Известия вузов. Математика
2008, №10, с. 17–24
http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

О.В. ЗУБКОВ

НАХОЖДЕНИЕ И ОЦЕНКА ЧИСЛА БЕСПОВТОРНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ В БАЗИСЕ $\{\&, \vee, -\}$

Аннотация. В статье рассматриваются бесповторные булевы функции в базисе $\{\&, \vee, -\}$. Указывается канонический вид формулы для бесповторной функции в этом базисе. Производится построение множества таких формул от переменных $x_1, \dots, x_n$ и производится подсчет числа его элементов. С использованием этих результатов получены верхняя и нижняя оценки для числа бесповторных булевых функций от n переменных в рассматриваемом базисе.

Ключевые слова: бесповторная булева функция, число бесповторных функций, оценки числа бесповторных функций.

УДК: 519.714

Abstract. In this paper we consider noniterated Boolean functions in the basis $\{\&, \vee, -\}$. We obtain the canonical form of the formula for a noniterated function in this basis. We construct the set of such formulas in terms of the variables $x_1, \dots, x_n$ and calculate the number of its elements. Based on these results, we obtain the upper and lower bounds for the number of noniterated Boolean functions of n variables in the basis under consideration.

Keywords: noniterated Boolean function, number of noniterated functions, estimates for the number of noniterated functions.

Формула Φ над некоторым базисом B называется бесповторной, если каждая переменная входит в нее не более одного раза. Булева функция f называется бесповторной в базисе B, если найдется бесповторная формула Φ над B, представляющая функцию f.

В связи с тем, что бесповторное представление имеет наименьшую во всех смыслах сложность, количество функций, представимых в данном базисе B бесповторно, является важной характеристикой рассматриваемого базиса. Таким образом, сравнение базисов по числу бесповторных в них функций имеет не только теоретический интерес, но и важное прикладное значение в области проектирования электронных микросхем.

В этом направлении имеется ряд результатов. В [2] приводится табуляция числа бесповторных булевых функций в базисах $B_0 = \{\&, \vee, -\}$ и $B_1 = \{\&, \vee, \oplus, -\}$, причем число переменных, от которых зависят эти функции, не превышает десяти. Результат получен путем полного перебора. В работах [4] и [5] приводятся рекуррентные формулы для числа бесповторных булевых функций в этих же базисах от n переменных, позволяющие находить это число для достаточно больших значений n. Этот результат позволяет, например, высказать гипотезу о существенном увеличении числа бесповторных булевых функций при добавлении к базису B_0 слабоповторной в нем функции $\oplus$, доказанную в ([1], с. 64). С другой стороны, рекуррентная природа полученных формул не дает возможности произвести

Поступила 03.06.2003, окончательный вариант 02.12.2007

хотя бы приблизительную оценку числа бесповторных булевых функций от n переменных для произвольного n. Рекуррентности в этих формулах имеют нелинейную структуру и не поддаются приведению к нерекуррентному виду известными способами.

Кроме уже упомянутого результата, в работе [1] описывается принципиально иной метод построения канонических представителей для бесповторных булевых функций в базисе B_0. На его основе выведена формула для числа бесповторных булевых функций от n переменных, не содержащая рекуррентности в явном виде. Формула имеет сложную структуру и не позволяет получить напрямую искомые оценки.

В данной работе приводится подробное обоснование метода построения множества канонических представлений для бесповторных булевых функций в базисе B_0 от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$. Этот метод позволяет найти искомые верхнюю и нижнюю оценки, имеющие схожую структуру. Отметим, что для получения оценок нет необходимости в явной формуле для числа бесповторных булевых функций от n переменных.

1. Построение канонической формулы для бесповторной функции в базисе B_0

Определение 1. Упорядоченной формулой над B_0 от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ будем называть формулу Φ, удовлетворяющую следующим условиям:

1) формула Φ является бесповторной;
2) в формуле Φ отрицания могут быть только над переменными;
3) для любой подформулы $\Phi_1 * \Phi_2$ формулы Φ, где $* \in \{\&, \vee\}$, переменная с наименьшим индексом среди всех переменных подформулы $\Phi_1 * \Phi_2$ содержится в подформуле Φ_1;
4) в формуле Φ не содержится подформул вида $(\Phi_1 \& \Phi_2) \& \Phi_3$, $(\Phi_1 \vee \Phi_2) \vee \Phi_3$.

