

Министерство науки и высшего образования Российской Федерации  
Федеральное государственное автономное образовательное  
учреждение высшего образования  
«КАЗАНСКИЙ (ПРИВОЛЖСКИЙ) ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ»

ИНСТИТУТ ФИЗИКИ  
КАФЕДРА ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

Направление: 03.04.02 Физика

Профиль: Теоретическая физика и моделирование физических процессов

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ

ГАРМОНИЧЕСКИЙ ОСЦИЛЛЯТОР В ОТКРЫТОЙ  
КВАНТОВОЙ СИСТЕМЕ ВО ВНЕШНЕМ СЛУЧАЙНОМ ПОЛЕ

Студент 2 курса группы 06-119

«15» июня 2023 г.



(Мадьяров Б.Л.)

Научный руководитель

к.ф.-м.н., доцент

«15» июня 2023 г.



(Авдеев М.В.)

Заведующий кафедрой:

д.ф.-м.н., профессор

«15» июня 2023 г.



(Прошин Ю.Н.)

Казань-2023

# Содержание

<b>Введение</b> . . . . .	3
<b>Глава 1. Фейнмановский функциональный интеграл в открытой квантовой системе</b> . . . . .	13
1.1. Общие положения квантовой механики . . . . .	13
1.2. Декогеренция и диссипативные эффекты в открытой квантовой системе . . . . .	15
1.3. Фейнмановский функциональный интеграл . . . . .	18
<b>Глава 2. Амплитуды переходов осциллятора в случайном поле в открытой квантовой системе</b> . . . . .	20
2.1. Пропогатор для осциллятора во внешнем поле . . . . .	20
2.2. Амплитуды перехода под действием внешнего поля . . . . .	22
2.3. Время декогеренции квантового состояния осциллятора . . . . .	24
2.4. Монохроматическое возмущение со случайной фазой . . . . .	25
<b>Заключение</b> . . . . .	30
<b>Список литературы</b> . . . . .	32

# Введение

Открытая квантовая система – это система взаимодействующая с окружением (может обмениваться с окружением как энергией, так и веществом), причём, как правило, число степеней свободы у окружения несоизмеримо больше, чем у рассматриваемой подсистемы. Действительно, в реальных экспериментальных условиях невозможно полностью изолировать исследуемую систему от внешнего мира. В случае когда рассматриваемая система является существенно квантовой, проблема описания влияния окружения на её динамику становится ещё более актуальной и значимой, поскольку, в определённом смысле, всякая квантовая система может рассматриваться как открытая система и измерение любой динамической наблюдаемой величины неизбежно связано с конечным необратимым изменением квантового состояния системы. Такие процессы приводят к распаду (декогеренции) квантового состояния на некотором характерном временном масштабе  $\tau_d$  [1]. С точки зрения теории квантовой информации декогеренции соответствует возникновение запутанности между степенями свободы квантового состояния и степенями свободы окружения. Следовательно мы приходим к выводу, что в отличие от классической физики, в которой измерения не играют существенной роли, теория открытых квантовых систем должна учитывать и включать в себя теорию квантовых измерений. В настоящее время теория открытых квантовых систем является теоретической основой современной спектроскопии [2–5], квантовой оптики [6–8], квантовой теории измерений [9, 10], неравновесной статистической квантовой физики и имеет широкие физические применения.

Решение проблемы в изучении открытых квантовых систем является одним из актуальных вызовов современной физики. К настоящему времени имеется большой объем работ в контексте изучения классической квазиравновесной и неравновесной физики многих тел и статистической механики [11–15]. Однако аналогичные сценарии и теоретические инструменты для открытых квантовых

систем гораздо менее изучены и развиты.

С появлением экспериментальных трудов в области неравновесных квантовых систем, в которых динамика определяется не только одним Гамильтонианом, например конденсированный одноатомный газ [16–18], различные системы связанные с конденсатом Бозе-Эйнштейна [19–22], спиновые модели захваченных ионов [23, 24], стало понятно, что необходимо развить аппарат и методы для теоретического описания подобных систем и структур. Хотя эти системы в ближайшем рассмотрении и являются чисто квантовыми по своим свойствам, присутствие окружающей среды, вводит диссипативную часть, которой нельзя пренебрегать. Такие системы, не обязательно достигают внутреннего термодинамического равновесия из-за отсутствия сохранения энергии. Они скорее сходятся к неравновесным стационарным состояниям материи, создавая сценарии, не имеющие аналога в конденсированных равновесных средах. Это исключает использование обычных теоретических концепций и методов термодинамического равновесия, и требуют развития новых подходов.

Таким образом, одна из ключевых целей новых подходов должна состоять в том, чтобы идентифицировать универсальные динамические режимы, которые сохраняются за пределами конкретных реализаций или точных начальных условий. В последнее время было показано, что концепция приготовления диссипативного состояния в квантовой оптике [25, 26] можно развить в контекст физики многих тел, как теоретически [27–30], так и экспериментально [31–33]. Тогда специально подобранная диссипация не обязательно действует как противовес тонких квантово-механических корреляций, таких как фазовая когерентность или запутанность [34–39]. Наоборот, может даже создавать эти корреляции, и диссипация тогда представляет доминирующее положение в многочастичной динамике. В частности, даже топологически упорядоченные состояния в спиновых системах [40] или фермионная материя [41, 42] может индуцироваться диссипативно ([29] и [43–45] соответственно). Эти разработки открывают новое окно возможностей для физики многих тел.

Подводя итог, можно сказать, что теория открытых квантовых систем была следствием появившихся экспериментальных результатов в области квантовых измерений и квантовой оптики. В оставшейся части введения рассмотрим подробно три основные проблемы, которые возникают в этих системах.

Присущая рассматриваемым системам вынужденная природа обусловлена тем фактом, что лежащий в основе микроскопический гамильтониан зависит от времени, причем временная зависимость связана с внешними вынуждающими полями, такими как например лазеры. Когда такой ансамбль вдобавок имеет естественное разделение на “систему” и “термостат” – континуум режимов хорошо аппроксимируется гармоническими осцилляторами с короткой памятью, связь система-термостат является незначительной по сравнению с типичными энергиями гамильтониана системы и операторов рождения и уничтожения, возникает “система” описания в терминах комбинированного гамильтониана и диссипативной Марковской квантовой динамики. Динамика “системы” получается путем наблюдения за изменениями переменных термостата. Результирующая эффективная микродинамика является “неравновесной”. Это касается не только эволюции во времени, но также справедливо и для неравновесных стационарных состояний. Описанная выше ситуация подразумевает явное нарушение детального баланса, поскольку энергия системы не сохраняется из-за явно зависящего от времени внешнего возмущения. Что же подразумевается под “детальным балансом” и “термодинамическим равновесием”? Под условием детального баланса подразумевается, что существует инвариантное разделение для температуры (уровня шума) существующая в системе: произвольное разделение системы на две части может быть выбрана так, что прослеживая одну часть, можно определить температуру (уровень шума) и подсистемы, она будет такой, как и в наблюдаемой. Эта инвариантность разбиения является условием глобально четко определенной температурной характеристики для систем в термодинамическом равновесии. Более формально, тепловое равновесие может обнаруживаться с помощью так называемых флуктуационно-диссипативных соот-

ношений (ФДС). Они соединяют две фундаментальные наблюдаемые величины в физических системах – функции корреляции и отклика [46]. В случае термодинамического равновесия величины определяются только статистически, Бозе-и Ферми-распределениями соответственно. Отклонения из этой универсальной формы, имеющей только два свободных параметра (температура и химический потенциал, они обуславливают сохраняющиеся величины энергии и числа частиц), обеспечивают необходимое требование для неравновесных стационарных состояний. В неравновесных стационарных состояниях такой общей формы не существует. Примером является управляемая модель Дике (фотон резонатора, связанный с коллективным спином) [46], где форма ФДС зависит от наблюдаемой, которую мы выбираем (например, корреляции положения или импульса и отклика).

С другой стороны, тепловые ФДС могут возникать на больших длинах волн, даже если микроскопическая динамика явно нарушает детальное равновесие [47]. В частности, в трех измерениях и вблизи критической точки диссипативного Бозе-конденсата, вырождение критических показателей указывает на универсальную асимптотическую термализацию в виде возникающей тепловой ФДС. Аналогичная ситуация возникает в неупорядоченном многомодовом расширении модели Дике. На низких частотах критическая точка является своего рода аттрактором системы. Однако в этих системах неравновесные состояния оставляют свой отпечаток в динамическом отклике системы, с точки зрения информации, которая не входит в ФДС, но все же присутствует в системе. Например, критическое поведение характеризуемое тонкой структурой, который измеряет декогерентность, и значение которого отличает равновесное и неравновесное состояние.

Вместо возникающего термодинамического процесса, указывающего на исчезновение неравновесных состояний при увеличении масштаба возможен и противоположенный процесс. Например, низкоразмерные ( $d \leq 2$ ) бозонные системы с низким уровнем шума, такие как экситон-поляритоны, намного выше поро-

га и не притягиваются к равновесной критической точке, как и их трехмерные аналоги, а притягиваются к неравновесной критической точке Кардара-Паризи-Чжана [48]. Это можно интерпретировать как преобладание неравновесного состояния, которая срабатывает, даже если нарушение детального баланса на микроскопическом уровне очень мало.

Универсальные неравновесные явления могут возникать и в эволюциях управляемых открытых систем во времени. Например, законы масштабирования, описывающие алгебраическую декогеренцию [49], аномальную диффузию [50] или поведение подобное стеклу [51–54], могут быть определены на большом масштабе времени в асимптотике возбужденных спиновых систем, близких к стационарным состояниям. И наоборот, в малом масштабе времени поведение управляемых бозонов в открытой решетки с течением времени показывает универсальные законы масштабирования, непосредственно свидетельствующие о неравновесном движении. Этот процесс может быть связан с ярко выраженной неравновесной формой функции распределения во времени на ранних стадиях эволюции и есть возможность пронаблюдать процесс законов сохранения диссипативного источника.

