

Краткое сообщение

И.Б. БАДРИЕВ, М.В. МАКАРОВ, В.Н. ПАЙМУШИН

**КОНТАКТНАЯ ПОСТАНОВКА ЗАДАЧ МЕХАНИКИ ПОДКРЕПЛЕННЫХ
НА КОНТУРЕ ТРЕХСЛОЙНЫХ ОБОЛОЧЕК
С ТРАНСВЕРСАЛЬНО-МЯГКИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ**

Аннотация. Для трехслойных пластин и оболочек с трансверсально-мягким заполнителем и внешними слоями, имеющими на внешнем контуре подкрепляющие стержни, при малых деформациях и средних перемещениях построена уточненная геометрически нелинейная теория, позволяющая описать процесс их докритического деформирования и выявить все возможные формы потери устойчивости (ФПУ) несущих слоев и подкрепляющих стержней. Она основана на рассмотрении в качестве неизвестных контактных усилий взаимодействия в точках поверхностей сопряжения внешних слоев с заполнителем, а также внешних слоев и заполнителя с подкрепляющими стержнями во всех точках поверхности их сопряжения на контуре оболочки. Для вывода основных уравнений равновесия, статических граничных условий для оболочки и подкрепляющих стержней, а также условий кинематического сопряжения внешних слоев с заполнителем, внешних слоев и заполнителя с подкрепляющими стержнями используется предложенный ранее обобщенный вариационный принцип Лагранжа.

Ключевые слова: трехслойные пластины и оболочки, трансверсально-мягкий заполнитель, контурные подкрепляющие стержни, средний изгиб, уточненные модели заполнителя и стержня, контактные напряжения, обобщенный вариационный принцип Лагранжа.

УДК: 539.3

ВВЕДЕНИЕ

Трехслойные пластины и оболочки с внешними (несущими) слоями из жестких материалов и заполнителем, относящимся к классу трансверсально-мягких [1]–[6], на контуре всегда имеют подкрепляющие стержни, обеспечивающие передачу нагрузки на несущие слои при взаимодействии с другими элементами конструкций. Так как они являются наиболее рациональными при их работе на изгиб и сжатие, то одной из главных является задача исследования возможных форм потери устойчивости (ФПУ). Эти задачи для трехслойных конструкций с подкрепляющими стержнями к настоящему времени практически не исследованы, а существующие методы и известные пакеты прикладных программ для их исследования абсолютно не эффективны и практически не пригодны. Построение для исследования механики деформирования и выявления всех возможных ФПУ трехслойных

Поступила 22.06.2016

Благодарности. Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проекты №№ 16-08-00316, 16-38-00788).

конструкций описанного класса (конструкции в целом, несущих слоев, заполнителя и подкрепляющих стержней) соответствующих математических моделей, имеющих необходимую степень точности и содержательности, является актуальной задачей механики слоистых конструкций.

Предположим, что трехслойная оболочка состоит из внешних слоев с толщинами $2h_{(k)}$, $k = 1, 2$, и ортотропного трансверсально-мягкого заполнителя с толщиной $2h$, у которой срединная поверхность σ отнесена к ее линиям кривизны x_1, x_2 (см. рис.).

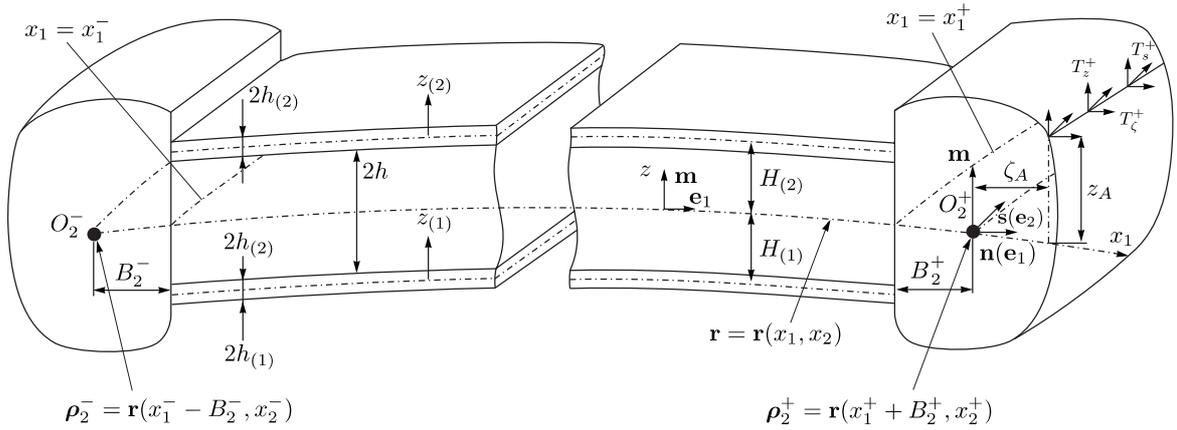


Рис.