Из этого определения следует, что любая подформула упорядоченной формулы над B_0 также упорядочена над B_0. Нетрудно заметить, что для любой бесповторной над B_0 функции f от n переменных существует по крайней мере одна упорядоченная формула над B_0, которая представляет f. Получить ее можно, взяв за основу некоторую бесповторную над B_0 формулу Φ', представляющую f. В формуле Φ' необходимо опустить все отрицания на переменные в преобразованиях вида $\overline{\Psi_1 \& \Psi_2} = \overline{\Psi}_1 \vee \overline{\Psi}_2$ и $\overline{\Psi_1 \vee \Psi_2} = \overline{\Psi}_1 \& \overline{\Psi}_2$. После этого будет выполнено условие 2) упорядоченности над B_0. Далее в силу коммутативности базисных функций можно добиться выполнения условия 3), а в силу их ассоциативности — расставить скобки с учетом условия 4). Полученная в результате этих преобразований формула Φ будет упорядоченной над B_0.

Далее покажем, что упорядоченная формула над B_0 является единственной для представляемой ей функции.

Лемма 1. *Среди формул, представляющих бесповторную функцию f над базисом B_0, содержится ровно одна упорядоченная над B_0.*

Доказательство проведем методом индукции по числу существенных аргументов функции f.

Для функций от одного аргумента утверждение леммы 1 очевидно.

Шаг индукции. Пусть имеются две упорядоченные формулы над B_0 Φ и Ψ от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$, представляющие одну и ту же функцию f. Обозначим через g внешнюю функцию формулы Φ. Очевидно, что $g \in \{\&, \vee\}$. Через $g(z_1, \ldots, z_k)$ обозначим многоместную функцию g. Тогда формулу Φ можно записать в виде $g(\Phi_1(\widetilde{y}_1), \ldots, \Phi_s(\widetilde{y}_s))$, где $\widetilde{y}_1, \ldots, \widetilde{y}_s$ —

разбиение множества переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ на непересекающиеся подмножества. Внешние функции подформул $\Phi_1, \ldots, \Phi_s$ отличны от g. Обозначим через h_i функцию, которую представляет подформула Φ_i.

Согласно доказательству известного результата А.В. Кузнецова [5] о бесповторных булевых функциях, любая бесповторная над B_0 формула Ψ, представляющая функцию f, должна иметь вид $g(\Psi_1(\widetilde{y}_1), \ldots, \Psi_s(\widetilde{y}_s))$, где подформула Ψ_i представляет либо h_i, либо $\overline{h}_i$. Совпадение порядка следования подформул $\Psi_i(\widetilde{y}_i)$ выполняется в силу условия 3) упорядоченности формул над B_0 Φ и Ψ. Покажем, что для любого i, $1 \le i \le s$, из упорядоченности над B_0 формулы Ψ следует, что Ψ_i представляет функцию h_i.

Пусть $g = \&$. Предположим, что для некоторого m, $1 \le m \le s$, формула Ψ_m представляет функцию $\overline{h}_m$. Так как функция f не является тождественно нулевой, то найдется двоичный набор $\widetilde{\alpha}$ такой, что $f(\widetilde{\alpha}) = 1$. Через $\widetilde{\alpha}_m$ обозначим ту часть набора $\widetilde{\alpha}$, которая подставляется вместо переменных $\widetilde{y}_m$ в подформуле Φ_m. В силу того, что $g = \&$ и $\Phi(\widetilde{\alpha}) = 1$, получаем $\Phi_m(\widetilde{\alpha}_m) = 1$ и, значит, $\Psi_m(\widetilde{\alpha}_m) = 0$. Так как внешняя функция формулы Ψ — s-местная конъюнкция, то $\Psi(\widetilde{\alpha}) = 0$. Таким образом, упорядоченная формула над B_0 Ψ не может представлять функцию f. Полученное противоречие показывает, что указанного m не существует, т. е. для любого i, $1 \le i \le s$, подформула Ψ_i представляет функцию h_i.

Так как функция h_i зависит менее чем от n переменных, то в силу предположения индукции формулы Φ_i и Ψ_i совпадают.

