

УДК 530.12:531.51

РАВНОВЕСНЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ
ЗАРЯЖЕННОЙ ЖИДКОСТИ
В ПРОСТРАНСТВАХ-ВРЕМЕНАХ
С ПРОСТОТРАНЗИТИВНЫМИ ГРУППАМИ
ГОМОТЕТИЧЕСКИХ ДВИЖЕНИЙ

P.A. Дашиев, B.A. Карин

Аннотация

Предложен метод нахождения точных решений самосогласованной системы уравнений Эйнштейна–Максвелла. Предполагалось, что пространство-время V_4 допускает простотранзитивную группу гомотетических преобразований H_4 , а источником такого пространства-времени служит идеальная заряженная жидкость. Метод является обобщением метода Ожвата нахождения точных однородных решений уравнений поля Эйнштейна. Предполагалось также, что вектор скорости жидкости коллинеарен времениподобному вектору \mathbf{Y} алгебры Ли группы H_4 . При указанных выше предположениях найдены все точные решения системы.

Введение

Пространства-времена с группами гомотетических преобразований достаточно подробно изучены в общей теории относительности как с математической, так и с физической точек зрения (см., например, впечатляющий обзор в [1]). Исследование таких пространств-времен вызывает несомненный интерес, поскольку пространства-времена, допускающие группы гомотетических преобразований, являются, во-первых, одним из простейших обобщений хорошо изученных полей тяготения с группами изометрических движений, а во-вторых, они играют важную роль в описании асимптотических свойств более общих моделей. Свойства жидкостей в пространствах-временах с группами гомотетических движений изучены также достаточно полно [2, 3]. Однако свойства заряженной жидкости в полях тяготения с симметриями более сложными, нежели симметрии изометрических групп, исследованы значительно меньше, тогда как исследования в области космической плазмы зачастую приводят к необходимости рассматривать материальные среды с тензором энергии-импульса заряженной жидкости, например идеальный газ заряженных частиц.

Самосогласованная система уравнений Эйнштейна–Максвелла имеет вид

$$R_{ik} - \frac{1}{2}Rg_{ik} = -\kappa(T_{ik} + E_{ik}), \quad (1)$$

$$F_{|k}^{ik} = J^i = \sigma U^i, \quad (2)$$

$$\hat{F}_{|k}^{ik} = 0, \quad (3)$$

где $T_{ik} = (\rho+p)U_iU_k + pg_{ik}$ – компоненты тензора энергии-импульса идеальной жидкости, $(U^iU_i = -1)$, $E_{ik} = g^{ab}F_{ai}F_{bj} - \frac{1}{4}F_{ab}F^{ab}g_{ik}$ – компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля, σ – плотность электрических зарядов. Здесь и везде далее вертикальная черта обозначает ковариантную производную.

Для того чтобы пространство-время допускало группу гомотетических движений H_r с векторами $\mathbf{X}_\alpha = \xi_\alpha^i \partial_i$, ($\alpha = 1, 2, \dots, r$) необходимо и достаточно, чтобы были выполнены уравнения

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} g_{ij} = \xi_\alpha^i \partial_i g_{ij} + \xi_\alpha^j \partial_j g_{ij} = \varphi_\alpha g_{ij}, \quad (4)$$

где $\varphi_\alpha = \text{const} \neq 0$.

Производная Ли от тензора Эйнштейна в направлении вектора \mathbf{X}_α группы H_r равна нулю: $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} G_{ij} = 0$. Следовательно, производная Ли от тензора энергии-импульса в направлении этого вектора также должна быть равна нулю: $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} (T_{ij} + E_{ij}) = 0$. Согласно результатам статьи [4], это равенство означает, что $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} T_{ij} = 0$, $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} E_{ij} = 0$. Из первого равенства следует: $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} \rho = -\rho \varphi_\alpha$, $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} p = -p \varphi_\alpha$, $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} U_i = \frac{1}{2} U_i \varphi_\alpha$, тогда как второе равенство эквивалентно соотношению

$$\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} F_{ik} = \frac{1}{2} \varphi_\alpha F_{ik} + \nu_\alpha \hat{F}_{ik}, \quad (5)$$

где ν_α – скаляры. Если при этом вектор U^i не является собственным вектором тензора E_{ik} , то $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} \sigma + \varphi_\alpha \sigma = 0$, $\nu_\alpha \sigma = 0$, и $\nu_\alpha = \text{const}$. Если же вектор U^i является собственным вектором тензора E_{ik} , то выполнено $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} (\sigma \cos \alpha) + \varphi_\alpha \sigma \cos \alpha = 0$, где α – некоторый скаляр, удовлетворяющий условиям $\mathcal{L}_{\mathbf{X}_\alpha} \alpha = \nu_\alpha$, $U^i \partial_i \nu_\alpha = 0$. Если к тому же $\sigma = 0$, то $\nu_\alpha = \text{const}$.

Предположим, что вектор скорости жидкости направлен вдоль времениподобного вектора $\mathbf{Y} = \xi^i \partial_i$ алгебры Ли группы H_r :

$$U^i = \frac{\xi^i}{\sqrt{-\xi^k \xi_k}}, \quad (6)$$

а вектор \mathbf{Y} является произвольной линейной комбинацией с постоянными коэффициентами всех векторов алгебры: $\mathbf{Y} = a^\alpha \mathbf{X}_\alpha$, $a^\alpha = \text{const}$, по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. При этом предположении ранее нами было доказано, что времениподобный вектор \mathbf{Y} является вектором алгебры Ли группы H_r , соответствующим изометрическим преобразованиям группы, и порождает идеал алгебры Ли этой группы: $[\mathbf{X}_\tau \mathbf{Y}] = \alpha_\tau \mathbf{Y}$, что эквивалентно условию

$$a^\beta C_{\tau\beta}^\sigma = \alpha_\tau a^\sigma. \quad (7)$$

Оказалось, что в этом случае уравнение $(T^{ik} + E^{ik})_{|k} = 0$ удается полностью проинтегрировать, а интегралы его позволяют записать все возможные уравнения состояния заряженной жидкости.

Поскольку не каждая алгебра Ли группы G_4 , допускаемой пространством-временем V_4 , обладает времениподобным идеалом \mathbf{Y} , среди всех пространств-времен с группами гомотетических движений H_r нами были выделены такие пространства-времена, которые бы допускали группу с указанными свойствами.

Дальнейшая наша задача заключается в том, чтобы решить полевые уравнения (1), (2) и (3) в пространствах-временах, допускающие простотранзитивные группы гомотетических преобразований, то есть группы H_4 , действующие на V_4 .

1. Метод решения

Метод решения уравнений Эйнштейна в случае простотранзитивных групп изометрических движений впервые был предложен в работах [5, 6] и далее был развит в работе [7]. В этих работах были найдены все однородные решения уравнений Эйнштейна с тензором энергии-импульса идеальной жидкости. В работах [8, 9] исследованы свойства идеальной заряженной жидкости, вектор скорости которой коллинеарен вектору допускаемой группы изометрических движений, и найдены все точные решения самосогласованной системы уравнений Эйнштейна – Максвелла в том случае, когда допускаются группы G_r , $r \geq 4$, действующие на V_4 . Пространства-времена с группами гомотетических движений, источником которых служит идеальная жидкость, исследованы в статье [10] и для группы высокой подвижности (H_r , $r \geq 4$) найдены все точные решения уравнений Эйнштейна. Ниже, мы модифицируем предложенные в этих работах методы, и, воспользовавшись полученным ранее результатом о том, что допускаемая пространством-временем V_4 группа должна иметь алгебру Ли с времениподобным идеалом, найдем все точные решения самосогласованной системы уравнений Эйнштейна – Максвелла.

Для решения поставленной задачи систему уравнений Эйнштейна – Максвелла удобно представить в несколько ином виде. Как известно, в тензоре электромагнитного поля F_{ij} можно выделить электрическую $E_i = F_{ij}U^j$ и магнитную $H_i = \hat{F}_{ij}U^j$ составляющие, при этом $F_{ij} = U_iE_j - U_jE_i - \eta_{ijkl}U^kH^l$, а компоненты тензора энергии-импульса электромагнитного поля E_{ij} имеют вид

$$E_{ij} = \left(\frac{1}{2}g_{ij} + U_iU_j \right) (E^2 + H^2) - (E_iE_j + H_iH_j) + (U_iS_j + U_jS_i).$$

Здесь $E^2 = E_iE^i$, $H^2 = H_iH^i$, а $S_i = \eta_{ijkl}E^jH^kU^l$ – компоненты вектора Пойнтинга. Далее всюду будем считать, что $S_i = 0$. Это предположение означает, что в равновесной ситуации, рассматриваемой нами, поток электромагнитной энергии отсутствует, а вектор U^i является собственным вектором тензора E_{ik} . После этого уравнения Эйнштейна (1) удобно записать так

$$R_{ij} = -\kappa \left[(\rho + p + E^2 + H^2)U^iU^j + \frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2)g_{ij} - (E_iE_j + H_iH_j) \right],$$