Приведенное выше обсуждение в основном сосредоточено на разнице между равновесными и неравновесными системами на макроскопическом уровне наблюдения. Другое направление, касается различия между классическими и квантовыми эффектами. Опять же, хотя квантово-механическое описание необходимо на микроскопическом уровне, постоянство квантовых эффектов на макроуровне не гарантируется. Это происходит в основном из-за Марковского шума, присущего таким квантовые системы. Тем не менее, системы с надлежащим образом спроектированной диссипативной динамикой демонстрируют типичные квантово-механические явления, такие как фазовая когерентность [27, 28, 34, 36, 37, 55], запутанность [31–33, 35] или топологический порядок [29, 39, 43–45].

Аналитических инструменты применяемые в описании таких систем, долж-

ны совершить скачок от микро- к макрофизике в управляемых открытых квантовых системах, но они все еще находятся на стадии разработки, как и тема исследований в данной области. Причина предварительного статуса теории заключается в том, что две прежде довольно самостоятельные дисциплины – квантовая оптика и физика многих тел – должны быть унифицированы на техническом уровне.

Квантово-оптические системы хорошо описываются микроскопически в терминах Марковских квантовых основных уравнений, которые одинаково относятся и к когерентной гамильтоновой и к диссипативной динамике. Для решения таких задач были разработаны мощные приемы. Например численный метод – квантовая траекторный подход [56–58]. Есть также аналитические подходы, такие как теория возмущений для квантовых вычислений, например метод проекционных операторов Накадзимы-Цванзига [59, 60] или отображения в  $P$ ,  $W$ ,  $Q$ -представлениях [61], выводящие задачу во вторичное квантование с приведением уравнений в виде частных производных. Характерной особенностью традиционных квантово-оптических систем является конечное расстояние между несколькими энергетическими уровнями, вносящими основной вклад. При рассмотрении систем с пространственным множеством степеней свободы уровни энергии становятся непрерывными. Это не означает, что микроскопическое моделирование в терминах основных квантовых уравнений неуместны, они уместны, но в таких пределах, в каких длина волны испускаемого излучения значительно ниже пространственного разрешения, в котором определяется микроскопическая модель. Действительно, в этой ситуации, деструктивное вмешательство излучения, оправдывает описание управляемой диссипации с точки зрения некогерентного процесса. Однако в этих условиях малость микроскопического параметра расширения уже не гарантирует малость пертурбативной поправки. Здесь причина в том, что в теории возмущений суммируют промежуточные состояния с амплитудами распространения вплоть до самых длинных волны. Это может привести к инфракрасным расходимостям в теории возмуще-



ний – обстоятельство, нашедшее свою физическую интерпретацию в терминах ренорм групп [62, 63]. Большой вклад длинных волн лежит в основе большей части универсальности, т. е. инвариантности в переходе от коротких к длинным волнам.

Современная структура понимания проблем термодинамического равновесия многочастичных систем основана на формулировке квантовой теории поля как функционального интеграла. Спектр его применения охватывает замечательный диапазон энергетических масштабов, от ультрахолодных атомарных газов до систем конденсированного состояния. Он дает нам хорошо развитый набор методов, таких как диаграммная. Но это также включает в себя непертурбативные подходы, которые часто могут извлечь выгоду из гибкости функционального интеграла, когда он сводится к выбору соответствующих степеней свободы. Это хороший инструмент для задач, чье решение обычно сильно зависит от пространственного масштаба [64]. Оно хорошо описывает Куперовские пары или молекулярные степени свободы во взаимодействующих фермионах. Описание изменения физики с пространственным масштабом было заложено в терминах уже упомянутой выше ренорм группы, однако это еще один инструмент, разработанный и наиболее четко сформулированный на функциональном языке. Наконец, функциональный интеграл, основанный на одной скалярной величине – действии, кодирующей всю динамику в микроскопическом масштабе – удобная основа, когда речь идет о классификации симметрий и связанных с ними законов сохранения и их использование при аппроксимации.

Таким образом, в то время как управляемые открытые системы многих тел хорошо описываются микроскопическими основными уравнениями, традиционные методы квантовой оптики не могут быть использованы эффективно, по крайней мере, не в том случае, когда начинают играть роль возникающие особенности систем многих тел. И наоборот, делает невозможным подход к этим проблемам в рамках равновесной физики многих тел. Эта ситуация требует слияния дисциплин квантовой оптики и физики многих тел на техническом

уровне. Со стороны вычислений, недавно был достигнут прогресс в одном пространственном измерении, сочетая метод квантовых траекторий с мощными алгоритмами ренорм группировки матрицы плотности [65–67]. Для простоты вычислений идеально подходят функционал Келдыша или интеграл по траекториям [68–73]. Концептуально последний отражает наиболее общую ситуацию в физике многих тел — динамика матрицы плотности при произвольной возмущенной динамике.

Интеграл по траекториям также известный как континуальный интеграл — это мощный аппарат в изучении квантовой механики, потому что он четко выделяет соответствие между классической и квантовой механикой. Физические величины являются средними по всем возможным траекториям, но в квазиклассическом приближении  $\hbar \rightarrow 0$  основной вклад дастся траекториями, ближайшими к классическим. Формулировка квантовой механики, основанная на континуальных интегралах, хоть и выглядит математически более сложной, чем формализм дифференциальных уравнений, тем не менее хорошо описывает системы с огромным числом степеней свободы, где формализм Шредингеровского типа малоприменим. Поэтому в квантовой теории поля или статистической физике в основном прибегают к континуальным интегралам.

Современная история континуального интеграла началась с работ Фейнмана Хибса. Фейнман сформулировал квантовую эволюцию в терминах сумм по набору траекторий с весом  $e^{iS/\hbar}$ , где  $S$  — классическое действие (интеграл по времени от Лагранжиана). При таком подходе классические уравнения движения возникают при вычислениях с добавлением стационарной фазы. Когда в физической системе типичные значения действия велики по сравнению с  $\hbar$ , основной вклад в континуальный интеграл вносят траектории, близкие к классическим. Интегралы по путям стали мощным инструментом в современной физике, особенно в областях связанные с большими степенями свободы. В частности в квантовании неабелевых калибровочных полей. Если принять во внимание, что неабелевы калибровочные поля — основная составляющая Стандартной

Модели, которая описывает все фундаментальные взаимодействия, кроме гравитации, то актуальность такого результата становится очевидной. Более того, были обнаружены математические взаимосвязи статистической физики и физики фазовых переходов.

Континуальные интегралы позволили воспроизвести классические приближения с помощью более простых и интуитивно понятных методов. В нашей работе также будет использован функциональный интеграл по путям основанный на операторе эволюции гармонического осциллятора в открытой квантовой системе со случайной силой. Будет использован формализм взаимодействия, применена вариационная теория возмущений для определения свободного комплексного параметра, а также методы сводящие функциональный интеграл к Гауссовым.

Основная цель настоящей работы – это изучение физических свойств и характеристик гармонического осциллятора в открытой квантовой системе во внешнем потенциальном поле с случайной возбуждающей силой. Для достижения цели были поставлены и решены следующие важные задачи:

- Обзор существующей литературы по современным достижениям в области физики открытых квантовых систем. Обзор и знакомство с математическими методами и подходами, применяемыми в данной области, в частности Келдышевская диаграммная техника для неравновесных систем в представлении функционального интеграла.
- Используя формализм функционального интеграла, получить точное выражение для пропэгатора гармонического осциллятора с учётом внешнего переменного поля для открытой квантовой системы.
- Вычисление временной зависимости амплитуды переходов системы из начального состояния в возбужденные под действием случайной силы при наличии взаимодействия осциллятора с окружением.

- Анализ и оценка полученных результатов.

Выпускная квалификационная работа состоит из введения, двух глав и заключения. Во введении обозначена мотивация и актуальность настоящей работы, а также ставятся её цели и задачи.

В первой главе последовательно приводится математический аппарат формализма фейнмановского функционального интеграла, адаптированного для феноменологического описания открытой квантовой системы. Предлагается и обсуждается оригинальная схема включения взаимодействия системы с окружением.

Во второй главе приводится расчёт амплитуд перехода между состояниями свободного (невозмущённого) квантового гармонического осциллятора при совместном учёте как взаимодействия с окружением, так и внешнего возмущающего поля. Отдельно рассматривается влияние на динамику переходов различный характер внешнего поля (возмущающей силы).

В заключении проводится анализ и оценка полученных результатов.

## Фейнмановский функциональный интеграл в открытой квантовой системе

В данной главе приводится и обсуждается феноменологическая схема учёта влияния окружения на динамику квантовой системы. В качестве основного математического аппарата для описания данного подхода применяется известный Фейнмановский формализм интегралов по путям.

### 1.1. Общие положения квантовой механики

Как известно, динамика замкнутой квантовой системы описывается уравнением Шредингера для волновой функции, которое является полностью детерминистическим уравнением

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \psi = \hat{H} \psi, \quad \psi(t=0) = \psi_0, \quad (1.1)$$

где  $\hat{H}$  – оператор Гамильтона (гамильтониан системы). Напомним, что все операторы в квантовой механике, отвечающие наблюдаемым физическим величинам являются эрмитовыми, и соответственно, их спектр (собственные значения) есть вещественные числа. Это позволяет утверждать, что нормировка волновой функции сохраняется. Так, в координатном базисе, мы можем написать

$$\langle \psi(t) | \psi(t) \rangle = \int_{-\infty}^{\infty} |\psi(x, t)|^2 dx = \text{const} = 1, \quad (1.2)$$

тогда модуль волновой функции  $|\psi(x, t)|^2$  определяет плотность вероятности найти частицу в точке  $x$  в момент времени  $t$ . Среднее значение наблюдаемой физической величины  $A(t)$  в состоянии  $|\psi\rangle$  определяются как

$$A(t) = \langle \psi(t) | \hat{A} | \psi(t) \rangle = \langle 0 | \hat{S}(t_0, t) \hat{A} \hat{S}(t, t_0) | 0 \rangle, \quad (1.3)$$

где  $\hat{S}$  – оператор эволюции системы

$$|\psi(t)\rangle = \hat{S}(t, t_0)|0\rangle, \quad (1.4)$$

который также удовлетворяет уравнению Шредингера (1.1) с начальным условием

$$i\hbar \frac{\partial}{\partial t} \hat{S}(t, t_0) = \hat{H} \hat{S}(t, t_0), \quad \hat{S}(t_0, t_0) = 1. \quad (1.5)$$

Формальное решение уравнения (1.5) имеет вид

$$\hat{S}(t, t_0) = T \exp \left[ -\frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^t \hat{H}(\tau) d\tau \right], \quad t > t_0, \quad (1.6)$$

где символ  $T$  обозначает хронологизированное упорядочение по времени (все операторы, стоящие под символом  $T$  должны располагаться слева направо в порядке возрастания времени).