Осталось заметить, что в силу условия 4) упорядоченности формул над B_0 Φ и Ψ скобки у внешней многоместной функции g установлены в них однозначно и одинаково. Таким образом, формулы Φ и Ψ совпадают.

Аналогично рассматривается случай $g = \vee$. □

2. Построение множества упорядоченных формул над B_0 и подсчет числа его элементов

Прежде всего отметим, что для любой подформулы $\Phi_1 * \Phi_2$ формулы Φ, где $* \in \{\&, \vee\}$, можно однозначно указать формулы Φ_1 и Φ_2, из которых состоит рассматриваемая подформула. Будем говорить, что формула Φ_1 подставлена на место первого аргумента, а формула Φ_2 — на место второго аргумента рассматриваемого вхождения функции $*$ в формулу Φ. Если некоторая подформула представляет из себя переменную либо ее отрицание, то будем называть такую подформулу унарной. Все остальные подформулы будем называть неунарными. Базисные функции $\&$ и $\vee$ будем называть бинарными базисными функциями.

Очевидно, что в состав любой упорядоченной формулы над B_0 от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ входят n унарных и $n-1$ неунарных подформул.

Определение 2. Структурой, сохраняющей индексы упорядоченной над B_0 формулы Ψ, назовем формулу $SSI(\Psi)$, которая получается из Ψ путем замены в ней всех символов бинарных базисных функций на символ $\circ$ и удаления всех отрицаний над переменными. Будем говорить, что структура $SSI(\Psi)$ соответствует формуле Ψ.

Для того чтобы некоторая бесповторная структура, состоящая из символов $\circ$ и переменных без отрицания, была структурой вида SSI, достаточно выполнения в ней условия $3'$), аналогичного условию 3 определения 1. Это условие имеет вид:

$3'$) для любой подструктуры $\Phi_1 \circ \Phi_2$ структуры Φ переменная с наименьшим индексом среди всех переменных подструктуры $\Phi_1 \circ \Phi_2$ содержится в подструктуре Φ_1.

Символ $\circ$ в $SSI(\Psi)$ обозначает, что на его месте в Ψ находится некоторая бинарная функция из B_0 и соответственно для каждого вхождения $\circ$ в $SSI(\Psi)$ можно указать подструктуры, находящиеся на месте его первого и второго аргументов. Видно, что одна структура вида SSI может одновременно соответствовать нескольким упорядоченным формулам над B_0.

Если формула Ψ зависит от n переменных, то в $SSI(\Psi)$ содержится $n-1$ неунарных подструктур, которые разобьем на три непересекающихся множества.

В первое множество, называемое множеством левых узлов структуры $SSI(\Psi)$, входят все ее неунарные подструктуры, находящиеся на месте первого аргумента какого-либо вхождения $\circ$ в $SSI(\Psi)$.

Во второе множество, называемое множеством правых узлов структуры $SSI(\Psi)$, входят все ее неунарные подструктуры, находящиеся на месте второго аргумента какого-либо вхождения $\circ$ в $SSI(\Psi)$.

Третье множество состоит из одной неунарной подструктуры, совпадающей с $SSI(\Psi)$ и не находящейся ни на каком месте.

Очевидно, у любой структуры вида SSI от n переменных сумма левых и правых узлов равна $n-2$.

Все структуры вида SSI от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ разбиваются на $n-1$ непересекающихся классов по соотношению содержащихся в них левых и правых узлов.

Определение 3. Будем говорить, что структура вида SSI принадлежит (i,j)-классу, если она содержит i левых и j правых узлов. Число элементов (i,j)-класса обозначим через $B(i,j)$.

Ясно, что структура из (i,j)-класса зависит от $i+j+2$ переменных.

