathbf{y}}_i) = 0$ и $(\mathbf{x}, \tilde{\mathbf{y}}_i) = 0$. Поэтому точки $\tilde{\mathbf{y}}_i \in \tilde{h}$. Таким образом, поляра \tilde{h} инвариантна относительно инволюции I и поэтому есть прямая конгруэнции K . \square

Ясно, что если $\mathbf{x} \in p^{-1}(U)$, то поляра принадлежит области $p^{-1}(V)$. Положим $\tilde{\mathbf{y}}_i = \gamma_i^k \mathbf{y}_k$. Отсюда и из $I\mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$, $I\tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}$ следует, что в сопровождающем репере

$$I = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & (\gamma_j^i) & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Здесь γ_j^i удовлетворяют условию $\gamma_k^i \gamma_j^k = -\delta_j^i$ и являются компонентами аффинора той инволюции γ , которая индуцируется на поляре \tilde{h} инволюцией I пространства. Несложно подсчитать, что в рассматриваемом репере эти компоненты постоянны и равны

$$(\gamma_j^i) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}. \quad (18)$$

Теорема 8. Компоненты $\{\Gamma_i\}$ определяют инвариантную связность главного расслоения. Они не зависят от слоевой координаты и при преобразовании адаптированных координат изменяются по закону

$$\Gamma_{i'} = f_{i'}^i \Gamma_i + f_{i'}^3.$$

Доказательство. Рассмотрим плоскости $\Gamma_{\mathbf{x}} = \{\mathbf{x}, \mathbf{y}_i\}$. Как следует из условий $(\tilde{\mathbf{x}}, \mathbf{y}_i) = 0$, они образуют распределение H^\perp , ортогональное прямым конгруэнции. В силу теоремы 4 это распределение инвариантно при левом действии структурной группы, которое в этих координатах имеет вид $\varphi' = \varphi + t$. Как и в [8], будем называть связность Γ *внутренней*. Вычислим ее компоненты в адаптированных координатах. Для этого заметим, что они не зависят от слоевой координаты и поэтому не изменяются при действии группы S . В самом деле, $\partial_3 \Gamma_i = (\partial_3 \tilde{\mathbf{x}}, \partial_i \mathbf{x}) + (\tilde{\mathbf{x}}, \partial_{i3} \mathbf{x})$. Но $\partial_3 \tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}$ и, следовательно, $\partial_{i3} \mathbf{x} = \partial_i \tilde{\mathbf{x}}$. Тогда получим $\partial_3 \Gamma_i = 0$. Поэтому компоненты внутренней связности достаточно вычислить в начальной точке $\mathbf{x}(0) = \mathbf{a}$, в которой $\Gamma_i = (\tilde{\mathbf{a}}, \partial_i \mathbf{a})$. Учитывая (14), получим

$$\partial_1 \mathbf{a} = \frac{1}{R\sqrt{R}}(0 : R + u^2 : -uv : u), \quad \partial_2 \mathbf{a} = \frac{1}{R\sqrt{R}}(0 : uv : -(R + v^2) : v),$$

откуда

$$\Gamma_1 = -\frac{v}{R}, \quad \Gamma_2 = \frac{u}{R}. \quad (19)$$

Найдем закон преобразования компонент связности. Рассмотрим преобразования адаптированных координат

$$u^i = f^i(u^{j'}), \quad u^{3'} = f^{3'}(u^{j'}, u^{3'}).$$

Тогда $\partial_{i'} \mathbf{x} = f_{i'}^i \partial_i \mathbf{x} + f_{i'}^3 \partial_3 \mathbf{x}$. Учитывая (13) и (15), имеем $\partial_3 \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}$. Поэтому $\Gamma_{i'} = (\tilde{\mathbf{x}}, \partial_{i'} \mathbf{x}) = f_{i'}^i (\tilde{\mathbf{x}}, \partial_i \mathbf{x}) + f_{i'}^3$, откуда и следует указанная формула. \square

Для вершин сопровождающего репера имеет место следующая таблица полярных произведений

	\mathbf{x}	\mathbf{y}_j	$\tilde{\mathbf{x}}$
\mathbf{x}	1	0	0
\mathbf{y}_i	0	G_{ij}	0
$\tilde{\mathbf{x}}$	0	0	1

