УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 148, кн. 2 Физико-математические науки *2006*

УДК 532.528

ОБТЕКАНИЕ ОТРЫВНЫМ ПОТОКОМ ПЛАСТИНКИ С ОТКЛОНЕННЫМ ЩИТКОМ ПРИ НАЛИЧИИ ЗАСТОЙНОЙ ЗОНЫ

Л.Г. Плотникова, А.В. Поташев

Аннотация

В работе решена задача обтекания отрывным потоком пластинки с отклоненным щитком при наличии застойной зоны за щитком, а также вблизи угловой точки между пластинкой и щитком. Давление в застойной зоне вблизи угловой точки определяется из условия гладкого отрыва Бриллюэна – Вилла. Получены зависимости аэродинамических характеристик.

Введение

Задача обтекания плоской пластинки с застойной зоной вблизи критической точки была впервые исследована С.А. Чаплыгиным [1]. В дальнейшем его идея о замене критических точек застойными областями рассматривалась в ряде работ. Так, например, в статье [2] получено точное аналитическое решение задачи струйного обтекания плоской пластины с интерцептором при наличии застойной зоны вблизи интерцептора.

В работе [3] была рассмотрена задача безотрывного обтекания пластинки с отклоненным щитком. Представляет также интерес задача обтекания отрывным потоком плоской пластины с отклоненным щитком с обтекаемой передней кромкой пластинки. Постановка и аналитическое решение задачи об отрывном обтекании пластины со щитком путем сведения к смешанной краевой задаче для аналитической функции даны в работе [4].

В настоящей работе, как и в [4], моделирование зоны отрыва за щитком выполнено по схеме Ву [5, 6]. При этом для замыкания системы уравнений использовано предположение о нулевой циркуляции на контуре и изобарических границах отрывной области, введенное Ву и использованное в работе [7]. Вязкий отрыв потока вблизи точки стыка пластинки со щитком может быть смоделирован изобарической областью. Однако положение точки отрыва и размеры этой области зависят от значения скорости на ее границе. В настоящей работе (в отличие от [4], где скорость на границе застойной зоны задавалась произвольно) для определения величины скорости использовано условие гладкого отрыва Бриллюэна – Вилла (см., например, [2]).

1. Постановка задачи

В физической плоскости $z = x + iy$ непроницаемая пластинка AB с отклоненным щитком BF обтекается установившимся потенциальным потоком идеальной несжимаемой жидкости с отрывом потока (область течения G_z показана на рис. 1). Линии BCD, FED схода потока образуют застойную область $DEFBCD$. Вблизи щитка также предполагается наличие застойной области, границей которой является свободная линия тока HG. Таким образом, область течения ограничена

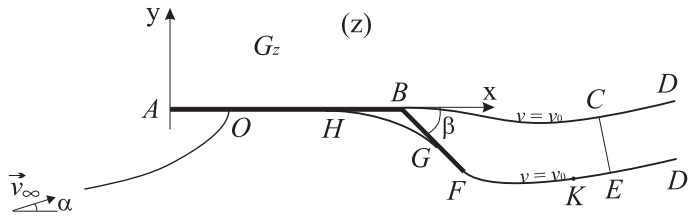

Рис. 1. Картина обтекания пластинки с отклоненным щитком в физической области

твердыми стенками AH, GF, AB и свободными поверхностями HG, FE, BC; границы ED и CD являются конгруэнтными линиями тока. На линиях BC и FE давление постоянно, и следовательно, в силу закона Бернулли постоянна и скорость $v = v_0$, значение которой задается. На линии HG скорость $v = v_1$ также постоянна, и ее требуется определить. Длины пластинки и щитка ($AB = l_1$, $BF = l_2$), угол β отклонения щитка заданы. Скорость v_∞ набегающего потока и угол атаки α известны. Циркуляцию по контуру $EFGHOABC$ считаем нулевой.

Требуется найти распределение скорости на поверхности пластинки со щитком, форму свободных линий тока и рассчитать аэродинамические характеристики.

