Министерство образования и науки Российской
Федерации

**КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ)
ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ
им. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 010100.62 – Математика, бакалавр математики.

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(Бакалаврская работа)

ЗАДАЧА ГУРСА ДЛЯ ЧЕТЫРЕХМЕРНОГО УРАВНЕНИЯ БИАНКИ

Работа завершена:

"_____"__________2015 г.

____(А.З. Шакирова)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

Доктор физико-математических наук

Профессор кафедры дифференциальных уравнений

"_____"__________2015 г.

____(В. И. Жегалов)

Заведующий кафедрой

"_____"__________2015 г.

____(А. М. Елизаров)

Казань – 2015

Содержание.

Введение

Данная тема относится к теории дифференциальных уравнений с доминирующей частной производной, различные вопросы которой исследуются в настоящее время многими математиками.

Основателем этой теории считается итальянский математик Луиджи Бианки, предложивший [1] ещё в 1895 г. вариант распространения метода решения задачи Коши, разработанного в свое время Б. Риманом для уравнения

$$u_{xy} + au_x + bu_y + cu = f(x, y), \tag{1}$$

на уравнение вида где M- линейный дифференциальный оператор, содержащий лишь производные искомой функции, получаемые из первого слагаемого отбрасыванием по крайней мере одного дифференцирования.

Понятно, что (2) представляет собой обобщение уравнения (1) на случай n-мерного пространства. Через 50 лет результат Л.Бианки был переоткрыт Е.Лаэ [2] (Бельгия), а в 1956-1958 г.г. появились публикации М.К.Фаге [3]-[4].

В перечисленных работах речь шла о теоретическом обобщении результата Римана. Однако впоследствии обнаружились различные прикладные аспекты обсуждаемых уравнений, а также получаемых из (2) путем замены первого слагаемого на $\frac{\partial^{m_1+\ldots+m_n}u}{\partial x_1^{m_1}\ldots\partial x_n^{m_n}}$, где хотя бы одно значение $m_k > 1$. А именно, частные случаи указанных уравнений возникают при математическом моделировании процессов вибрации и играют существенную роль в теории аппроксимации, теории отображений, к ним сводится задача интегрального представления преобразования одних линейных дифференциальных операторов в другие. Также уравнения встречаются в теории упругости, при исследовании фильтрации жидкости в трещиноватых породах, передачи тепла в гетерогенных средах, моделировании ряда биологических процессов и так далее.(См. библиографические ссылки в статье [5])

Основные результаты теории рассматриваемых уравнений отражены в монографиях [6]-[7].

Предлагаемая работа состоит из двух частей.

Первая часть (§.1) является рефератом по методам исследования задачи Гурса для уравнения (1): методу интегральных уравнений и методу Римана, включающему в себя семь вариантов различных возможностей построения решения в виде явной формулы (в квадратурах). Этот материал является исходным для самостоятельного исследования автора, результаты каждого излагаются во второй части (§.2). Здесь разрабатывается способ распространения теории из §1 на случай уравнения (2) при $n = 4$. Этот способ основан на факторизации рассматриваемого уравнения двумя операторами второго порядка, что позволяет свести дело к двум задачам для уравнений, близких к уравнению (1). Во всяком случае, удалось адаптировать полученные задачи для применения к ним указанных выше семи возможностей решения в квадратурах. В результате сформулированы 49 вариантов условий, обеспечивающих построение точных решений.

§1. Обзор исходных результатов по классической теории задачи Гурса.

1.1. Постановка задачи.

Данная задача рассматривается в прямоугольнике $D = \{x_0 < x < x_1, y_0 < y < y_1\}$, образованном характерестиками уравнения

$$u_{xy} + a(x,y)u_x + b(x,y)u_y + c(x,y)u = f(x,y), \tag{1.1}$$
$$a, b, c, d, f \in C(\bar{D}).$$

Функция $u(x,y)$, называется регулярным решением этого уравнения, если она удовлетворяет ему и все входящие в (1.1) производные искомой функции $u(x,y)$ непрерывны.

Задача Гурса: найти регулярное решение уравнения (1.1), удовлетворяющее условиям:

$$u(x_0,y) = \varphi(y); \quad u(x,y_0) = \psi(x); \quad \varphi(y_0) = \psi(x_0) \tag{1.2}$$

1.2. Метод интегральных уравнений.

Данный метод основан на непосредственном интегрировании (1.1) с учетом условий (1.2). Под непосредственным интегрированием понимается вычисление двойного интеграла $\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} \Phi(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi$, где Φ есть соответсвенно левая, или правая части уравнения (1.1). Нетрудно усмотреть, что указанное интегрирование приводит к уравнению

$$u(x,y) + \int\limits_{x_0}^{x} b(\xi,y)u(\xi,y)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} a(x,\eta)u(x,\eta)\,d\eta + \\ + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} \big[c(\xi,\eta) - a_\xi(\xi,\eta) - b_\eta(\xi,\eta)\big]u(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi = F(x,y), \tag{1.3}$$

$$F(x,y) = \varphi(y) + \psi(x) - \psi(x_0) + \int\limits_{x_0}^{x} b(\xi,y_0)\psi(\xi)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} a(x_0,\eta)\varphi(\eta)\,d\eta + \\ + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} f(\xi,\eta)\,d\eta. \tag{1.4}$$

Другими словами, наша задача оказалась сведена к интегральному уравнению вида

$$\varphi(x,y) - \int\limits_{x_0}^{x} K_1(x,y,\xi)\varphi(\xi,y)\,d\xi - \int\limits_{y_0}^{y} K_2(y,x,\eta)\varphi(x,\eta)\,d\eta - \\ - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} K(x,y,\xi,\eta)\varphi(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi = F(x,y) \tag{1.5}$$

с непрерывными в $\overline{D}$ коэффициентами K_1, K_2, K, F. Подобные уравнения носят имя первого их исследователя В.Вольтерра.

Изложим теорию уравнения (1.5), которую, собственно говоря, и следует рассматривать как указаный в названии данного пункта метод интегральных уравнений.

Рассмотрим сначала необходимые для дальнейшего частные случаи. Удобно ввести перед знаком интеграла параметр λ и временно убрать переменную y функции φ_1 (или считать эту переменную параметром). Тогда эти случаи принимают вид

$$\varphi_1(x) - \lambda \int_{x_0}^{x} K_1(x,\xi)\varphi_1(\xi)\,d\xi = F_1(x), \tag{1.6}$$

$$\varphi_2(y) - \lambda \int_{y_0}^{y} K_2(y,\eta)\varphi_2(\eta)\,d\eta = F_2(y). \tag{1.7}$$

Решение первого из этих уравнений ищем в виде [8 с.134]

$$\varphi_1(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_{1k}(x), \tag{1.8}$$

где коэффициенты $\varphi_{1k}(x)$ — функции, подлежащие определению.