а уравнения Максвелла (2) и (3), в силу предположения $U^i \sim \xi^i$, можно записать в виде

$$E_{|i}^i - \dot{U}_i E^i + 2\omega_i H^i = \sigma, \quad (8)$$

$$H_{|i}^i - \dot{U}_i H^i - 2\omega_i E^i = 0, \quad (9)$$

$$U^j(E_{|j}^i - E_{|j}^i) + \eta^{ijkl}U_kH_{|j} + \eta^{ijkl}\dot{U}_kU_kH_l = 0, \quad (10)$$

$$U^j(H_{|j}^i - H_{|j}^i) - \eta^{ijkl}U_kE_{|j} - \eta^{ijkl}\dot{U}_kU_kE_l = 0. \quad (11)$$

Здесь \dot{U}_i – вектор ускорения, ω^i – вектор вращения линий тока жидкости. Приведенную выше систему уравнений следует дополнить условиями равенства нулю дивергенции тензора энергии-импульса $(T^{ij} + E^{ij})_{|j} = 0$, которые, используя уравнения Максвелла (2) и (3), можно привести к виду

$$(\rho + p)\dot{U}^i + (U^iU^j + g^{ij})p_{|j} = \sigma E^i. \quad (12)$$

У любой простотранзитивной группы H_4 матрица ξ_{α}^i , построенная из компонент векторов алгебры Ли \mathbf{X}_{α} , имеет полный ранг, и, следовательно, существует обратная к ней матрица ξ_i^{α} такая, что $\xi_{\alpha}^k \xi_i^{\alpha} = \delta_i^k$ и $\xi_{\alpha}^i \xi_i^{\beta} = \delta_{\alpha}^{\beta}$, а четыре вектора \mathbf{X}_{α} можно принять в качестве 4-репера. В дальнейшем условимся латинскими буквами обозначать координатные индексы, греческими – номера векторов и реперные индексы. Так, для компонент метрического тензора можем записать $g_{\alpha\beta} = g_{ik} \xi_{\alpha}^i \xi_{\beta}^k$. Запишем в этом репере систему уравнений Эйнштейна–Максвелла. Для этого рассмотрим систему скаляров $\lambda_{\alpha\beta\gamma} = \xi_{\alpha|j} \xi_{\beta}^i \xi_{\gamma}^j$. Используя обобщённые уравнения Киллинга $\xi_{\alpha|i} + \xi_{\alpha|j} = \varphi_{\alpha} g_{ij}$ и уравнения структуры группы

$$\xi_{\alpha}^i \xi_{\beta}^k - \xi_{\beta}^i \xi_{\alpha}^k = C_{\alpha\beta}^{\gamma} \xi_{\gamma}^k, \quad (13)$$

найдем связь между $\lambda_{\alpha\beta\gamma}$, структурными постоянными $C_{\alpha\beta}^{\gamma}$, постоянными гомотетии φ_{α} и $g_{\alpha\beta}$:

$$\lambda_{\alpha\beta\gamma} = \frac{1}{2} (C_{\alpha\beta|\gamma} - C_{\beta\gamma|\alpha} + C_{\gamma\alpha|\beta} + \varphi_{\alpha} g_{\beta\gamma} - \varphi_{\beta} g_{\gamma\alpha} + \varphi_{\gamma} g_{\alpha\beta}), \quad (14)$$

где $C_{\alpha\beta|\gamma} \equiv C_{\alpha\beta}^{\delta} g_{\delta\gamma}$. Для нахождения реперных компонент тензора кривизны используем дифференциальное следствие уравнений структуры группы, которое в случае групп гомотетических движений можно привести к виду

$$2 \xi_{[\alpha}^s \xi_{\beta]}^k - \xi_{\alpha}^s \xi_{\beta}^j R_{sjik} = C_{\alpha\beta}^{\sigma} \xi_{\sigma|i}.$$

Свернув это равенство с $\xi_{\gamma}^i \xi_{\delta}^k$, получим искомое выражение для $R_{\alpha\beta\gamma\delta}$. С помощью свертки по первому и четвертому индексам тензора кривизны и с использованием (14) получим реперные компоненты тензора Риччи

$$R_{\alpha\beta} = \lambda_{\tau\alpha}^{\sigma} \lambda_{\sigma\beta}^{\tau} - \lambda_{\alpha\beta}^{\sigma} C_{\tau\sigma}^{\tau} + \varphi_{\alpha} C_{\tau\sigma}^{\tau} - \varphi_{\alpha} \varphi_{\beta}, \quad (15)$$

где $\lambda_{\alpha\beta}^{\sigma} = g^{\sigma\tau} \lambda_{\alpha\beta\tau}$.

Система уравнений Эйнштейна, записанная в репере векторов \mathbf{X}_{α} алгебры Ли группы, имеет вид

$$R_{\alpha\beta} = -\chi \left[(\rho + p) u_{\alpha} u_{\beta} + \frac{1}{2} (\rho - p + E^2 + H^2) g_{\alpha\beta} - (E_{\alpha} E_{\beta} + H_{\alpha} H_{\beta}) \right], \quad (16)$$

а система уравнений Максвелла (8)–(11), записанная в том же репере, такова:

$$\left(\frac{1}{2} \varphi_{\beta} - \alpha_{\beta} - C_{\gamma\beta}^{\gamma} \right) E^{\beta} + (\nu_{\beta} + 2\omega_{\beta}) H^{\beta} = \sigma, \quad (17)$$

$$\left(\frac{1}{2} \varphi_{\beta} - \alpha_{\beta} - C_{\gamma\beta}^{\gamma} \right) H^{\beta} - (\nu_{\beta} + 2\omega_{\beta}) E^{\beta} = 0, \quad (18)$$

$$u^{\beta} g^{\delta\alpha} \left[\nu_{\beta} H_{\delta} - \nu_{\delta} H_{\beta} + C_{\beta\delta}^{\gamma} E_{\gamma} \right] + \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma} \left(\psi_{\beta} H_{\delta} - \nu_{\beta} E_{\delta} + \frac{1}{2} C_{\beta\delta}^{\sigma} H_{\sigma} \right) = 0, \quad (19)$$

$$u^{\beta} g^{\delta\alpha} \left[\nu_{\delta} E_{\beta} - \nu_{\beta} E_{\delta} + C_{\beta\delta}^{\gamma} H_{\gamma} \right] - \eta^{\alpha\beta\gamma\delta} u_{\gamma} \left(\psi_{\beta} E_{\delta} + \nu_{\beta} E_{\delta} + \frac{1}{2} C_{\beta\delta}^{\sigma} E_{\sigma} \right) = 0. \quad (20)$$

При получении уравнений (17)–(20) были существенно использованы равенства (4)–(7), (13), а в их написании принято обозначение $\psi_\beta = \alpha_\beta + \frac{1}{2}\varphi_\beta$. Здесь $\omega^\alpha = -\frac{1}{4}\eta^{\alpha\beta\gamma\delta}a_\beta C_{\gamma\delta}^\sigma a_\sigma$ – реперные компоненты вектора вращения линий тока жидкости, u_α – реперные компоненты вектора скорости.

Условие (12) равенства нулю дивергенции тензора энергии-импульса в принятом репере примет вид:

$$-(\rho + p)\alpha_\beta + \frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_\beta = \sigma E_\beta. \quad (21)$$

Таким образом, мы показали, что система уравнений Эйнштейна–Максвелла (16)–(21) в репере векторов \mathbf{X}_α алгебры Ли допускаемой группы превратилась в чисто алгебраическую систему уравнений, решение которой позволит нам определить компоненты метрики, постоянные гомотетии и структурные постоянные алгебры Ли допускаемой пространством-временем группы, то есть фактически определить симметрию данного пространства-времени, а также все величины, относящиеся к источникам данного поля тяготения.

2. Решение алгебраической системы

Как показано в статье [7], 4-мерные алгебры Ли могут быть разделены на два широких класса, используя вектор $k_\alpha = C_{\beta\alpha}^\beta$ касательного пространства.

Первый класс “ K ” получится, если $k_\alpha \neq 0$. В этом случае выделяются три подкласса в зависимости от того, пространственноподобный, изотропный или времениподобный вектор k_α , то есть $k_\alpha k_\beta g^{\alpha\beta} > 0$, $= 0$ или < 0 . Эти подклассы обозначены “ KS ”, “ KN ”, “ KT ”.

Второй класс получится, если $k_\alpha = 0$. Оказывается, в этом случае алгебры Ли могут быть двух типов.

Тип “ P ”: $C_{\alpha\beta}^\gamma = \theta_{[\alpha}^\gamma p_{\beta]}$, где p_α – вектор касательного пространства, а θ_β^α – матрица, удовлетворяющая условию $\theta_\beta^\beta p_\alpha - \theta_\alpha^\beta p_\beta = 0$. В зависимости от того, какой вектор p_α : пространственноподобный (“ PS ”), изотропный (“ PN ”) или времениподобный (“ PT ”), опять выделяются три подтипа.