2. Аналитическое решение

Введем функцию Леви–Чевиты

$$\chi = i \ln \left(\frac{1}{v_0} \frac{dw}{dz} \right) = \theta + iS, \tag{1}$$

где $S = \ln(v/v_0)$, θ – аргумент вектора скорости. Рассмотрим область G_χ (рис. 2, *а*) изменения этой функции. Функция χ имеет особенности в точке O разветвления потока ($v = 0$, а θ терпит скачок, равный $-\pi$) и в точке A – передней кромке пластинки (v принимает бесконечное значение, а θ терпит скачок, равный π). Для выполнения условия гладкого отрыва Бриллюэна-Вилла в точке H исключим возможные разрезы в окрестности точки H в плоскости χ.

Рассмотрим функцию комплексного потенциала $w = \varphi + i\psi$. При условии нулевой циркуляции область G_w в плоскости w будет иметь вид, показанный на рис. 2, *б*, где φ_1 – параметр, определяемый в процессе решения. Функцией $t = \sqrt{w/(\varphi_1 - w)}$ отобразим конформно область G_w на верхнюю полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ (рис. 2, *в*).

Для представления $\chi(t)$, отображающей полуплоскость $\operatorname{Im} t > 0$ на область G_χ, воспользуемся формулой Кристоффеля–Шварца

$$\chi(t) = A \int_b^t \frac{(t-k)\sqrt{t-h}}{t(t-a)\sqrt{(t-f)(t-g)(t-b)}}\, dt,$$

где A – действительная постоянная.

Зная функции $\chi(t)$ и $w(t)$, с учетом (1), найдем функцию

$$z(t) = \frac{2\varphi_1}{v_0} \int_a^t e^{i\chi(t)} \frac{t}{(1+t^2)^2}\, dt,$$

позволяющую построить неизвестные границы области G_z.

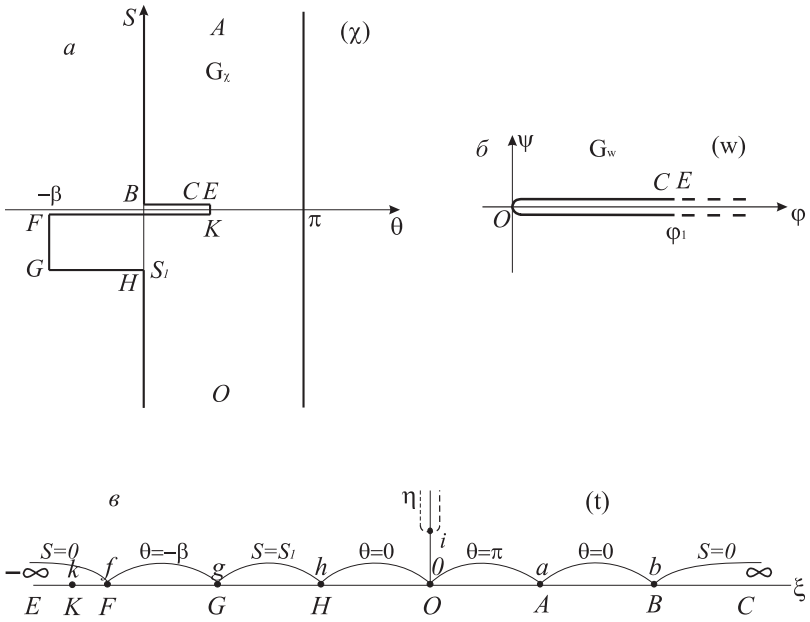

Рис. 2. Области во вспомогательных плоскостях

В полученное аналитическое решение входит девять неизвестных параметров: k, f, g, h, a, b в плоскости t; φ_1 в плоскости w; постоянная A и скорость v_1. Для их определения необходимо составить девять соотношений.

Из условий скачков функции χ в точках O и A получим

$$\operatorname*{res}_{t=0}(d\chi/dt) = -\pi, \quad \operatorname*{res}_{t=a}(d\chi/dt) = \pi. \tag{2}$$

Приращения функции χ на участках HG и GF (рис. 2, a) дают следующие уравнения:

$$\chi(h) - \chi(g) = \beta, \tag{3}$$

$$\chi(g) - \chi(f) = iS_1, \tag{4}$$

где $S_1 = \ln(v_1/v_0)$.