Покажем, что $\varphi_{1k}(x)$ определяются из (1.6) однозначно, если предположить, что ряд (1.8) сходится равномерно.Действительно, подставляя предполагаемое решение (1.8) в обе части уравнения (1.6) и переставляя справа порядок интеграла и суммы, что законно в силу предположенной равномерной сходимости ряда, получим

$$\sum_{k=0}^{\infty} \lambda^k \varphi_{1k}(x) = F_1(x) + \sum_{k=0}^{\infty} \lambda^{k+1} \int_{x_0}^{x} K_1(x,\xi)\varphi_{1k}(\xi)\,d\xi, \tag{1.9}$$

Степенные ряды, стоящие в левой и правой частях соотношения (1.9), будут совпадать тогда и только тогда, когда равны их коэффициенты при одинаковых степенях λ. Приравнивая эти коэффициенты, получим

$$\begin{aligned} &\varphi_{10}(x) = F_1(x) \\ &\varphi_{11}(x) = \int_{x_0}^{x} K_1(x,\xi)\varphi_{10}(\xi)\,d\xi \\ &\vdots \\ &\varphi_{1k}(x) = \int_{x_0}^{x} K_1(x,\xi)\varphi_{1k-1}(\xi)\,d\xi, \\ &k = 1, 2, \ldots \end{aligned} \tag{1.10}$$

При этом $\varphi_{1k}(x)$ непрерывна на $[x_0, x_1]$, если свободный член $F_1(x)$ непрерывен на $[x_0, x_1]$, а ядро $K_1(x,\xi)$ непрерывно при

$$x_0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant x_1$$

Проверим теперь обоснование полученных решений: выясним, когда ряд (1.8) действительно сходится равномерно.
Используя ограниченность функций $K_1(x,\xi)$ и $F_1(x)$, имеем:

$$|K_1(x,\xi)| \leqslant Q, \quad |F_1(x)| \leqslant B. \tag{1.11}$$

Найдем последовательно из (1.10)
$|\varphi_{10}(x)| \leqslant B,$
$|\varphi_{11}(x)| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |K_1(x,\xi)||\varphi_{10}(\xi)|\, d\xi \leqslant BQ(x-x_0),$
$|\varphi_{12}(x)| \leqslant \int\limits_{x_0}^{x} |K_1(x,\xi)||\varphi_{11}(\xi)|\, d\xi \leqslant BQ^2 \int\limits_{x_0}^{x} (\xi - x_0)\, d\xi = BQ^2 \frac{(x-x_0)^2}{2}, \ldots$
$|\varphi_{1k}(x)| \leqslant BQ^k \frac{(x-x_0)^k}{k!} \leqslant \frac{BQ^k (x_1-x_0)^k}{k!}.$ (1.12)

Из (1.12) заключаем, что (1.8) мажорируется рядом

$$B \sum_{k=0}^{\infty} \frac{[|\lambda| Q(x_1-x_0)]^k}{k!}, \tag{1.13}$$

который сходится при всех конечных $|\lambda|$ и равен $Be^{|\lambda|Q(x_1-x_0)}$. Следовательно, ряд (1.8) сходится равномерно(и абсолютно) для всех конечных $|\lambda|$. Сумма ряда $\varphi_1(x)$ является непрерывной функцией и удовлетворяет уравнению (1.6)

Итак, уравнение Вольтерра (1.6) разрешимо при любых значениях λ и это решение можно получить указанным методом (его называют "метод малого параметра").

Покажем теперь, что в классе ограниченных функций уравнение (1.6) не имеет других решений, кроме того, которое было получено в виде ряда (1.8).

Теорема 1. Уравнение (1.7) не может иметь более одного решения в классе ограниченных функций ни при каком значении λ.

Действительно, пусть $\varphi_1(x)$ и $\varphi_1^*(x)$ —два ограниченных решения уравнения (1.7). Тогда их разность $\omega = \varphi_1(x) - \varphi_1^*(x)$ ограничена и из вышеизложенного следует оценка

$$|\omega(x)| \leqslant \omega_0 \frac{[|\lambda| Q(x_1-x_0)]^k}{k!}. \tag{1.14}$$

Так как x_0, x_1— фиксированные числа, то $\lambda|x_1 - x_0|$—вполне определенное конечное число. Тогда понятно, что правая часть (1.4) стремится к нулю при возрастании k. Переходя к пределу при $k \to \infty$, получим $|\omega(x)| \leqslant 0$. Отсюда следует, что $\omega(x) \equiv 0$ при любом λ. Это равносильно $\varphi_1(x) \equiv \varphi_1^*(x)$, чтр означает единственность решения.

Придадим полученным решениям более удобный вид с помощью понятия резольвенты. Обратимся к формуле (1.10). Подставляя во вторую из этих формул вместо функции $\varphi_{10}(\xi)$ ее значение $\varphi_1(\xi)$, найдем

$$\varphi_{11}(x) = \int_{x_0}^{x} K_1(x,\xi) F_1(\xi)\, d\xi. \tag{1.15}$$

Найденное выражение подставим в последующую формулу из (1.10). В результате получим

$$\varphi_{12}(x) = \int_{x_0}^{x} K_1(x,s)\varphi_{11}(s)\, ds = \int_{x_0}^{x} K_1(x,s)\, ds \int_{x_0}^{s} K_1(s,\xi) F_1(\xi)\, d\xi.$$

Переставим переменные интегрирования с помощью формулы Дирихле:

$$\varphi_{12}(x) = \int_{x_0}^{x} \left[\int_{\xi}^{x} K_1(x,s) K_1(s,\xi)\, ds \right] F_1(\xi)\, d\xi.$$