Ситуация, однако, радикально меняется, если мы рассматриваем незамкнутую систему или статистический ансамбль одинаковых систем. В этом случае, значение физической величины  $A(t)$  необходимо также усреднить по ансамблю систем, с некоторыми весовыми коэффициентами  $w_a$

$$\bar{A}(t) = \sum_a w_a \langle \psi_a(t) | \hat{A}(t) | \psi_a(t) \rangle, \quad \sum_a w_a = 1, \quad (1.7)$$

где индекс  $a$  нумерует ансамбли систем. Разложив состояние  $|\psi_a\rangle$  по базису собственных состояний  $|n\rangle$  системы,

$$|\psi_a\rangle = \sum_n c_n^a |n\rangle, \quad \sum_n |c_n^a|^2 = 1,$$

формулу (1.7) можно переписать в следующем виде

$$\bar{A}(t) = \sum_a w_a \sum_{n,m} c_n^a(t) c_m^{a*}(t) \langle m | \hat{A} | n \rangle = \sum_{n,m} A_{nm} \rho_{mn} = \text{Tr} \hat{A} \hat{\rho}, \quad (1.8)$$

где  $\hat{\rho}$  – оператор матрицы плотности, матричные элементы которого соответственно равны

$$\rho_{nm} = \sum_a w_a c_n^a c_m^{*a}.$$

Отметим здесь также некоторые важные свойства матрицы плотности.

1. Матрица плотности эрмитова  $\hat{\rho}^\dagger = \hat{\rho}$ , что непосредственно следует из её определения;
2. Собственные значения матрицы плотности положительны. Это следует из требования неотрицательности среднего значения оператора с неотрицательными собственными значениями.
3. Диагональные матричные элементы матрицы плотности  $\rho_{nn}$  имеют смысл вероятности нахождения системы в чистом состоянии  $|n\rangle$ . Соответственно, след матрицы плотности равен единицы  $\text{Tr}\hat{\rho} = 1$ .

Временная зависимость матрицы плотности определяется через оператор эволюции следующим образом

$$\hat{\rho}(t) = \hat{S}(t, t_0)\hat{\rho}(t_0)\hat{S}(t_0, t). \quad (1.9)$$

Беря производную по времени от обеих частей в (1.9) и используя уравнение (1.5) приходим к известному уравнению Лиувилля

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho}(t) = -\frac{i}{\hbar} [\hat{H}(t), \hat{\rho}(t)]. \quad (1.10)$$

## 1.2. Декогеренция и диссипативные эффекты в открытой квантовой системе

В предыдущем разделе было получено уравнение Лиувилля для матрицы плотности, описывающее “когерентную” динамику, порождённую гамильтонианом  $\hat{H}$ . Для учёта “диссипативной” динамики, обусловленной взаимодействием системы с окружением используют уравнение Линдблада [74, 75] для матрицы плотности

$$\frac{\partial}{\partial t}\hat{\rho} = \hat{\mathcal{L}}\hat{\rho} = -\frac{i}{\hbar}[\hat{H}, \hat{\rho}] + \sum_{\alpha} \gamma_{\alpha} \left( \hat{L}_{\alpha}\hat{\rho}\hat{L}_{\alpha}^{\dagger} - \frac{1}{2}\{\hat{L}_{\alpha}^{\dagger}\hat{L}_{\alpha}, \hat{\rho}\} \right), \quad (1.11)$$

где оператор  $\hat{\mathcal{L}}$ , действующий на матрицу плотности в литературе называется супероператор Лиувилля, фигурные скобки  $\{\hat{A}, \hat{B}\} = \hat{A}\hat{B} + \hat{B}\hat{A}$  обозначают

антикоммутирует. Второе слагаемое “диссипатор” в уравнении (1.11) описывает диссипативную динамику системы, взаимодействующую с окружением, и определяется так называемыми операторами Линдблада [74, 76], осуществляющих связь системы с тепловой баней (окружением). Константы  $\gamma_\alpha$  определяют интенсивность такого взаимодействия и имеют положительные значения. Отметим, что при этом матрица плотности остаётся положительно определённой.

Для наглядности полезно рассмотреть простую модель квантового осциллятора с гамильтонианом  $\hat{H} = \omega_0 \hat{a}^\dagger \hat{a}$ , где  $\hat{a}^\dagger$ ,  $\hat{a}$  – бозевские операторы рождения и уничтожения, а  $\omega_0$  собственная частота осциллятора, а в качестве операторов Линдблада положим  $\hat{L} = \hat{a}$ . Такая упрощённая модель допускает точное решение [77], в частности, запаздывающая функция Грина

$$G^R(t, t') = -i\theta(t - t') \langle [\hat{a}(t), \hat{a}^\dagger(t')] \rangle$$

в частотном представлении имеет вид [77]

$$G^R(\omega) = \frac{1}{\omega - \omega_0 + i\kappa}, \quad \kappa = \gamma/2,$$

а, соответственно, спектральная функция  $A(\omega)$  определяющая плотность распределения энергии осциллятора, взаимодействующего с окружением размывается, приобретая лоренцеву форму с шириной  $\kappa$

$$A(\omega) = -2\text{Im}G^R(\omega) = \frac{2\kappa}{(\omega - \omega_0)^2 + \kappa^2}. \quad (1.12)$$

Наличие такой мнимой добавки к полюсу  $\omega = \omega_0 - i\kappa$  приводит к конечному времени жизни  $\tau \sim \kappa^{-1}$  возбуждения с энергией  $\omega$ .

В настоящей работе мы предлагаем несколько иной феноменологический подход к учёту диссипативных эффектов. Ниже мы изложим его ключевые положения на примере одномерного гармонического осциллятора, взаимодействующего с окружением и находящегося под действием внешнего переменного поля. Основная идея нашего подхода заключается в следующем. Добавим в



уравнение Шредингера (1.1) дополнительное слагаемое “диссипатор” следующим образом

$$i\hbar \partial_t \psi = \frac{\delta \mathcal{H}_c(\psi^*, \psi, t)}{\delta \psi^*} - i \frac{\delta \mathcal{H}_d(\psi^*, \psi)}{\delta \psi^*}, \quad (1.13)$$

где  $\mathcal{H}_c$  гамильтониан системы без учёта окружения. При этом гамильтониан  $\mathcal{H}_c$  может явно зависеть от времени, посредством, например, внешних полей. В случае гармонического осциллятора во внешнем поле

$$\begin{aligned} \mathcal{H}_c &= \int dx \psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} + U(x, t) \right) \psi, \\ U(x, t) &= \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 - f(t)x. \end{aligned} \quad (1.14)$$

Диссипативный вклад  $\mathcal{H}_d$  представляет из себя эрмитов оператор, который должен обладать следующими свойствами:

1. Оператор  $\mathcal{H}_d$  должен быть положительно определён (собственные значения  $\lambda_n$  положительны ( $\lambda_n \geq 0$ )).
2. Собственные значения оператора  $\mathcal{H}_d$  монотонно возрастают с увеличением кинетической энергии системы. Данное требование отражает тот факт, что с ростом кинетической энергии системы должна возрастать и интенсивность диссипативных процессов между рассматриваемой системой и окружением.

Таким образом, наиболее естественно выбрать в качестве “диссипатора”  $\mathcal{H}_d$  кинетическую энергию

$$\mathcal{H}_d = \gamma \int dx \psi^* \left( -\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2}{dx^2} \right) \psi, \quad (1.15)$$

с некоторым феноменологическим безразмерным параметром  $\gamma$ , смысл которого будет ясен из дальнейшего обсуждения результатов.

Последующее изложение будет проводится в рамках фейнмановского формализма функционального интеграла (также известного, как интеграла по путям).

### 1.3. Фейнмановский функциональный интеграл

В данном разделе мы приведём вывод оператора эволюции для уравнения (1.13) в координатном представлении. В научной литературе эту величину обычно называют пропатором  $K(x_1, t_1; x_0, t_0)$  квантовой частицы, который равен амплитуде перехода частицы из точки  $x_0$  в момент времени  $t_0$  в точку с координатой  $x_1$  в момент времени  $t_1$

$$K(x_f, t; x_i, t_0) = \langle x_f | \hat{S}(t, t_0) | x_i \rangle, \quad (1.16)$$

где  $|x_i\rangle$ ,  $|x_f\rangle$  начальное и конечное состояние в координатном представлении соответственно. Разобьём весь временной интервал  $T = t - t_0$  на  $N$  частей, длительностью  $\delta t = T/N$ . Тогда, используя очевидное свойство оператора эволюции  $\hat{S}(t, t_0) = \hat{S}(t, t_m) \hat{S}(t_m, t_0)$ , перепишем (1.16) в виде

$$K(x_f, t; x_i, t_0) = \langle x_f | \hat{S}(t_N, t_{N-1}) \dots \hat{S}(t_2, t_1) \hat{S}(t_1, t_0) | x_i \rangle \quad (1.17)$$

и вставим между каждой парой соседних операторов  $\hat{S}$  операторную единицу

$$\begin{aligned} \hat{1} &= \int_{-\infty}^{\infty} dx |x\rangle \langle x|, \quad K(x_f, t; x_i, t_0) = \\ &= \int \int_{-\infty}^{\infty} \prod_i dx_i \langle x_f | \hat{S}(t_N, t_{N-1}) | x_{N-1} \rangle \dots \langle x_2 | \hat{S}(t_2, t_1) | x_1 \rangle \langle x_1 | \hat{S}(t_1, t_0) | x_i \rangle \end{aligned} \quad (1.18)$$