Из условия на бесконечности имеем

$$\chi(i) = \alpha + i\ln(v_\infty/v_0). \tag{5}$$

Так как длины пластинки и щитка известны, можно составить уравнения

$$z(b) = l_1, \tag{6}$$

$$z(f) = l_1 + l_2 e^{-i\beta}. \tag{7}$$

Таким образом, условия (2)–(7) представляют систему девяти уравнений для нахождения девяти неизвестных параметров. Из уравнений (2), (4), (6) четыре параметра (k, φ_1, A, v_1) можно получить в явном виде

$$k = \left(\frac{a\sqrt{a-h}}{\sqrt{(a-f)(a-g)(b-a)}}\right) \Bigg/ \left(\frac{\sqrt{a-h}}{\sqrt{(a-f)(a-g)(b-a)}} - \frac{\sqrt{-h}}{\sqrt{b(-f)(-g)}}\right),$$

$$\varphi_1 = l_1 v_0 \left(2 \int\limits_a^b e^{-S(t)} \frac{t}{(1+t^2)^2} dt \right)^{-1}, \quad A = \frac{a\sqrt{b\,(-f)\,(-g)}}{(-k)\,\sqrt{-h}}, \quad v_1 = v_0\, e^{S_1}.$$

Остается разрешить систему пяти нелинейных уравнений (3), (5), (7) относительно параметров f, g, h, a, b. После их отыскания можно найти все интересующие характеристики течения: распределение скорости на поверхности пластинки со щитком $v = v_0\, e^{S_1}$, формы свободных линий тока, коэффициенты аэродинамических сил

$$C_x = \frac{2R_x}{\rho v_\infty^2 l}, \quad C_y = \frac{2R_y}{\rho v_\infty^2 l}.$$

Здесь R_x и R_y – силы, действующие в направлении осей x и y, ρ – плотность, l – характерный размер, в качестве которого можно принять $l = l_1 + l_2$.

Так как в окрестности передней кромки скорость принимает бесконечное значение, то в точке A возникает подсасывающая сила, которая определяется из формулы Чаплыгина для сил давления разложением в окрестности точки:

$$X_A = -\frac{\rho\,\varphi_1 a\, v_0\, \pi}{(1+a^2)^2} \cdot (b-a) \cdot \exp\left[\int\limits_a^b \left(\frac{A\,(\xi-k)\,\sqrt{\xi-h}}{\xi\sqrt{(\xi-f)\,(\xi-g)\,(b-\xi)}} - 1 \right) \frac{d\xi}{\xi-a} \right].$$

Сила X_A направлена вдоль пластинки. Поэтому R_x можно представить в виде двух слагаемых $R_x = R_{xp} + X_A$, где

$$R_{xp} = \frac{\rho\, v_\infty^2}{2} \int\limits_L c_p\, dy \tag{8}$$

находится интегрированием сил давления по контуру $L = ABFGBA$ в плоскости z. Здесь $c_p = 1 - (v/v_\infty)^2$ – коэффициент давления.

Аналогично для силы R_y имеем

$$R_y = -\frac{\rho\, v_\infty^2}{2} \int\limits_L c_p\, dx. \tag{9}$$

При вычислении интегралов в формулах (8) и (9) считается, что $c_p = 1 - (v_0/v_\infty)^2$ на участке BF со стороны застойной зоны $BCEF$ и $c_p = 1 - (v_1/v_\infty)^2$ на участках GB и BH.