Пусть $\sigma_{(k)}$, $k = 1, 2$, — срединные поверхности нижнего ($k = 1$) и верхнего ($k = 2$) несущих слоев; A_i, k_i — параметры Ляме и главные кривизны на σ ; z ($-h \leq z \leq h$), $z_{(k)}$ ($-h_{(k)} \leq z_{(k)} \leq h_{(k)}$) — координаты, отсчитываемые от σ и $\sigma_{(k)}$ в направлении единичной нормали \mathbf{m} , составляющей с единичными векторами \mathbf{e}_1 и \mathbf{e}_2 выбранной системы координат правосторонний триэдр. Тогда при среднем [7] изгибе оболочки для описания механики деформирования несущих слоев согласно классической модели Кирхгофа-Лява тангенциальные компоненты векторов перемещений и тензоров деформаций в несущих слоях будут определяться кинематическими соотношениями

$$U_i^{z_{(k)}} = u_i^{(k)} - z_{(k)}\omega_i^{(k)}, \quad \varepsilon_{ij}^{z_{(k)}} = \varepsilon_{ij}^{(k)} - z_{(k)}\chi_{ij}^{(k)}, \quad (1)$$

где

$$\begin{aligned} 2\varepsilon_{ij}^{(k)} &= e_{ij}^{(k)} + e_{ji}^{(k)} + \omega_i^{(k)}\omega_j^{(k)}, \quad \omega_1^{(k)} = A_1^{-1}w_{,1}^{(k)} - k_1u_{,1}^{(k)}, \\ e_{11}^{(k)} &= A_1^{-1}(u_{1,1}^{(k)} + A_2^{-1}A_{1,2}u_2^{(k)}) + k_1w^{(k)}, \quad e_{12}^{(k)} = A_1^{-1}(u_{2,1}^{(k)} - A_2^{-1}A_{1,2}u_1^{(k)}), \\ \chi_{11}^{(k)} &= A_1^{-1}(\omega_{1,1}^{(k)} + A_2^{-1}A_{1,2}\omega_2^{(k)}), \quad \chi_{12}^{(k)} = A_1^{-1}(\omega_{2,1}^{(k)} - A_2^{-1}A_{1,2}\omega_1^{(k)}); \overleftarrow{1,2}. \end{aligned} \quad (2)$$

Здесь и в дальнейшем через $u_i^{(k)}, w_i^{(k)}$ обозначены тангенциальные перемещения и прогибы точек поверхностей $\sigma_{(k)}$, символ $\overleftarrow{1,2}$ означает, что не приведенные формулы следуют из приведенных путем круговой перестановки индексов 1 и 2, а нижним индексом после запятой обозначена частная производная по соответствующей координате.

В заполнителе перемещения U_1, U_2, U_3 и напряжение σ_{33} в соответствии с моделью трансверсально-мягкого слоя [1] и полученными ранее результатами [8] и др. определяются

выражениями

$$\begin{aligned}
 U_i &= u_i + \frac{z}{G_{i3}} q_i - \frac{1}{2} \left(z - \frac{z^2}{2h} \right) \omega_i^{(1)} - \frac{1}{2} \left(z + \frac{z^2}{2h} \right) \omega_i^{(2)} + \frac{1}{2E_3} \left(\frac{z^3}{3} - h^2 z \right) \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}, \\
 U_3 &= \frac{1}{2} \left[\left(1 - \frac{z}{h} \right) w^{(1)} + \left(1 + \frac{z}{h} \right) w^{(2)} \right] - \frac{z^2 - h^2}{2E_3} \Psi, \quad \Psi = \frac{1}{A_1 A_2} \left(\frac{\partial A_2 q_1}{\partial x_1} + \frac{\partial A_1 q_2}{\partial x_2} \right), \\
 \sigma_{33} &= E_3 \varepsilon_{33} = E_3 \left(\frac{w^{(2)} - w^{(1)}}{2h} \right) - z \Psi,
 \end{aligned} \tag{3}$$

где G_{i3} , E_3 — модули поперечного сдвига и обжатия заполнителя, q_i — поперечные касательные напряжения, постоянные по толщине заполнителя, $u_i = U_i|_{z=0}$ — постоянные интегрирования.