и рассмотрим отдельный матричный элемент

$$\begin{aligned} \langle x_{i+1} | \hat{S}(t_{i+1}, t_i) | x_i \rangle &\approx \langle x_{i+1} | 1 - \frac{i\delta t}{\hbar} \hat{H}_\gamma(\hat{p}, \hat{x}, t_i) | x_i \rangle \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \langle x_{i+1} | p \rangle \langle p | x_i \rangle \left( 1 - \frac{i\delta t}{\hbar} H_\gamma(p, x, t_i) \right) \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dp}{2\pi} \exp \left\{ \frac{i\delta t}{\hbar} \left( \frac{p(x_{i+1} - x_i)}{\delta t} - H_\gamma(p, x, t_i) \right) \right\}. \end{aligned} \quad (1.19)$$

Напомним, что гамильтониан  $H_\gamma$  с учётом диссипативного вклада имеет следующий вид

$$H_\gamma(p, x, t) = \frac{p^2}{2m} (1 - i\gamma) + U(x, t).$$

Далее, беря предел  $\delta t \rightarrow 0$ ,  $\delta t N \rightarrow T$  приходим к функциональному интегралу

$$K(x_1, t_1; x_0, t_0) = \int \mathcal{D}[p(t)] \int \mathcal{D}[x(t)] \exp \left\{ \frac{i}{\hbar} \int_{t_0}^{t_1} dt (p\dot{x} - H_\gamma(p, x, t)) \right\}, \quad (1.20)$$

с граничными условиями  $x(t_0) = x_0$ ,  $x(t_1) = x_1$ . Поскольку функциональный интеграл (1.20) является гаусовым относительно импульса  $p(t)$  по этой переменной можно точно интегрировать и в результате мы получим следующее выражение для пропэгатора

$$K(x_1, t_1, x_0, t_0) = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t_1)=x_1} \mathcal{D}[x(t)] e^{iS/\hbar}, \quad (1.21)$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{m_\gamma}{2} \dot{x}^2 - U(x, t) \right), \quad m_\gamma = \frac{m}{1 - i\gamma}.$$

Таким образом мы получили, в рамках нашего феноменологического подхода, пропэгатор квантовой частицы с учётом диссипативных эффектов. При этом “эффективная” масса частицы стала комплексной, что, как мы увидим далее, приводит к затуханию амплитуд переходов между различными состояниями системы. Амплитуды перехода из начального состояния  $|n\rangle$  в момент времени  $t_0$  в конечное состояние  $|m\rangle$  в момент времени  $t_1$  определяется через пропэгатор следующим образом

$$A_{mn}(t_1, t_0) = \iint_{-\infty}^{\infty} dx_0 dx_1 \langle m|x_1 \rangle \langle x_1|K(x_1, t_1; x_0, t_0)|x_0 \rangle \langle x_0|n \rangle. \quad (1.22)$$

Вероятность же  $P_{mn}$  такого перехода определяется квадратом модуля амплитуды перехода  $P_{mn} = |A_{mn}|^2$ . Временная зависимость вероятности переходов несёт в себе важную информацию о динамике системы. Нашей последующей целью будет нахождение и исследование их временной эволюции для гармонического осциллятора в случайном внешнем поле с учётом диссипационных эффектов.

## Амплитуды переходов осциллятора в случайном поле в открытой квантовой системе

В данной главе, в рамках развитой теории, мы последовательно вычисляем амплитуды переходов из основного состояния свободного осциллятора в возбуждённые состояния под влиянием внешнего переменного поля. Отдельно рассматривается случай монохроматического взаимодействия  $f(t) \sim \sin(\omega t + \delta)$  со случайной фазой  $\delta$ .

### 2.1. Пропогатор для осциллятора во внешнем поле

В предыдущей главе нами было получено общее выражение для пропогатора квантовой частицы с учётом диссипативных процессов в формализме функционального интеграла

$$K(x_1, t_1, x_0, t_0) = \int_{x(t_0)=x_0}^{x(t_1)=x_1} \mathcal{D}[x(t)] e^{iS/\hbar}, \quad (2.1)$$

$$S = \int_{t_0}^{t_1} dt \left( \frac{m_\gamma}{2} \dot{x}^2 - U(x, t) \right), \quad m_\gamma = \frac{m}{1 - i\gamma}.$$

Для квантового осциллятора находящегося под действием внешнего поля  $f(t)$  (в качестве примера, это может быть внешнее переменное электрическое поле  $f(t) = eE(t)$ ) потенциальная энергия будет иметь вид

$$U(x, t) = \frac{m\omega_0^2}{2} x^2 - f(t)x. \quad (2.2)$$

Нашей целью сейчас будет нахождение явного вида пропогатора  $K$ . Для квадратичного действия, такая процедура может быть выполнена точно. Произведём последовательно все вычисления в несколько этапов. Сделаем сдвиг переменной

интегрирования следующим образом  $x(t) = x_{\text{cl}}(t) + \eta(t)$ , где заданная функция  $x_{\text{cl}}(t)$  удовлетворяет уравнению Эйлера-Лагранжа для свободного осциллятора с соответствующими граничным условиям

$$m_\gamma \ddot{x}_{\text{cl}} + m\omega_0^2 x_{\text{cl}} = f(t), \quad x_{\text{cl}}(t_0) = x_0, \quad x_{\text{cl}}(t_1) = x_1. \quad (2.3)$$

Общее (однородное) решение уравнения (2.3)  $x_{\text{cl}}^0(t)$  с учётом граничных условий есть

$$x_{\text{cl}}^0(t) = x_0 \frac{\sin \Omega(t_1 - t)}{\sin \Omega T} + x_1 \frac{\sin \Omega(t - t_0)}{\sin \Omega T}, \quad (2.4)$$

$$\Omega = \sqrt{1 - i\gamma} \omega_0, \quad T = t_1 - t_0.$$

Частное решение  $x_{\text{part}}(t)$  уравнения (2.3) можно представить через функцию Грина  $G(t, t')$

$$x_{\text{part}}(t) = \int_{t_0}^{t_1} G(t, t') f(t') dt', \quad (2.5)$$

которая удовлетворяет следующему уравнению

$$(-m_\gamma \partial_t^2 - m\Omega^2) G(t, t') = \delta(t - t'), \quad G(t_0, t') = G(t_1, t') = 0. \quad (2.6)$$

Решение для функции Грина элементарно находится и имеет следующий вид

$$G(t, t') = \begin{cases} (1 - i\gamma) \frac{\sin \Omega(t' - t_0) \sin \Omega(t_1 - t)}{\Omega \sin \Omega T} & t > t' \\ (1 - i\gamma) \frac{\sin \Omega(t_1 - t') \sin \Omega(t - t_0)}{\Omega \sin \Omega T} & t < t'. \end{cases} \quad (2.7)$$

Для новой же функциональной переменной интегрирования  $\eta(t)$  должны выполняться следующие граничные условия  $\eta(t_0) = \eta(t_1) = 0$ . Подставляя теперь (2.4), (2.5) в (2.1) получаем следующее выражение (здесь и далее полагаем  $m = \hbar = 1$ )

$$K(x_1, t_1, x_0, t_0) = A(T) \exp \{i S_{\text{cl}}(x_1, x_0, t_1, t_0)\},$$

$$S_{\text{cl}} = \frac{\Omega}{2(1 - i\gamma) \sin \Omega T} [\cos \Omega T (x_1^2 + x_0^2) - 2x_1 x_0]$$

$$+ \int_{t_0}^{t_1} f(t) x_{\text{cl}}^0(t) dt - \frac{1}{2} \iint_{t_0}^{t_1} f(t') G(t', t'') f(t'') dt' dt'', \quad (2.8)$$

где коэффициент  $A(T)$  стоящий перед экспонентой зависит только от интервала времени  $T = t_1 - t_0$  и представляет из себя гауссов функциональный интеграл

$$A(T) = \int_{\eta(t_0)=0}^{\eta(t_1)=0} \mathcal{D}[\eta(t)] \exp \left\{ \frac{i}{2} \int_{t_0}^{t_1} dt \eta(t) [-m_\gamma \partial_t^2 - m\Omega^2] \eta(t) \right\}. \quad (2.9)$$

Явную временную зависимость для  $A(T)$  можно найти используя следующий приём. Подставим (2.8) в уравнение Шредингера

$$\left[ i\partial_t + (1 - i\gamma) \frac{1}{2} \frac{d^2}{dx^2} - U(x, t) \right] A(t, t_0) \exp \{iS_{\text{cl}}(x, x_0, t, t_0)\} = 0 \quad (2.10)$$

и учитывая, что

$$\frac{\partial S_{\text{cl}}}{\partial x} = p, \quad \frac{\partial S_{\text{cl}}}{\partial t} = -H_\gamma,$$

получаем следующее дифференциальное уравнение для  $A(t)$

$$\frac{\partial A(t)}{\partial t} + (1 - i\gamma) \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial x^2} A(t) = 0, \quad \frac{\partial^2 S_{\text{cl}}}{\partial x^2} = \frac{\Omega}{(1 - i\gamma)} \frac{\cos \Omega t}{\sin \Omega t}, \quad (2.11)$$

решением которого с точностью до константы, есть

$$A(T) = \sqrt{\frac{C}{\sin \Omega T}}.$$

Константу  $C$  можно получить, рассматривая предел  $T \rightarrow 0$ , при котором известно точное выражение для  $A(T)$  (см, например [78]). Приведём здесь лишь окончательное выражение

$$A(T) = \sqrt{\frac{\Omega}{2\pi i(1 - i\gamma) \sin \Omega T}}. \quad (2.12)$$

Таким образом, мы получили явное выражение (2.8), (2.12) для пропэгатора квантового осциллятора во внешнем переменном поле.

