

**КАЗАНСКИЙ ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ**  
**ИНСТИТУТ ФИЗИКИ**  
*Кафедра радиоэлектроники*

**Г.Г. Куштанова**

**Математическое моделирование геофизических  
процессов**

**Учебно-методическое пособие**

**Казань – 2015**

**УДК 519. 63**

*Принято на заседании кафедры радиоэлектроники  
Протокол № 4 от 23 января 2015 года  
Утверждено на методической комиссии института физики  
протокол № 11 от 12 марта 2015 года*

*Рецензент*

В.н.с. подземной гидродинамики ИММ КазНЦ РАН д. т.н., доцент Шамсиев М.Н.

**Куштанова Г.Г. Математическое моделирование геофизических процессов.** Учебное пособие. Казань, 2015.– 20 с.

Пособие соответствует государственному образовательному стандарту дисциплины «Механика жидкости и газа» направления бакалаврской и магистерской подготовки «Радиофизические методы по областям применения»

Изложены основы метода конечных разностей применительно к уравнению теплопроводности. Сформулированы фундаментальные понятия теории разностных схем. Приведены способы построения и приемы исследования некоторых разностных схем. Рассматриваются методы аппроксимации конвективного члена. Предназначено для студентов и аспирантов, изучающих методы численного решения задач механики жидкости и газа.

© Куштанова Г.Г., 2015  
© Казанский университет, 2015

## Оглавление

Методы дискретизации уравнений.....	4
Дискретизация по пространству.....	4
Дискретизация по времени.....	6
Интегро-интерполяционный метод.....	8
Интегро-интерполяционный метод для обыкновенного дифференциального уравнения.....	8
Интегро-интерполяционный метод для уравнения типа теплопроводности.....	8
Метод прогонки.....	9
Погрешности дискретизации.....	10
Анализ устойчивости.....	11
Типы сеток.....	12
Аппроксимация граничных условий.....	13
Дискретизация граничных условий интегро-интерполяционным способом.....	15
Уравнение типа теплопроводности с переменными коэффициентами.....	15
Свойство консервативности.....	16
Схема с разностями против потока.....	18
Свойство транспортности.....	18
Пример.....	19
Литература.....	20

## Введение

Гидродинамические задачи, возникающие при разработке месторождений углеводородов, требующие учета неоднородности коллектора, не-newтоновских свойств нефти, многофазности течения, слишком сложны, чтобы допускать аналитические решения. Моделирование реальных пластов, многопластовых систем, построение постоянного действующих гидродинамических моделей месторождений требуют применение численных методов, позволяющих получать приближенные решения соответствующих задач. Одним из таких методов является метод конечных разностей.

## Методы дискретизации уравнений.

В результате дискретизации дифференциальных уравнений с помощью метода конечных разностей непрерывное распределение параметров заменяется дискретным. Отыскиваются приближенные значения неизвестной функции для конечного множества точек области определения. Эти точки называются узлами сетки. Дифференциальное уравнение заменяется системой алгебраических уравнений. Эти уравнения называются конечно-разностными, а процедура получения этих уравнений – дискретизацией. Если можно показать, что приближенное решение близко в определенном смысле в узлах сетки к истинному решению исходной задачи, то говорят, что оно аппроксимирует истинное решение. Основные методы дискретизации уравнений – это разложение в ряд Тейлора, интегральный и вариационный методы, что соответствует дифференциальной, интегральной и вариационной формам уравнения сохранения. Рассмотрим основные приемы дискретизации уравнений на примере уравнении однофазной фильтрации:

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} . \quad (1)$$

### Дискретизация по пространству.

Рассмотрим равномерную разностную сетку вдоль оси  $x$ . Обозначим через  $\Delta x_i$  расстояние между узлами.

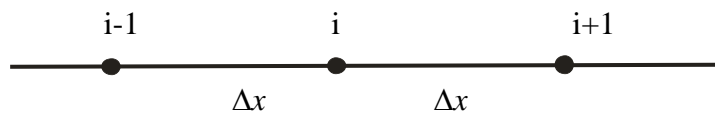


Рис.1. Равномерная разностная сетка вдоль оси  $x$ .

Выразим  $P_{i+1} = P(x_{i+1}, t) = P(x_i + \Delta x_i, t)$  и  $P_{i-1} = P(x_{i-1}, t) = P(x_i - \Delta x_i, t)$ , используя разложение в ряд Тейлора:

$$P_{i+1} = P_i + \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_i (\Delta x_i) + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{2!} + \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^3}{3!} + \dots \quad (2)$$

$$P_{i-1} = P_i - \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_i (\Delta x_i) + \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \Big|_i \frac{(\Delta x_i)^3}{3!} + \dots \quad (3)$$

С помощью этих разложений можно получить несколько аппроксимаций для первой производной в точке  $i$ . Аппроксимация разностью «вперед» следует из выражения (2):

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_i = \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta x_i} + (R_{xf})_i = P_x + (R_{xf})_i, \quad (R_{xf})_i = -\left. \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right|_i \frac{(\Delta x_i)}{2!} - \left. \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \right|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{3!} - \dots \quad (4)$$

Здесь  $(R_{xf})_i$  - локальная погрешность дискретизации или погрешность аппроксимации, соответствующая аппроксимации разностью «вперед».

Аналогично из (3) получим выражение для аппроксимации разностью «назад»

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_i = \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta x_i} + (R_{xu})_i = P_{\bar{x}} + (R_{xu})_i, \quad (R_{xu})_i = \left. \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right|_i \frac{(\Delta x_i)}{2!} - \left. \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \right|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{3!} + \dots \quad (5)$$

В соответствии с выражениями (4) и (5) аппроксимации первой производной разностью «вперед» и «назад» имеют первый порядок точности,  $O(\Delta x_i)$  т.к. погрешности дискретизации имеют порядок  $\Delta x_i$ .

Аппроксимацией первой производной более высокого порядка точности является аппроксимация «центральной» разностью. Вычтем (3) из (2):

$$\left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_i = \frac{P_{i+1} - P_{i-1}}{2\Delta x_i} + (R_{xc})_i, \quad (R_{xc})_i = \left. \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \right|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{3!} - \left. \frac{\partial^5 P}{\partial x^5} \right|_i \frac{(\Delta x_i)^4}{5!} \dots \quad (6)$$

Аппроксимация второго порядка точности,  $O(\Delta x_i^2)$ .

Для аппроксимации второй производной сложим выражения (2) и (3):

$$\left. \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} \right|_i = \frac{P_{i+1} - 2P_i + P_{i-1}}{2\Delta x_i} + (R_{x2})_i = P_{\bar{x}\bar{x}} + (R_{x2})_i, \quad (7)$$

$$(R_{x2})_i = -2 \left. \frac{\partial^3 P}{\partial x^3} \right|_i \frac{(\Delta x_i)^2}{4!} - 2 \left. \frac{\partial^6 P}{\partial x^6} \right|_i \frac{(\Delta x_i)^4}{6!} \dots$$

Подставляя найденные аппроксимации производных в дифференциальные уравнения, получают конечно-разностные аппроксимации уравнений.