Пример 1. Проиллюстрируем введенные понятия на следующих шести упорядоченных формулах над B_0 от переменных x_1, x_2, x_3, x_4, x_5:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1 = (((x_1 \& \overline{x}_5) \vee x_3) \& \overline{x}_2) \vee x_4, &&\Phi_2 = ((\overline{x}_1 \& \overline{x}_4) \vee (\overline{x}_2 \vee x_3)) \& x_5,\\
&\Phi_3 = (x_1 \vee x_2) \& ((x_3 \& \overline{x}_5) \vee x_4), &&\Phi_4 = x_1 \vee (x_2 \vee ((x_3 \& x_5) \vee x_4)),\\
&\Phi_5 = \overline{x}_1 \vee ((\overline{x}_2 \vee (\overline{x}_4 \vee \overline{x}_5)) \& \overline{x}_3), &&\Phi_6 = \overline{x}_1 \& (x_2 \& (x_3 \& (\overline{x}_4 \& x_5))).
\end{aligned}$$

Соответствующие им структуры вида SSI будут иметь вид

$$\begin{aligned}
SSI(\Phi_1) &= (((x_1 \circ x_5) \circ x_3) \circ x_2) \circ x_4,\\
SSI(\Phi_2) &= ((x_1 \circ x_4) \circ (x_2 \circ x_3)) \circ x_5,\\
SSI(\Phi_3) &= (x_1 \circ x_2) \circ ((x_3 \circ x_5) \circ x_4),\\
SSI(\Phi_4) &= x_1 \circ (x_2 \circ ((x_3 \circ x_5) \circ x_4)),\\
SSI(\Phi_5) &= x_1 \circ ((x_2 \circ (x_4 \circ x_5)) \circ x_3),\\
SSI(\Phi_6) &= x_1 \circ (x_2 \circ (x_3 \circ (x_4 \circ x_5))).
\end{aligned}$$

Все дальнейшие определения и построения становятся нагляднее, если приведенные структуры изобразить в виде деревьев (рис. 1).

Все структуры вида SSI от пяти переменных разбиваются на четыре класса. Для каждого класса в примере 1 приведены один или два представителя. Символы внешних бинарных функций правых узлов на рис. 1 выделены более жирными линиями. Для каждой структуры указан (i,j)-класс, к которому она принадлежит.

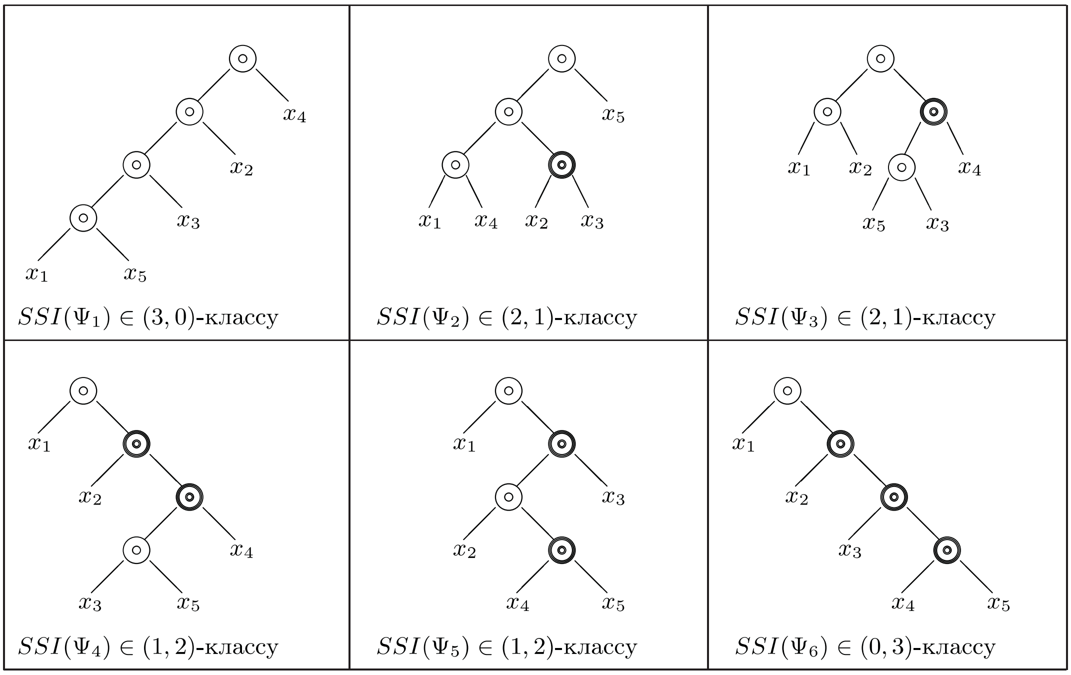

Рис. 1

Лемма 2. *Если структура A вида SSI принадлежит (i,j)-классу, то существует ровно 2^{i+2j+3} различных упорядоченных формул над B_0 таких, что им соответствует структура A.*

Доказательство. Чтобы получить из некоторой структуры A вида SSI упорядоченную формулу над B_0, которой соответствует A, необходимо расставить отрицания над некоторыми переменными структуры A и, в соответствии с условием 4) упорядоченности формулы над B_0, заменить все символы $\circ$ на & или $\vee$.