## 2.2. Амплитуды перехода под действием внешнего поля

В данном разделе мы получим производящий функционал для получения амплитуд перехода  $A_{mn}$  из начального  $|n\rangle$  в конечное состояние  $|m\rangle$  невозмущённого осциллятора. Как было упомянуто выше, амплитуда такого перехода

определяется через пропатор  $K$  следующим образом

$$A_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \int dx_1 dx_0 \psi_m^*(x_1) K(x_1, t_1, x_0, t_0) \psi_n(x_0), \quad (2.13)$$

где  $\psi_n$  – собственная функция в координатном представлении невозмущённого осциллятора в отсутствии процессов диссипации с окружением. Эти волновые функции выражаются через полиномы Эрмита

$$\psi_n(x) = \frac{1}{\sqrt{2^n n!}} \left( \frac{\omega_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{4}} H_n(\sqrt{\omega_0} x) e^{-\frac{\omega_0}{2} x^2}. \quad (2.14)$$

Тогда, подставляя в (2.13) выражение для пропатора (2.8) и выражения для собственных функций осциллятора (2.14), амплитуда перехода будет иметь вид

$$A_{mn} = A(T) \frac{1}{\sqrt{2^n 2^m n! m!}} \left( \frac{\omega_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \iint f(t') G(t', t'') f(t'') dt' dt'' \right\} \times \iint dx_1 dx_0 H_m(\sqrt{\omega_0} x_1) H_n(\sqrt{\omega_0} x_0) \exp \left\{ -\frac{1}{2} \mathbf{x} \hat{M} \mathbf{x} + \mathbf{J} \mathbf{x} \right\}, \quad (2.15)$$

где мы для краткости ввели следующие обозначения  $\mathbf{x} = (x_0, x_1)^T$ ,  $\mathbf{J} = (J_0, J_1)^T$ , а матрица  $\hat{M}$  и источники  $J_0, J_1$  определяются следующим образом

$$\hat{M} = \begin{pmatrix} \omega_0(1 - i\alpha) & i\beta\omega_0 \\ i\beta\omega_0 & \omega_0(1 - i\alpha) \end{pmatrix}, \quad \alpha = \frac{\cos \Omega T}{\sqrt{1 - i\gamma \sin \Omega T}}, \quad \beta = \frac{1}{\sqrt{1 - i\gamma \sin \Omega T}}, \quad (2.16)$$

$$J_0 = i \int_{t_0}^{t_1} d\tau f(\tau) \frac{\sin \Omega(t_1 - \tau)}{\sin \Omega T}, \quad J_1 = i \int_{t_0}^{t_1} d\tau f(\tau) \frac{\sin \Omega(\tau - t_0)}{\sin \Omega T}.$$

Выражение (2.15) можно ещё упростить, вынеся полиномы Эрмита за знак интеграла, заменив их аргументы соответствующими производными

$$A_{mn} = \frac{A(T)}{\sqrt{2^n 2^m n! m!}} \left( \frac{\omega_0}{\pi} \right)^{\frac{1}{2}} \exp \left\{ -\frac{i}{2} \iint f(t') G(t', t'') f(t'') dt' dt'' \right\} \times \frac{2\pi}{\sqrt{\det \hat{M}}} H_m \left( \sqrt{\omega_0} \frac{\delta}{\delta J_1} \right) H_n \left( \sqrt{\omega_0} \frac{\delta}{\delta J_0} \right) \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{J} \hat{M}^{-1} \mathbf{J} \right\}. \quad (2.17)$$

Учитывая явный вид  $A(T)$  и матрицы  $\hat{M}$  и предполагая также, что  $\gamma \ll 1$  и, следовательно  $\sqrt{1-i\gamma} \approx 1 - i\gamma/2$ , получаем окончательное компактное выражение для амплитуды перехода

$$A_{mn} = e^{-i\frac{\Omega}{2}T} \frac{e^{-\frac{i}{2} \int f G f}}{\sqrt{2^n 2^m n! m!}} H_m \left( \sqrt{\omega_0} \frac{\delta}{\delta J_1} \right) H_n \left( \sqrt{\omega_0} \frac{\delta}{\delta J_0} \right) e^{\frac{1}{2} \mathbf{J} \hat{M}^{-1} \mathbf{J}}. \quad (2.18)$$

Здесь обратная матрица  $\hat{M}^{-1}$  имеет простой вид

$$\hat{M}^{-1} = \frac{1}{2\omega_0} \left\{ \left( 1 + \frac{\gamma}{2} e^{-i\Omega T} \sin \Omega T \right) \hat{\sigma}_0 + e^{-i\Omega T} \hat{\sigma}_1 \right\}, \quad (2.19)$$

где  $\hat{\sigma}_0$  и  $\hat{\sigma}_1$  единичная и первая матрицы Паули, соответственно.

### 2.3. Время декогеренции квантового состояния осциллятора

В данном разделе рассмотрим процессы декогеренции квантового состояния в отсутствии внешней возмущающей силы и обусловленные исключительно взаимодействием системы с окружением. При таких необратимых диссипативных процессах, вероятность  $P_n$  того, что система за время  $T$  останется в начальном состоянии  $|n\rangle$  определяется как

$$P_n(t) = |A_{nn}(t)|^2.$$

С другой стороны, амплитуда  $A_{nn}$  в отсутствии внешней силы имеет вид

$$A_{nn} = \frac{e^{-i\Omega t/2}}{2^n n!} H_n \left( \sqrt{\omega_0} \frac{\delta}{\delta J_1} \right) H_n \left( \sqrt{\omega_0} \frac{\delta}{\delta J_0} \right) \exp \left\{ \frac{1}{2} \mathbf{J} \hat{M}^{-1} \mathbf{J} \right\} \Big|_{J_0, J_1=0} \quad (2.20)$$

и может быть посчитана аналитически точно

$$A_{nn}(t) = e^{-i(n+\frac{1}{2})\Omega t} \approx e^{-i(n+\frac{1}{2})\omega_0 t} \times e^{-(n+\frac{1}{2})\omega_0 \gamma t/2}. \quad (2.21)$$

Соответствующая вероятность  $P_n(t)$  будет экспоненциально затухать во времени по экспоненциальному закону

$$P_n(t) = e^{-t/\tau_d} = e^{-(n+\frac{1}{2})\omega_0 \gamma t}, \quad (2.22)$$



где характерное время декогеренции определяется как

$$\tau_d = \frac{1}{(n + 1/2)\omega_0\gamma}. \quad (2.23)$$

Таким образом, важное соотношение (2.23) устанавливает связь между феноменологическим параметром  $\gamma$  и временем декогеренции квантового состояния гармонического осциллятора. Также стоит отметить, что время декогеренции  $\tau_d$  обратно пропорционально энергии начального состояния  $E_n = \omega_0(n + 1/2)$  осциллятора.

Приведём здесь также амплитуды перехода из основного состояния в первые четыре возбуждённые состояния

$$A_{10} = 0, \quad A_{20} = \frac{\gamma}{2^{\frac{3}{2}}} e^{-i\frac{3}{2}\Omega t} \sin \Omega t, \quad A_{30} = 0, \quad A_{40} = \frac{\sqrt{3}\gamma^2}{2^{\frac{5}{2}}} e^{-i\frac{5}{2}\Omega t} \sin^2 \Omega t. \quad (2.24)$$

Поскольку  $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - i\gamma} \approx \omega_0(1 - i\gamma/2)$  комплексная величина, здесь происходит аналогичное экспоненциальное затухание амплитуд переходов, Второе, на что стоит обратить внимание, это то, что даже в отсутствии внешнего поля оказываются возможными спонтанные переходы между состояниями имеющими одинаковую чётность относительно квантовых чисел  $n$  и  $m$ .

## 2.4. Монохроматическое возмущение со случайной фазой

Рассмотрим здесь влияние на временную зависимость амплитуды перехода  $A_{mn}(t)$  монохроматического возмущения с заданной частотой  $\omega$  и случайной фазой  $\delta$

$$f(t) = f_0 \sin(\omega t + \delta).$$

Нас будет интересовать усреднённое значение вероятности переходов между начальным и конечным состояниями т.е.

$$\langle P_{mn}(t) \rangle = \int_0^{2\pi} \frac{d\delta}{2\pi} |A_{mn}(t, \delta)|^2. \quad (2.25)$$

Ниже представлены численные результаты расчётов для усреднённой вероятности  $\langle P_0(t) \rangle$  нахождения системы в основном состоянии под действием монохроматического возмущения. Так, на рис. 2.1 и 2.2 приведена зависимость вероятности  $\langle P_0(t) \rangle$  для когерентной динамики, при отсутствии взаимодействия с окружением ( $\gamma = 0$ ) и случай учитывающий необратимые диссипативные процессы с феноменологическим параметром  $\gamma = 0.1$  для различных значений частот  $\omega$  вынуждающей внешней силы. Чёрная кривая на всех приведённых ниже графиках соответствует случаю отсутствия внешней силы но с учётом влияния окружения. Разумеется, для полностью замкнутой системы квантового осциллятора ( $\gamma = 0$ ) и в отсутствии внешнего возмущения,  $\langle P_0(t) \rangle$  не зависело бы от времени и, соответственно, в этом случае  $\langle P_0(t) \rangle = 1$ .

Для наглядности, графики на рис. 2.1, 2.2 приведены в порядке возрастания частоты  $\omega$  вынуждающей силы, при этом рис. 2.1(a) соответствует случаю резонанса, когда  $\omega = \omega_0$ . Хорошо видно, что в этом случае обе зависимости быстро спадают до нуля при значении  $\omega_0 t = 2\pi$ , т.е. за один полный период осциллятора. Такое поведение обусловлено тем, что при резонансе амплитуда колебаний частицы резко возрастает, а следовательно, возрастает и полная механическая энергия, что приводит к быстрым переходам квантовой частицы с основного уровня на всё более высокие возбуждённые состояния. В результате вероятность того, что частица в режиме резонанса окажется в основном состоянии, отвечающем минимальной энергии, быстро падает до нуля. При этом на таком коротком временном масштабе, как один период колебаний осциллятора не успевают существенно сказаться процессы взаимодействия системы с окружением, и обе зависимости для когерентной и диссипативной динамики практически совпадают. С увеличением частоты вынуждающей силы рис. 2.1(b),(c) наблюдается возникновение периодичности в поведении вероятности  $\langle P_0(t) \rangle$  для когерентной динамики ( $\gamma = 0$ ). Так, для частоты  $\omega = \frac{5}{4}\omega_0$  период для  $\langle P_0(t) \rangle$  составляет  $T_0 = 8\pi/\omega_0$ , а для частоты  $\omega = \frac{3}{2}\omega_0$  период оказывается в два раза больше  $T_0 = 4\pi/\omega_0$ . Пока период  $T_0$  сравнительно большой, частица “успевает”