Интегральный метод аппроксимации больше отражает физический смысл изучаемого процесса и соответствует интегральной форме уравнений. В отличие от разложения в ряд Тейлора, в этом случае вводится дополнительное понятие «блока» или «ячейки». Вся рассматриваемая область разбивается на такие блоки, в каждом из которых находится по одному узлу. Значения искомой функции определяются в узлах.

Проведем интегрирование по объему блока, площадь поперечного сечения  $S_x$  которого постоянна. Блок для узла  $x_i$  определяется границами  $x_{i-0.5}$  и  $x_{i+0.5}$ .

$$S_x \left[ \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{i+0.5} - \left. \frac{\partial P}{\partial x} \right|_{i-0.5} \right] = S_x \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{1}{\chi} \frac{\partial P}{\partial t} dx \quad (8)$$

Подставляя разложения вида (6), получим

$$S_x \left[ \frac{P_{i+1} - P_i}{\Delta x_i} - \frac{P_i - P_{i-1}}{\Delta x_i} \right] = S_x \int_{x_{i-0.5}}^{x_{i+0.5}} \frac{1}{\chi} \frac{\partial P}{\partial t} dx \quad (9)$$

Если уравнение (9) разделить на объем блока  $S_x \Delta x_i$ , то в левой части получится аппроксимация (7). В уравнение в интегральном виде (9), в отличие от дифференциального представления, входят расходы флюида через границы блока,

поэтому матрица коэффициентов системы линейных уравнений для вычисления  $P$  будет симметричной даже в случае неравномерной разностной сетки. Такое представление, во-первых облегчает решение задачи, а во-вторых, пригодно для расчета материального баланса.

### Дискретизация по времени.

Введем временной шаг  $\Delta t$ . Решение отыскивается только на дискретных временных слоях  $t^0, t^1 = \Delta t, \dots, t^n = n\Delta t, \dots$ . Обозначим приближенное значение искомой функции в точке  $x_i$  в момент времени  $t^n$  через  $P_i^n$ . Производная по времени также может быть аппроксимирована разностью «вперед» либо «назад»:

$$\frac{\partial P_i^n}{\partial t} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} + (R_{f'})_i^n, \quad (R_{f'})_i^n = -\frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \Big|_i^n \frac{(\Delta t)}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial t^3} \Big|_i^n \frac{(\Delta t)^2}{3!} - \dots \quad (10)$$

$$\frac{\partial P_i^{n+1}}{\partial t} = \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t} + (R_{fb})_i^{n+1}, \quad (R_{fb})_i^{n+1} = \frac{\partial^2 P}{\partial t^2} \Big|_i^{n+1} \frac{(\Delta t)}{2!} - \frac{\partial^3 P}{\partial t^3} \Big|_i^{n+1} \frac{(\Delta t)^2}{3!} + \dots \quad (11)$$

Аппроксимации (10)-(11) имеют первый порядок точности,  $O(\Delta t)$  т.к. погрешности дискретизации имеют порядок  $\Delta t$ .

Подстановка выражения (10) в уравнение (1), в котором аппроксимация левой части (7) вычисляется на  $n$ -ом слое по времени, дает уравнение явного метода, или явное уравнение:

$$\frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{\chi} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}; \quad (12)$$

Начальные условия определяют значение искомой функции в начальный момент времени, т.е. при  $n=0$ . Искомая величина в узле  $i$  на новом временном слое  $n+1$  может быть вычислена явно через значения на предыдущем слое:

$$P_i^{n+1} = \chi \frac{\Delta t}{(\Delta x_i)^2} P_{i-1}^n + \left[ 1 - 2\chi \frac{\Delta t}{(\Delta x_i)^2} \right] P_i^n + \chi \frac{\Delta t}{(\Delta x_i)^2} P_{i+1}^n \quad (13)$$

Погрешность аппроксимации явной схемы имеет порядок  $O(\Delta x_i^2) + O(\Delta t)$ .

Для того, чтобы при дискретизации уравнения учесть, каким образом изменяется искомая функция за шаг по времени, можно при аппроксимации левой части использовать средние значения искомой величины за соответствующий интервал:

$$P_i = \frac{1}{\Delta t} \int_t^{t+\Delta t} P_i dt = \theta P_i^{n+1} + (1-\theta) P_i^n \quad (14)$$

Здесь  $0 \leq \theta \leq 1$ , и предполагается, что временной шаг настолько мал, что функция  $P$  монотонная на этом интервале времени. В результате получается смешанная схема, включающая значения как на старом временном слое, так и на новом:

$$(1-\theta) \frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{(\Delta x_i)^2} + \theta \frac{P_{i+1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{\chi} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t}; \quad (15)$$

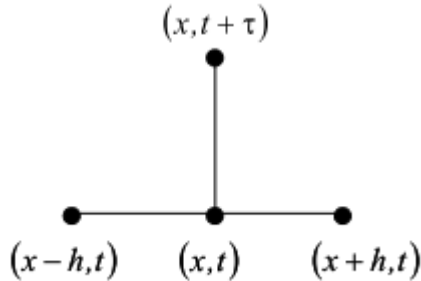
При  $\theta=0$  уравнение (15) превращается в явную схему, при  $\theta=1$  – полностью неявную схему, при  $\theta=0.5$  – схему Кранка-Николсона. Схема Кранка-Николсона представляет собой разновидность неявного метода, т.к. для вычисления неизвестных значений

функции на новом временном слое необходимо решать систему уравнений. При  $\theta=0.5$  схема имеет второй порядок точности и по времени  $O(\Delta x_i^2) + O(\Delta t^2)$ .

Наиболее распространенные разностные схемы для уравнения теплопроводности :

явная схема 
$$\frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{\chi} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t};$$

ее шаблон



неявная схема 
$$\frac{P_{i+1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x_i)^2} = \frac{1}{\chi} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t};$$

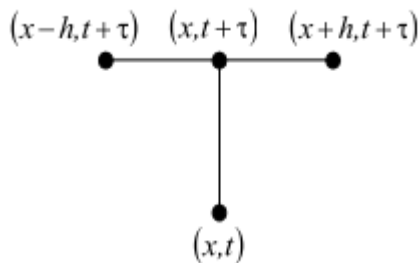
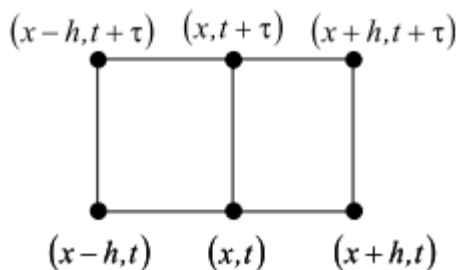


Схема Кранка-Николсона 
$$\frac{P_{i+1}^n - 2P_i^n + P_{i-1}^n}{(\Delta x_i)^2} + \frac{P_{i+1}^{n+1} - 2P_i^{n+1} + P_{i-1}^{n+1}}{(\Delta x_i)^2} = \frac{2}{\chi} \frac{P_i^{n+1} - P_i^n}{\Delta t};$$



Точки, принадлежащие одной гиперплоскости  $t=t_n$ , называют временным слоем.