Если символ $\circ$ соответствует внешней функции всей структуры либо внешней функции правого узла, то ее можно произвольно заменить как на &, так и на $\vee$. Если же символ $\circ$ соответствует внешней функции левого узла, то его замена определена однозначно. Если функцию, на месте первого аргумента которой находится рассматриваемый левый узел, определить как &, то внешняя функция самого левого узла может быть определена только как $\vee$, иначе будет нарушено условие 4) упорядоченности над B_0. Аналогично, на первом аргументе функции $\vee$ может находиться только левый узел с внешней функцией &. Таким образом, в структуре A из (i,j)-класса можно 2^{j+1} способами заменить все символы $\circ$ на & или $\vee$.

Как уже упоминалось, структура из (i,j)-класса зависит от $i+j+2$ переменных. Соответственно существует 2^{i+j+2} различных способа расстановки отрицаний над ними. Все получаемые при этом формулы будут упорядоченными над B_0. Таким образом, всего существует 2^{i+2j+3} способа получить из структуры (i,j)-класса упорядоченную формулу над B_0, которой она соответствует. □

Пример 2. Для структуры $A = (x_1 \circ x_4) \circ (x_2 \circ x_3)$ из $(1,1)$-класса приведем все возможные способы замены символов $\circ$ на & или $\vee$. Всего получим $2^{1+1} = 4$ упорядоченные формулы над B_0:

$$(x_1 \vee x_4)\&(x_2\&x_3), \quad (x_1\&x_4) \vee (x_2\&x_3),$$
$$(x_1 \vee x_4)\&(x_2 \vee x_3), \quad (x_1\&x_4) \vee (x_2 \vee x_3).$$

Видно, что при замене функция левого узла $x_1 \circ x_4$ всегда двойственна той, на первом аргументе которой находится этот узел. В каждой из полученных формул можно 2^4 способами расставить отрицания над переменными. Таким образом, для структуры A существует $2^6 = 64$ упорядоченные формулы над B_0, которым она соответствует.

Следствие 1. Число K_n бесповторных булевых функций от n переменных в базисе B_0 задается формулой

$$K_n = \sum_{j=0}^{n-2} 2^{n+j+1} B(n-2-j, j), \tag{1}$$

где $B(i,j)$ — число структур вида SSI в (i,j)-классе.

Доказательство следует из леммы 2, если учесть, что $i + j + 2 = n$. Каждая структура вида SSI из (i,j)-класса соответствует тогда 2^{n+j+1} упорядоченным формулам над B_0. Число структур в (i,j)-классе обозначено через $B(i,j)$. Выражая i в виде $i = n-2-j$, получаем формулу (1). Из леммы 1 следует, что число упорядоченных формул над B_0 от n переменных равно числу бесповторных булевых функций в базисе B_0 от n переменных. □

Отметим, что для получения оценок для K_n нет необходимости в какой-либо формуле для каждого $B(i,j)$ в отдельности.

3. Оценки для числа бесповторных булевых функций в базисе B_0

Легко видеть, что число всех структур вида SSI от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ задается формулой $\sum\limits_{j=0}^{n-2} B(n-2-j, j)$, где $B(i,j)$ — число элементов (i,j)-класса.

Обозначим через $(2n-3)!!$ произведение всех нечетных чисел от 1 до $2n-3$ включительно.

Лемма 3. *Число всех структур вида SSI от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ равно $(2n-3)!!$*

Доказательство проведем индукцией по числу переменных.

Для $n = 2$ существует ровно одна структура вида SSI от переменных x_1, x_2, а именно $x_1 \circ x_2$, с другой стороны, $(2 \cdot 2 - 3)!! = 1$, таким образом, базис индукции верен.