Будем считать, что контурные линии оболочки совпадают с координатными линиями $x_i = x_i^-$, $x_i = x_i^+$ на поверхности σ , а ее граничный срез представляет собой линейчатую поверхность Σ , образованную движением отрезка $z\mathbf{m}$ ($-h - 2h_{(1)} \leq z \leq h + 2h_{(2)}$) вдоль координатных линий (см. рис.). В общем случае предполагается, что Σ является поверхностью сопряжения оболочки с подкрепляющими стержнями, у двух из них осевые линии x_2 , заданные равенствами $\rho_2^\pm = \mathbf{r}(x_1^\pm \pm B_2^\pm, x_2^\pm)$, параллельны и тождественны координатным линиям $x_1 = x_1^-$, $x_1 = x_1^+$, а у двух остальных осевые линии x_1 , заданные равенствами $\rho_1^\pm = \mathbf{r}(x_1^\pm, x_2^\pm \pm B_1^\pm)$, параллельны и тождественны координатным линиям $x_2 = x_2^-$, $x_2 = x_2^+$. Пространства подкрепляющих стержней отнесем к параметризациям $\mathbf{R}_2^\pm = \rho_2^\pm + x_1 \mathbf{e}_1 + z\mathbf{m}$, $(x_1, z \in F_2^\pm)$, $\mathbf{R}_1^\pm = \rho_1^\pm + x_2 \mathbf{e}_2 + z\mathbf{m}$, $(x_2, z \in F_1^\pm)$, где F_2^\pm , F_1^\pm — площади поперечных сечений стержней, соответствующих линиям $x_1 = x_1^\pm$, $x_2 = x_2^\pm$ (на рисунке показаны сечения стержней, сопрягаемых с торцевыми сечениями $x_i = x_i^\pm$ оболочки). В свете полученных ранее [8], [9] и других результатов с целью редукции трехмерных уравнений теории упругости, составленных в непротиворечивом квадратичном приближении [10], [11] и других к одномерным уравнениям для векторов перемещений стержней примем представление

$$\mathbf{V} = [U(s) + z\varphi(s)] \mathbf{n} + [V(s) + z\chi(s) + \zeta\psi(s)] \mathbf{s} + [W(s) - \zeta\varphi(s)] \mathbf{m}, \tag{4}$$

в котором $\mathbf{s}_{,s} = -Ak\mathbf{m}$, $\mathbf{m}_{,s} = Ak\mathbf{s}$, $\mathbf{n}_{,\zeta} = \mathbf{n}_{,s} = 0$, причем здесь и в дальнейшем при $x_1 = x_1^+$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= \mathbf{e}_2, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_1, \quad s = x_2, \quad \zeta = x_1, \quad A = A_2, \quad k = k_2, \\
 U &= U_2^\pm, \quad V = V_2^\pm, \quad W = W_2^\pm, \quad \psi = \psi_2^\pm, \quad \chi = \chi_2^\pm, \quad \varphi = \varphi_2^\pm,
 \end{aligned}$$

при $x_2 = x_2^+$

$$\begin{aligned}
 \mathbf{s} &= \mathbf{e}_1, \quad \mathbf{n} = \mathbf{e}_2, \quad s = x_1, \quad \zeta = x_2, \quad A = A_1, \quad k = k_1, \\
 U &= V_1^\pm, \quad V = U_1^\pm, \quad W = W_1^\pm, \quad \psi = \psi_1^\pm, \quad \chi = \chi_1^\pm, \quad \varphi = \varphi_1^\pm.
 \end{aligned}$$

При введении обозначений

$$\begin{aligned}
 e_u &= A^{-1}U_{,s}, \quad e_v = A^{-1}V_{,s} + kW, \quad e_w = A^{-1}W_{,s} - kV, \\
 E_\chi &= A^{-1}\chi_{,s}, \quad E_\psi = A^{-1}\psi_{,s} - k\varphi, \quad E_\varphi = A^{-1}\varphi_{,s}
 \end{aligned} \tag{5}$$