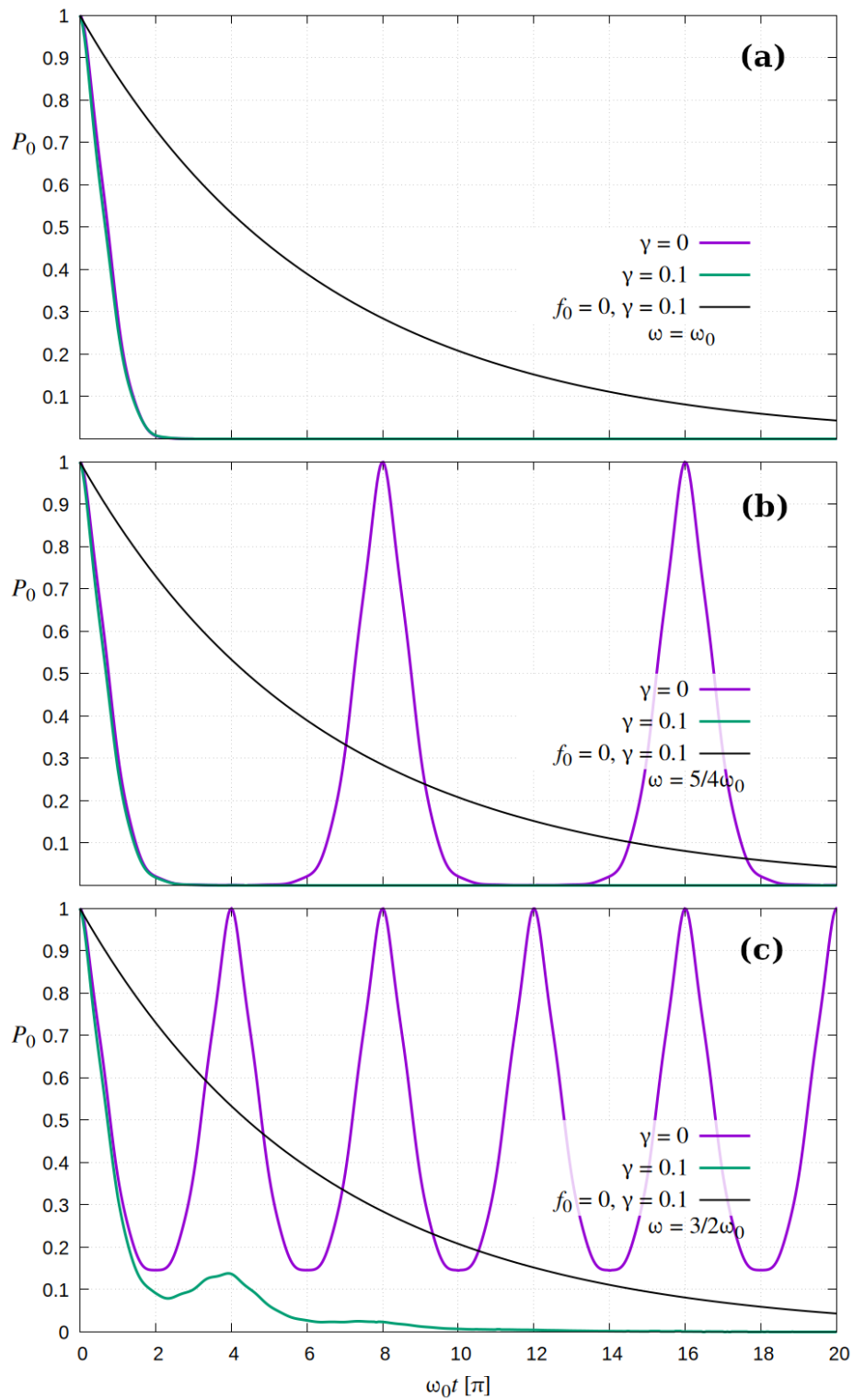


Рис. 2.1. Временная зависимость вероятности нахождения системы в основном состоянии для случая когерентной динамики  $\gamma = 0$  и диссипативной с  $\gamma = 0.1$  для трёх различных частот вынуждающей силы: (а) случай резонанса  $\omega = \omega_0$ ; (б)  $\omega = \frac{5}{4}\omega_0$ ; (с)  $\omega = \frac{3}{2}\omega_0$ . Чёрная кривая на графиках соответствует предельному случаю, когда внешняя возмущающая сила отсутствует.

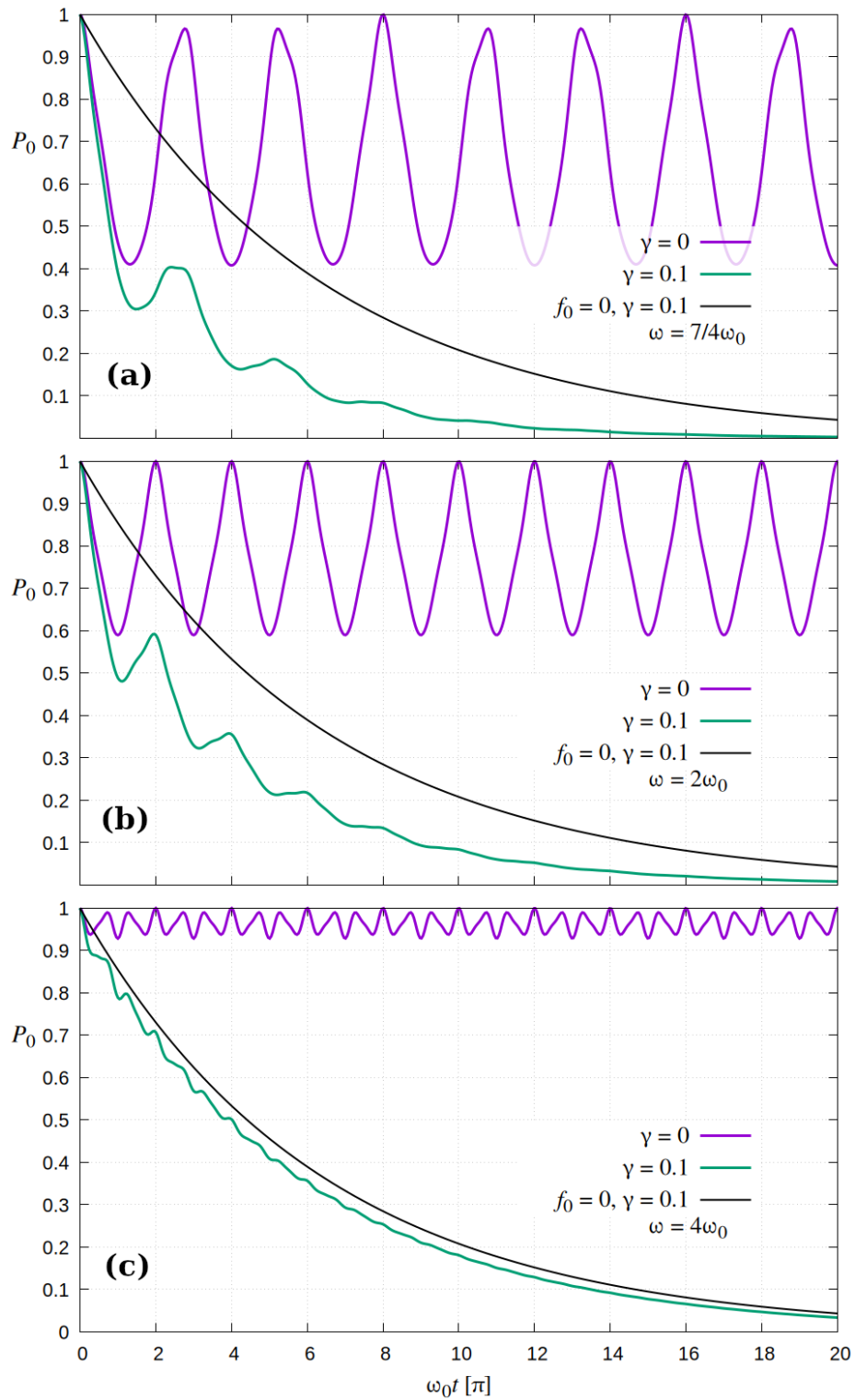


Рис. 2.2. Временная зависимость вероятности нахождения системы в основном состоянии для случая когерентной динамики  $\gamma = 0$  и диссипативной с  $\gamma = 0.1$  для трёх различных частот вынуждающей силы: (a)  $\omega = \frac{7}{4}\omega_0$ ; (b)  $\omega = 2\omega_0$ ; (c)  $\omega = 4\omega_0$ . Чёрная кривая на графиках соответствует предельному случаю, когда внешняя возмущающая сила отсутствует.

побывать в более высоких возбуждённых состояниях, а как мы выяснили ранее, время декогеренции  $\tau_d$  уменьшается с возрастанием энергии уровня  $E_n$  как

$\tau_d \sim 1/E_n$ , что приводит к быстрому затуханию вероятности  $\langle P_0 \rangle$  со временем, что хорошо видно на графиках 2.1. При увеличении частоты вынуждающей силы, временной интервал между максимумами в зависимости вероятности обнаружить систему в основном состоянии, для когерентного случая сокращается, совместно с уменьшением и амплитуды изменения  $\langle P_0(t) \rangle$ , рис. 2.2(a)-(c) соответственно. Это приводит к тому, что по мере отдаления от резонанса, когда  $|\omega - \omega_0| \ll \omega_0$  амплитуда вынужденных колебаний уменьшается и система большую часть времени проводит в своём основном состоянии, для которого время декогеренции максимально. В результате мы можем наблюдать хорошо выраженное диссипативное поведение  $\langle P_0(t) \rangle$ , которое с увеличением частоты вынуждающей силы всё более приближается к предельному случаю, когда внешнее возмущение вообще отсутствует. Так, на рис. 2.2(c) хорошо видно, что при значении частоты внешней силы  $\omega = 4\omega_0$  зависимость  $\langle P_0(t) \rangle$  при  $\gamma = 0.1$  слабо отличается от предельного случая, которому соответствует чёрная кривая. В случае с когерентной динамикой, наблюдается постепенный переход  $\langle P_0(t) \rangle$  к постоянной величине  $\langle P_0(t) \rangle = 1$ .