Тип “ L ”: $C_{\beta\gamma}^\alpha = \varepsilon_{\beta\gamma\delta\sigma} S^{\alpha\delta} l^\sigma$, где $S^{\alpha\delta}$ – матрица, а l^σ – вектор, пространственноподобный (“ LS ”), изотропный (“ LN ”) или времениподобный (“ LT ”). В каждом из этих случаев в статье [7], с точностью до лоренцевых вращений, приведен вид коммутационных соотношений.

Из условия $a^\alpha C_{\tau\alpha}^\sigma = \alpha_\tau a^\sigma$ легко получить, что $a^\alpha k_\alpha = 0$, то есть векторы a^α и k_α ортогональны друг другу. Поскольку a^α – времениподобный вектор, то вектор k_α может быть только пространственноподобным, и решение нашей системы в классе “ K ” следует искать только в подклассе “ KS ”.

В типе “ P ” аналогичное исследование показывает, что $a^\alpha p_\alpha = 0$, и, следовательно, возможен только случай “ PS ”.

В типе “ L ” нет условий, аналогичных условиям ортогональности в типах “ K ” и “ P ”, поэтому здесь возможными оказываются все три подтипа, которые в статье обозначены “ LS ”, “ LN ” и “ LT ”.

Таким образом, в каждом из случаев “ KS ”, “ PS ”, “ LS ”, “ LN ” и “ LT ” необходимо решать алгебраическую систему уравнений Эйнштейна–Максвелла (16)–(20) совместно с условиями (21) и (22), тождествами Якоби (23) и условием (7) того, что алгебра Ли группы имеет времениподобный идеал. Однако, приведенная выше система пока слишком сложна для решения. Необходимо эту систему упростить.

Реперные компоненты метрического тензора $g_{\alpha\beta}$ в приведённой выше системе уравнений Эйнштейна–Максвелла не являются постоянными: $g_{\alpha\beta} = g_{\alpha\beta}(x)$. В точке общего положения x_0 линейными преобразованиями $g_{\alpha'\beta'} = g_{\alpha\beta} A_{\alpha'}^\alpha A_{\beta'}^\beta$ матрицу

$g_{\alpha'\beta'}(x)$ можно привести к диагональному виду: $g_{\alpha'\beta'}(x) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. При этом также преобразуются и структурные постоянные. Из коммутационных соотношений алгебры Ли $[\mathbf{X}_\alpha \mathbf{X}_\beta] = C_{\alpha\beta}^\gamma \mathbf{X}_\gamma$, следует, что структурные постоянные $C_{\alpha\beta}^\gamma$ будут являться компонентами тензора, заданного в касательном пространстве, образованного векторами репера. Поэтому $C_{\alpha'\beta'}^{\gamma'} = A_\gamma^{\gamma'} C_{\alpha\beta}^\gamma A_\alpha^\alpha A_\beta^\beta$, где $A_\gamma^{\gamma'}$ – матрица, обратная к A_γ^γ . Кроме того, у нас остается ещё произвол в «лоренцевых вращениях», не меняющих диагонального вида матрицы $g_{\alpha'\beta'} : \text{diag}(-1, 1, 1, 1) = g_{\alpha'\beta'} = L_\alpha^\alpha L_\beta^\beta g_{\alpha\beta}$. Этот произвол может быть использован для того, чтобы упростить либо структурные постоянные, либо реперные компоненты величин, входящих в уравнения. Так, за счет этих «лоренцевых вращений» можно всегда a^α выбрать в виде $a^\alpha = (a^0, 0, 0, 0)$. Без ущерба для общности можно считать, что в выбранной точке $\sqrt{-a^\sigma a_\sigma} = 1$, поэтому $U^\alpha = a^\alpha = \delta_0^\alpha$.

При решении системы (16)–(21) оказываются полезными хорошо известные для любых групп конформных преобразований соотношения

$$C_{\tau\beta}^\sigma \varphi_\sigma = 0. \quad (22)$$

Эту же систему также необходимо дополнить тождествами Якоби, которые после осуществления указанных выше преобразований выступают как дополнительная система уравнений относительно величин $C_{\alpha\beta}^\gamma$:

$$C_{\alpha\beta}^\sigma C_{\sigma\gamma}^\tau + C_{\beta\gamma}^\sigma C_{\sigma\alpha}^\tau + C_{\gamma\alpha}^\sigma C_{\sigma\beta}^\tau = 0. \quad (23)$$

Векторы репера $\{\mathbf{X}_\alpha\}$ теперь выступают в качестве векторов орторепера, но не векторов алгебры Ли. Иначе говоря, после осуществления в точке указанных выше преобразований мы потеряли информацию о допускаемой пространством-временем группе. Эту информацию нам придется позже восстановить.

Рассмотрим решение этой системы в случае, когда алгебра Ли допускаемой пространством-временем группы относится к подклассу “KS”. Коммутационные соотношения алгебры Ли для этого подкласса выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2] &= A\mathbf{X}_0 + F\mathbf{X}_1 + E\mathbf{X}_2, \\ [\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_0] &= F\mathbf{X}_0 + B\mathbf{X}_1 + D\mathbf{X}_2, \\ [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_1] &= E\mathbf{X}_0 + D\mathbf{X}_1 + C\mathbf{X}_2, \\ [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_3] &= -a\mathbf{X}_0 + (f - r)\mathbf{X}_1 + (e + q)\mathbf{X}_2, \\ [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_3] &= -(f + r)\mathbf{X}_0 + b\mathbf{X}_1 + (d - p)\mathbf{X}_2, \\ [\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3] &= -(e - q)\mathbf{X}_0 + (d + p)\mathbf{X}_1 + c\mathbf{X}_2. \end{aligned}$$

Здесь без ущерба для общности положено $k^\alpha = (0, 0, 0, k)$. Вследствие условия $k_\alpha = C_{f\alpha}^f \neq 0$ имеем $-a + b + c = k \neq 0$. Имеющийся произвол во вращениях репера используем так, чтобы $a^\alpha = \delta_0^\alpha$. Из условия (7) определим значения α_β : $\alpha_0 = 0$, $\alpha_1 = -E$, $\alpha_2 = F$, $\alpha_3 = a$, а также получим $B = C = D = 0$, $f = r$, $e = -q$. Остающийся произвол во вращениях в плоскости $\{\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2\}$ используем для того, чтобы положить $d = p$. Реперные компоненты вектора вращения линий тока жидкости после этого таковы: $\omega^0 = \omega_0 = 0$, $\omega^1 = \omega_1 = -e$, $\omega^2 = \omega_2 = r$, $\omega^3 = \omega_3 = \frac{1}{2}A$. Принимая во внимание ортогональность векторов E^α и H^α вектору a^α , можем записать окончательный вид алгебраической системы уравнений Эйнштейна–Максвелла в подклассе “KS”.

Уравнения Эйнштейна (16):

$$\begin{aligned} R_{00} &= -\frac{1}{2}A^2 - 2r^2 - 2e^2 + E\varphi_1 - F\varphi_2 - a\varphi_3 + (a + \frac{1}{2}\varphi_3)k - \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) = \\ &= -\frac{1}{2}\chi[\rho + 3p + E^2 + H^2], \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= -\frac{1}{2}A^2 + 2E^2 - 2r^2 - 2d^2 - F\varphi_2 - b\varphi_3 + (b - \frac{1}{2}\varphi_3)k + \frac{1}{2}(\varphi_2^2 + \varphi_3^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_1^2 - H_1^2], \end{aligned} \quad (25)$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= -\frac{1}{2}A^2 + 2F^2 - 2e^2 + 2d^2 + E\varphi_1 - c\varphi_3 + (c - \frac{1}{2}\varphi_3)k + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_3^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_2^2 - H_2^2], \end{aligned} \quad (26)$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= a^2 + b^2 + c^2 - 2r^2 - 2e^2 + 2d^2 - \frac{1}{2}k\varphi_3 + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_3^2 - H_3^2], \end{aligned} \quad (27)$$

$$R_{01} = AF - 2ed - (a + b)r + kr + \frac{1}{2}A\varphi_2 - r\varphi_3 = 0, \quad (28)$$

$$R_{02} = AE - (a + c)e + ek - \frac{1}{2}A\varphi_1 - e\varphi_3 = 0, \quad (29)$$

$$R_{03} = eF - Er + e\varphi_2 + r\varphi_1 = 0, \quad (30)$$

$$\begin{aligned} R_{12} &= -2EF - 2er + (b - c)d + dk + \frac{1}{2}F\varphi_1 - \frac{1}{2}E\varphi_2 - d\varphi_3 - \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2 = \\ &= \chi[E_1E_2 + H_1H_2], \end{aligned} \quad (31)$$

$$R_{13} = -Ae - (a + c)E - dF + \frac{1}{2}b\varphi_1 + d\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_3 = \chi[E_1E_3 + H_1H_3], \quad (32)$$

$$R_{23} = Ar + Ed + (a + b)F + \frac{1}{2}c\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_2\varphi_3 = \chi[E_2E_3 + H_2H_3]. \quad (33)$$

Уравнения Максвелла (17)–(20):