Часто используемые обозначения:

$$u_t = \frac{u(x, t + \tau) - u(x, t)}{\tau} = \frac{\hat{u} - u}{\tau}$$

$$u(t - \tau) = \check{u}$$

$$u_{xx} = \frac{u(x + h, t) - 2u(x, t) + u(x - h, t)}{\tau}$$

## Интегро-интерполяционный метод

### Интегро-интерполяционный метод для обыкновенного дифференциального уравнения

$$(k(x)u'(x))' - q(x)u'(x) + f(x) = 0, \quad 0 < x < l,$$

$$-k(0)u'(0) + \beta u(0) = \mu_1, \quad u(l) = \mu_2,$$

$$k(x) \geq c_1 > 0, \quad q(x) \geq 0, \quad \beta \geq 0.$$

Уравнение аппроксимируется путем интегрирования от  $x_{i-1/2}$  до  $x_{i+1/2}$ .

$$ku' \Big|_{x_{i+1/2}} - ku' \Big|_{x_{i-1/2}} - u(x) \int q(x) dx + \int f(x) dx = 0; \quad i = 2 \dots$$

Поделим на  $h$ .

$$ku' \Big|_{x_{i+1/2}} = au_{\bar{x}}, \quad a_i = \left( \frac{1}{h} \int_{x_i}^{x_{i+1}} \frac{dx}{k(x)} \right)^{-1};$$

$$(au_{\bar{x}})_{x_i} - d_i u_i + \varphi_i = 0; \quad d_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} q(x) dx; \quad \varphi_i = \frac{1}{h} \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} f(x) dx; \quad i = 2 \dots N;$$

Интегралы берутся приближенно, например по методу прямоугольников в крайних или средних точках.

Для получения граничного условия интегрируем уравнение от 0 до  $h/2$ .

$$ku' \Big|_{h/2} - ku' \Big|_0 - u(x) \int q(x) dx + \int f(x) dx = 0;$$

Выделяем поток в 0 из граничного условия

$$-k(0)u'(0) = \mu_1 - \beta u(0)$$

$$ku' \Big|_{h/2} + \mu_1 - \beta u(0) - u(0)d_0 0,5h + \varphi_0 0,5h = 0$$

Получается на границе 0

$$-ku' \Big|_{h/2} + \tilde{\beta} u(0) = \tilde{\mu}_1;$$

$$\tilde{\mu}_1 = \mu_1 + \varphi_0 0,5h; \quad \tilde{\beta} = \beta + d_0 0,5h$$

На границе 1

$$u_{N+1} = \mu_2.$$

### Интегро-интерполяционный метод для уравнения типа теплопроводности

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \eta \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \quad \int_{t_n}^{t_{n+1}} dt \int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} dx$$

$$\int_{x_{i-1/2}}^{x_{i+1/2}} (u^{n+1} - u^n) dx = \eta \int_{t_n}^{t_{n+1}} \left( \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i+1/2} - \frac{\partial u}{\partial x} \Big|_{i-1/2} \right) dt$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \eta \left( \frac{u_{i+1}^{n+1} - u_i^{n+1}}{h^2} - \frac{u_i^{n+1} - u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \right)$$



$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \eta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} \text{ - неявная схема}$$

В общем виде

$$u_i = \frac{1}{\tau} \int_{t_n}^{t_{n+1}} u_i dt = \theta u_i^{n+1} + (1 - \theta) u_i^n$$

$$\frac{u_i^{n+1} - u_i^n}{\tau} = \eta \left[ \theta \frac{u_{i+1}^{n+1} - 2u_i^{n+1} + u_{i-1}^{n+1}}{h^2} + (1 - \theta) \frac{u_{i+1}^n - 2u_i^n + u_{i-1}^n}{h^2} \right]$$

$\theta = 0$  – явная

$\theta = 1$  – неявная

$\theta = 0.5$  – Кранка-Николсона

### Метод прогонки.

Разностная схема (15) представляет собой частный случай системы линейных алгебраических уравнений

$$Ay = f,$$

С трехдиагональной матрицей  $A = [a_{ij}]$ , т.е. с матрицей, все элементы которой, не лежащие на главной и двух побочных диагоналях, равны нулю  $a_{ij}=0$  при  $j > i+1$  и  $j < i-1$ .

В общем случае системы линейных алгебраических уравнений с трехдиагональной матрицей имеют вид

$$a_j y_{j-1} - c_j y_j + b_j y_{j+1} = -f_j, \quad j = 2, 3, \dots, N \quad (16)$$

$$y_1 = \kappa_1 y_2 + \mu_1, \quad y_{N+1} = \kappa_2 y_N + \mu_2.$$

В матричной форме  $Ay = F$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & -\kappa & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ a_1 & -c_1 & b_1 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_i & -c_i & b_i & \dots & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{N-1} & -c_{N-1} & b_{N-1} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & -\kappa_2 & 1 \end{pmatrix}, \quad \mathbf{F} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ -f_1 \\ -f_2 \\ \dots \\ -f_{N-1} \\ -f_N \\ \mu_2 \end{pmatrix}$$

Для численного решения систем с трехдиагональной матрицей применяется метод прогонки. Приведем вывод расчетных формул метода прогонки. Будем искать решение системы в виде

$$y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = 1, \dots, N, \quad (17)$$

где  $\alpha_{j+1}$ ,  $\beta_{j+1}$  – неизвестные пока коэффициенты. Отсюда найдем

$$y_{j-1} = \alpha_j y_j + \beta_j = \alpha_j (\alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}) + \beta_j = \alpha_j \alpha_{j+1} y_{j+1} + (\alpha_j \beta_{j+1} + \beta_j).$$

Подставляя полученные выражения для  $y_j$  и  $y_{j-1}$  в уравнение (16), приходим к уравнению  $[\alpha_{j+1} (a_j \alpha_j - c_j) + b_j] y_{j+1} + [\beta_{j+1} (a_j \alpha_j - c_j) + \alpha_j \beta_j + f_j] = 0$ .

Последнее уравнение будет выполнено, если коэффициенты  $\alpha_{j+1}$ ,  $\beta_{j+1}$  выбрать такими, чтобы выражения в квадратных скобках обращались в нуль. Для этого достаточно положить

$$\alpha_{j+1} = \frac{b_j}{c_j - a_j \alpha_j}; \quad \beta_{j+1} = \frac{a_j \beta_j + f_j}{c_j - a_j \alpha_j}; \quad j = 2, 3, \dots, N. \quad (18)$$

Соотношения (17) представляют собой рекуррентные формулы для определения прогоночных коэффициентов. Необходимо задать начальные значения  $\alpha_2, \beta_2$ . Они определяются из требования эквивалентности условия  $y_1 = \alpha_2 y_2 + \beta_2$  первому из граничных условий (16). Отсюда получаем  $\alpha_2 = \kappa_1, \beta_2 = \mu_1$ .