Пусть имеется некоторая структура A вида SSI от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$. В ее состав входят $n-1$ унарных и $n-2$ неунарных подструктур, т. е. она содержит $2n-3$ подструктуры. Из структуры A от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$ получим $2n-3$ различных структуры вида SSI от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ следующим образом: заменим в A одну из ее подструктур Φ на подструктуру $\Phi \circ x_n$. Эту операцию назовем добавлением переменной x_n к подструктуре Φ. Полученная структура от n переменных также будет иметь вид SSI, так как добавление переменной x_n не нарушает условия $3'$), приведенного в альтернативном определении структуры вида SSI. Поочередно добавляя переменную x_n для каждой из $2n-3$ подструктур структуры A, получим $2n-3$ различных структур вида SSI от n переменных.

Очевидно, что из двух различных структур A_1 и A_2 нельзя получить таким преобразованием одну и ту же структуру B в силу того, что различия сохранятся. С другой стороны, для любой структуры B от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_n$ существует единственная структура A вида SSI от переменных $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}$, из которой B может быть получена добавлением переменной x_n. Эту структуру A можно получить, произведя над B операцию, обратную вышеприведенной, а именно, выделить в B подструктуру вида $\Phi \circ x_n$ и заменить ее на Φ.

Из этих рассуждений следует, что все структуры вида SSI от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$ можно получить, причем каждую ровно один раз, путем добавления переменной x_n в структуры вида SSI от переменных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$. По предположению индукции структур вида SSI от переменных $x_1, x_2, \dots, x_{n-1}$ ровно $(2n-5)!!$ Каждая образует $2n-3$ структуры вида SSI от переменных $x_1, x_2, \dots, x_n$, откуда и получаем утверждение леммы. □

Пример 3. На рис. 2 приведены все структуры вида SSI, которые можно получить из структуры $A = x_1 \circ ((x_2 \circ x_3) \circ x_4)$ добавлением переменной x_5.

Всего получается семь структур вида SSI от пяти переменных, а именно:
$B_1 = (x_1 \circ x_5) \circ ((x_2 \circ x_3) \circ x_4)$ — x_5 добавлена к подструктуре x_1,
$B_2 = x_1 \circ (((x_2 \circ x_5) \circ x_3) \circ x_4)$ — x_5 добавлена к подструктуре x_2,
$B_3 = x_1 \circ ((x_2 \circ (x_3 \circ x_5)) \circ x_4)$ — x_5 добавлена к подструктуре x_3,
$B_4 = x_1 \circ ((x_2 \circ x_3) \circ (x_4 \circ x_5))$ — x_5 добавлена к подструктуре x_4,
$B_5 = (x_1 \circ ((x_2 \circ x_3) \circ x_4)) \circ x_5$ — x_5 добавлена к $x_1 \circ ((x_2 \circ x_3) \circ x_4)$,
$B_6 = x_1 \circ (((x_2 \circ x_3) \circ x_4) \circ x_5)$ — x_5 добавлена к $(x_2 \circ x_3) \circ x_4$,
$B_7 = x_1 \circ (((x_2 \circ x_3) \circ x_5) \circ x_4)$ — x_5 добавлена к $x_2 \circ x_3$.