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}\varphi_1 + E)E_1 + (\nu_1 - 2e)H_1 + (\frac{1}{2}\varphi_2 - F)E_2 + (\nu_2 + 2r)H_2 + \\ + (\frac{1}{2}\varphi_3 - a - k)E_3 + (\nu_3 + A)H_3 = \sigma, \end{aligned} \quad (34)$$

$$\begin{aligned} (\frac{1}{2}\varphi_1 + E)H_1 - (\nu_1 - 2e)E_1 + (\frac{1}{2}\varphi_2 - F)H_2 - (\nu_2 + 2r)E_2 + \\ + (\frac{1}{2}\varphi_3 - a - k)H_3 - (\nu_3 + A)E_3 = 0, \end{aligned} \quad (35)$$

$$(2d - \nu_0)H_1 + (c - a - \frac{1}{2}\varphi_3)H_2 - \nu_2E_3 + (F + \frac{1}{2}\varphi_2)H_3 + \nu_3E_2 = 0, \quad (36)$$

$$-\nu_3E_1 + \nu_1E_3 + (a + \frac{1}{2}\varphi_3 - b)H_1 - \nu_0H_2 + (E - \frac{1}{2}\varphi_1)H_3 = 0, \quad (37)$$

$$\nu_2E_1 - \nu_1E_2 - \frac{1}{2}\varphi_2H_1 - \nu_0H_3 + \frac{1}{2}\varphi_1H_2 = 0, \quad (38)$$

$$(-2d + \nu_0)E_1 + (a - c + \frac{1}{2}\varphi_3)E_2 + \nu_3H_2 - (F + \frac{1}{2}\varphi_2)E_3 - \nu_2H_3 = 0, \quad (39)$$

$$-\nu_3H_1 + \nu_1H_3 + (b - a - \frac{1}{2}\varphi_3)E_1 + \nu_0E_2 - (E - \frac{1}{2}\varphi_1)E_3 = 0, \quad (40)$$

$$\frac{1}{2}\varphi_2E_1 - \frac{1}{2}\varphi_1E_2 + \nu_0E_3 - \nu_1H_2 + \nu_2H_1 = 0. \quad (41)$$

Условия (21) приводят к следующим уравнениям:

$$-(\rho + p)E + \frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_1 = \sigma E_1, \quad (42)$$

$$-(\rho + p)F + \frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_2 = \sigma E_2, \quad (43)$$

$$-(\rho + p)a + \frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_3 = \sigma E_3. \quad (44)$$

Используя в равенствах (22) уравнения (21), дополнительно получим

$$\sigma(2dE_1 + cE_2) = 0, \quad \sigma(\varphi_2E_1 - \varphi_1E_2) = 0, \quad \sigma(FE_1 + EE_2) = 0, \quad b\varphi_1 = 0. \quad (45)$$

Условия, налагаемые тождествами Якоби:

$$-bE = 0, \quad 2dE - cF = 0, \quad \left(a + \frac{1}{2}k\right)A + 2rF + 2eE = 0. \quad (46)$$

Первое из этих условий будет выполнено, если положить $E = 0$. Второму условию, после этого, удовлетворим, положив $F = 0$, а третье условие при выполнении первых двух будет выполнено, если потребовать $A = 0$. Продолжая таким образом, придем к тому, что нетривиальным решением системы (24)–(46) является

$$\begin{aligned}\chi p &= \frac{1}{2}(\varphi_2^2 + b^2), \quad \chi\rho = -\frac{1}{2}b^2 + 2r^2, \\ \sigma &= \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{\chi}(2r^2 - b^2 - \frac{1}{2}\varphi_2^2)(\varphi_2^2 + 4(\nu_2 + 2r)^2)}, \\ E_2 &= \pm\varphi_2\sqrt{\frac{2r^2 - b^2 - \frac{1}{2}\varphi_2^2}{\chi(\varphi_2^2 + 4(\nu_2 + 2r)^2)}}, \quad H_2 = \pm 2\varphi_2(\nu_2 + 2r)\sqrt{\frac{2r^2 - b^2 - \frac{1}{2}\varphi_2^2}{\chi(\varphi_2^2 + 4(\nu_2 + 2r)^2)}}\end{aligned}$$

с условиями $2r^2 \geq b^2 + \varphi_2^2/2$, $b \neq 0$, $\varphi_2 \neq 0$.

Исследование системы (24)–(46), аналогичное проведенному выше, показывает, что других нетривиальных решений у этой системы нет.

Рассмотрим решение системы (16)–(23) в случае, когда алгебра Ли допускаемой пространством-временем группы относится к подтипу “PS”. Коммутационные соотношения имеют следующий вид

$$\begin{aligned}[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2] &= 0, \quad [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_0] = 0, \quad [\mathbf{X}_0\mathbf{X}_1] = 0, \\ [\mathbf{X}_0\mathbf{X}_3] &= -a\mathbf{X}_0 + (f - r)\mathbf{X}_1 + (e + q)\mathbf{X}_2, \\ [\mathbf{X}_1\mathbf{X}_3] &= -(f + r)\mathbf{X}_0 + b\mathbf{X}_1 + (d - p)\mathbf{X}_2, \\ [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3] &= -(f + r)\mathbf{X}_0 + b\mathbf{X}_1 + (d - p)\mathbf{X}_2.\end{aligned}$$

Вектора репера выбраны так, что вектор p^α коллинеарен \mathbf{X}_3 , то есть $p^\alpha(0, 0, 0, p)$. Условие $k_\alpha = C_{f\alpha}^f = 0$ дает $-a + b + c = 0$. Произвол во вращениях репера используем для того, чтобы положить $a^\alpha = \delta_0^\alpha$. С помощью произвола во вращениях в плоскости $\{\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2\}$, как и в случае “KS”, добьемся того, чтобы $d = p$. Используя условие инвариантной подгруппы (7), получим $f = r$, $e = -q$. В результате первые компоненты вектора вращения линий тока жидкости имеют вид: $\omega^0 = 0$, $\omega^1 = -e$, $\omega^2 = r$, $\omega^3 = 0$.

Алгебраическая система уравнений Эйнштейна–Максвелла (16)–(23) выглядит следующим образом.

Уравнения Эйнштейна (16):

$$\begin{aligned}R_{00} &= -\frac{1}{2}A^2 - 2r^2 - 2e^2 + E\varphi_1 - F\varphi_2 - a\varphi_3 + (a + \frac{1}{2}\varphi_3)k - \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) = \\ &= -\frac{1}{2}\chi[\rho + 3p + E^2 + H^2],\end{aligned}\tag{47}$$

$$\begin{aligned}R_{11} &= -\frac{1}{2}A^2 + 2E^2 - 2r^2 - 2d^2 - F\varphi_2 - b\varphi_3 + (b - \frac{1}{2}\varphi_3)k + \frac{1}{2}(\varphi_2^2 + \varphi_3^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_1^2 - H_1^2],\end{aligned}\tag{48}$$

$$\begin{aligned}R_{22} &= -\frac{1}{2}A^2 + 2F^2 - 2e^2 + 2d^2 + E\varphi_1 - c\varphi_3 + (c - \frac{1}{2}\varphi_3)k + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_3^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_2^2 - H_2^2],\end{aligned}\tag{49}$$

$$\begin{aligned}R_{33} &= a^2 + b^2 + c^2 - 2r^2 - 2e^2 + 2d^2 - \frac{1}{2}k\varphi_3 + \frac{1}{2}(\varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_3^2 - H_3^2],\end{aligned}\tag{50}$$

$$R_{01} = -2ed - (a + b)r - r\varphi_3 = 0,\tag{51}$$

$$R_{02} = -(a + c)e - e\varphi_3 = 0,\tag{52}$$

$$R_{03} = e\varphi_2 + r\varphi_1 = 0,\tag{53}$$

$$R_{12} = -2er + (b - c)d - d\varphi_3 - \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_2 = \chi[E_1E_2 + H_1H_2],\tag{54}$$

$$R_{13} = \frac{1}{2}b\varphi_1 + d\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_1\varphi_3 = \chi[E_1E_3 + H_1H_3],\tag{55}$$

$$R_{23} = \frac{1}{2}c\varphi_2 - \frac{1}{2}\varphi_2\varphi_3 = \chi[E_2E_3 + H_2H_3]. \quad (56)$$