Обозначив

$$H_2(x,\xi) = \int_{\xi}^{x} K_1(x,s) K_1(s,\xi)\, ds,$$

перепишем $\varphi_{12}(x)$ в виде

$$\varphi_{12}(x) = \int_{x_0}^{x} H_2(x,\xi) F_1(\xi)\, d\xi. \tag{1.16}$$

Аналогично, подставляя выражение (1.16) в формулу

$$\varphi_{13}(x) = \int_{x_0}^{x} K_1(x,s)\varphi_{12}(s)\, ds$$

и обозначая

$$H_3(x,\xi) = \int_{x_0}^{x} K_1(x,s) H_2(s,\xi)\, ds. \tag{1.17}$$

найдем

$$\varphi_{13}(x) = \int_{x_0}^{x} H_3(x,\xi) F_1(\xi)\, d\xi. \tag{1.18}$$

Продолжая этот процесс, придем к бесконечной последовательности функций $H_n(x,\xi)$, каждая из кототрых определяется через предыдущую по формуле

$$H_n(x,\xi) = \int\limits_{x_0}^{x} K_1(x,s) H_{n-1}(s,\xi)\, ds. \tag{1.19}$$

$$n = 2, 3, \ldots,$$

Коэффициенты ряда (1.10) запишутся тогда так:

$$\varphi_{10}(x) = F_1(x),$$

$$\varphi_{1n}(x) = \int\limits_{x_0}^{x} H_n(x,\xi) F_1(\xi)\, \xi, \qquad n = 1, 2, \ldots \tag{1.20}$$

а сам ряд (1.8) — перейдет в

$$\varphi_1(x) = F_1(x) + \textstyle\sum_{n-1}^{\infty} \lambda^n \int\limits_{x_0}^{x} H_n(x,\xi) F_1(\xi)\, d\xi.$$

Переставляя здесь порядок интегрирования и суммы и обозначая

$$\Gamma_1(x,\xi,\lambda) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda^{n-1} H_n(x,\xi), \tag{1.21}$$

,

перепишем решение $\varphi_1(x)$ уравнения (1.6) в виде

$$\varphi_1(x) = F_1(x) + \lambda \int\limits_{x_0}^{x} \Gamma_1(x,\xi,\lambda) F_1(\xi)\, d\xi. \tag{1.22}$$

Функцию $\Gamma_1(x,\xi,\lambda)$ называют резольвентой ядра рассматриваемого уравнения. Возвращаем у

$$\varphi_1(x,y) = F_1(x,y) + \lambda \int\limits_{x_0}^{x} \Gamma_1(x,y,\xi,\lambda) F_1(\xi,y)\, d\xi.$$

Проводя аналогичные рассуждения с уравнением (1.7), вычислим его решение в форме

$$\varphi_2(x,y) = F_2(x,y) + \lambda \int\limits_{y_0}^{y} \Gamma_2(y,x,\eta,\lambda) F_1(x,\eta)\, d\eta. \tag{1.23}$$

При этом Γ_1, Γ_2 удовлетворяют условиям

$$\Gamma_1(x,y,\xi) = K_1(x,y,\xi) + \int\limits_{\xi}^{x} K_1(x,y,\xi_1)\Gamma_1(\xi_1,y,\xi)\,d\xi_1 =$$

$$= K_1(x,y,\xi) + \int\limits_{\xi}^{x} K_1(\xi_1,y,\xi)\Gamma_1(x,y,\xi_1)\,d\xi_1 \tag{1.24}$$

$$\Gamma_2(y,x,\eta) = K_2(y,x,\eta) + \int\limits_{\eta}^{y} K_2(y,x,\eta_1)\Gamma_2(\eta_1,x,\eta)\,d\eta_1 =$$

$$= K_2(y,x,\eta) + \int\limits_{\eta}^{y} K_2(\eta_1,x,\eta)\Gamma_2(y,x,\eta_1)\,d\eta_1$$

Для проверки этих соотношений достаточно подставить вместо функций Γ_1, Γ_2 их ряды вида (1.21), а затем сравнить коэффициенты при одинаковых степенях λ, воспользовавшись формулой типа (1.19).

Теперь обратимся к общему случаю уравнения (1.5). Будем искать его решение в форме

$$\varphi(x,y) = \varphi_0(x,y) + \int\limits_{x_0}^{x} \Gamma_1(x,y,\xi)\varphi_0(\xi,y)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} \Gamma_2(y,x,\eta)\varphi_0(x,\eta)\,d\eta, \tag{1.25}$$

где $\varphi_0(x,y)$ — новая искомая функция. Подставим (1.25) в (1.5):

$$\varphi_0(x,y) + \int\limits_{x_0}^{x} \Gamma_1(x,y,\xi)\varphi_0(\xi,y)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} \Gamma_2(y,x,\eta)\varphi_0(x,\eta)\,d\eta - \int\limits_{x_0}^{x} K_1(x,y,\xi)\Big[\varphi_0(\xi,y)+$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{\xi} \Gamma_1(\xi,y,\xi_1)\varphi_0(\xi_1,y)\,d\xi_1 + \int\limits_{y_0}^{y} \Gamma_2(y,\xi,\eta)\varphi_0(\xi,\eta)\,d\eta\Big]\,d\xi - \int\limits_{y_0}^{y} K_2(y,x,\eta)\Big[\varphi_0(x,\eta)+$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{x} \Gamma_1(x,\eta,\xi)\varphi_0(\xi,\eta)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{\eta} \Gamma_2(\eta,x,\eta_1)\varphi_0(x,\eta_1)\,d\eta_1\Big]\,d\eta - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} K(x,y,\xi,\eta)\Big[\varphi_0(\xi,\eta)+$$

$$+ \int\limits_{x_0}^{\xi} \Gamma_1(\xi,y,\xi_1)\varphi_0(\xi_1,\eta)\,d\xi_1 + \int\limits_{y_0}^{\eta} \Gamma_2(\eta,\xi,\eta_1)\varphi_0(\xi,\eta_1)\,d\eta_1\Big]\,d\eta\,d\xi = F(x,y)$$

С учетом (1.24), получим

$$\varphi_0(x,y) - \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} K_0(x,y,\xi,\eta)\varphi_0(\xi,\eta)\,d\eta\,d\eta = F(x,y), \tag{1.26}$$

$$K_0(x,y,\xi,\eta) = K_1(x,y,\xi)\Gamma_2(y,\xi,\eta) + K_2(y,x,\eta)\Gamma_1(x,\eta,\xi) + K(x,y,\xi,\eta) +$$
$$+\int\limits_{\xi}^{x} K(x,y,\xi_1,\eta)\Gamma_1(\xi_1,\eta,\xi)\,d\xi_1 + \int\limits_{\eta}^{y} K(x,y,\xi,\eta_1)\Gamma_2(\eta_1,\xi,\eta)\,d\eta_1. \tag{1.27}$$

Поступим с (1.26) как с (1.6) и найдем его решение

$$\varphi_0(x,y) = F(x,y) + \int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} \Gamma_0(x,y,\xi,\eta)F(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi, \tag{1.28}$$