для выявления классических изгибно-сдвиговых и неклассических изгибно-крутильных форм потери устойчивости, являющихся возможными и основными для подкрепляющих стержней, исходя из анализа полученных ранее результатов [9] и используя представление (4), можно вывести кинематические соотношения в следующем приближении:

$$\varepsilon_s = \varepsilon_s^0 + \zeta \varkappa_\zeta + z \varkappa_z, \quad 2\varepsilon_{s\zeta} = \psi + e_u + zE_\varphi, \quad 2\varepsilon_{sz} = \chi + e_w - \zeta E_\varphi,$$

где

$$\varepsilon_s^0 = e_v + \frac{1}{2}(e_u^2 + e_w^2), \quad \varkappa_\zeta = E_\psi - e_w(E_\varphi + k\psi), \quad \varkappa_z = E_\chi + e_u E_\varphi, \quad (6)$$

а остальные слагаемые с точностью $1 + zk \approx 1$, $1 + \zeta k \approx 1$ отброшены как малые в сравнении с остальными.

Для вывода основных уравнений, следуя полученным ранее [8], [12] результатам, разделим конструкцию на семь элементов, введя в точках поверхностей сопряжения контактные поверхностные усилия взаимодействия [13]. В силу того, что в точках поверхностей сопряжения внешних слоев с заполнителем предварительно были выполнены условия сопряжения по прогибам, неизвестными контактными усилиями в точках поверхностей $z = \pm h$ являются величины q_1 , q_2 , представляющие собой постоянные по толщине заполнителя касательные напряжения. Вариация их работы на соответствующих перемещениях будет равна

$$\delta U_q = \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \delta (q_1 \mu_1 + q_2 \mu_2) A_1 A_2 dx_1 dx_2, \quad (7)$$

где

$$\mu_i = u_i^{(1)} - u_i^{(2)} - (h_{(1)} + h) \omega_i^{(1)} - (h_{(2)} + h) \omega_i^{(2)} + \frac{2h}{G_{i3}} q_i - \frac{2h^3}{3E_3} \frac{1}{A_i} \frac{\partial \Psi}{\partial x_i}.$$

В точках поверхностей сопряжения оболочки со стержнями, являющихся линейчатыми поверхностями $x_i = x_i^\pm$ для оболочки и $\zeta = \mp B_i^\pm$ для стержней, введем неизвестные поверхностные контактные усилия взаимодействия $\tau_i^{(k)}$, τ_i , для которых примем разложения

$$\tau_i^{(k)} = \tau_{ij}^{(k)} \mathbf{e}_j + \tau_{i3}^{(k)} \mathbf{m} = \left(\frac{Q_{ij}^{(k)}}{2h^{(k)}} + \frac{3L_{ij}^{(k)}}{2h^{(k)^3} z^{(k)}} \right) \mathbf{e}_j + \frac{Q_{i3}^{(k)}}{2h^{(k)}} \mathbf{m}, \quad \tau_i = \tau_i \mathbf{m}. \quad (8)$$

Здесь неизвестные погонные контактные усилия $Q_{ij}^{(k)}$, $Q_{i3}^{(k)}$ и моменты $L_{ij}^{(k)}$ статически эквивалентны компонентам векторов $\tau_i^{(k)}$, а неизвестные τ_i — постоянные в пределах $-h \leq z \leq h$ поперечные касательные усилия. Для вычисления вариации их работы на соответствующих перемещениях (1), (3), (6) можно получить выражение

$$\begin{aligned} \delta U_\tau = & \delta \sum_{i=1}^2 \int_{x_{3-i}^-}^{x_{3-i}^+} \left[\sum_{k=1}^2 (Q_{ij}^{(k)} u_j^{(k)} + Q_{i3}^{(k)} w^{(k)} - L_{ij}^{(k)} \omega_j^{(k)}) + \tau_i \left(hw^{(1)} + hw^{(2)} + \frac{2h^3}{3E_3} \Psi \right) - \right. \\ & - Q_{i1}^{(1)} (U - H_{(1)} \varphi) - Q_{i1}^{(2)} (U + H_{(2)} \varphi) - (L_{i1}^{(1)} + L_{i1}^{(2)}) \varphi - \\ & - Q_{i2}^{(1)} (V - H_{(1)} \chi \mp B_{3-i}^\pm \psi) - Q_{i2}^{(2)} (V + H_{(2)} \chi \mp B_{3-i}^\pm \psi) - (L_{i2}^{(1)} + L_{i2}^{(2)}) \chi - \\ & \left. - (-Q_{i3}^{(1)} + Q_{i3}^{(2)} + 2h\tau_i) (W \pm B_{3-i}^\pm \varphi) \right] A_{3-i} dx_{3-i} \Big|_{x_i=x_i^-}^{x_i=x_i^+}, \quad (9) \end{aligned}$$