Уравнения Максвелла (17)–(20):

$$\frac{1}{2}\varphi_1E_1 + (\nu_1 - 2e)H_1 + \frac{1}{2}\varphi_2)E_2 + (\nu_2 + 2r)H_2 + (\frac{1}{2}\varphi_3 - b - c)E_3 + \nu_3H_3 = \sigma, \quad (57)$$

$$\frac{1}{2}\varphi_1H_1 - (\nu_1 - 2e)E_1 + \frac{1}{2}\varphi_2H_2 - (\nu_2 + 2r)E_2 + (\frac{1}{2}\varphi_3 - b - c)H_3 - \nu_3E_3 = 0, \quad (58)$$

$$(2d - \nu_0)H_1 + (c - a - \frac{1}{2}\varphi_3)H_2 - \nu_2E_3 + \frac{1}{2}\varphi_2H_3 + \nu_3E_2 = 0, \quad (59)$$

$$-\nu_3E_1 + \nu_1E_3 + (a + \frac{1}{2}\varphi_3 - b)H_1 - \nu_0H_2 - \frac{1}{2}\varphi_1H_3 = 0, \quad (60)$$

$$\nu_2E_1 - \nu_1E_2 - \frac{1}{2}\varphi_2H_1 - \nu_0H_3 + \frac{1}{2}\varphi_1H_2 = 0, \quad (61)$$

$$(-2d + \nu_0)E_1 + (a - c + \frac{1}{2}\varphi_3)E_2 + \nu_3H_2 - \frac{1}{2}\varphi_2E_3 - \nu_2H_3 = 0, \quad (62)$$

$$-\nu_3H_1 + \nu_1H_3 + (b - a - \frac{1}{2}\varphi_3)E_1 + \nu_0E_2 + \frac{1}{2}\varphi_1E_3 = 0, \quad (63)$$

$$\frac{1}{2}\varphi_2E_1 - \frac{1}{2}\varphi_1E_2 + \nu_0E_3 - \nu_1H_2 + \nu_2H_1 = 0. \quad (64)$$

Условия (21) приводят к уравнениям

$$\frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_1 = \sigma E_1, \quad \frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_1 = \sigma E_1, \quad -(\rho + p)a + \frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_3 = \sigma E_3. \quad (65)$$

Условия (22) дают ещё два дополнительных уравнения

$$2d\varphi_1 + c\varphi_2 = 0, \quad b\varphi_1 = 0. \quad (66)$$

Рассуждая так же, как и в случае “KS”, получим решение этой алгебраической системы:

$$\chi p = b(2b + c), \quad \chi\rho = -\frac{c}{2}(12b + 9c),$$

$$\sigma = \pm\sqrt{\frac{1}{\chi}\left(\frac{3}{2}c^2 - 2b^2 - bc\right)\left(\nu_3^2 + (2b + \frac{3}{2}c)^2\right)},$$

$$E_3 = \mp\left(2b + \frac{3}{2}c\right)\sqrt{\frac{\frac{3}{2}c^2 - 2b^2 - bc}{\chi\left(\nu_3^2 + 4\left(2b + \frac{3}{2}c\right)^2\right)}}, \quad H_3 = \pm\nu_3\sqrt{\frac{\frac{3}{2}c^2 - 2b^2 - bc}{\chi\left(\nu_3^2 + 4\left(2b + \frac{3}{2}c\right)^2\right)}}}.$$

при этом должны быть выполнены условия: $b \in \left(-\frac{\sqrt{13}+1}{4}c; -\frac{3}{4}c\right)$ при $c \geq 0$ и $b \in \left(\frac{\sqrt{13}-1}{4}c; 0\right) \cup \left(-\frac{1}{2}c; -\frac{3}{4}c\right)$ при $c \leq 0$.

Исследование системы (47)–(66) показывает, что других нетривиальных решений у этой системы нет.

Рассмотрим теперь подтип “LT”. Коммутационные соотношения в этом случае имеют вид

$$[\mathbf{X}_2\mathbf{X}_0] = 0, \quad [\mathbf{X}_0\mathbf{X}_1] = 0, \quad [\mathbf{X}_0\mathbf{X}_3] = 0,$$

$$[\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2] = -N\mathbf{X}_0 - E\mathbf{X}_1 - D\mathbf{X}_2 - C\mathbf{X}_3,$$

$$[\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1] = -M\mathbf{X}_0 - F\mathbf{X}_1 - B\mathbf{X}_2 - D\mathbf{X}_3,$$

$$[\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3] = -L\mathbf{X}_0 - A\mathbf{X}_1 - F\mathbf{X}_2 - E\mathbf{X}_3.$$

Используя, как и ранее, имеющийся произвол во вращениях репера, произведем диагонализацию пространственной части матрицы S^{ab} с помощью которой строятся структурные постоянные для подтипа “LT”, сохраняя $a^\alpha = (1, 0, 0, 0)$. Коммутационные соотношения в этом случае упростятся и примут вид

$$[\mathbf{X}_2\mathbf{X}_0] = 0, \quad [\mathbf{X}_0\mathbf{X}_1] = 0, \quad [\mathbf{X}_0\mathbf{X}_3] = 0, \quad [\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2] = -L\mathbf{X}_0 - A\mathbf{X}_1,$$

$$[\mathbf{X}_3 \mathbf{X}_1] = -M\mathbf{X}_0 - B\mathbf{X}_2, \quad [\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3] = -L\mathbf{X}_0 - A\mathbf{X}_1.$$

Система уравнений Эйнштейна–Максвелла (16)–(20) в этом подтипе имеет следующий вид.

Уравнения Эйнштейна (16):

$$R_{00} = -\frac{1}{2}(-L^2 - N^2 - M^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2) = -\frac{1}{2}\chi[\rho + 3p + E^2 + H^2], \quad (67)$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2}(-A^2 + (B - C)^2 - M^2 - N^2 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_1^2 - H_1^2], \end{aligned} \quad (68)$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{1}{2}(-B^2 + (A - C)^2 - L^2 - N^2 + \varphi_1^2 + \varphi_3^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_2^2 - H_2^2], \end{aligned} \quad (69)$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= \frac{1}{2}((A - B)^2 - C^2 - L^2 - M^2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_3^2 - H_3^2], \end{aligned} \quad (70)$$

$$R_{01} = \frac{1}{2}(AL - N\varphi_2 + M\varphi_3) = 0, \quad (71)$$

$$R_{02} = \frac{1}{2}(BM + N\varphi_1 - L\varphi_3) = 0, \quad (72)$$

$$R_{03} = \frac{1}{2}(CN - M\varphi_1 + L\varphi_2) = 0, \quad (73)$$

$$R_{12} = \frac{1}{2}(LM + (A - B)\varphi_3 - \varphi_1\varphi_2) = \chi[E_1E_2 + H_1H_2], \quad (74)$$

$$R_{13} = \frac{1}{2}(LN + (C - A)\varphi_2 - \varphi_1\varphi_3) = \chi[E_1E_3 + H_1H_3], \quad (75)$$

$$R_{23} = \frac{1}{2}(MN + (B - C)\varphi_1 - \varphi_2\varphi_3) = \chi[E_2E_3 + H_2H_3]. \quad (76)$$

Уравнения Максвелла (17)–(20):

$$\frac{1}{2}\varphi_1E_1 + (\nu_1 - 2e)H_1 + \frac{1}{2}\varphi_2)E_2 + (\nu_2 + 2r)H_2 + (\frac{1}{2}\varphi_3 - b - c)E_3 + \nu_3H_3 = \sigma, \quad (77)$$

$$\frac{1}{2}\varphi_1H_1 - (\nu_1 - 2e)E_1 + \frac{1}{2}\varphi_2H_2 - (\nu_2 + 2r)E_2 + (\frac{1}{2}\varphi_3 - b - c)H_3 - \nu_3E_3 = 0, \quad (78)$$

$$(2d - \nu_0)H_1 + (c - a - \frac{1}{2}\varphi_3)H_2 - \nu_2E_3 + \frac{1}{2}\varphi_2H_3 + \nu_3E_2 = 0, \quad (79)$$

$$-\nu_3E_1 + \nu_1E_3 + (a + \frac{1}{2}\varphi_3 - b)H_1 - \nu_0H_2 - \frac{1}{2}\varphi_1H_3 = 0, \quad (80)$$

$$\nu_2E_1 - \nu_1E_2 - \frac{1}{2}\varphi_2H_1 - \nu_0H_3 + \frac{1}{2}\varphi_1H_2 = 0, \quad (81)$$

$$(-2d + \nu_0)E_1 + (a - c + \frac{1}{2}\varphi_3)E_2 + \nu_3H_2 - \frac{1}{2}\varphi_2E_3 - \nu_2H_3 = 0, \quad (82)$$

$$-\nu_3H_1 + \nu_1H_3 + (b - a - \frac{1}{2}\varphi_3)E_1 + \nu_0E_2 + \frac{1}{2}\varphi_1E_3 = 0, \quad (83)$$

$$\frac{1}{2}\varphi_2E_1 - \frac{1}{2}\varphi_1E_2 + \nu_0E_3 - \nu_1H_2 + \nu_2H_1 = 0. \quad (84)$$

Уравнения закона «сохранения» (21):

$$\frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_1 = \sigma E_1, \quad \frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_2 = \sigma E_2, \quad \frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_3 = \sigma E_3. \quad (85)$$

Условие (22) даёт три дополнительных равенства

$$A\varphi_1 = 0, \quad B\varphi_2 = 0, \quad C\varphi_3 = 0. \quad (86)$$

Все условия, налагаемые тождествами Якоби (23), выполнены тождественно.