где Γ_0 играет роль Γ_1 (конечно, с увеличением числа независимых переменных). Γ_0 тоже называется резольвентой (уравнения (1.26)). Она определяется формулами

$$\Gamma_0(x,y,\xi,\eta) = \textstyle\sum_{m=0}^{\infty} K_{0,m}(x,y,\xi,\eta), \qquad K_{0,0} \equiv K_0,$$

$$K_{0,m}(x,y,\xi,\eta) = \int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y} K_{0,m-1}(\xi_1,\eta_1,\xi,\eta)\,d\eta_1\,d\xi_1, \tag{1.29}$$
$$m = 1, 2, \ldots .$$

Теперь подставим (1.28) в (1.26)

$$\varphi(x,y) = F(x,y) + \int\limits_{x_0}^{x} \Gamma_1(x,y,\xi)F(\xi,y)\,d\xi + \int\limits_{y_0}^{y} \Gamma_2(y,x,\eta)F(x,\eta)\,d\eta +$$
$$+\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y} \Gamma(x,y,\xi,\eta)F(\xi,\eta)F(\xi,\eta)\,d\eta\,d\xi, \tag{1.30}$$

$$\Gamma(x,y,\xi,\eta) = \Gamma_0(x,y,\xi,\eta) + \int\limits_{\xi}^{x} \Gamma_1(x,y,\xi_1)\Gamma_0(\xi_1,y,\xi,\eta)\,d\xi_1 + \int\limits_{\eta}^{y} \Gamma_2(y,x,\eta_1)\Gamma_0(x,\eta_1,\xi,\eta)\,d\eta_1. \tag{1.31}$$

Формула (1.30) доказывает существование решения уравнения (1.5), а, следовательно, и функции $u(x,y)$, являющейся решением уравнения (1.3)—(1.4) и исходной задачи (1.1)—(1.2).

Изложенный выше материал подготовлен на основе источников [6], [8].

1.3. Метод Римана.

Вернемся к постановке задачи (1.1)—(1.2). Решение интегрального уравнения

$$v(x,y)-\int\limits_{\xi}^{x} b(\alpha,y)v(\alpha,y)\,d\alpha-\int\limits_{\eta}^{y} a(x,\beta)v(x,\beta)\,d\beta+\int\limits_{\xi}^{x}\int\limits_{\eta}^{y} c(\alpha,\beta)v(\alpha,\beta)\,d\beta\,d\alpha=1 \qquad (1.32)$$

будем называть функцией Римана. Это есть частный случай (1.5), поэтому v существует и единственна. Когда нужно подчеркнуть зависимость v от (ξ,η), будем писать $v=R(x,y,\xi,\eta)$. Из (1.32) усматривается, что

$$\begin{gathered}\tfrac{\partial R}{\partial x}-b(x,\eta)R\equiv 0, \text{ при } y=\eta,\\ \tfrac{\partial R}{\partial y}-a(\xi,y)R\equiv 0, \text{ при } x=\xi,\\ R(x,y,x,y)\equiv 1.\end{gathered} \qquad (1.33)$$

Если $a,b,c,a_x,b_y\in C(\bar{D})$, то для любой непрерывной в $\bar{D}$ функции $u(x,y)$, удовлетворяющей условиям $u_x,u_y,u_{xy}\in C(D)$, имеет место тождество

$$\frac{\partial^2(uR)}{\partial x\partial y}-RL(u)\equiv\frac{\partial}{\partial x}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial y}-aR\right)\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[u\left(\frac{\partial R}{\partial x}-aR\right)\right]. \qquad (1.34)$$

Оно проверяется непосредственно, при этом надо учесть, что по $(x,y)R$ удовлетворяет сопряженному с $L(u)=0$ уравнению. Полагая в (1.34) $u(x,y)$ решением (1.1), меняя ролями переменные $(x,y),(\xi,\eta)$ и вычисляя затем двойной интеграл по ξ,η в пределах $x_0<\xi<x, y_0<\eta<y$, с учетом тождеств (1.33), получим:

$$\begin{aligned}u(x,y)=R(x,y_0,x,y)\psi(x)+R(x_0,y,x,y)\varphi(y)-R(x_0,y_0,x,y)\psi(x_0)+\\ +\int\limits_{x_0}^{x}\left[b(\alpha,y_0)R(\alpha,y_0,x,y)-\frac{\partial}{\partial\alpha}R(\alpha,y_0,x,y)\right]\psi(\alpha)\,d\alpha+\\ +\int\limits_{y_0}^{y}\left[a(x_0,\beta)R(x_0,\beta,x,y)-\frac{\partial}{\partial\beta}R(x_0,\beta,x,y)\right]\varphi(\beta)\,d\beta+\\ +\int\limits_{x_0}^{x}\int\limits_{y_0}^{y}R(\alpha,\beta,x,y)f(\alpha,\beta)\,d\beta\,d\alpha.\end{aligned} \qquad (1.35)$$

Это и есть решение задачи Гурса, обычно называемое его структурной формулой.

Считая $\varphi(y),\psi(x)$ произвольными, можно рассматривать (1.35) как общее представление регулярных решений уравнения (1.1).

Функция R удовлетворяет и традиционному ее определению: она есть решение уравнения

$$v_{xy}-(av)_x-(bv)_y+cv=0$$

$$v|_{y=\eta}=exp\int\limits_{\xi}^{x}b(\alpha,\eta)\,d\alpha,\quad v|_{x=\xi}=exp\int\limits_{\eta}^{y}a(\xi,\beta)\,d\beta. \tag{1.36}$$

1.4. Случаи построения функции Римана в явном виде.

Исходным моментом для наших рассуждений служит метод каскадного интегрирования Лапласа. Как известно [9, с. 177-181], существенную роль в этом методе играют конструкции

$$h=a_x+ab-c,\quad k=b_y+ab-c.$$

Если $k\equiv 0$ или $h\equiv 0$, то функция Римана $R(x,y,\xi,\eta)$ для уравнения (1.1) записывается в явном виде [6, формулы (1.23), (1.24)]. Если же $h\neq 0$ или $k\neq 0$, то можно построить уравнение вида (1.1)

$$\frac{\partial^2 u_{\pm1}}{\partial x\partial y}+a_{\pm1}\frac{\partial u_{\pm1}}{\partial x}+b_{\pm1}\frac{\partial u_{\pm1}}{\partial y}+c_{\pm1}u_{\pm1}=f_{\pm1}, \tag{1.37}$$