в котором варьированию подвергаются как компоненты векторов (8), так и функции перемещений, а в слагаемых вида $\pm B_{3-i}^\pm \Psi$, $\pm B_{3-i}^\pm \varphi$ верхние знаки относятся к сечениям $x_i = x_i^+$, а нижние — к сечениям $x_i = x_i^-$.

Будем считать, что внешние силы, действующие на оболочку, приведены к срединным поверхностям внешних слоев и заданы векторами поверхностных усилий $X^{(k)} = X_i^{(k)} \mathbf{e}_i$, а приложенные к подкрепляющим стержням внешние силы приведены к осевым линиям s и заданы погонными силами P_ζ , P_s , P_z и моментами m_ζ , m_s , m_z . Для вычисления вариации

их работы можно получить выражение

$$\begin{aligned} \delta A = & \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \sum_{k=1}^2 (X_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} + X_3^{(k)} \delta w^{(k)}) A_1 A_2 dx_1 dx_2 + \\ & + \sum_{i=1}^2 \int_{x_{3-i}^-}^{x_{3-i}^+} (P_\zeta^\pm \delta U + P_s^\pm \delta V + P_z^\pm \delta W + m_\zeta^\pm \delta \chi + m_z^\pm \delta \psi + m_s^\pm \delta \varphi) A_{3-i} dx_{3-i}, \quad (10) \end{aligned}$$

где величины со знаком “+” относятся к сечениям $x_i = x_i^+$, а со знаком “-” — к сечениям $x_i = x_i^-$. Так, например, для внешней погонной нагрузки $\mathbf{T}^+ = T_\zeta^+ \mathbf{n} + T_s^+ \mathbf{s} + T_z^+ \mathbf{m}$, приложенной в точках линии $\mathbf{r}_A = \zeta_A \mathbf{n} + z_A \mathbf{m}$ (см. рис.), для вычисления величин, входящих в (10), будут иметь место выражения

$$P_\zeta^+ = T_\zeta^+, \quad P_s^+ = T_s^+, \quad P_z^+ = T_z^+, \quad m_\zeta^+ = T_s^+ z_A, \quad m_z^+ = T_s^+ \zeta_A, \quad m_s^+ = T_\zeta^+ z_A - T_z^+ \zeta_A.$$

В рамках моделей, принятых для оболочки и подкрепляющих стержней, для вычисления вариации их потенциальной энергии деформации будет иметь место выражение

$$\begin{aligned} \delta \Pi_s = & \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \sum_{k=1}^2 \left[T_{ij}^{(k)} \delta \varepsilon_{ij}^{(k)} - M_{ij}^{(k)} \delta \chi_{ij}^{(k)} + 2h \frac{q_i \delta q_i}{G_{i3}} + \right. \\ & \left. + \frac{E_3}{2h} (w^{(2)} - w^{(1)}) (\delta w^{(2)} - \delta w^{(1)}) + \frac{2h^3}{3E_3} \Psi \delta \Psi \right] A_1 A_2 dx_1 dx_2, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \delta \Pi_b = & \sum_{i=1}^2 \int_{x_{3-i}^-}^{x_{3-i}^+} [N_s \delta e_v + N_\zeta^* \delta e_u + N_z^* \delta e_w + M_z \delta E_\psi + \\ & + M_\zeta \delta E_\chi + M_s^* \delta E_\varphi + (N_\zeta - k M_z e_w) \delta \psi + N_z \delta \chi] A_{3-i} dx_{3-i} \Big|_{x_i=x_i^-}^{x_i=x_i^+}. \quad (11) \end{aligned}$$