Приведенная выше алгебраическая система уравнений (67)–(86) имеет два решения. Первое решение имеет вид

$$\begin{aligned} \chi p &= \frac{1}{2}\varphi_1^2, \quad \chi\rho = \frac{1}{2}L^2, \quad \sigma = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\chi}(L^2 - \varphi_1^2)(\varphi_2^2 + 4(L - \nu_1)^2)}, \\ E_1 &= \pm\varphi_1\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(L^2 - \varphi_1^2)}{\chi(\varphi_2^2 + 4(L - \nu_1)^2)}}, \quad H_1 = \mp 2\varphi_1(L - \nu_1)\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(L^2 - \varphi_1^2)}{\chi(\varphi_1^2 + 4(L - \nu_1)^2)}}. \end{aligned}$$

В этом решении должно быть выполнено условие $L^2 \geq \varphi_1^2$.

Второе решение системы (67)–(86) таково:

$$\begin{aligned} \chi p &= \frac{1}{2}\varphi_1^2, \quad \chi\rho = \frac{3}{2}\varphi_1^2, \quad \sigma = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\chi}\varphi_1^2(\varphi_1^2 + 4\nu_1^2)}, \\ E_1 &= \pm\varphi_1\sqrt{\frac{\varphi_1^2}{2\chi(\varphi_1^2 + 4\nu_1^2)}}, \quad H_1 = \mp 2\varphi_1\nu_1\sqrt{\frac{\varphi_1^2}{2\chi(\varphi_1^2 + 4\nu_1^2)}}. \end{aligned}$$

Других решений системы уравнений (67)–(86) нет.

Подтип “LN”.

Коммутационные соотношения в этом случае имеют вид

$$\begin{aligned} [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_0] &= 0, \quad [\mathbf{X}_0\mathbf{X}_1] = 0, \quad [\mathbf{X}_0\mathbf{X}_3] = 0, \\ [\mathbf{X}_1\mathbf{X}_2] &= L\mathbf{X}_0 + E\mathbf{X}_1 + D\mathbf{X}_2 + C\mathbf{X}_3, \\ [\mathbf{X}_3\mathbf{X}_1] &= M\mathbf{X}_0 + F\mathbf{X}_1 + B\mathbf{X}_2 + D\mathbf{X}_3, \\ [\mathbf{X}_2\mathbf{X}_3] &= N\mathbf{X}_0 + A\mathbf{X}_1 + F\mathbf{X}_2 + E\mathbf{X}_3. \end{aligned}$$

Система уравнений Эйнштейна–Максвелла (16)–(20) в этом подтипе принимает следующий вид.

Уравнения Эйнштейна (16):

$$R_{00} = -\frac{1}{2}(-L^2 - N^2 - M^2 - \varphi_1^2 - \varphi_2^2 - \varphi_3^2) = -\frac{1}{2}\chi[\rho + 3p + E^2 + H^2], \quad (87)$$

$$\begin{aligned} R_{11} &= \frac{1}{2}(-A^2 + (B - C)^2 - M^2 - L^2 + 4D^2 - 2E\varphi_1 + 2F\varphi_3 + \varphi_2^2 + \varphi_3^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_1^2 - H_1^2], \end{aligned} \quad (88)$$

$$\begin{aligned} R_{22} &= \frac{1}{2}(-B^2 + (A - C)^2 - L^2 - N^2 + 4E^2 + 2D\varphi_1 - 2F\varphi_3 + \varphi_1^2 + \varphi_3^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_2^2 - H_2^2], \end{aligned} \quad (89)$$

$$\begin{aligned} R_{33} &= \frac{1}{2}((A - B)^2 - C^2 - N^2 - M^2 + 4F^2 - 2D\varphi_1 + 2E\varphi_2 + \varphi_1^2 + \varphi_2^2) = \\ &= -\chi[\frac{1}{2}(\rho - p + E^2 + H^2) - E_3^2 - H_3^2], \end{aligned} \quad (90)$$

$$R_{01} = \frac{1}{2}(EL + FM + AN + L\varphi_2 - M\varphi_3) = 0, \quad (91)$$

$$R_{02} = \frac{1}{2}(DL + BM + FN - L\varphi_1 + N\varphi_3) = 0, \quad (92)$$

$$R_{03} = \frac{1}{2}(CL + DM + EN + M\varphi_1 - N\varphi_2) = 0, \quad (93)$$

$$\begin{aligned} R_{12} &= \frac{1}{2}(-4DE - 2(A + B - C)F + MN + \varphi_1(E - \varphi_2) - D\varphi_2 + (-A + B)\varphi_3) = \\ &= \chi[E_1E_2 + H_1H_2], \end{aligned} \quad (94)$$

$$\begin{aligned} R_{13} &= \frac{1}{2}(-2(A - B + C)E - 4DF + LN + (A - C)\varphi_2 + D\varphi_3 - (F + \varphi_3)\varphi_1) = \\ &= \chi[E_1E_3 + H_1H_3], \end{aligned} \quad (95)$$

$$\begin{aligned} R_{23} &= \frac{1}{2}(2AD - 2BD - 2CD - 4EF + LM + (-B + C)\varphi_1 + F\varphi_2 - (E + \varphi_2)\varphi_3) = \\ &= \chi[E_2E_3 + H_2H_3]. \end{aligned} \quad (96)$$

Уравнения Максвелла (17)–(20):

$$\frac{1}{2}\varphi_1E_1 + (\nu_1 + N)H_1 + \frac{1}{2}\varphi_2E_2 + (\nu_2 + N)H_2 + \frac{1}{2}\varphi_3E_3 + (\nu_3 + L)H_3 = \sigma, \quad (97)$$

$$\frac{1}{2}\varphi_1H_1 - (\nu_1 + N)E_1 + \frac{1}{2}\varphi_2H_2 - (\nu_2 + M)E_2 + \frac{1}{2}\varphi_3H_3 - (\nu_3 + L)E_3 = 0, \quad (98)$$

$$AH_1 + FH_2 - \nu_2E_3 + EH_3 + \nu_3E_2 - \frac{1}{2}H_2\varphi_3 + \frac{1}{2}H_3\varphi_2 = 0, \quad (99)$$

$$-AE_1 - FE_2 - EE_3 + \frac{1}{2}E_2\varphi_3 - \frac{1}{2}E_3\varphi_2 + \nu_3H_2 - \nu_2H_3 = 0, \quad (100)$$

$$\nu_2E_1 - \nu_1E_2 - \frac{1}{2}\varphi_2H_1 + EH_1 + DH_2 + CH_3 - \frac{1}{2}H_1\varphi_2 + \frac{1}{2}H_2\varphi_1 = 0, \quad (101)$$

$$-\nu_3 E_1 + \nu_1 E_3 + FH_1 + BH_2 + DH_3 + \frac{1}{2}H_1\varphi_3 - \frac{1}{2}H_3\varphi_1 = 0, \quad (102)$$

$$-\nu_3 H_1 + \nu_1 H_3 - FE_1 - BE_2 - DE_3 - \frac{1}{2}E_1\varphi_3 + \frac{1}{2}E_3\varphi_1 = 0, \quad (103)$$

$$-EE_1 - DE_2 - CE_3 + \frac{1}{2}E_1\varphi_2 - \frac{1}{2}E_2\varphi_1 - \nu_1 H_2 + \nu_2 H_1 = 0. \quad (104)$$

Уравнения законов «сохранения» (21):

$$\frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_1 = \sigma E_1, \quad \frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_2 = \sigma E_2, \quad \frac{1}{2}(\rho - p)\varphi_3 = \sigma E_3. \quad (105)$$

Все условия (23), налагаемые тождествами Якоби, выполнены тождественно. Условие (22) приводит к наличию трех дополнительных равенств:

$$E\varphi_1 + D\varphi_2 + C\varphi_3 = 0, \quad F\varphi_1 + B\varphi_2 + D\varphi_3 = 0, \quad A\varphi_1 + F\varphi_2 + E\varphi_3 = 0. \quad (106)$$

Решение алгебраической системы уравнений (87)–(106) имеет вид

$$\begin{aligned} \chi\rho &= 2B^2 + D^2, \quad \chi\rho = 6B^2 + \frac{3}{2}D^2, \quad \sigma = \pm\frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2\chi}(4B^2 + \frac{1}{2}D^2)(\varphi_1^2 + 4(N + \nu_1)^2)}. \\ E_1 &= \pm\varphi_1\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(4B^2 + \frac{1}{2}D^2)}{\chi(\varphi_1^2 + 4(N + \nu_1)^2)}}, \quad H_1 = \mp 2\varphi_1(N + \nu_1)\sqrt{\frac{\frac{1}{2}(4B^2 + \frac{1}{2}D^2)}{\chi(\varphi_1^2 + 4(N + \nu_1)^2)}}. \end{aligned}$$

Других решений системы уравнений (87)–(106) нет.

Рассмотрение подтипа “LS” показало, что новые решения там отсутствуют.

Таким образом, рассмотрены все возможные случаи во всех подтипах. Для пространств-времен, допускающих V_4 -простотранзитивные группы гомотетических преобразований, получены все возможные решения алгебраической системы уравнений Эйнштейна–Максвелла, записанной в репере \mathbf{X}_α векторов алгебры Ли группы H_4 . Других решений этой алгебраической системы нет.