где коэффициенты $a_{\pm1},b_{\pm1},c_{\pm1}$ задаются формулами (1.37) из [9, с 179], а

$$f_1=[a-(\ln h)_y]f-f_y,\quad f_{-1}=[b-(\ln k)_x]f-f_x. \tag{1.38}$$

В (1.38) и далее индекс $+1$ пишется как "1". Роль h,k для (1.37) играют

$$h_1=2h-k-(\ln h)_{xy},\quad k_1=h;\quad h_{-1}=k,\quad k_{-1}=2k-h-(\ln k)_{xy}.$$

При этом, если регулярность получаемого по формуле (1.35) решения обеспечивается при $h\equiv 0$ или $k\equiv 0$ условиями $a,b,c,a_x,b_y,f\in C(\bar{D})$, то при вычислениях, связанных с $h_1\equiv 0$ $b\in C^{(1,2)},a,c\in C^{(1,1)},f\in C^{(1,0)}$. Из сказанного выше ясно, что при $hk\neq 0$ функции Римана для уравнения (1.37) строятся в явном виде, если $h_1\equiv 0$ или $k_{-1}\equiv 0$. Обеспечивающие выполнение этих двух тождеств условия на коэффициенты исходного уравнения (1.1) можно записать в терминах следующих соотношений:

1)$b_y-a_x\equiv a_x+ab-c\equiv\alpha_1(x)\beta_1(y)\neq 0;$

2)$a_x-b_y\equiv b_y+ab-c\equiv\alpha_2(x)\beta_2(y)\neq 0;$ (1.39)

3)$ma_x-b_y\equiv mb_y-a_x\equiv(m-1)(ab-c);$

4)$\omega\equiv\frac{2s'(x)t'(y)}{(2-m)[s(x)+t(y)]^2},\quad s'(x)t'(y)\neq 0,\quad s(x)+t(y)\neq 0;$

где a,b,c удовлетворяют условиям гладкости, сформулированным при выводе (1.37), $\alpha_k,\beta_k\in C^1,s,t,m\in C^2$, причем функция m зависит лишь от одной переменной из (x,y) и не принимает значение 2. Классы гладкости указаны на замкнутых множествах определения соответсвующих функций.

Лемма 1. Пусть существуют функции $\alpha_k, \beta_k, m, s, t$ указанных выше классов, для которых имеет место один из наборов 1)—2), или при выполнении тождеств 3) одна из комбинаций h, k представляется в виде дроби 4). Тогда функция Римана хотя бы для одного из уравнений (1.37) записывается в явном виде.

Доказательство в каждом из перечисленных вариантов 1)—4) состоит в непосредственном построении функции Римана с использованием аналогов формул (1.23), (1.24) из [7] и (1.37) из [9, с. 179]. Эти функции Римана будем отмечать теми же индексами, что и искомые функции уравнений (1.37). В результате такого построения имеем в случаях тождеств 1), 2)

$$R_1 = \frac{\beta_1(\eta)}{\beta_1(y)}R, \quad R_{-1} = \frac{\alpha_2(\xi)}{\alpha_2(x)}R, \tag{1.40}$$

а в вариантах, связанных с соотношениями 3), 4) —

$$R_1 = \frac{t'(\eta)}{t'(y)}\left[\frac{s(\xi)+t(y)}{s(\xi)+t(\eta)}\right]^2 R, \quad R_{-1} = \frac{s'(\xi)}{s'(x)}\left[\frac{s(x)+t(\eta)}{s(\xi)+t(\eta)}\right]^2 R. \tag{1.41}$$

При этом первая формула из (1.41) получена в предположении $m = m(x)$, а вторая — в случае $m = m(y)$. Если же при построении R_1 считать $m = m(y)$, то в правой части у этой функции надо добавить множитель $\frac{2-m(y)}{2-m(\eta)}$. Аналогично при замене $m(y)$ на $m(x)$ в правой части у R_{-1} добавляется множитель $\frac{2-m(x)}{2-m(\xi)}$. Заметим, что для получения формул (1.41) используется [11, с. 321-322] представление решения уравнения Лиувилля $u_{xy} = exp\,u$ через функции s, t.

На основании приведенных выше формул можно считать лемму 1 доказанной. При построении решения задачи Гурса с использованием R_1 и R_{-1} необходимо знать граничные значения

$$u_1(x_0, y) = \varphi_1(y), \quad u_1(x, y_0) = \psi_1(x), \quad u_{-1}(x_0, y) = \varphi_{-1}(y),$$
$$(1.42)$$
$$u_{-1}(x, y_0) = \psi_{-1}(x), \quad \varphi_1(y_0) = \psi_1(x_0), \quad \varphi_{-1}(y_0) = \psi_{-1}(x_0).$$

Получить значения (1.42) нетрудно с помощью формул типа (1) из [[9], с. 177], которые для φ_1, ψ_1 сразу дают их значения ерез φ, ψ, а в случаях φ_{-1}, ψ_{-1} требуется решить хорошо известные линейные обыкновенные дифференциальные уравнения первого порядка. С помощью тех же формул типа (1) из [9, с. 177] вычисляется искомая функция $u(x, y)$ либо через u_1, либо через $u_{-1}.$, $\varphi, \psi \in C^2$. Поэтому имеет место

Теорема 1. Если при $hk \neq 0$ выполнены условия леммы и при этом $\varphi(y) \in C^2[y_0, y_1], \psi(x) \in C^2[x_0, x_1]$, то задача Гурса для уравнения (1.1) решается в квадратурах.

Приведем примеры выполнения условий теоремы. пусть $\lambda_k, \mu_k, \upsilon_k$—произвольные функции указываемых далее классов и каждая из них зависит только от одной из переменных (x, y). Запишем некоторые структурные представления коэффициентов уравнения (1.1): для каждого набора представлений выполняется какая-либо группа тождеств 1), 2) или 3), 4).

$$\text{Случай 1.}\quad a = \lambda_1(y), \quad b = \mu_1(x)\upsilon_1(y), \quad c = \lambda_1(y)\mu_1(x)\upsilon_1(y) - \mu_1(x)\upsilon_1'(y),$$
$$\upsilon_1'\mu_1 \neq 0, \quad \lambda_1 \in C, \quad \mu_1 \in C^1, \quad \upsilon_1 \in C^2.$$
$$\text{Случай 2.}\ a = \lambda_2(x)\mu_2(y), \quad b = \upsilon_2(x), \quad c = \lambda_2(x)\mu_2(y)\upsilon_2(x) - \mu_2(y)\lambda_2'(x),$$
$$\lambda_2'\mu_2 \neq 0, \quad \lambda_2 \in C^2, \quad \mu_2 \in C^1, \quad \upsilon_2 \in C.$$