Вычисление коэффициентов  $\alpha_{j+1}, \beta_{j+1}$  по формулам (18) называется прямой прогонкой. После того, как все прогоночные коэффициенты найдены, решение системы (16) находится по рекуррентной формуле (17), начиная с  $j=N$ . Для начала счета по этой формуле необходимо знать  $y_{N+1}$ , которое определяется из уравнение

$$y_N = \alpha_{N+1} y_{N+1} + \beta_{N+1}, \quad y_{N+1} = \kappa_2 y_N + \mu_2, \quad \text{и равно} \quad y_{N+1} = \frac{\kappa_2 \beta_{N+1} + \mu_2}{1 - \kappa_2 \alpha_{N+1}}.$$

$$\text{Нахождение } y_j = \alpha_{j+1} y_{j+1} + \beta_{j+1}, \quad j = N, N-1, \dots, 1 \tag{19}$$

называется обратной прогонкой. Изложенный здесь алгоритм решения системы (16) называется методом прогонки.

Метод прогонки можно применять, если знаменатель выражений (18) не обращается в нуль. Доказано [], что для возможности применения метода прогонки достаточно потребовать, чтобы коэффициенты системы (16) удовлетворяли условиям

$$a_j \neq 0, \quad b_j \neq 0, \quad \dots, \quad |c_j| \geq |a_j| + |b_j|, \quad j = 2, \dots, N,$$

$$|\kappa_1| \leq 1, \quad |\kappa_2| < 1.$$

Выполнение условий гарантирует существование и единственность решения системы разностных уравнений (16) и возможность нахождения этого решения методом прогонки. Заметим, что числа  $a_j, b_j, c_j, \kappa_1, \kappa_2$  могут быть комплексными.

### Погрешности дискретизации.

Разностный оператор  $L$  согласованно **аппроксимирует** соответствующий дифференциальный оператор  $A$ , если  $\|R\| \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0, \Delta t \rightarrow 0$ , где  $\|R\|$  норма вектора,  $R = AP - LP$  содержащего компоненты  $R_i = AP_i - LP_i$ . Согласованность – это свойство разностного оператора, а не решения.

**Погрешностью** приближенного решения в узле называется разность между точным решением дифференциального уравнения  $\tilde{P}_i$  и его конечно-разностной аппроксимацией

$$P_i: \quad e_i = \tilde{P}_i - P_i.$$

Разностный оператор **сходится** к дифференциальному оператору, если  $\|e\| \rightarrow 0$  при  $\Delta x \rightarrow 0,$

$\Delta t \rightarrow 0$ . Можно показать, что явная схема сходится условно при  $\frac{\chi \Delta t}{(\Delta x_i)^2} \leq 0.5$ , а неявная

схема сходится безусловно.

Численный алгоритм называется **устойчивым**, если произвольные погрешности, возникающие на некоторой стадии вычислений, при последующих расчетах не возрастают.

Понятие устойчивости важно для нестационарных задач, в которых решение строится на последовательности временных шагов. В этом случае ошибки, возникающие на некотором временном слое, будут влиять на поведение решения на всех последующих временных слоях. Причем это относится как к ошибкам округления, так и погрешностям дискретизации. Численная схема, для которой погрешности, вызванные погрешностями на некотором временном слое, растут во времени, называется неустойчивой.

Пусть приближенное решение  $P_k^n$  вычисляется с ошибкой  $\varepsilon_k^n$ , т.е. определяется

$$\bar{P}_k^n = P_k^n + \varepsilon_k^n. \text{ Тогда численная схема устойчива, если } \left| \frac{\varepsilon_k^{n+1}}{\varepsilon_k^n} \right| \leq 1, \text{ и неустойчива в}$$

противном случае. Исследование схемы (15) показывает, что при  $\theta \geq 0.5$  условие устойчивости выполняется при любых значениях  $\Delta x$  и  $\Delta t$ . Таким образом, неявная схема ( $\theta=1$ ) и схема Кранка-Николса ( $\theta=0.5$ ) являются безусловно устойчивыми. Для явной схемы ( $\theta=0$ ) условие устойчивости совпадает с условием сходимости и имеет вид

$$0 \leq \frac{\chi \Delta t}{(\Delta x)^2} \leq 0.5 \quad (20)$$

Таким образом, понятие устойчивости и сходимости являются взаимосвязанными. Для согласованной аппроксимации линейных систем устойчивость является необходимым и достаточным условием сходимости (теорема Лакса). Это свойство широко используется на практике, поскольку доказать сходимость достаточно сложно, тогда как устойчивость исследуется гораздо более простыми методами.

### Анализ устойчивости.

Наиболее распространенный метод анализа устойчивости был предложен Дж. фон Нейманом в Лос-Аламосе в 1944 г. В этом методе решение модельного уравнения представляется рядом Фурье с конечным числом членов и устойчивость (или неустойчивость) определяется тем, что каждое отдельное колебание затухает (или нарастает).

Рассмотрим явную схему для уравнения типа теплопроводности:

$$\frac{P_j^{n+1} - P_j^n}{\Delta t} = \chi \frac{P_{j+1}^n - 2P_j^n + P_{j-1}^n}{(\Delta x)^2} \quad ; \text{ или}$$

$$P_j^{n+1} = P_j^n + d(P_{j+1}^n - 2P_j^n + P_{j-1}^n) \quad ; \quad d = \chi \Delta t / \Delta x^2.$$

Каждая Фурье-компонента решения записывается в виде  $P_j^n = V^n \exp(ik_x(j\Delta x))$ , где  $V^n$  — амплитуда отдельной компоненты с волновым числом  $k_x$  (длина волны  $A = 2\pi/k_x$ ) на  $n$ -м временном слое и  $i$ -мнимая единица. Пространственная область считается бесконечной).

Если ввести фазовый угол  $\theta = k_x \Delta x$ , то  $P_j^n = V^n \exp(ij\theta)$ . Подставляя соответствующие Фурье-компоненты в разностное уравнение, получаем

$$V^{n+1} e^{ij\theta} = V^n e^{ij\theta} + d(V^n e^{i(j+1)\theta} - 2V^n e^{ij\theta} + V^n e^{i(j-1)\theta}), \text{ после деления на общий множитель}$$

$$V^{n+1} = V^n [1 + d(e^{i\theta} - 2 + e^{-i\theta})]$$

Учитываем  $e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos \theta$ , и определим множитель перехода  $G$  равенством

$$V^{n+1} = G V^n. \text{ Для } G \text{ имеем } G = 1 - 2d(1 - \cos \theta). \text{ Заметим, } G = G(\theta), \text{ т.е. множители}$$

перехода для различных Фурье-компонент различны.