Заметим, что так как $\tilde{\mathbf{x}} = \partial_3 \mathbf{x}$, вершины сопровождающего репера $\{\mathbf{r}_A\}$ можно получить в результате действия на точку \mathbf{x} линейных дифференциальных операторов – тождественного, $E_i = \partial_i - \Gamma_i \partial_3$ и $E_3 = \partial_3$. Последние образуют *адаптированный репер* $\{E_A\}$, ($A = 1, 2, 3$) в точке \mathbf{x} . Рассмотрение структурных уравнений $[E_A, E_B] = R_{AB}^C E_C$ приводит к объекту неголономности R этого репера. Но так как функции Γ_i зависят только от базисных координат, среди его компонент отличны от нуля лишь

$$R_{ij} := R_{ij}^3 = \partial_j \Gamma_i - \partial_i \Gamma_j. \quad (20)$$

Это тензор кривизны внутренней связности [8]. Он имеет единственную существенную компоненту, которая в силу (19) равна

$$R_{12} = -\frac{2}{R^2}.$$

Таким образом, горизонтальное распределение внутренней связности не инволютивно. Так как оно ортогонально слоям, конгруэнция \mathbb{K} не является нормальной.

Теорема 9. *Метрический тензор (16) расслоенного пространства является H^\perp -проектируемым и определяет на базе расслоения метрику плоскости Лобачевского.*

Доказательство. Компоненты метрического тензора g в адаптированном репере образуют матрицу

$$(G_{AB}) = \begin{pmatrix} G_{ij} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix},$$

где согласно (17) $G_{ij} = g_{ij} - \Gamma_i \Gamma_j$. Таким образом, горизонтальные компоненты тензора g не зависят от слоевой координаты. Поэтому, как доказано К.М. Егиазаряном [10], тензор g H^\perp -проектируем на базу расслоения и определяет на ней некоторую метрику g^* . Но согласно теореме 3 метрика g инвариантна относительно 3-параметрической группы B правых сдвигов, сохраняющих расслоение. Поэтому B индуцирует на базе некоторую группу B^* проективных преобразований, изоморфную группе B . Но B^* является группой движений спроектированной метрики [10] и имеет максимальный возможный порядок $r = 3$. Поэтому (U, g^*) есть пространство постоянной кривизны. В силу (16) и (19) компоненты метрики g^* в натуральном репере, соответствующем при проектировании адаптированному реперу, равны

$$G_{ij} = -\frac{1}{R^2} \delta_{ij}. \quad (21)$$

Метрика g^* отрицательно определенная и по существу совпадает с метрикой плоскости Лобачевского в конформной модели Пуанкаре. Нетрудно подсчитать, что ее гауссова кривизна равна $K = -4$. \square

Рассмотрим деривационные уравнения сопровождающего репера, записав их в виде $E_A \mathbf{r}_B = D_{AB}^C \mathbf{r}_C$. Учитывая специфику в выборе вершин и приведенную выше таблицу произведений, получим

$$\begin{array}{lll} a) E_i \mathbf{x} = \mathbf{y}_i, & d) \partial_3 \mathbf{x} = \tilde{\mathbf{x}}, \\ b) E_j \mathbf{y}_i = p_{ij} \mathbf{x} + \Gamma_{ij}^k \mathbf{y}_k + h_{ij} \tilde{\mathbf{x}}, & e) \partial_3 \mathbf{y}_i = \beta_i^k \mathbf{y}_k, \\ c) E_i \tilde{\mathbf{x}} = \gamma_i^k \mathbf{y}_k, & f) \partial_3 \tilde{\mathbf{x}} = -\mathbf{x}. \end{array} \quad (22)$$

Здесь компоненты аффинора γ и его смысл определены в теореме 7. Найдем значения и геометрический смысл других коэффициентов. Уравнение (c) получается из (a) с помощью инволюции. Таким же образом уравнение (f) получается из (d). Рассмотрев преобразование адаптированных координат, придем к выводу, что компоненты Γ_{ij}^k образуют объект некоторой линейной связности, а p , h , β , γ являются тензорными величинами с базисными компонентами.

Рассмотрев условия интегрируемости уравнений (22), придем к следующим выводам.

1) Из уравнений (a) с учетом (b) следует

$$p_{[ij]} = 0, \quad \Gamma_{[ij]}^k = 0, \quad h_{[ij]} = -\frac{1}{2}R_{ij}.$$

С другой стороны, полярное умножение уравнений (b) на \mathbf{x} и на $\tilde{\mathbf{x}}$ приводит к соотношениям

$$p_{ij} = -G_{ij}, \quad h_{ij} = -G_{ik}\gamma_j^k. \quad (23)$$

2) Из (a) и (d) вытекает, что тензор β совпадает с γ . Но тогда, умножив уравнение (e) полярно на \mathbf{y}_k и учитывая, что компоненты G_{ij} зависят только от базисных координат, получим $G_{ik}\gamma_j^k + G_{jk}\gamma_i^k = 0$. С учетом предыдущего п. 1 это означает, что тензор h является кососимметричным и поэтому $h_{ij} = -(1/2)R_{ij}$. Единственная существенная компонента этого тензора равна $h_{12} = -1/R^2$. С учетом косой симметрии второе из равенств (23) дает

$$G_{km}\gamma_i^k\gamma_j^m = G_{ij}. \quad (24)$$

Следовательно, метрика g^* является эрмитовой относительно комплексной структуры γ .