Путем непосредственной проверки нетрудно убедиться, что в случае 1 выполняются условия 1) при $\alpha_1 = \mu_1(x), \beta_1 = \upsilon_1'(y)$, а для случая 2 при $\alpha_2 = \lambda_2'(x), \beta_2 = \mu_2(y)$ имеют место тождества 2).

$$\text{Случай 3.}\ a = \frac{\upsilon_3'(y)}{\mu_3(x)+\upsilon_3(y)}, \quad b = \frac{\mu_3'(x)}{\mu_3(x)+\upsilon_3(y)}, \quad c = \frac{2\mu_3'(x)\upsilon_3'(y)}{[\mu_3(x)+\upsilon_3(y)]^2},$$
$$\mu_3'(x)\upsilon_3'(y) \neq 0, \quad \mu_3(x) + \upsilon_3(y) \neq 0, \quad \mu_3, \upsilon_3^1, m \equiv 1.$$

Здесь выполняется набор тождеств 3), а 4) имеет место как для $\omega = h$, так и для $\omega = k$, причем $s = \mu_3(x), t = \upsilon + 3(y)$. Здесь условия теоремы тоже проверяются непосредственными вычислениями.

Мы видим. что каждый из случаев 1—3 описывает бесконечное множество уравнений вида (1.1), для которых задача Гурса разрешима в квадратурах.

§2. Применение предыдущих результатов к исследованию задачи Гурса для уравнения Бианки четвертого порядка.

Мы рассматриваем уравнение

$$\text{u}_{xyzt} + au_{xyz} + bu_{xyt} + cu_{xzt} + du_{yzt} + eu_{xy} + fu_{xz} + gu_{xt} + hu_{yz} + ku_{yt} + su_{zt} +$$
$$+ mu_x + nu_y + pu_z + qu_t + ru = 0 \qquad (2.1)$$

в области $D = 0 < x < x_1, 0 < y < y_1, 0 < z < z_1, 0 < t < t_1$

Задача Гурса здесь заключается в том, чтобы найти в D решение уравнения (2.1) по условиям

$$
\begin{cases}
\text{u(0, y, z, t)}=\varphi_1(y,z,t),\\
\text{u(x, 0, z, t)}=\varphi_2(x,z,t),\\
\text{u(x, y, 0, t)}=\varphi_3(x,y,t),\\
\text{u(x, y, z, 0)}=\varphi_4(x,y,z).\\
\varphi_1(0,z,t)=\varphi_2(0,z,t),\\
\varphi_1(y,0,t)=\varphi_3(0,y,t),\\
\varphi_1(y,z,0)=\varphi_4(0,y,z),\\
\varphi_2(x,0,t)=\varphi_3(x,0,t),\\
\varphi_2(x,z,0)=\varphi_4(x,0,z),\\
\varphi_3(x,y,0)=\varphi_4(x,y,0).
\end{cases} \tag{2.2}
$$

Нас будут интересовать случаи, подобные описанным в п. 1.4, когда имеются возможности построить решение задачи (2.1)—(2.2) в квадратурах. В связи с этим естественной является мысль каким-либо способом преобразовать уравнение (2.1) к уравнениям второго порядка вида (1.1), причем желательно с помощью условий (2.2) получить для упомянутых уравнений второго порядка условия вида (1.2).

Потребуем осуществить данную идею с помощью факторизации уравнения (2.1), то есть преобразования его к виду

$$
(\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}+\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}+\beta_1\frac{\partial}{\partial y}+\gamma_1)(u_{zt}+\alpha u_z+\beta u_t+\gamma u)=0, \tag{2.3}
$$

где $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$—функции, подлежащие определению.

Призведем указанные в левой части (2.3) действия с учетом формул

$$
\frac{\partial^2}{\partial x\partial y}(\alpha u_z)=\frac{\partial}{\partial x}(\alpha_y u_z+\alpha u_{yz})=\alpha_{xy}u_z+\alpha_y u_{xz}+\alpha_x u_{yz}+\alpha u_{xyz}, \tag{2.4}
$$

$$
\alpha_1\frac{\partial}{\partial x}(\alpha u_z)=\alpha_1\alpha_x u_z+\alpha_1\alpha u_{xz}, \tag{2.5}
$$

получим

$$
\begin{gathered}
\mathrm{u}_{xyzt}+\alpha_{xy}u_z+\alpha_y u_{xz}+\alpha_x u_{yz}+\alpha u_{xyz}+\beta_{xy}u_t+\beta_y u_{xt}+\beta_x u_{yt}+\beta u_{xyt}+\gamma_{xy}u+\gamma_y u_x+\\
+\gamma_x u_y+\gamma u_{xy}+\alpha_1\alpha_x u_z+\alpha_1\alpha u_{xz}+\alpha_1\beta_x u_t+\alpha_1\beta u_{xt}+\alpha_1\gamma_x u+\alpha_1\gamma u_x+\alpha_1 u_{xzt}+\beta_1 u_{yzt}+\\
+\beta_1\alpha_y u_z+\beta_1\alpha u_{yz}+\beta_1\beta_y u_t+\beta_1\beta u_{yt}+\beta_1\gamma_y u+\beta_1\gamma u_y+\gamma_1 u_{zt}+\gamma_1\alpha u_z+\gamma_1\beta u_t+\\
+\gamma_1\gamma u=0.
\end{gathered} \tag{2.6}
$$

Соберем в (2.6) все коэфициенты, при u, и ее производных

$$u(\gamma_1\gamma+\beta_1\gamma_y+\alpha_1\gamma_x+\gamma_{xy})+u_x(\gamma_y+\alpha_1\gamma)+u_y(\gamma_x+\beta_1\gamma)+u_z(\alpha_{xy}+\alpha_1\alpha_x+\beta_1\alpha_y+ \\ +\gamma_1\alpha)+u_t(\beta_{xy}+\alpha_1\beta_x+\beta_1\beta_y+\gamma_1\beta)+u_{xy}\gamma+u_{xz}(\alpha_y+\alpha_1\alpha)+u_{xt}(\beta_y+\alpha_1\beta)+u_{yz}(\alpha_x+ \\ +\beta_1\alpha)+u_{yt}(\beta_x+\beta_1\beta)+u_{zt}\gamma_1+u_{xyz}\alpha+u_{xyt}\beta+u_{yzt}\beta_1+u_{xzt}\alpha_1+u_{xyzt}=0 \qquad (2.7)$$