Чтобы решение оставалось ограниченным для всех  $\theta$  должно выполняться условие  $|G| \leq 1$ . Это условие называется критерием устойчивости для уравнения с диффузионным членом.

Учитывая выражение для  $G$ , получаем

$$-1 \leq 1 - 2d(1 - \cos \theta) \leq 1,$$

Которое должно выполняться для всех возможных  $\theta$ . Правое неравенство выполняется

всегда. Левое накладывает на  $d$  условие устойчивости  $d \leq 1/2$  или  $\Delta t \leq \frac{1}{2} \frac{\Delta x^2}{\chi}$ .

Спектральный признак устойчивости разностных схем является наиболее распространенным в силу своей простоты и универсальности. Однако данный метод допускает использование только для однородных уравнений с постоянными коэффициентами без учета краевых условий.

Иначе, подстановка  $u_m^n = \lambda^n \exp(i\alpha m)$  в разностную схему дает соотношение связывающее между собой  $\lambda$  и  $\alpha$ : так называемое характеристическое (дисперсионное) уравнение.

Величина  $\lambda$  - в общем случае комплексная - именуется множителем (коэффициентом) перехода, поскольку  $u_m^{n+1} = \lambda u_m^n$ .

Необходимое условие устойчивости сводится к требованию  $|\lambda| \leq 1$ .

Для явной схемы  $\lambda = 1 - 4\sigma \sin^2(\alpha/2)$ , где  $\sigma = \chi\tau/h^2$ . Схема устойчива при  $\sigma \leq 0.5$

Для неявной схемы  $\lambda = \frac{1}{1 + 4\sigma \sin^2(\alpha/2)}$  и схема абсолютно устойчива (независимо от величины  $\sigma$ ),

Типы сеток.

Рассмотрим два метода построения прямоугольных сеток, которые наиболее широко применяются при моделировании пластов.

При построении блочно-центрированной сетки моделируемая область прежде всего разбивается на сеточные блоки, в общем случае неравномерно. Затем в центрах блоков помещаются узлы. В этом случае отсутствуют узлы на границе области, а узлы, находящиеся в смежных блоках могут иметь различные расстояния до общей грани (рис.2).

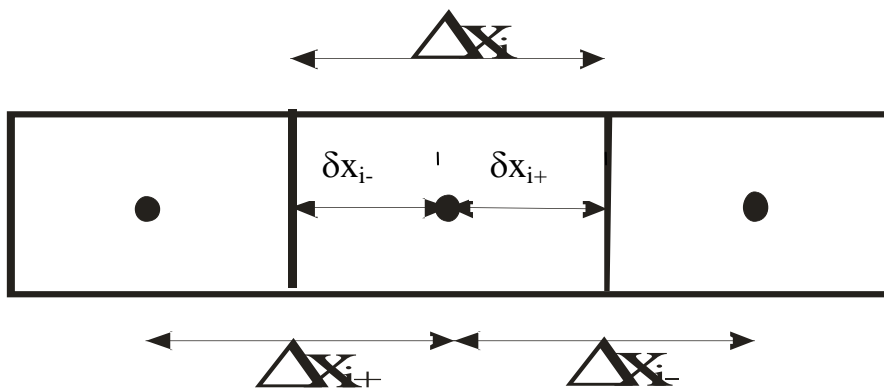


Рис.2. Блочно-центрированная сетка.

Построение сетки с распределенными узлами начинается с размещения узлов, причем первый и последний узлы помещаются на границы области, а остальные – между ними, возможно, неравномерно. Границы сеточных блоков находятся посередине между узлами. В случае, если узлы располагаются на равных расстояниях, размеры первого и последнего блоков оказываются меньше (рис.3).

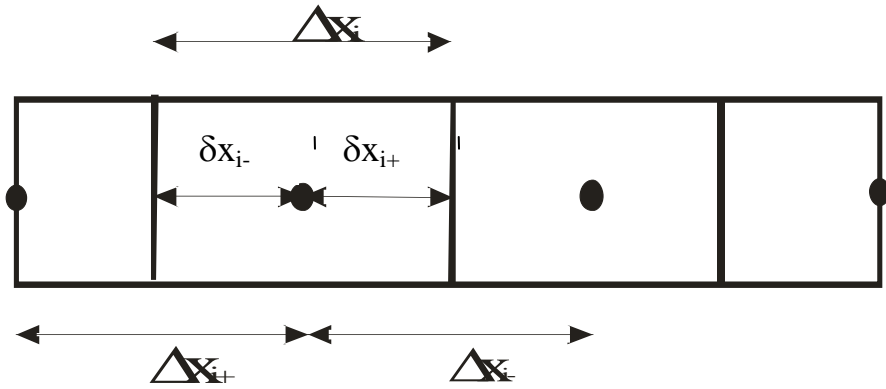


Рис.3. Сетка с распределенными узлами.

Пусть  $\Delta x_i$  – длина  $i$ -го блока,  $\Delta x_{i+}$  и  $\Delta x_{i-}$  – расстояния от узла  $i$  до узла  $i+1$  и  $i-1$  соответственно,  $\delta x_{i+}$  и  $\delta x_{i-}$  – расстояния от узла  $i$  до соответствующих границ блока,  $\Delta x_i = \delta x_{i+} + \delta x_{i-}$

Тогда для блочно-центрированной сетки имеем:

$$\delta x_{i+} = \delta x_{i-} = 0.5\Delta x_i, \quad \Delta x_{i\pm} = 0.5(\Delta x_i + \Delta x_{i\pm 1}),$$

для сетки с распределенными узлами:

$$\delta x_{i+} = \delta x_{i+1-}, \quad \delta x_{i-} = \delta x_{i-1+}, \quad \Delta x_i = 0.5(\Delta x_{i+} + \Delta x_{i-}).$$

При использовании блочно-центрированной сетки минимизируется ошибка дискретизации аккумулирующим членом (производной по времени) в уравнении сохранения массы, т.к. центр блока совпадает с его центром масс. Применение сетки с распределенными узлами позволяет наилучшим образом аппроксимировать потоковые члены (производная по направлению), т.к. граница соседних блоков находится посередине между узлами сетки.

### Аппроксимация граничных условий.

Для записи разностных уравнений в нерегулярных узлах (на границе или вблизи нее) необходимо привлекать граничные условия.

Например, для уравнения типа теплопроводности (1) нерегулярными являются граничные узлы  $i=1$  и  $i=N+1$ . Для первой краевой задачи  $P(0,t) = \mu_1(t)$ ,  $P(L,t) = \mu_2(t)$  в этих узлах нетрудно записать разностные уравнения  $y_1 = \mu_1(t^n)$ ,  $y_{N+1} = \mu_2(t^n)$ , которые являются точными.