3) Займемся компонентами линейной связности $\nabla^* = \{\Gamma_{ij}^k\}$. Если уравнения (b) умножить полярно на \mathbf{y}_k то получим $\partial_k G_{ij} = G_{sj}\Gamma_{ik}^s + G_{is}\Gamma_{jk}^s$. Но так как компоненты R_{ij}^k объекта неголономности равны нулю, связность ∇^* не имеет кручения. Поэтому полученным соотношением ее компоненты определяются однозначно как символы Кристоффеля метрического тензора G_{ij} . Другими словами, ∇^* есть риманова связность спроектированной метрики.

4) Рассматривая условия интегрируемости уравнений (e), получим $\partial_3 \Gamma_{ij}^k = \nabla_i^* \gamma_j^k$. Но компоненты Γ_{ij}^k не зависят от слоевой координаты и поэтому аффинор γ является ковариантно постоянным

$$\nabla_k \gamma_j^i = 0.$$

Вследствие этого ковариантно постоянным является и тензор h_{ij} . Таким образом, относительно комплексной структуры тензор g^* является метрикой Широкова–Кэлера.

Заметим наконец, что при рассмотрении расслоения пространства S_2^3 над областью V получим аналогичные результаты. В частности, компоненты метрического тензора g^* получаются из (21) с помощью инверсии и равны

$$G_{i'j'} = -\frac{1}{R'^2} \delta_{i'j'},$$

где теперь $R' = u'^2 + v'^2 - 1 > 0$.

Работа выполнена при поддержке Фонда НИОКР РТ (проект № 05-5.1-244/2004 Ф(05)).

Summary

B.N. Shapukov. The bundles of non-Euclidean 3-spaces dsafdsf of hyperbolic type which are generated by the antiquaternion algebra. I.

A.P. Norden devoted some of his works to research biaxial spaces and spaces which is connected with them. This class of spaces interested him for application of algebras of complex, double and dual numbers, mainly like an application to linear geometry of non-Euclidean spaces (see, e. g., [2]). General theory of spaces over algebras developed further from this works of him [3]. Let U be an algebra. The projectivization of it will give the projective space with a structure. For instance, the projectivization of quaternion algebra is a 3-dimension elliptic space. Much the same the antiquaternion algebra is determining the hyperbolic space with the linear absolute. That's why it is interesting to look into the bundles of non-Euclidean spaces, which was constructed with the help of subalgebras. It is known [5], antiquaternion algebra contain the whole three types of subalgebras secondary order: complex, double and dual numbers. This article is about the bundles of 3-dimension hyperbolic space, which generated by complex numbers subalgebra. The normalization of bundle linear congruence was constructed and the geometrical meaning of the getting objects was explained in this article.

Литература

1. Норден А.П. Пространства аффинной связности. – М.: Наука, 1978. – 432 с.
2. Норден А.П. Пространство линейной конгруэнции // Матем. сб. – 1949. – № 24(66). – С. 429–455.
3. Вишневский В.В., Широков А.П., Шурыйгин В.В. Пространства над алгебрами. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1985. – 263 с.
4. Кузьмина И.А., Шапуков Б.Н. Конформная и эллиптическая модели расслоения Хопфа // Тр. геом. сем. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2003. – Вып. 24. – С. 81–98.
5. Белова Н.Е. Расслоения алгебр размерности 4. – Казань: Казан. ун-т, 1999. – 44 с. – Деп. в ВИНИТИ 11.10.99, № 3037-B99.
6. Розенфельд Б.А. Многомерные пространства. – М.: Наука, 1966. – 746 с.
7. Широков А.П. О нормализациях в проективном пространстве с заданным расслоением // Изв. вузов. Математика. – 1974. – № 5. – С. 216–221.
8. Шапуков Б.Н. Связности на дифференцируемых расслоениях // Итоги науки и техн. ВИНИТИ. Проблемы геометрии. – 1983. – Т. 15. – С. 61–93.
9. Шапуков Б.Н. Проективные расслоения и проективные связности // Изв. вузов. Математика. – 1995. – № 5. – С. 83–90.
10. Егиазарян К.М. Спроектированные инвариантные аффинные связности // Тр. геом. сем. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – Вып. 12. – С. 27–37.

Поступила в редакцию
13.12.04

Шапуков Борис Никитович – доктор физико-математических наук, профессор кафедры геометрии Казанского государственного университета.

E-mail: Boris.Shapukov@ksu.ru