Теперь, исходя из полученных решений алгебраической системы, необходимо восстановить функциональный вид полученных решений. Иначе говоря, необходимо получить точные решения исходной системы (1)–(3).

3. Метод получения функционального вида решений

Восстановление функционального вида решения по ранее предъявленному алгебраическому производится следующим образом. При решении алгебраической системы в каждом из рассмотренных случаев получены отличные от нуля структурные постоянные. Решая с этими структурными постоянными уравнения структуры группы, найдём компоненты ξ_α^i базисных векторов \mathbf{X}_α алгебры Ли группы. Известно, что для каждой простотранзитивной группы, решая уравнения $\xi_\alpha^i \partial_i l_\beta^k - l_\alpha^i \partial_k \xi_\beta^k = 0$, можно построить взаимную группу с векторами алгебры Ли $\mathbf{Z}_\alpha = l_\alpha^i \partial_i$. Поскольку $\det(l_\alpha^i) \neq 0$, четыре вектора \mathbf{Z}_α можно принять в качестве векторов репера. Известно [5, 6], что если группа в пространстве-времени V_4 с метрическим тензором \tilde{g}_{ij} действует как группа изометрических движений, то: $\tilde{g}_{\alpha\beta} = \tilde{g}_{ij} l_\alpha^i l_\beta^j = \text{const}$. Без всякого ущерба для общности можно считать, что $\tilde{g}_{\alpha\beta}(x) = \text{diag}(-1, 1, 1, 1)$. Если в точке x , в которой решалась алгебраическая система уравнений, принять условие $\xi_\alpha^i(x) = l_\alpha^i(x)$, то окажется, что структурные постоянные алгебр взаимных групп отличаются только знаком. Таким образом, зная компоненты ξ_α^i вектора \mathbf{X}_α , можем найти компоненты l_α^i вектора \mathbf{Z}_α , а по ним – метрический тензор $\widetilde{g}_{ij} = \widetilde{g}_{\alpha\beta} l_\alpha^\alpha l_\beta^\beta$, где (l_α^α) – матрица, обратная к (l_α^i) .

Для того чтобы записать метрику искомого решения, воспользуемся результатом, общим для всех групп конформных преобразований [11], о том, что группа конформных преобразований размерности $r \leq 5$, допускаемая неконформно-плоскими пространствами-временами V_4 , является группой изометрических движений в пространствах-временах \widetilde{V}_4 , конформных к V_4 : $g_{ij} = e^{2\mu(x)} \widetilde{g}_{ij}$. Здесь g_{ij} – метрический тензор пространства-времени V_4 , в котором наша группа действует как группа гомотетических преобразований. Скаляр $\mu(x)$ и постоянные гомотетии φ связаны равенством $\varphi = \xi^k \partial_k \mu$. Интегрируя это уравнение, найдем $\mu(x)$, а следовательно, и g_{ij} . Вектор скорости U^i найдем из соотношения (6). Из уравнений Эйнштейна (1) найдём явный вид плотности энергии жидкости $\rho(x)$ и давления $p(x)$. Векторы электрического E^i и магнитного H^i полей найдем, пользуясь тем, что реперные и функциональные компоненты этих векторов связаны соотношениями: $E^i(x) = E^\alpha_i l^i(x)$, $H^i(x) = H^\alpha_i l^i(x)$. Из уравнения (8) найдем величину плотности зарядов в идеальной заряженной жидкости $\sigma(x)$.

Приведем далее конкретный вид точных решений системы уравнений Эйнштейна – Максвелла (1)–(3).

1. “*KS*”. Коммутационные соотношения алгебры Ли группы:

$$[\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_1] = [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_2] = [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_3] = [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2] = [\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3] = 0, \\ [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_3] = -2r \mathbf{X}_0 + b \mathbf{X}_1. \quad (107)$$

Метрический тензор пространства-времени:

$$g_{ij} = e^{\varphi_2 x^2} \begin{pmatrix} -1 & \frac{2r}{b} e^{-bx^3} (1 - e^{bx^3}) & 0 & 0 \\ \frac{2r}{b} e^{-bx^3} (1 - e^{bx^3}) & e^{-2bx^3} [1 - \frac{4r^2}{b^2} (1 - e^{bx^3})^2] & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (108)$$

$$\chi p = \frac{1}{2} (\varphi_2^2 + b^2) \cdot e^{-\varphi_2 x^2}, \quad \chi \rho = \left(-\frac{1}{2} b^2 + 2r^2 \right) \cdot e^{-\varphi_2 x^2}, \quad (109)$$

$$\sigma = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{\chi} (2r^2 - b^2 - \frac{1}{2} \varphi_2^2) (\varphi_2^2 + 4(\nu_2 + 2r)^2)} \cdot e^{-\varphi_2 x^2}, \quad (110)$$

$$E^i = \pm \varphi_2 \sqrt{\frac{(2r^2 - b^2 - \frac{1}{2} \varphi_2^2)}{\chi (\varphi_2^2 + 4(\nu_2 + 2r)^2)}} e^{-\varphi_2 x^2} \delta_2^i, \quad (111)$$

$$H^i = \pm 2\varphi_2 (\nu_2 + 2r) \sqrt{\frac{(2r^2 - b^2 - \frac{1}{2} \varphi_2^2)}{\chi (\varphi_2^2 + 4(\nu_2 + 2r)^2)}} e^{-\varphi_2 x^2} \delta_2^i, \quad (112)$$

$$u^i = e^{-\frac{1}{2} \varphi_2 x^2} \delta_0^i.$$

В этом решении должны быть выполнены условия: $2r^2 \geq b^2 + \varphi_2^2/2$, $b \neq 0$.

2. “*PS*”. Коммутационные соотношения алгебры Ли группы:

$$[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2] = [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_1] = [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_2] = 0, \quad (113)$$

$$[\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_3] = -(b + c) \mathbf{X}_0, \quad [\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_3] = -2 \mathbf{X}_0 + b \mathbf{X}_1, \quad [\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3] = c \mathbf{X}_2. \quad (114)$$

Метрический тензор пространства-времени:

$$g_{ij} = e^{\varphi_3 x^3} \times \begin{pmatrix} -e^{2(b+c)x^3} & \frac{2c(e^{cx^3}-e^{2(b+c)x^3})}{2b+c} & 0 & 0 \\ \frac{2c(e^{cx^3}-e^{2(b+c)x^3})}{2b+c} & \frac{e^{-2bx^3}(2b+ce^{(2b+c)x^3})(2b+c(2e^{(2b+c)x^3}-1))}{(2b+c)^2} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & e^{2cx^3} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad (115)$$

$$\chi p = b(2b+c) \cdot e^{-\varphi_3 x^3}, \quad \chi\rho = -\frac{c}{2}(12b+9c) \cdot e^{-\varphi_3 x^3}, \quad (116)$$

$$\sigma = \pm \sqrt{\frac{1}{\chi} \left(\frac{3}{2}c^2 - 2b^2 - bc \right) (\nu_3^2 + (2b + \frac{3}{2}c)^2)} \cdot e^{-\varphi_3 x^3}, \quad (117)$$

$$E^i = \mp(2b + \frac{3}{2}c) \sqrt{\frac{\frac{3}{2}c^2 - 2b^2 - bc}{\chi(\nu_3^2 + 4(2b + \frac{3}{2}c)^2)}} e^{-\varphi_3 x^3} \delta_3^i, \quad (118)$$

$$H^i = \pm \nu_3 \sqrt{\frac{\frac{3}{2}c^2 - 2b^2 - bc}{\chi(\nu_3^2 + 4(2b + \frac{3}{2}c)^2)}} e^{-\varphi_3 x^3} \delta_3^i. \quad (119)$$

$$u^i = e^{\frac{1}{2}x^3} \delta_0^i.$$

В решении должны быть выполнены условия: $b \in (-\frac{\sqrt{13}+1}{4}c; -\frac{3}{4}c)$ при $c \geq 0$ и $b \in (\frac{\sqrt{13}-1}{4}c; 0) \cup (-\frac{1}{2}c; -\frac{3}{4}c)$ при $c \leq 0$, причем $\varphi_3 = -(2b+c)$.

3. “LT” (1-е решение). Коммутационные соотношения алгебры Ли группы:

$$[\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_0] = 0, \quad [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_1] = 0, \quad [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_3] = 0, \quad (120)$$

$$[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2] = -C \mathbf{X}_3, \quad [\mathbf{X}_3 \mathbf{X}_1] = -\mathbf{X}_2, \quad [\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3] = -L \mathbf{X}_0. \quad (121)$$

Метрический тензор пространства-времени:

$$g_{ij} = e^{\varphi_1 x^1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 & Lx^2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ Lx^2 & 0 & 0 & 1 - L^2(x^2)^2 \end{pmatrix}, \quad (122)$$

$$\chi p = \frac{1}{2}\varphi_1^2 \cdot e^{-\varphi_1 x^1}, \quad \chi\rho = \frac{1}{2}L^2 \cdot e^{-\varphi_1 x^1}, \quad (123)$$

$$\sigma = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\chi} (L^2 - \varphi_1^2) (\varphi_2^2 + 4(L - \nu_1)^2)} \cdot e^{-\varphi_1 x^1}. \quad (124)$$

$$E^i = \pm \varphi_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(L^2 - \varphi_1^2)}{\chi(\varphi_2^2 + 4(L - \nu_1)^2)}} e^{-\varphi_1 x^1} \delta_1^i, \quad (125)$$

$$H^i = \mp 2\varphi_1(L - \nu_1) \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(L^2 - \varphi_1^2)}{\chi(\varphi_1^2 + 4(L - \nu_1)^2)}} e^{-\varphi_1 x^1} \delta_1^i. \quad (126)$$

$$u^i = e^{-\frac{1}{2}\varphi_1 x^1} \delta_0^i.$$

В решении должно быть выполнено условие $L^2 \geq \varphi_1^2$.