## Заключение

Основной целью данной работы было изучение диссипативной динамики гармонического осциллятора в открытой квантовой системе во внешнем случайном поле. Была предложена простая феноменологическая модель для описания влияния квантового шума, обусловленного взаимодействием осциллятора с окружением. На основе данной модели были получены следующие важные результаты и выводы

1. Получено явное выражение для времени декогеренции  $\tau_d$  системы для различных начальных состояний гармонического осциллятора. Установлена связь времени декогеренции с феноменологическим параметром модели.
2. Получено общее выражение для амплитуд переходов между начальным и конечным состояниями осциллятора при наличии внешней возмущающей силы и с учётом взаимодействия с окружением.
3. Получены численные зависимости усреднённой по случайной фазе вероятности  $\langle P_0(t) \rangle$  нахождения системы в основном состоянии, при различных режимах внешнего возмущения.

Таким образом, предложенная модель основанная на редукции, “выбрасывании” из описания степеней свободы окружения, описывается в рамках неэрмитовой квантовой механики. Такое описание приводит к затуханию амплитуд переходов во времени на характерном масштабе  $\sim \tau_d$ . При этом время декогеренции оказывается обратно пропорционально энергии начального состояния осциллятора. В рамках предложенной модели возникает отличная от нуля вероятность спонтанных переходов между собственными состояниями гармонического осциллятора даже в отсутствии внешней возмущающей силы.

Автор работы выражает благодарность научному руководителю Авдееву Максиму Викторовичу за консультации и помощь в работе, обеспечивших необходимое понимание материала и корректность выполнения поставленных задач.

## Список литературы

1. A general theoretical framework for decoherence in open and closed systems [Text] / Castagnino, Mario, Fortin, Sebastian, Laura, Roberto, and Lombardi, Olimpia // Classical and Quantum Gravity. — 2008. — jul. — Vol. 25, no. 15. — P. 154002.
2. Русаков, Вячеслав Серафимович. Мёссбауэровская спектроскопия локально неоднородных систем [Текст] / Русаков, Вячеслав Серафимович и Кадыржанов, Кайрат Камалович // Радиоэлектроника. Наносистемы. Информационные технологии. — 2009. — Т. 1, № 1-2. — С. 109–120.
3. Харламов, Сергей Вячеславович. Современная диффузионно-упорядоченная спектроскопия ЯМР в химии супрамолекулярных систем: возможности и ограничения [Текст] / Харламов, Сергей Вячеславович и Латыпов, Шамиль Камильевич // Успехи химии. — 2010. — Т. 79, № 8. — С. 699–719.
4. Рамановская спектроскопия-современная диагностическая технология для изучения и индикации возбудителей инфекций (обзор) [Текст] / Андрюков, БГ, Карпенко, АА, Матосова, ЕВ и Ляпун, ИН // Современные технологии в медицине. — 2019. — Т. 11, № 4. — С. 161–174.
5. Беккер, Юрген. Спектроскопия [Текст]. — [Б. м.] : Litres, 2022.
6. Смирнов, Дмитрий Федорович. Новые явления в квантовой оптике: антигруппировка и субпуассоновская статистика фотонов, сжатые состояния [Текст] / Смирнов, Дмитрий Федорович и Трошин, Александр Сергеевич // Успехи физических наук. — 1987. — Т. 153, № 10. — С. 233–271.
7. Давид, Николаевич Клышко. Квантовая оптика: квантовые, классические и метафизические аспекты [Текст] // Успехи физических наук. — 1994. — Т. 164, № 11. — С. 1187–1214.
8. Скалли, Марлен Орвил. Квантовая оптика [Текст]. — 2003.
9. Менский, МБ. Квантовые измерения и декогеренция. Модели и феноменология [Текст] // М.: физматлит. — 2001.



10. Менский, Михаил Борисович. Диссипация и декогеренция квантовых систем [Текст] // Успехи физических наук. — 2003. — Т. 173, № 11. — С. 1199–1219.
11. Hohenberg, P. C. Theory of dynamic critical phenomena [Text] / Hohenberg, P. C. and Halperin, B. I. // Rev. Mod. Phys. — 1977. — Jul. — Vol. 49. — P. 435–479.
12. Halpin-Healy, Timothy. Kinetic roughening phenomena, stochastic growth, directed polymers and all that. Aspects of multidisciplinary statistical mechanics [Text] / Halpin-Healy, Timothy and Zhang, Yi-Cheng // Physics Reports. — 1995. — Vol. 254, no. 4. — P. 215–414.
13. Jensen, Henrik Jeldtoft. Self-Organized Criticality: Emergent Complex Behavior in Physical and Biological Systems [Text]. Cambridge Lecture Notes in Physics. — [S. l.] : Cambridge University Press, 1998.
14. Hinrichsen, Haye. Non-equilibrium critical phenomena and phase transitions into absorbing states [Text] // Advances in Physics. — 2000. — Vol. 49, no. 7. — P. 815–958. — <https://doi.org/10.1080/00018730050198152>.
15. Täuber, Uwe C. Critical Dynamics: A Field Theory Approach to Equilibrium and Non-Equilibrium Scaling Behavior [Text]. — [S. l.] : Cambridge University Press, 2014.
16. Bloch, Immanuel. Many-body physics with ultracold gases [Text] / Bloch, Immanuel, Dalibard, Jean, and Zwerger, Wilhelm // Rev. Mod. Phys. — 2008. — Jul. — Vol. 80. — P. 885–964.
17. Ultracold atomic gases in optical lattices: mimicking condensed matter physics and beyond [Text] / Lewenstein, Maciej, Sanpera, Anna, Ahufinger, Veronica, Damski, Bogdan, Sen(De), Aditi, and Sen, Ujjwal // Advances in Physics. — 2007. — Vol. 56, no. 2. — P. 243–379.
18. Cirac, J. Goals and opportunities in quantum simulation [Text] / Cirac, J. and Zoller, Peter // Nature Physics. — 2012. — 04. — Vol. 8. — P. 264–266.
19. The Dicke Quantum Phase Transition with a Superfluid Gas in an Optical

- Cavity [Text] / Baumann, Kristian, Guerlin, Christine, Brennecke, Ferdinand, and Esslinger, Tilman // Nature. — 2010. — 04. — Vol. 464. — P. 1301–6.
20. Cold atoms in cavity-generated dynamical optical potentials [Text] / Ritsch, Helmut, Domokos, Peter, Brennecke, Ferdinand, and Esslinger, Tilman // Rev. Mod. Phys. — 2013. — Apr. — Vol. 85. — P. 553–601.
  21. Deng, Hui. Exciton-polariton Bose-Einstein condensation [Text] / Deng, Hui, Haug, Hartmut, and Yamamoto, Yoshihisa // Rev. Mod. Phys. — 2010. — May. — Vol. 82. — P. 1489–1537.
  22. Carusotto, Iacopo. Quantum fluids of light [Text] / Carusotto, Iacopo and Ciuti, Cristiano // Rev. Mod. Phys. — 2013. — Feb. — Vol. 85. — P. 299–366.
  23. Engineered two-dimensional Ising interactions in a trapped-ion quantum simulator with hundreds of spins [Text] / Britton, Joseph, Sawyer, Brian, Keith, Adam, Wang, C.-C, Freericks, James, Uys, Hermann, Biercuk, Michael, and Bollinger, John // Nature. — 2012. — 04. — Vol. 484. — P. 489–92.
  24. Blatt, R. Quantum Simulations with Trapped Ions [Text] / Blatt, R. and Roos, Christian // Nature Physics. — 2012. — 04. — Vol. 8. — P. 277–284.
  25. Poyatos, J. F. Quantum Reservoir Engineering with Laser Cooled Trapped Ions [Text] / Poyatos, J. F., Cirac, J. I., and Zoller, P. // Phys. Rev. Lett. — 1996. — Dec. — Vol. 77. — P. 4728–4731.
  26. Proposal for Teleportation of an Atomic State via Cavity Decay [Text] / Bose, S., Knight, P. L., Plenio, M. B., and Vedral, V. // Phys. Rev. Lett. — 1999. — Dec. — Vol. 83. — P. 5158–5161.
  27. Quantum States and Phases in Driven Open Quantum Systems with Cold Atoms [Text] / Diehl, S., Micheli, A., Kantian, Adrian, Kraus, B., Büchler, H., and Zoller, P. // Nature Physics. — 2008. — 03. — Vol. 4.
  28. Verstraete, Frank. Quantum computation and quantum-state engineering driven by dissipation [Text] / Verstraete, Frank, Wolf, Michael, and Cirac, J. // Nature Physics. — 2009. — 09. — Vol. 5. — P. 633–636.

29. Weimer H Müller M, Lesanovsky I Zoller P. A Rydberg quantum simulator [Text] / Weimer H Müller M, Lesanovsky I Zoller P and P, Büchler H // Nat. Phys. — 2010.
30. Engineered Open Systems and Quantum Simulations with Atoms and Ions [Text] / Müller, Markus, Diehl, Sebastian, Pupillo, Guido, and Zoller, Peter // Advances in Atomic Molecular and Optical Physics. — 2012. — 03. — Vol. 61.
31. Entanglement Generated by Dissipation and Steady State Entanglement of Two Macroscopic Objects [Text] / Krauter, Hanna, Muschik, Christine A., Jensen, Kasper, Wasilewski, Wojciech, Petersen, Jonas M., Cirac, J. Ignacio, and Polzik, Eugene S. // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Aug. — Vol. 107. — P. 080503.
32. An open-system quantum simulator with trapped ions [Text] / Barreiro, Julio, Müller, Markus, Schindler, Philipp, Nigg, Daniel, Monz, Thomas, Chwalla, Michael, Hennrich, Markus, Roos, Christian, Zoller, Peter, and Blatt, R. // Nature. — 2011. — 02. — Vol. 470. — P. 486–91.
33. Quantum simulation of dynamical maps with trapped ions [Text] / Müller, Markus, Schindler, Philipp, Nigg, Daniel, Monz, Thomas, Barreiro, Julio, Martinez, Esteban, Hennrich, Markus, Diehl, Sebastian, Zoller, Peter, and Blatt, R. // Nature Physics. — 2013. — 03. — Vol. 9. — P. 361–367.
34. Eisert, Jens. Noise-driven quantum criticality [Text] / Eisert, Jens and Prosen, Tomaž. — 2010. — 12.
35. Kastoryano, M. J. Dissipative Preparation of Entanglement in Optical Cavities [Text] / Kastoryano, M. J., Reiter, F., and Sørensen, A. S. // Phys. Rev. Lett. — 2011. — Feb. — Vol. 106. — P. 090502.
36. Horstmann, Birger. Noise-driven dynamics and phase transitions in fermionic systems [Text] / Horstmann, Birger, Cirac, J. Ignacio, and Giedke, Géza // Phys. Rev. A. — 2013. — Jan. — Vol. 87. — P. 012108.
37. Höning, M. Critical exponents of steady-state phase transitions in fermionic