Силы R_x и R_y можно найти также другим способом. Приводя рассуждения, аналогичные [7, с. 116–118], выводим, что

$$R_x + iR_y = \frac{\rho}{2} \varphi_1\, v_\infty \pi\, AM \left(\frac{v_0^2}{v_\infty^2} e^{iT} - e^{-iT} \right) e^{i\alpha},$$

где

$$M = \sqrt{\frac{1+k^2}{1+a^2}} \sqrt[4]{\frac{1+h^2}{(1+f^2)\,(1+g^2)\,(1+b^2)}},$$

$$T = -\pi + \arctan k - \arctan a + \frac{1}{2}\left(\arctan h - \arctan f - \arctan g - \arctan b\right).$$

Зная R_x и R_y, можно определить силу сопротивления R_{xa} и подъемную силу R_{ya}, направленные вдоль потока и ортогонально ему. Тогда коэффициенты C_{xa} и C_{ya} определятся так

$$C_{xa} = \frac{2R_{xa}}{\rho v_\infty^2\,(l_1+l_2)}, \quad C_{ya} = \frac{2R_{ya}}{\rho v_\infty^2\,(l_1+l_2)}.$$

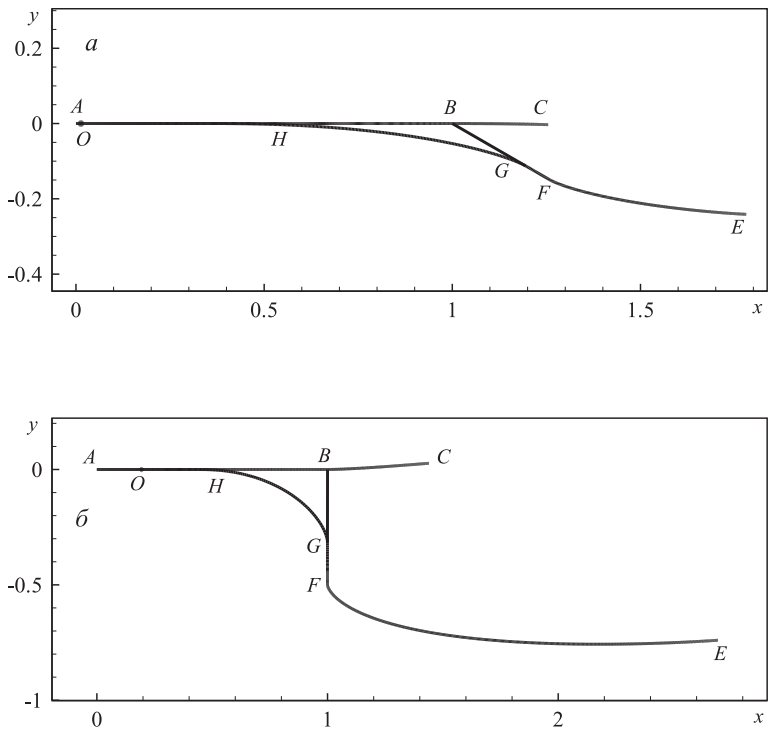

Рис. 3. Пример картины течения около пластинки со щитком при $\alpha = 2^\circ$, $l_2 = 0.3$, $\beta = 30^\circ$ (*а*) и $\alpha = 10^\circ$, $l_2 = 0.5$, $\beta = 90^\circ$ (*б*)

3. Результаты численных расчетов

Система нелинейных уравнений для определения пяти неизвестных f, g, h, a, b решается методом Ньютона. После их определения находится распределение скорости на пластинке и щитке, строятся неизвестные границы HG, FE, BC области течения и вычисляются коэффициенты C_{xa} и C_{ya}.

Из условия гладкого отрыва определяется точка H и, соответственно, длина застойной зоны HB. При этом обеспечивается максимальная, физически возможная длина застойной зоны и отсекаются физически невозможные течения (см., например, [2]).

Рассмотрим некоторые результаты численных расчетов.

Картины течения пластинки со щитком и застойной зоной показаны на рис. 3. При этом рис. 3, *а* соответствует величинам $\alpha = 2^\circ$, $l_2 = 0.3$ и $\beta = 30^\circ$, а рис. 3, *б* – $\alpha = 10^\circ$, $l_2 = 0.5$ и $\beta = 90^\circ$ (значения $v_\infty = 1$, $v_0 = 1.1$, $l_1 = 1$ во всех примерах фиксировались).