4. “LT” (2-е решение). Коммутационные соотношения алгебры Ли группы:

$$[\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_0] = 0, \quad [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_1] = 0, \quad [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_3] = 0, \quad [\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3] = 0, \quad (127)$$

$$[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2] = -\sqrt{2}C\mathbf{X}_0 - CX_3, \quad [\mathbf{X}_3 \mathbf{X}_1] = -\sqrt{2}\mathbf{X}_0 + C\mathbf{X}_2. \quad (128)$$

Метрический тензор пространства-времени:

$$g_{ij} = e^{\varphi_1 x^1} \begin{pmatrix} -1 & 0 & g_{02} & g_{023} \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ g_{02} & 0 & g_{22} & g_{23} \\ g_{03} & 0 & g_{23} & g_{22} \end{pmatrix}, \quad (129)$$

где

$$\begin{aligned} g_{02} &= -g_{03} = \sqrt{2}(e^{\varphi_1 x^1} - 1), \\ g_{22} &= g_{33} = \frac{1}{2}(e^{-2\varphi_1 x^1} - 4 + 8e^{\varphi_1 x^1} - 3e^{2\varphi_1 x^1}), \\ g_{23} &= \frac{1}{2}(e^{-2\varphi_1 x^1} + 4 - 8e^{\varphi_1 x^1} + 3e^{2\varphi_1 x^1}). \\ \chi p &= \varphi_1^2 \cdot e^{-\varphi_1 x^1}, \quad \chi \rho = \frac{3}{2}\varphi_1^2 \cdot e^{-\varphi_1 x^1}. \end{aligned} \quad (130)$$

$$\sigma = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\chi} \varphi_1^2 (\varphi_1^2 + 4\nu_1^2)} \cdot e^{-\varphi_1 x^1}. \quad (131)$$

$$E^i = \pm \varphi_1 \sqrt{\frac{\varphi_1^2}{2\chi(\varphi_1^2 + 4\nu_1^2)}} e^{-\varphi_1 x^1} \delta_1^i, \quad H^i = \pm 2\varphi_1 \nu_1 \sqrt{\frac{\varphi_1^2}{2\chi(\varphi_1^2 + 4\nu_1^2)}} e^{-\varphi_1 x^1} \delta_1^i. \quad (132)$$

$$u^i = e^{-\frac{1}{2}\varphi_1 x^1} \delta_0^i. \quad (133)$$

5. “LN”. Коммутационные соотношения алгебры Ли группы:

$$[\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_0] = 0, \quad [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_1] = 0, \quad [\mathbf{X}_0 \mathbf{X}_3] = 0, \quad [\mathbf{X}_2 \mathbf{X}_3] = 0. \quad (134)$$

$$[\mathbf{X}_1 \mathbf{X}_2] = -(3B^2 + D^2)\mathbf{X}_3 + LB\mathbf{X}_0, \quad [\mathbf{X}_3 \mathbf{X}_1] = \mathbf{X}_2. \quad (135)$$

Метрический тензор пространства-времени:

$$g_{ij} = e^{Dx^1} \begin{pmatrix} -1 & g_{01} & 0 & 0 \\ g_{01} & g_{11} & x^3 & k^2 x^2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & k^2 x^2 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (136)$$

Здесь

$$g_{01} = -LB \frac{e^{-kx^1} [kx^2(1 + e^{kx^1}) + e^{kx^1}(e^{2kx^1} - 1)x^3]}{k(e^{2kx^1} + 1)},$$

$$\begin{aligned} g_{11} &= \frac{e^{-2kx^1}}{k^2(1 + e^{2kx^1})^2} [k^2(1 + e^{2kx^1})(k^4 e^{2kx^1} - LB^2)(x^2)^2 - 2e^{kx^1}(-1 + e^{4kx^1})kLB^2 x^2 x^3 + \\ &\quad + 2e^{4kx^1}(2k^2 \cosh(kx^1)^2 + (k^2 + LB^2 + (k^2 - L^2 B^2) \cosh(2kx^1)(x^3)^2)], \end{aligned}$$

$$k = \sqrt{3B^2 + D^2}, \quad L^2 = 16B^2 + 4D^2,$$

$$\chi p = (2B^2 + D^2)e^{-\varphi_1 x^1}, \quad \chi\rho = (6B^2 + \frac{3}{2}D^2)e^{-\varphi_1 x^1}, \quad (137)$$

$$\sigma = \pm \frac{1}{2} \sqrt{\frac{1}{2\chi}(4B^2 + \frac{1}{2}D^2)(\varphi_1^2 + 4(N + \nu_1)^2)} e^{-\varphi_1 x^1}, \quad (138)$$

$$E^i = \pm \varphi_1 \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(4B^2 + \frac{1}{2}D^2)}{\chi(\varphi_1^2 + 4(N + \nu_1)^2)}} e^{-\varphi_1 x^1} \delta_1^i, \quad (139)$$

$$H^i = \mp 2\varphi_1(N + \nu_1) \sqrt{\frac{\frac{1}{2}(4B^2 + \frac{1}{2}D^2)}{\chi(\varphi_1^2 + 4(N + \nu_1)^2)}} e^{-\varphi_1 x^1} \delta_1^i, \quad (140)$$

$$u^i = e^{-\frac{1}{2}\varphi_1 x^1} \delta_0^i. \quad (141)$$

Таким образом, найдены все возможные точные решения системы уравнений Эйнштейна – Максвелла с идеальной заряженной жидкостью в правой части, в пространствах-временах, допускающих простотранзитивные группы гомотетических преобразований.

Summary

R.A. Daishov, V.A. Karin. Equilibrium distributions of the charged fluids in the space-times with a simple-transitive groups of homothetic motions.

The method of finding of the exact solutions of the self-consistent Einstein – Maxwell equations system are suggested. It is supposed that the space-time admits simple-transitive group of homothetic transformations and the source of such space-times is the perfect fluid. The proposed method is the generalization of Ozsvath's method of finding of the homogeneous solutions of Einstein field equations. It is supposed also that the fluid's velocity vector is collinear to time-like vector \mathbf{Y} of the Lie algebra of the group H_r . Under above assumption all exact solutions of the system are found.

Литература

1. Carr B.J., Coley A.A. Self-similarity in general relativity // Class. Quantum Grav. – 1999. – V. 16, No 7. – P. R31–R71.
2. Carot J., Sintes A.M. Homothetic perfect fluid space-times // Class. Quantum Grav. – 1997. – V. 14, No 5. – P. 1183–1205.
3. Burd A., Coley A.A. Viscous fluid cosmology // Class. Quantum Grav. – 1994. – V. 11, No 1. – P. 83–105.
4. Wainright J., Yaremovicz P. Killing vector fields and Einstein – Maxwell field equations with perfect-fluid source // Gen. Rel. Grav. – 1976. – V. 7, No 4. – P. 345.
5. Ozsváth I. New homogeneous solutions of Einstein's field equations with incoherent matter. // Abhandl. Math.-naturwiss. – 1965. – No 1. – P. 1–41.
6. Ozsváth I. Homogeneous solutions of the Einstein-Maxwell equations // J. Math. Phys. – 1965. – V. 6, No 8. – P. 1255–1255.
7. Hiromoto R.E., Ozsváth I. On homogeneous solutions of Einstein's field equations // Gen. Rel. Grav. – 1978. – V. 9, No 4. – P. 299–327.
8. Даишев Р.А. Однородные решения уравнений Эйнштейна с идеальной заряженной жидкостью // Изв. вузов. Физика. – 1984. – № 12. – С. 74–77.
9. Даишев Р.А. Изометрические движения идеальной заряженной жидкости // Изв. вузов. Физика. – 1987. – № 10. – С. 25–29.

10. Даишев Р.А. Однородные решения уравнений Эйнштейна для идеальной жидкости // Украинский физ. журн. – 1984. – Т. 29, № 8. – С. 1163–1170.
11. Петров А.З. Новые методы в общей теории относительности. – М.: Наука, 1966. – 495 с.

Поступила в редакцию
26.04.06

Даишев Ринат Абдурашидович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры теории относительности и гравитации Казанского государственного университета.

E-mail: *Rinat.Daishev@ksu.ru*

Карин Владимир Андреевич – магистрант кафедры теории относительности и гравитации Казанского государственного университета.