Здесь введены усилия и моменты, приведенные к срединным поверхностям внешних слоев и осевым линиям s подкрепляющих стержней

$$\begin{aligned} N_s &= \iint_{F_i^\pm} \sigma_s d\zeta dz, \quad N_\zeta = \iint_{F_i^\pm} \sigma_{s\zeta} d\zeta dz, \quad N_z = \iint_{F_i^\pm} \sigma_{sz} d\zeta dz, \\ M_s &= \iint_{F_i^\pm} (\sigma_{s\zeta} z - \sigma_{sz} \zeta) d\zeta dz, \quad M_\zeta = \iint_{F_i^\pm} \sigma_s z d\zeta dz, \quad M_z = \iint_{F_i^\pm} \sigma_s \zeta d\zeta dz, \end{aligned}$$

причем в приближении соотношений (6) имеют место равенства

$$N_\zeta^* = N_\zeta + N_s e_u + M_\zeta E_\varphi, \quad N_z^* = N_z + N_s e_w - M_z (E_\varphi + k\psi), \quad M_s^* = M_s + M_\zeta e_u - M_z e_w.$$

Рассмотрим суммарные погонные усилия и моменты

$$\begin{aligned} \tilde{P}_\zeta^\pm &= P_\zeta^\pm \mp (Q_{i1}^{(1)} + Q_{i1}^{(2)}), \quad \tilde{P}_s^\pm = P_s^\pm \mp (Q_{i2}^{(1)} + Q_{i2}^{(2)}), \quad \tilde{P}_z^\pm = P_z^\pm \mp (Q_{i3}^{(1)} + Q_{i3}^{(2)} + 2h\tau_i), \\ \tilde{m}_\zeta^\pm &= m_\zeta^\pm \mp (L_{i2}^{(1)} + L_{i2}^{(2)} - Q_{i2}^{(1)} H_{(1)} + Q_{i2}^{(2)} H_{(2)}), \quad \tilde{m}_z^\pm = m_z^\pm \mp B_{3-i}^\pm (Q_{i2}^{(1)} + Q_{i2}^{(2)}), \\ \tilde{m}_s^\pm &= m_s^\pm \mp [L_{i1}^{(1)} + L_{i1}^{(2)} - Q_{i1}^{(1)} H_{(1)} + Q_{i1}^{(2)} H_{(2)} \pm B_{3-i}^\pm (Q_{i3}^{(1)} + Q_{i3}^{(2)} + 2h\tau_i)], \end{aligned}$$

приведенные к осевым линиям подкрепляющих стержней, а выражение (11) при использовании соотношений (5) преобразуем к виду

$$\begin{aligned} \delta\Pi_b = & \sum_{i=1}^2 \left\{ N_{\zeta}^* \delta U + N_s \delta V + N_z^* \delta W + M_z \delta \psi + M_{\zeta} \delta \chi + M_s^* \delta \varphi - \right. \\ & - \int_{x_{3-i}^-}^{x_{3-i}^+} [N_{\zeta,s}^* \delta U + (N_{s,s} + A_{3-i} k_{3-i} N_z^*) \delta V + (N_{z,s}^* - A_{3-i} k_{3-i} N_s) \delta W + \\ & \left. + (M_{z,s} - A_{3-i} N_{\zeta}) \delta \psi + (M_{\zeta,s} - A_{3-i} N_z) \delta \chi + (M_{s,s}^* + A_{3-i} k_{3-i} M_z) \delta \varphi \right] dx_{3-i} \Big|_{x_i=x_i^-}^{x_i=x_i^+}. \quad (12) \end{aligned}$$

В соответствии с предлагаемым подходом и полученными ранее [8], [12] и др. результатами для вывода необходимого комплекса уравнений должно быть [13] составлено обобщенное вариационное уравнение

$$\delta I = \delta A + \delta U_q + \delta U_{\tau} - \delta \Pi_s - \delta \Pi_b = 0.$$

Внеся в него выражения (7), (9)–(12) и используя кинематические соотношения (2), проведем традиционные преобразования. Тогда при учете принятых выше обозначений можно получить вариационное уравнение следующего вида:

$$\begin{aligned} - \sum_{i=1}^2 (N_{\zeta}^* \delta U + N_s \delta V + N_z^* \delta W + M_z \delta \psi + M_{\zeta} \delta \chi + M_s^* \delta \varphi) \Big|_{x_i=x_i^-}^{x_i=x_i^+} - \\ - \sum_{k=1}^2 2(L_{12}^{(k)} - M_{12}^{(k)}) \delta w^{(k)} \Big|_{x_1=x_1^-, x_2=x_2^-}^{x_1=x_1^+, x_2=x_2^+} + \sum_{i=1}^2 \int_{x_{3-i}^-}^{x_{3-i}^+} \Phi_i A_{3-i} dx_{3-i} \Big|_{x_i=x_i^-}^{x_i=x_i^+} + \\ + \int_{x_1^-}^{x_1^+} \int_{x_2^-}^{x_2^+} \left[\mu_i \delta q_i A_1 A_2 + \sum_{k=1}^2 (f_i^{(k)} \delta u_i^{(k)} + f_3^{(k)} \delta w^{(k)}) \right] dx_1 dx_2 - \\ - \sum_{i=1}^2 \int_{x_{3-i}^-}^{x_{3-i}^+} (f_u \delta U + f_v \delta V + f_w \delta W + f_{\psi} \delta \psi + f_{\chi} \delta \chi + f_{\varphi} \delta \varphi) dx_{3-i} \Big|_{x_i=x_i^-}^{x_i=x_i^+} = 0, \quad (13) \end{aligned}$$

где $(\delta_{(1)} = 1, \delta_{(2)} = -1)$

$$\begin{aligned} \Phi_1 = & \sum_{k=1}^2 \left\{ (Q_{11}^{(k)} - T_{11}^{(k)}) \delta u_1^{(k)} + (Q_{12}^{(k)} + k_2 L_{12}^{(k)} - T_{12}^{(k)} - k_2 M_{12}^{(k)}) \delta u_2^{(k)} + \right. \\ & + \left(Q_{13}^{(k)} + h\tau_1 + \frac{1}{A_2} \frac{\partial L_{12}^{(k)}}{\partial x_2} - N_1^{(k)} - \frac{1}{A_2} \frac{\partial M_{12}^{(k)}}{\partial x_2} \right) \delta w^{(k)} - (L_{11}^{(k)} - M_{11}^{(k)}) \delta \omega_1^{(k)} + \\ & + [u_1^{(k)} - (U - \delta_{(k)} H_{(k)} \varphi)] \delta Q_{11}^{(k)} + [u_2^{(k)} - (V - \delta_{(k)} H_{(k)} \chi) \mp B_2^{\pm} \psi] \delta Q_{12}^{(k)} + \\ & + [w^{(k)} - (W \pm B_2^{\pm} \varphi)] \delta Q_{13}^{(k)} - (\omega_1^{(k)} + \varphi) \delta L_{11}^{(k)} - (\omega_2^{(k)} + \chi) \delta L_{12}^{(k)} \Big\} + \\ & + \frac{2h^3}{3E_3} (\tau_1 - q_1) \delta \Psi + \left[w^{(1)} + w^{(2)} + \frac{2h^2}{3E_3} \Psi - 2(W \pm B_2^{\pm} \varphi) \right] h \delta \tau_1; \quad \overleftarrow{1, 2}, \quad (14) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 N_1^{(k)} &= (A_1 A_2)^{-1} [(A_2 M_{11}^{(k)})_{,1} + (A_1 M_{12}^{(k)})_{,2} - A_{2,1} M_{22}^{(k)} + A_{1,2} M_{12}^{(k)}] + \\
 &\quad + T_{11}^{(k)} \omega_1^{(k)} + T_{12}^{(k)} \omega_2^{(k)} + H_{(k)} q_1; \quad \overleftarrow{1, 2}, \\
 f_1^{(k)} &= (A_2 T_{11}^{(k)})_{,1} + (A_1 T_{12}^{(k)})_{,2} - A_{2,1} T_{22}^{(k)} + A_{1,2} T_{12}^{(k)} + A_1 A_2 (\delta_{(k)} q_1 + k_1 N_1^{(k)} + X_1^{(k)}); \quad \overleftarrow{1, 2}, \\
 f_3^{(k)} &= (A_2 N_1^{(k)})_{,1} + (A_1 N_2^{(k)})_{,2} + A_1 A_2 \left[X_3^{(k)} - T_{11}^{(k)} k_1 - T_{22}^{(k)} k_2 + \frac{\delta_{(k)} E_3}{2h} (w^{(2)} - w^{(1)}) \right]; \\
 f_u^\pm &= N_{\zeta, s}^* + A_{3-i} \tilde{P}_\zeta^\pm, & f_v^\pm &= N_{s, s} + A_{3-i} (k_{3-i} N_z^* + \tilde{P}_s^\pm), \\
 f_w^\pm &= N_{z, s}^* - A_{3-i} (k_{3-i} N_s - \tilde{P}_z^\pm), & f_\psi^\pm &= M_{z, s} - A_{3-i} (N_\zeta - k M_z e_w - \tilde{m}_\zeta^\pm), \\
 f_\chi^\pm &= M_{\zeta, s} - A_{3-i} (N_z - \tilde{m}_\zeta^\pm), & f_\varphi^\pm &= M_{s, s}^* + A_{3-i} (k_{3-i} M_z + \tilde{m}_s^\pm).
 \end{aligned}$$