На рис. 4–5 представлены зависимости различных физических величин от длины щитка l_2 при разных углах отклонения щитка β и углах атаки α. Данные, приведенные на рис. 4, соответствуют $\alpha = 5^\circ$, а на рис. 5 – $\alpha = 10^\circ$. Сплошные кривые 1 построены для $\beta = 30^\circ$, штриховые 2 – для $\beta = 60^\circ$, штрих-пунктирные 3 – для $\beta = 90^\circ$. При этом тонкие линии соответствуют левой шкале оси ординат (C_{xa} – на рис. 4, *а* и 5, *а*; v_1 – на рис. 4, *б* и 5, *б*), а толстые – правой (C_{ya} – на рис. 4, *а* и 5, *а*; l_{HB} – на рис. 4, *б* и 5, *б*). Здесь l_{HB} – расстояние от точки H начала застойной зоны HG до угловой точки B.

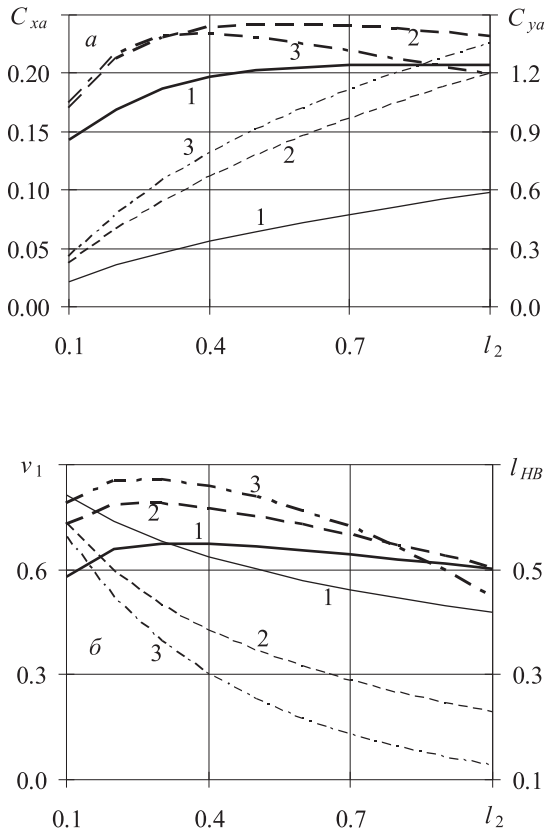

Рис. 4. Зависимости коэффициента C_{xa} (*а*, тонкая линия), коэффициента C_{ya} (*а*, толстая линия), скорости v_1 (*б*, тонкая линия) и длины l_{HB} (*б*, толстая линия) от длины щитка l_2 при $\alpha = 5°$: 1–3 – $\beta = 30°$, $60°$, $90°$

Из анализа приведенных зависимостей видно, что увеличение длины щитка приводит к монотонному возрастанию коэффициента C_{xa}, причем это возрастание заметно больше при углах отклонения щитка $\beta = 60°$ и $90°$, чем при $\beta = 30°$.

В зависимостях коэффициента подъемной силы $C_{ya}(l_2)$ имеются максимумы, положение которых с увеличением угла отклонения β смещается в сторону меньших длин щитка. Наибольшее значение C_{ya} достигается при $\beta = 60°$.

С увеличением длины щитка значение скорости v_1 на границе застойной зоны HG монотонно убывает, и чем больше угол отклонения щитка β, тем меньше v_1.

В зависимостях длины l_{HB} застойной зоны наблюдаются максимумы, положение которых с увеличением угла отклонения β смещается в сторону меньших длин щитка l_2.

Заключение

Как уже было сказано во введении, задача безотрывного обтекания плоской пластинки со щитком решалась в работе [3]. В настоящей работе была сделана попытка приблизить обтекание исходного контура к реальному течению. Для этого была использована схема отрывного обтекания Ву, а также теория С.А. Чаплыгина