Отсюда понятно, что для совпадения (2.6) с (2.1) достаточно, чтобы выполнялись тождества:

$$\begin{cases} f\equiv \alpha_y+\alpha_1\alpha, \\ g\equiv \beta_y+\alpha_1\beta, \\ h\equiv \alpha_x+\beta_1\alpha, \\ k\equiv \beta_x+\beta_1\beta, \\ m\equiv \gamma_y+\alpha_1\gamma, \\ n\equiv \gamma_x+\beta_1\gamma, \\ p\equiv \alpha_{xy}+\alpha_1\alpha_x+\beta_1\alpha_y+\gamma_1\alpha, \\ q\equiv \beta_{xy}+\alpha_1\beta_x+\beta_1\beta_y+\gamma_1\beta, \\ r\equiv \gamma_1\gamma+\beta_1\gamma_y+\alpha_1\gamma_x+\gamma_{xy}. \end{cases} \qquad (2.8)$$

При этом получается, что $\alpha,\beta,\gamma,\alpha_1,\beta_1,\gamma_1$ должны определяться по формулам

$$\begin{cases} \alpha\equiv a, \\ \beta\equiv b, \\ \alpha_1\equiv c, \\ \beta_1\equiv d, \\ \gamma\equiv e, \\ \gamma_1\equiv s, \end{cases} \qquad (2.9)$$

Нетрудно заметить, что (2.8) с учетом (2.9) принимают вид

$$\begin{gathered} a_y+ac-f\equiv 0, \\ b_y+cb-g\equiv 0, \\ a_x+ad-h\equiv 0, \\ b_x+bd-k\equiv 0, \\ e_y+ce-m\equiv 0, \\ e_x+de-n\equiv 0, \\ a_{xy}+ca_x+da_y+sa-p\equiv 0, \\ bs+b_{xy}+b_xc+db_y-q\equiv 0, \\ se+de_y+ce_x+e_{xy}-r\equiv 0, \end{gathered} \qquad (2.10)$$

Очевидно, полученный результат может быть сформулирован как

Теорема 1. Если коэффициенты уравнения (2.1) удовлетворяют условиям (2.10), то уравнение (2.1) записывается в форме (2.3), где $\alpha, \beta, \gamma, \alpha_1, \beta_1, \gamma_1$ определяются с помощью (2.9).

Данная теорема позволяет редуцировать задачу Гурса (2.1)—(2.2) к двум классическим задачам вида (1.1)—(1.2). А именно, если введем новую функцию v по формуле

$$M(u) \equiv u_{zt} + au_z + bu_t + eu = v, \tag{2.11}$$

то уравнение (2.1) запишется в виде

$$v_{xy} + cv_x + dv_y + sv = 0 \tag{2.12}$$

Из (2.2) находим для u, v граничные значения

$$u\Big|_{z=0} = \varphi_3(x, y, t), \quad u\Big|_{t=0} = \varphi_4(x, y, z). x, y \text{ считаем параметрами,} \tag{2.13}$$

$$v\Big|_{x=0} = M(\varphi_1) \quad v\Big|_{y=0} = M(\varphi_2). z, t\text{—параметры,} \tag{2.14}$$

Здесь M—оператор, заданный в (2.11) с коэффициентами, вычисленными при $x = 0$ в первом и $y = 0$ во втором соотношении (2.14). Понятно, что сначала нужно решить задачу (2.12), (2.14), а затем (2.11), (2.13). При решении первой из них можем (и будем!)z, t считать параметрами, а во второй параметрами будут x, y.

Поскольку нас интересуют только решения в квадратурах, мы можем пользоваться формулами (1.39). Однако к ним мы добавим еще случаи $a_x + ab - c \equiv 0, b_y + ab - c \equiv 0$,эквивалентные тождествам $h \equiv 0, k \equiv 0$ (см. начало п. 1.4), а также набор $a_x \equiv b_y, a_x + ab - c \equiv \alpha_0(x)\beta_0(y) \neq 0$ [см. 7, формулы (2.2) на с. 169]. Все эти три варианта относятся к уравнению (1.1), как и соотношения (1.39). Мы занумеруем только что указанные три случая с помощью 1)—3), а 1)—4) из (1.39) перепишем в виде 4)—7) (в той же последовательности). При этом a, b, c, f из (1.1) заменим на A, B, C, F. Другими словами, мы все перечисленные семь вариантов будем считать записанными для уравнения

$$u_{xy} + A(x, y)u_x + B(x, y)u_y + C(x, y)u = F(x, y). \tag{2.15}$$

Указанными же вариантами будут

$$\begin{aligned}
&1) A_x + AB - C \equiv 0;\\
&2) B_y + AB - C \equiv 0;\\
&3) A_x \equiv B_y, \quad A_x + AB - C \equiv \xi_0(x)\eta_0(y) \neq 0;\\
&4) B_y - A_x \equiv A_x + AB - C \equiv \xi_1(x)\eta_1(y) \neq 0;\\
&5) A_x - B_y \equiv B_y + AB - C \equiv \xi_2(x)\eta_2(y) \neq 0;\\
&6) mA_x - B_y \equiv mB_y - A_x \equiv (m-1)(AB - C)\\
&7) \text{или } A_x + AB - C, \text{ или } B_y + AB - C \text{ имеет вид } \tfrac{2\sigma'(x)\theta'(y)}{(2-m_1)[\sigma(x)+\theta(y)]^2},\\
&\sigma'(x)\theta'(y) \neq 0, \sigma(x) + \theta(y) \neq 0.
\end{aligned} \tag{2.16}$$

Еще мы заменили в (1.39) функции α_k, β_k на ξ_k, η_k, а s, t— на σ, θ, чтобы не возникало ненужных связей с теми предшествующими формулами, в которых α, β, s, t уже использовались.

Основой для применения соотношений (2.16) может служить

Лемма 2. Пусть имеет место одно из тождеств 1)—2), или существуют функции $\xi_k, \eta_k, m, \sigma, \theta$, для которых реализуется одна из групп тождеств 3)—5), или при выполнении 6) одна из указанных в 7) двух конструкций имеет форму содержащейся в этом варианте дроби. Тогда функция Римана для уравнения (2.15) записывается в явном виде.