Более сложен случай второй краевой задачи для того же уравнения (далее будем рассматривать только условие на левой границе):

$$\frac{\partial P}{\partial x}(0,t) = \mu_1(t), \quad \frac{\partial P}{\partial x}(L,t) = \mu_2(t).$$

Можно аппроксимировать производную односторонней разностью:

$$\frac{\hat{y}_2 - \hat{y}_1}{h} = \mu_1(t^n), \tag{21}$$

здесь приняты обычно используемые обозначения  $h=\Delta x$ ,  $\tau=\Delta t$ ,  $\hat{y} = y^{n+1}$ ,  $\check{y} = y^n$ .

«Крышечка острием вверх» означает функцию со следующего временного слоя по сравнению с функцией без дополнительных значков  $y$ , «крышечка острием вниз» - с предыдущего временного слоя по сравнению с функцией без дополнительных значков. Обозначения используются, чтобы не писать все время индекс временного слоя. Данное граничное условие неявное, т.к. оно содержит два значения функции со следующего слоя  $n+1$ .

Однако невязка разностного уравнения (21) равна

$$(\widehat{P}_x)_{x=0} - \frac{\widehat{P}_2 - \widehat{P}_1}{h} = -\frac{h}{2} P_{x\bar{x}} = O(h),$$

т.е. имеет меньший порядок малости чем невязка в регулярных узлах. Это приводит к понижению общей точности расчета.

Рассмотрим способ описания разностного граничного условия точности  $O(h^2)$ .

Способ фиктивных точек. Сделаем это на примере явной схемы.

Введем вне отрезка  $0 \leq x \leq L$  фиктивную точку  $x_0 = x_1 - h$  и будем исходное уравнение справедливым при считать  $x_1 \leq x$ . Тогда разностное уравнение можно написать при  $i=1$ :

$$\frac{1}{\tau}(\bar{y}_1 - y_1) = \frac{\chi}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2) \quad (22)$$

Заменим в граничном условии на левой границе производную симметричной разностью:

$$\frac{1}{2h}(y_2 - y_0) = \mu_1(t^n) \quad (23)$$

Исключая из двух последних соотношений фиктивную точку, получим разностный аналог краевого условия

$$\frac{1}{h}(y_2 - y_1) = \mu_1(t^n) + \frac{h}{2\chi\tau}(\bar{y}_1 - y_1) \quad (24)$$

Это условие содержит только одно значение с нового слоя, т.е. оно явное.

Эту же процедуру можно провести, используя неявную разностную схему. Тогда аналоги соотношений (22-23) запишутся в следующем виде:

$$\frac{1}{\tau}(y_1 - \bar{y}_1) = \frac{\chi}{h^2}(y_0 - 2y_1 + y_2),$$

$$\frac{1}{2h}(y_2 - y_0) = \mu_1(t^n).$$

Исключая фиктивную точку, получим неявный разностный аналог краевого условия

$$\frac{1}{h}(y_2 - y_1) = \mu_1(t^n) + \frac{h}{2\chi\tau}(y_1 - \bar{y}_1), \quad (25)$$

в котором только одно значение с предыдущего слоя.

Аппроксимацию граничных условий можно также провести интегро-интерполяционным способом. Интегрируем уравнение (1) от 0 до  $h/2$ . Интегралы берутся приближенно, например по методу прямоугольников в крайних или средних точках.

$$\frac{\partial p}{\partial t} \Big|_0 0.5h = \chi \left( \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_{h/2} - \frac{\partial p}{\partial x} \Big|_0 \right) = \chi \left( \frac{p_2 - p_1}{h} - \mu_1 \right)$$

$$\frac{p_1 - \bar{p}_1}{\tau} 0.5h = \chi \left( \frac{p_2 - p_1}{h} - \mu_1 \right)$$

$$\left( \frac{h^2}{2\tau\chi} + 1 \right) p_1 = p_2 - \mu_1 h + \frac{h^2}{2\tau\chi} \bar{p}_1 \quad (26)$$

С точностью до обозначений условие (26) совпадает с условием (25). Из (26) легко зависят первые прогоночные коэффициенты

$$\alpha_2 = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{2\chi\tau}}; \quad \beta_2 = \frac{\frac{h^2}{2\chi\tau} \bar{p}_1 - \mu_1 h}{1 + \frac{h^2}{2\chi\tau}}; \quad (27)$$

**Дискретизация граничных условий интегро-интерполяционным способом.**

$$\frac{\partial p}{\partial t} = \frac{\partial^2 p}{\partial x^2};$$

$$\frac{\partial p}{\partial x} = \frac{Q\mu}{kHV} = \mu_1$$

Интегро-интерполяционный способ.

Интегрируем уравнение от 0 до h/2. Интегралы берутся приближенно, например по методу прямоугольников в крайних или средних точках. Нумерация точек 1...N+1, первая - это точка соответствующая x=0.

$$\int_0^{0.5h} \frac{\partial P}{\partial t} dx = \int_0^{0.5h} \chi \frac{\partial^2 P}{\partial x^2} dx$$

$$\frac{\partial P_1}{\partial t} \frac{h}{2} = \chi \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_{0.5h} - \chi \frac{\partial P}{\partial x} \Big|_0; \quad \text{Производную в нуле подставим из граничного условия}$$

$$\frac{y_1 - \bar{y}_1}{\tau} \frac{h}{2} = \chi \frac{y_2 - y_1}{h} - \chi \frac{Q\mu}{kBV};$$

$$\frac{y_2 - y_1}{h} = \frac{Q\mu}{kBV} + \frac{h}{2\chi\tau} (y_1 - \bar{y}_1);$$

$$\alpha_2 = \frac{1}{1 + \frac{h^2}{2\chi\tau}}; \quad \beta_2 = \frac{\frac{h^2}{2\chi\tau} \bar{y}_1 - h \frac{Q\mu}{kBV}}{1 + \frac{h^2}{2\chi\tau}};$$

Получилось то же самое, что и методом фиктивных точек

Можно также получить явное условие

**Уравнение типа теплопроводности с переменными коэффициентами**

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \frac{\partial}{\partial x} \chi(x) \frac{\partial P}{\partial x}.$$

$$\frac{y_i - \bar{y}_i}{\tau} = \frac{1}{h} [W(x_{i+1/2}) - W(x_{i-1/2})];$$

$$W(x_{i+1/2}) = \chi(x_{i+1/2}) \frac{y_{i+1} - y_i}{h}$$

$$\frac{y_i - \bar{y}_i}{\tau} = \chi(x_{i+1/2}) \frac{y_{i+1} - y_i}{h^2} - \chi(x_{i-1/2}) \frac{y_i - y_{i-1}}{h^2}; \quad i = 2, N; \quad - \text{ неявная схема}$$

$$\chi(x_{i+1/2}) \approx \frac{1}{2}(\chi(x_i) + \chi(x_{i+1})) \approx \frac{2\chi(x_i)\chi(x_{i+1})}{\chi(x_i) + \chi(x_{i+1})} \approx \sqrt{\chi(x_i)\chi(x_{i+1})}$$

Соответственно выписываются коэффициенты  $a_i$ ,  $b_i$ ,  $c_i$ ,  $f_i$ .