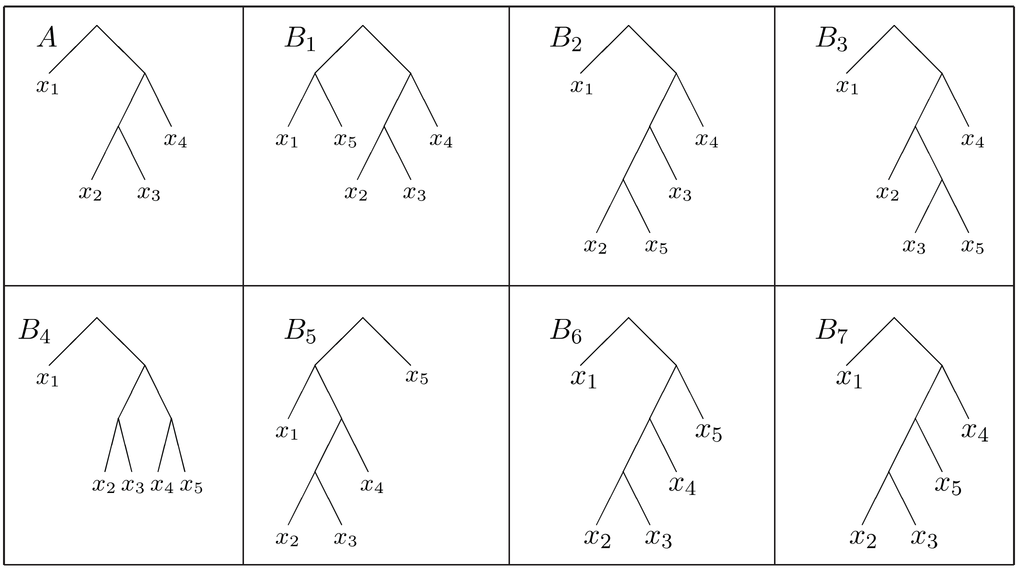

Рис. 2

Отметим, что сама структура A однозначно получается из структуры $x_1 \circ (x_2 \circ x_3)$ путем добавления переменной x_4 к ее подструктуре $x_2 \circ x_3$.

Из леммы 3 следует
$$\sum_{j=0}^{n-2} B(n-2-j\ ,\ j) = (2n-3)!! \tag{2}$$

Теорема. *Имеют место следующие оценки для K_n — числа бесповторных булевых функций от n переменных в базисе B_0:*
$$2 \cdot 2^{n-1} \cdot (2n-3)!! < K_n \le 2 \cdot 4^{n-1} \cdot (2n-3)!!$$

Доказательство. Оценим число 2^{n+j+1} сверху и снизу. В структуре вида SSI от n переменных может содержаться от 0 до $n-2$ правых узлов, откуда $2 \cdot 2^{n-1} < 2^{n+1} \le 2^{n+j+1} \le 2^{2n-1} = 2^{2(n-1)+1} = 2 \cdot 4^{n-1}$. Подставим эти оценки в (1) и вынесем их за знак суммы:

$$2 \cdot 2^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B(n-2-j,j) < K_n \le 2 \cdot 4^{n-1} \sum_{j=0}^{n-2} B(n-2-j,j).$$

Учитывая (2), окончательно получим

$$2 \cdot 2^{n-1} \cdot (2n-3)!! < K_n \le 2 \cdot 4^{n-1} \cdot (2n-3)!!$$

Равенство здесь достигается только при $n = 2$. Для остальных n неравенство является строгим. □

Литература

[1] Зубков О.В. *Избранные вопросы теории булевых функций* / Под ред. С.Ф. Винокурова и Н.А. Перязева. – М.: Физматлит, 2001. – 192 с.

[2] Артюхов В.Л., Копейкин Г.А., Шалыто А.А. *Настраиваемые модули для управляющих логических устройств.* – Л.: Энергоиздат, 1981. – 166 с.

[3] Кузнецов А.В. *О бесповторных контактных схемах и бесповторных суперпозициях функций алгебры логики* // Сб. статей по матем. логике и ее приложениям к некоторым вопросам кибернетики. – М.: Изд-во АН СССР, 1958. – С. 186–225 (Труды математического института им. В.А. Стеклова, Т. 51).

[4] Перязев Н.А. *Представление функций алгебры логики бесповторными формулами* // XI Межреспубликанская конференция по матем. логике. Тезисы сообщений. – Казань, 1992. – С. 110.

[5] Перязев Н.А., Разгильдеев В.Т. *Число бесповторных булевых функций в бинарных базисах* // Проблемы теоретической кибернетики. Тезисы докл. XI Международной конференции (Ульяновск, 10–14 июня 1996 г.). – Ульяновск: Изд-во СВНЦ, 1996. – С. 161–162.

О.В. Зубков

доцент, кафедра математической информатики,
Иркутский государственный педагогический университет,
664011, г. Иркутск, ул. Н. Набережная, д. 6,

`e-mail:` oleg.zubkov@mail.ru

O.V. Zubkov

Associate Professor, Chair of Mathematical Information Science,
Irkutsk State University of Liberal Arts,
6 N. Naberezhnaya str, Irkutsk, 664011 Russia,

`e-mail:` oleg.zubkov@mail.ru