Адаптируем теперь соотношения (2.16) к задачам, полученным при факторизации уравнения (2.1), начиная с уравнения (2.12), когда $A = c, B = d, C = s$. Варианты 1)—7) перепишутся тогда так:

$$\begin{aligned}
&1) c_x + cd - s \equiv 0;\\
&2) d_y + cd - s \equiv 0;\\
&3) c_x \equiv d_y, \quad c_x + cd - s \equiv \xi_0(x,z,t)\eta_0(y,z,t) \neq 0;\\
&4) d_y - c_x \equiv c_x + cd - s \equiv \xi_1(x,z,t)\eta_1(y,z,t) \neq 0;\\
&5) c_x - d_y \equiv d_y + cd - s \equiv \xi_2(x,z,t)\eta_2(y,z,t) \neq 0;\\
&6) mc_x - d_y \equiv md_y - c_x \equiv (m-1)(cd - s)\\
&7) \text{или } c_x + cd - s, \text{ или } d_y + cd - s \text{ имеет вид } \tfrac{2\sigma_x(x,z,t)\theta_y(y,z,t)}{(2-m)[\sigma(x,z,t)+\theta(y,z,t)]^2},
\end{aligned} \tag{2.17}$$

где $\sigma_x(x,z,t)\theta_y(y,z,t) \neq 0, \sigma(x,z,t) + \theta(y,z,t) \neq 0$, а $m \neq 0$ зависит либо от (x,z,t), либо от (y,z,t).

Перефразуем лемму 2, получим 7 вариантов условий построения функции v в квадратурах, что дает возможность в любом из этих семи случаев перейти к задаче (2.11), (2.13), где (x,y) и (z,t) меняются местами. Учитывая, что здесь $A = a, B = b, C = e$, запишем адаптированную совокупность соотношений (2.16) в форме

$$\begin{aligned}
&1) a_z + ab - e \equiv 0;\\
&2) b_t + ab - e \equiv 0;\\
&3) a_z \equiv b_t, \quad a_z + ab - e \equiv \xi_3(x,y,z)\eta_3(x,y,t) \neq 0;\\
&4) b_t - a_z \equiv a_z + ab - e \equiv \xi_4(x,y,z)\eta_4(x,y,t) \neq 0;\\
&5) a_z - b_t \equiv b_t + ab - e \equiv \xi_5(x,y,z)\eta_5(x,y,t) \neq 0;\\
&6) ma_z - b_t \equiv mb_t - a_z \equiv (m-1)(ab - e);\\
&7) \text{или } a_z + ab - e, \text{ или } b_t + ab - e \text{ имеет вид } \tfrac{2\sigma_z(x,y,z)\theta_t(x,y,t)}{(2-m)[\sigma(x,y,z)+\theta(x,y,t)]^2},
\end{aligned} \tag{2.18}$$

где $\sigma_z(x,y,z)\theta_t(x,y,t) \neq 0, \sigma(x,y,z) + \theta(x,y,t) \neq 0$, а $m \neq 0$ зависит либо от (x,y,z), либо от (x,y,t).

Мы должны принять во внимание, что в [10] (см. также п. 1.4) используется метод каскадного интегрирования, связанный с преобразованиями, содержащими дифференцирование искомых функций и коэффициентов уравнения. Кроме того, требуется обеспечить возможность реализации всех соотношений (2.17)—(2.18). Все это может быть достигнуто за счет достаточной гладкости входящих в эти соотношения функций. Еще для формулировки окончательного результата проведенных рассуждений нужно вернуть параметрами в (2.17) и (2.18) их первоначальный статус независимых переменных (z,t) и (x,y) соответсвенно. Учитывая все это, можно утверждать, что справедлива

Теорема 2. Пусть $a,b,c,d,e,f,g,h,k,s,m,n,p,q,r \in C^{(2,2,2,2)}, \varphi_k^{(2,2,2)} (k = \overline{1,4})$, а в наборах (2.17) и (2.18) имеет место одно из тождеств 1)-2), или существуют функции $m,\sigma,\theta \in C^{(2,2,2)}, \xi_k, \eta_k \in C^{(1,1,1)} (k = \overline{0,2})$, для которых реализуются одна из групп соотношений 3)-5), или при наличии тождеств 6) одна из указанных в 7) двух конструкций имеет форму содержайщейся в этом пункте дроби. Если при этом удовлетворяются тождества (2.10), а перечисленные условия гладкости выполняются в замкнутых областях определения соответствующих функций, то задача Гурса для уравнения (2.1) разрешима в квадратурах.

Легко усмотреть, что общее количество содержащихся в данной теореме случаев разрешимости в квадратурах равно 49: ведь все их можно получить, сопоставив каждому варианту из (2.17) любую из семи возможностей, указанных в (2.18).

Заключение

Новыми в данной работе являются следующие результаты

1. Разработан способ факторизации изучаемого уравнения Бианки в четырехмерном евклидовом пространстве, позволяющий редуцировать задачу Гурса к случаю двух уравнений, близких к (1).

2. Каждая из этих двух полученных задач адаптирована к форме, обеспечивающей возможность применения к ней метода построения решения в квадратурах, изложенного в реферативной части работы (§.1).

3. Сформулированы в терминах условий на коэффициенты рассматриваемого уравнения 49 вариантов построения решений изучаемой задачи Гурса в квадратурах.

Литература

1. Bianci L. Sulla estensione del metodo di Riemann alle equazioni lineari alle derivate parziali d'ordine superiore // Atti R. Accad.Lincei. Rend. Cl.Sc.fis., mat. e natur.-1895. Vol. IV, 1 sem.-P. 89-99, 133-142.

2. Lahaye E. La metode de Riemann appligee a la resolution d'une categorie d'equations lineares de troisieme ordre // Bull. cl. sci.Acad. Roy. de Belg.-1946-5 serie.- V.31-P. 479-494.

3. Фаге М.К. Дифференциальные уравнения с чистосмешанными производными и главным членом // ДАН СССР, 1956.-Т.108, N=5.-с.780-783.

4. Фаге М.К. Задача Коши для уравнения Бианки // Математический сборник, 1958-Т.451(87), N=3-с.281-322.

5. Джакадзе О.М. об инвариантах уравнений в частных производных//Дифференц. уравнения, 2006-Т.42,№3-с. 385-394.

6. Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Дифференциальные уравнения со старшими частными производными. -Казанское математ. о-во, 2001-с. 226

7. Жегалов В.И., Миронов А.Н., Уткина Е.А. Уравнения с доминирующей частной производной.-Изд-во Казанского ун-та, 2014-385с.

8. Крикунов Ю.М. Лекции по уравнениям математической физики и интегральным уравнениям.-Казань: Казанск. ун-т,1970.- 209с.

9. Трикоми Ф. Лекции по дифференциальным уравнениям в частных производных.

10. Жегалов В.И., Сарварова И.М. К условиям разрешимости задачи Гурса в квадратурах // Известия вузов. Математика, 2013- №3. с. 68-73.

11. Бицадзе А.В. уравнения математической физики - М.: Наука, 1982.- с. 336