Аналогично строится схема Кранка-Николса для уравнения с переменными коэффициентами.

### Свойство консервативности

Конечно-разностный метод является консервативным, если он обеспечивает выполнение определенных интегральных законов сохранения, справедливых для исходных дифференциальных уравнений. Например, уравнение переноса вихря в консервативной форме имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\nabla \cdot (\bar{U} \zeta) + \alpha \nabla^2 \zeta. \quad (28)$$

Если его проинтегрировать по пространственной области  $R$  и применить формулу Остроградского-Гаусса, то получим

$$\frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta dR = - \int_{\partial R} (\bar{U} \zeta) \bar{n} ds + \alpha \int_{\partial R} (\nabla \zeta) \bar{n} ds \quad (29)$$

Уравнение констатирует, что скорость накопления некой величины в области  $R$  равна сумме конвективного и диффузионного притоков величины в область через ее границу за единицу времени.

Требование консервативности заключается в тождественном сохранении в конечно-разностной схеме этого интегрального соотношения.

Простоты ради рассмотрим одномерное модельное уравнение для предельного случая невязкой жидкости ( $\alpha = 0$ ), которое получается из уравнения (28) и имеет вид

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = - \frac{\partial(u\zeta)}{\partial x}$$

(Если, с другой стороны, величину  $\zeta$  трактовать как массовую плотность, то уравнение будет уравнением неразрывности для сжимаемой среды.) Используя разности вперед по времени и центральные разности по пространственной переменной, можно записать конечно-разностный аналог уравнения в виде

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = - \frac{u_{i+1} \zeta_{i+1}^n - u_{i-1} \zeta_{i-1}^n}{2\Delta x}.$$

Рассмотрим теперь одномерную область  $R$  (причем  $i$  меняется от  $I_1$  до  $I_2$ ) и вычислим сумму

$$\frac{1}{\Delta t} \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i \Delta x$$

соответствующую интегралу  $\frac{\partial}{\partial t} \int_R \zeta dx$  в уравнении (29):

$$\frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^{n+1} - \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^n \right] \Delta x = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=I_1}^{I_2} (u\zeta)_{i-1} - \sum_{i=I_1}^{I_2} (u\zeta)_{i+1} \right)$$

Суммирование в правой части проводится следующим образом:



$$\begin{aligned}
& \left( \sum_{i=I_1}^{I_2} (u\zeta)_{i-1} - \sum_{i=I_1}^{I_2} (u\zeta)_{i+1} \right) = u\zeta_{I_1-1} - u\zeta_{I_1+1} + \\
& \quad + u\zeta_{I_1} - u\zeta_{I_1+2} + \\
& \quad \quad + u\zeta_{I_1+1} - u\zeta_{I_1+2} + \\
& \quad \quad \quad + u\zeta_{I_1+2} - u\zeta_{I_1+4} + \\
& \quad \dots \\
& \quad \quad + u\zeta_{I_2-3} - u\zeta_{I_2-1} + \\
& \quad \quad \quad + u\zeta_{I_2-2} - u\zeta_{I_2} + \\
& \quad \quad \quad \quad + u\zeta_{I_2-1} - u\zeta_{I_2+1} = \\
& = u\zeta_{I_1-1} + u\zeta_{I_1} - u\zeta_{I_2} - u\zeta_{I_2+1}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& \frac{1}{\Delta t} \left[ \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^{n+1} - \sum_{i=I_1}^{I_2} \zeta_i^n \right] \Delta x = \frac{1}{2} (u\zeta_{I_1-1} + u\zeta_{I_1} - u\zeta_{I_2} - u\zeta_{I_2+1}) = \\
& = \frac{1}{2} (u\zeta_{I_1-1} + u\zeta_{I_1}) - \frac{1}{2} (u\zeta_{I_2} + u\zeta_{I_2+1}) = u\zeta_{I_1-1/2} - u\zeta_{I_2+1/2}
\end{aligned}$$

Данное уравнение показывает, что скорость накопления величины в области R в точности равна потоку величины в область R через границы  $I_1-1/2$  и  $I_2-1/2$ . Таким образом, полученный конечно-разностный аналог сохраняет интегральное свойство, которое выражает формула Остроградского — Гаусса для дифференциального уравнения, и мы будем говорить, что этот аналог обладает свойством консервативности.

Свойство консервативности зависит как от используемой формы дифференциального уравнения, так и от принятой конечно-разностной схемы. Например, неконсервативная форма одномерного модельного уравнения такова:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -u \frac{\partial \zeta}{\partial x}$$

При такой форме исходного дифференциального уравнения и схемы с центральной разностью по пространственной переменной члены, соответствующие потокам через грани смежных ячеек, взаимно не уничтожаются, что легко показать за исключением частного случая, когда  $u = \text{const}$ . Теперь становится ясным смысл терминов «консервативная» или «дивергентная» форма уравнения.

В первом случае консервативность обеспечивается применением метода контрольного объема при выводе конечно-разностных выражений. При использовании консервативной формы конвективный поток величины  $\zeta$ , вытекающий через грань  $I_1-1/2$  из контрольного объема за единицу времени в точности равен конвективному потоку, втекающему через ту же грань в контрольный объем за единицу времени. В случае неконсервативной формы это не имело бы места.

Ясно, что при  $\alpha > 0$  единственный путь обеспечить сохранение суммарного потока в общем случае заключается в независимом сохранении конвективных и диффузионных членов; в не одномерном случае необходимо обеспечить консервативность этих членов отдельно по каждой пространственной переменной.

Важность свойства консервативности легко понять на примере уравнения неразрывности для сжимаемой среды. Рассмотрим задачу о естественной конвекции в полностью замкнутом сосуде с непроницаемыми стенками. В начальный момент времени считаем, что во всем объеме  $V = 0$ . К нижней стенке сосуда подводится тепло, и происходит естественная конвекция, возможно достигающая стационарного состояния. Если для рас-

расчетов принимается какая-либо неконсервативная схема, то полная масса в исследуемом объеме будет меняться. Если же используется консервативная схема, то полная масса не будет меняться.

### Схема с разностями против потока.

Одношаговая явная двухслойная по времени схема, обеспечивающая статическую устойчивость для конвективных членов, основана на использовании односторонних, а не центральных разностей по пространственным переменным. Когда скорости положительны, то используются разности назад, и наоборот. Таким образом, односторонняя разность всегда берется против потока, т. е. в направлении вверх по течению от точки, в которой вычисляется  $dP/dt$ . Данная схема имеет ошибку аппроксимации  $O(\Delta t, \Delta x)$

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = \begin{cases} -\frac{u\zeta_i^n - u\zeta_{i-1}^n}{\Delta x}, & u > 0 \\ -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_i^n}{\Delta x}, & u < 0 \end{cases}.$$

### Свойство транспортности.

Будем говорить, что конечно-разностный аналог дифференциального уравнения, описывающего течение жидкости, обладает свойством транспортности, если возмущение, наложенное на какую-либо функцию, переносится за счет конвекции только в направлении скорости.