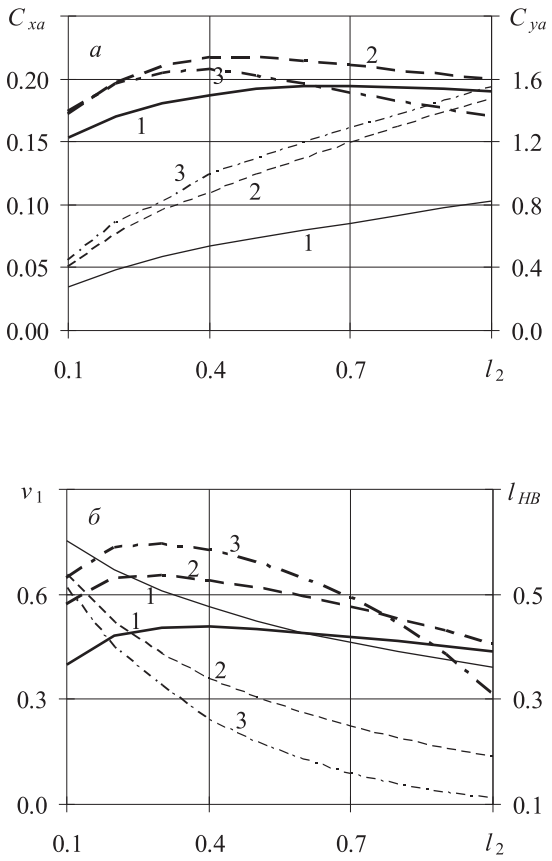

Рис. 5. Зависимости коэффициента C_{xa} (*а*, тонкая линия), коэффициента C_{ya} (*а*, толстая линия), скорости v_1 (*б*, тонкая линия) и длины l_{HB} (*б*, толстая линия) от длины щитка l_2 при $\alpha = 10°$: 1–3 – $\beta = 30°$, $60°$, $90°$

о замене критической точки застойной зоной. Поэтому были получены зависимости не только коэффициента подъемной силы, а также коэффициента силы сопротивления.

Авторы выражают благодарность Д.В. Маклакову за полезные советы.

Работа выполнена при финансовой поддержке ФЦНТП (шифр РИ-112/001/465), РФФИ (проект № 05-08-01153-а).

Summary

L.G. Plotnikova, A.V. Potashev. Flow with separation around a flat plate with rejected flap and a presence of a stagnation zone.

In this paper the problem of a flow with separation around a flat plate with rejected flap is solved at presence of a stagnation zone after flap, and also with presence an angular point between a flat plate and flap. Pressure in a stagnation zone near an angular point is defined from Brillouin – Villat condition of of smooth separation. Dependencies of aerodynamic characteristics are received.

Литература

1. *Чаплыгин С.А.* К вопросу о струях в несжимаемой жидкости // Тр. отд. физ. наук о-ва любителей естествознания. – 1899. – Т. 10, № 1. – С. 35–40.

2. *Маклаков Д.В., Фридман Г.М.* Струйное обтекание пластины с интерцептором при наличии застойной зоны. // Изв. РАН. МЖГ. – 2005. – № 4. – С. 36–44.

3. *Ильинский Н.Б., Плотникова Л.Г.* Об одном подходе к построению профиля крыла с элероном // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2003. – № 4. – С. 28–32.

4. *Плотникова Л.Г.* Задача обтекания отрывным потоком пластинки с отклоненным щитком // Изв. вузов. Авиационная техника. – 2006. – № 1. – С. 61–63.

5. *Wu T.Y.* A wake model for free-streamline flow theory. Part I // J. Fluid Mech. – 1962. – V. 13, No 2. – P. 161–181.

6. *Wu T.Y.* A wake model for free-streamline flow theory. Part II // J. Fluid Mech. – 1964. – V. 18, No 1. – P. 65–93.

7. *Konhaeuser P.* Berechnung zweidimensionaler Totwasserstroemungen um vorgegebene Konturen // Institut A fuer Mechanik der Universitaet Stuttgart. – 1984. – 72 s.

8. *Гуревич М.И.* Теория струй идеальной жидкости. – М.: Наука, 1979. – 536 с.

Поступила в редакцию
14.04.06

Плотникова Людмила Геннадьевна – младший научный сотрудник отдела краевых задач НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Ludmila.Plotnikova@ksu.ru*

Поташев Андрей Валерьевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математики Казанского высшего артиллерийского командного училища.

E-mail: *Andrey.Potashev@ksu.ru*