- lattice models [Text] / Höning, M., Moos, M., and Fleischhauer, M. // Phys. Rev. A. — 2012. — Jul. — Vol. 86. — P. 013606.
38. Kapit, Eliot. Induced Self-Stabilization in Fractional Quantum Hall States of Light [Text] / Kapit, Eliot, Hafezi, Mohammad, and Simon, Steven H. // Phys. Rev. X. — 2014. — Sep. — Vol. 4. — P. 031039.
39. Lang, Nicolai. Exploring quantum phases by driven dissipation [Text] / Lang, Nicolai and Büchler, Hans Peter // Phys. Rev. A. — 2015. — Jul. — Vol. 92. — P. 012128.
40. Kitaev, Alexei. Anyons in an exactly solved model and beyond [Text] // Annals of Physics. — 2006. — Vol. 321, no. 1. — P. 2–111. — January Special Issue.
41. Hasan, M. Z. Colloquium: Topological insulators [Text] / Hasan, M. Z. and Kane, C. L. // Rev. Mod. Phys. — 2010. — Nov. — Vol. 82. — P. 3045–3067.
42. Qi, Xiao-Liang. Topological insulators and superconductors [Text] / Qi, Xiao-Liang and Zhang, Shou-Cheng // Rev. Mod. Phys. — 2011. — Oct. — Vol. 83. — P. 1057–1110.
43. Topology by Dissipation in Atomic Quantum Wires [Text] / Diehl, Sebastian, Rico Ortega, Enrique, Baranov, Magdalena, and Zoller, Peter // Nature Physics. — 2011. — 05. — Vol. 7.
44. Majorana Modes in Driven-Dissipative Atomic Superfluids with a Zero Chern Number [Text] / Bardyn, C.-E., Baranov, M. A., Rico, E., İmamoğlu, A., Zoller, P., and Diehl, S. // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Sep. — Vol. 109. — P. 130402.
45. Budich, Jan Carl. Dissipative preparation of Chern insulators [Text] / Budich, Jan Carl, Zoller, Peter, and Diehl, Sebastian // Phys. Rev. A. — 2015. — Apr. — Vol. 91. — P. 042117.
46. Sieberer, L M. Keldysh field theory for driven open quantum systems [Text] / Sieberer, L M, Buchhold, M, and Diehl, S // Reports on Progress in Physics. — 2016. — aug. — Vol. 79, no. 9. — P. 096001.

47. Dynamical Critical Phenomena in Driven-Dissipative Systems [Text] / Sieberer, L. M., Huber, S. D., Altman, E., and Diehl, S. // Phys. Rev. Lett. — 2013. — May. — Vol. 110. — P. 195301.
48. Kardar, Mehran. Dynamic Scaling of Growing Interfaces [Text] / Kardar, Mehran, Parisi, Giorgio, and Zhang, Yi-Cheng // Phys. Rev. Lett. — 1986. — Mar. — Vol. 56. — P. 889–892.
49. Cai, Zi. Algebraic versus Exponential Decoherence in Dissipative Many-Particle Systems [Text] / Cai, Zi and Barthel, Thomas // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Oct. — Vol. 111. — P. 150403.
50. Interaction-Induced Impeding of Decoherence and Anomalous Diffusion [Text] / Poletti, Dario, Bernier, Jean-Sébastien, Georges, Antoine, and Kolath, Corinna // Phys. Rev. Lett. — 2012. — Jul. — Vol. 109. — P. 045302.
51. Emergence of Glasslike Dynamics for Dissipative and Strongly Interacting Bosons [Text] / Poletti, Dario, Barmettler, Peter, Georges, Antoine, and Kolath, Corinna // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Nov. — Vol. 111. — P. 195301.
52. Lesanovsky, Igor. Kinetic Constraints, Hierarchical Relaxation, and Onset of Glassiness in Strongly Interacting and Dissipative Rydberg Gases [Text] / Lesanovsky, Igor and Garrahan, Juan P. // Phys. Rev. Lett. — 2013. — Nov. — Vol. 111. — P. 215305.
53. Lesanovsky, Igor. Out-of-equilibrium structures in strongly interacting Rydberg gases with dissipation [Text] / Lesanovsky, Igor and Garrahan, Juan P. // Phys. Rev. A. — 2014. — Jul. — Vol. 90. — P. 011603.
54. Olmos, Beatriz. Out-of-equilibrium evolution of kinetically constrained many-body quantum systems under purely dissipative dynamics [Text] / Olmos, Beatriz, Lesanovsky, Igor, and Garrahan, Juan P. // Phys. Rev. E. — 2014. — Oct. — Vol. 90. — P. 042147.
55. Dissipation-Induced  $d$ -Wave Pairing of Fermionic Atoms in an Optical Lattice [Text] / Diehl, S., Yi, W., Daley, A. J., and Zoller, P. // Phys. Rev. Lett. — 2010. — Nov. — Vol. 105. — P. 227001.

56. Daley, Andrew J. Quantum trajectories and open many-body quantum systems [Text] // *Advances in Physics*. — 2014. — Vol. 63, no. 2. — P. 77–149.
57. Dalibard, Jean. Wave-function approach to dissipative processes in quantum optics [Text] / Dalibard, Jean, Castin, Yvan, and Mølmer, Klaus // *Phys. Rev. Lett.* — 1992. — Feb. — Vol. 68. — P. 580–583.
58. Plenio, M. B. The quantum-jump approach to dissipative dynamics in quantum optics [Text] / Plenio, M. B. and Knight, P. L. // *Rev. Mod. Phys.* — 1998. — Jan. — Vol. 70. — P. 101–144.
59. Ottinger, Hans Christian. References [Text] // *A Philosophical Approach to Quantum Field Theory*. — [S. l.] : Cambridge University Press, 2018. — P. 243–250.
60. Breuer, Heinz-Peter. *The Theory of Open Quantum Systems* [Text] / Breuer, Heinz-Peter and Petruccione, Francesco. — [S. l. : s. n.], 2006. — 01. — ISBN: 9780199213900.
61. Carusotto, Iacopo. Spontaneous microcavity-polariton coherence across the parametric threshold: Quantum Monte Carlo studies [Text] / Carusotto, Iacopo and Ciuti, Cristiano // *Phys. Rev. B*. — 2005. — Sep. — Vol. 72. — P. 125335.
62. Goldenfeld, Nigel D. *Lectures On Phase Transitions And The Renormalization Group* [Text]. *Frontiers in physics*. — [S. l.] : Westview Press, 1992. — ISBN: 9780201554090.
63. Cardy, John. *Scaling and Renormalization in Statistical Physics* [Text]. *Cambridge Lecture Notes in Physics*. — [S. l.] : Cambridge University Press, 1996.
64. Zinn-Justin, Jean. *Quantum Field Theory and Critical Phenomena* [Text]. — [S. l.] : Clarendon Press, Oxford, 2002. — Vol. 113 of *International Series of Monographs on Physics*. — 4th Edition.
65. Emergence of spatially extended pair coherence through incoherent local environmental coupling [Text] / Bernier, Jean-Sébastien, Barmettler, Peter, Poletti, Dario, and Kollath, Corinna // *Phys. Rev. A*. — 2013. — Jun. —

Vol. 87. — P. 063608.

66. Bonnes, Lars. Dynamical and steady-state properties of a Bose-Hubbard chain with bond dissipation: A study based on matrix product operators [Text] / Bonnes, Lars, Charrier, Daniel, and Läuchli, Andreas M. // Phys. Rev. A. — 2014. — Sep. — Vol. 90. — P. 033612.
67. Bonnes, Lars. Superoperators vs. Trajectories for Matrix Product State Simulations of Open Quantum System: A Case Study [Text]. — 2014. — 1411.4831.
68. Lindblad, Göran. Brownian motion of a quantum harmonic oscillator [Text] // Reports on Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 10, no. 3. — P. 393–406.
69. Schwinger, Julian. Field theory of unstable particles [Text] // Annals of Physics. — 1960. — Vol. 9, no. 2. — P. 169–193.
70. Keldysh, L. V. Diagram technique for nonequilibrium processes [Text] // Zh. Eksp. Teor. Fiz. — 1964. — Vol. 47. — P. 1515–1527.
71. Mahanthappa, Kalyana T. Multiple Production of Photons in Quantum Electrodynamics [Text] // Phys. Rev. — 1962. — Apr. — Vol. 126. — P. 329–340.
72. Bakshi, Pradip M. Expectation value formalism in quantum field theory. 1. [Text] / Bakshi, Pradip M. and Mahanthappa, Kalyana T. // J. Math. Phys. — 1963. — Vol. 4. — P. 1–11.
73. Bakshi, Pradip M. Expectation value formalism in quantum field theory. 2. [Text] / Bakshi, Pradip M. and Mahanthappa, Kalyana T. // J. Math. Phys. — 1963. — Vol. 4. — P. 12–16.
74. Lindblad, Goran. On the generators of quantum dynamical semigroups [Text] // Communications in Mathematical Physics. — 1976. — Vol. 48. — P. 119–130.
75. Breuer, Heinz-Peter. The theory of open quantum systems [Text] / Breuer, Heinz-Peter, Petruccione, Francesco, [et al.]. — [S. l.] : Oxford University Press on Demand, 2002.
76. Kossakowski, Andrzej. On quantum statistical mechanics of non-Hamiltonian

- systems [Text] // Reports on Mathematical Physics. — 1972. — Vol. 3, no. 4. — P. 247–274.
77. Sieberer, Lukas M. Keldysh field theory for driven open quantum systems [Text] / Sieberer, Lukas M, Buchhold, Michael, and Diehl, Sebastian // Reports on Progress in Physics. — 2016. — Vol. 79, no. 9. — P. 096001.
78. Фейнман, Р. Квантовая механика и интегралы по траекториям [Текст]. — [Б. м.] : Рипол Классик, 2013.