Все схемы, в которых для представления конвективных членов используются центральные разности по пространственным переменным, не обладают этим свойством. Рассмотрим модельное уравнение, описывающее течение невязкой жидкости:

$$\frac{\partial \zeta}{\partial t} = -\frac{\partial(u\zeta)}{\partial x}$$

в следующей конечно-разностной форме с центральной разностью по пространственной переменной

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_{i+1}^n - u\zeta_{i-1}^n}{2\Delta x}.$$

Рассмотрим в точке  $m$  возмущение  $\varepsilon_m = \delta$ , полагая во всех остальных точках  $\varepsilon = 0$  и  $u > 0$ . Тогда в точке  $m+1$ , вниз по потоку от точки возмущения,

$$\frac{\zeta_{m+1}^{n+1} - \zeta_{m+1}^n}{\Delta t} = -\frac{0 - u\delta}{2\Delta x} = \frac{u\delta}{2\Delta x},$$

Что приемлемо. Но в точке, где наложено возмущение

$$\frac{\zeta_m^{n+1} - \zeta_m^n}{\Delta t} = -\frac{0 - 0}{2\Delta x} = 0,$$

А это уже неразумно. Еще более существенно, что в точке  $i=m-1$ , расположенной вверх по потоку от точки возмущения,

$$\frac{\zeta_{m-1}^{n+1} - \zeta_{m-1}^n}{\Delta t} = -\frac{u\delta - 0}{2\Delta x} = -\frac{u\delta}{2\Delta x}.$$

Таким образом, влияние возмущения проявляется вверх по потоку от точки возмущения, и значит, свойство транспортности нарушается.

Сравним полученный результат с результатов, который дает схема с разностями против потока при  $u > 0$ :

$$\frac{\zeta_i^{n+1} - \zeta_i^n}{\Delta t} = -\frac{u\zeta_i^n - u\zeta_{i-1}^n}{\Delta x}.$$

Тогда как и ранее в точке  $m+1$ , вниз по потоку от точки возмущения, будем иметь

$$\frac{\zeta_{m+1}^{n+1} - \zeta_{m+1}^n}{\Delta t} = -\frac{0 - u\delta}{\Delta x} = \frac{u\delta}{\Delta x}.$$

В точке  $m$ , где наложено возмущение

$$\frac{\zeta_m^{n+1} - \zeta_m^n}{\Delta t} = -\frac{u\delta - 0}{\Delta x} = -\frac{u\delta}{\Delta x},$$

А это означает, что возмущение выносится из области, где оно было наложено, как это и должно быть. В точке  $m-1$ , расположенной вверх по потоку от точки возмущения,

$$\frac{\zeta_{m-1}^{n+1} - \zeta_{m-1}^n}{\Delta t} = -\frac{0 - 0}{\Delta x} = 0,$$

И это указывает на то, что возмущение не переносится вверх по потоку. Следовательно, схема с разностями против потока обладает свойством транспортности.

Свойство транспортности имеет такой же физический смысл, как и свойство консервативности. Схемы с разностями против потока, обладающие свойством транспортности, точнее, чем схемы с центральными разностями для первых производных именно в этом смысле, а не в смысле порядка ошибки аппроксимации.

Схема с разностями против потока является транспортной, а также консервативной до тех пор, пока составляющие скорости не меняют свой знак.

## Пример

Уравнение с постоянными коэффициентами

$$\frac{\partial P}{\partial t} = \chi \frac{\partial^2 P}{\partial x^2}; \quad h = L/N;$$

$$\frac{y_i - \check{y}_i}{\tau} = \chi \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2}; \quad i = 2, N; \quad - \text{ неявная схема}$$

$$\frac{y_i - \check{y}_i}{\tau} = 0.5\chi \frac{y_{i+1} - 2y_i + y_{i-1}}{h^2} + 0.5\chi \frac{\check{y}_{i+1} - 2\check{y}_i + \check{y}_{i-1}}{h^2} \quad - \text{ схема Кранка-Николса.}$$

$$y_{i-1} - \left(2 + \frac{h^2}{\tau\chi}\right)y_i + y_{i+1} + \frac{h^2}{\tau\chi}\check{P} = 0;$$

$$a_i = 1; \quad b_i = 1; \quad c_i = 2 + \frac{h^2}{\tau\chi}; \quad f_i = \frac{h^2}{\tau\chi}\check{y}_i;$$

$$y_i = \alpha_{i+1}y_{i+1} + \beta_{i+1};$$

$$\alpha_{i+1} = \frac{b_i}{c_i - a_i\alpha_i}; \quad \beta_{i+1} = \frac{a_i\beta_i + f_i}{c_i - a_i\alpha_i};$$

## Литература

1. Тарасевич Ю.Ю. Математическое и компьютерное моделирование : вводный курс : учебное пособие для студентов высших учебных заведений, обучающихся по специальности 030100 "Информатика" / Ю. Ю. Тарасевич .— Изд. 5-е .— Москва : URSS : [ЛИБРОКОМ, 2012] .— 148 с.—39.
2. Зарипов Ф.Ш. Введение в математическое моделирование [Текст: электронный ресурс] : учебно-методический комплекс курса по направлению подготовки: 050100 Педагогическое образование, профиль: математическое образование, информатика и информационные технологии : [учебное пособие] / Зарипов Ф. Ш. ; Казан. федер. ун-т, Каф. высш. математики и мат. моделирования .— Электронные данные (1 файл: 0,589 Мб) .— (Казань : Казанский федеральный университет, 2013) .— Загл. с экрана .— Для 3-го семестра .— Режим доступа: открытый .— <URL:[http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05\\_120\\_A5-000508.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/05-IMM/05_120_A5-000508.pdf)>.
3. Карнаухова М.Л. Современные методы гидродинамических исследований скважин: справочник инженера по исследованию скважин : уч. пос. для студ. высших учебных заведений/ М. Л. Карнаухова, Е. М. Пьянкова.— Москва : Инфра-Инженерия, 2013 .— 432с—10
4. Каневская Р. Д. Математическое моделирование гидродинамических процессов разработки месторождений углеводородов. - Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2003. 140 с.--1
5. Роуч П. Вычислительная гидродинамика. М.: Мир, 1980.-618 с.--1
6. Калиткин Н.Н. Численные методы. М.: Наука, 1978.-512 с.-1
7. Азиз Х. Математическое моделирование пластовых систем / Х. Азиз, Э. Сеттари ; Пер. с англ. А. В. Королева, В. П. Кестнера .— М. : Недра, 1982 .— 407 с. ---1