Вариационное уравнение (13) будет выполнено, если формирующиеся во внешних слоях оболочки перемещения $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$, повороты ω_i и формирующиеся в заполнителе поперечные касательные напряжения q_i будут удовлетворять шести уравнениям равновесия внешних слоев $f_i^{(k)} = 0$ и $f_3^{(k)} = 0$ двум уравнениям $\mu_i = 0$, имеющим смысл кинематических условий сопряжения внешних слоев с заполнителем по тангенциальным перемещениям, а формирующиеся в подкрепляющих стержнях перемещения U , V , W , повороты ψ , χ , φ , погонные контактные усилия $Q_{ij}^{(k)}$, $Q_{i3}^{(k)}$, моменты $L_{ij}^{(k)}$, поверхностные контактные усилия $\tau_i = q_i|_{x_i=x_i^\pm}$, постоянные по z будут удовлетворять шести уравнениям равновесия каждого стержня $f_u = 0$, $f_v = 0$, $f_w = 0$, $f_\psi = 0$, $f_\chi = 0$, $f_\varphi = 0$, а в сечениях $x_i = x_i^+$, $x_i = x_i^-$ — условиям сопряжения стержней с оболочкой, граничным условиям для внешних слоев, заполнителя и подкрепляющих стержней, содержащимся в (14). Для замыкания составленного комплекса уравнений и соотношений к ним необходимо добавить физические соотношения, связывающие введенные в рассмотрение внутренние усилия и моменты во внешних слоях с двумерными функциями $u_i^{(k)}$, $w^{(k)}$, а в стержнях — с одномерными функциями U , V , W , ψ , χ , и φ .

ЛИТЕРАТУРА

- [1] Болотин В.В., Новичков Ю.Н. *Механика многослойных конструкций* (Машиностроение, М., 1980).
- [2] Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. *Solvability of physically and geometrically nonlinear problem of the theory of sandwich plates with transversally-soft core*, Russian Mathematics **59** (10), 57–60 (2015).
- [3] Badriev I.B., Garipova G.Z., Makarov M.V., Paimushin V.N., Khabibullin R.F. *Solving physically nonlinear equilibrium problems for sandwich plates with a transversally soft core*, Lobachevskii J. Math. **36** (4), 474–481 (2015).
- [4] Badriev I.B., Makarov M.V., Paimushin V.N. *On the interaction of composite plate having a vibration-absorbing covering with incident acoustic wave*, Russian Mathematics **59** (3), 66–71 (2015).
- [5] Badriev I.B., Banderov V.V., Makarov M.V., Paimushin V.N. *Determination of stress-strain state of geometrically nonlinear sandwich plate*, Appl. Math. Sci. **9** (77–80), 3887–3895 (2015).
- [6] Badriev I.B., Banderov V.V., Garipova G.Z., Makarov M.V., Shagidullin R.R. *On the solvability of geometrically nonlinear problem of sandwich plate theory*, Appl. Math. Sci. **9** (81–84), 4095–4102 (2015).
- [7] Галимов К.З. *Основы нелинейной теории тонких оболочек* (Изд-во Казанск. ун-та, Казань, 1975).
- [8] Паймушин В.Н. *Проблемы геометрической нелинейности и устойчивости в механике тонких оболочек и прямолинейных стержней*, ПММ **71** (5), 855–893 (2007).
- [9] Паймушин В.Н., Полякова Н.В. *Непротиворечивые уравнения теории плоских криволинейных стержней при конечных перемещениях и линеаризованные задачи устойчивости*, ПММ **73** (2), 303–324 (2009).

- [10] Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. *Непротиворечивый вариант теории деформаций сплошных сред в квадратичном приближении*, Докл. РАН **396** (4), 492–495 (2004).
- [11] Паймушин В.Н., Шалашилин В.И. *О соотношениях теории деформаций в квадратичном приближении и проблемы построения уточненных вариантов геометрически нелинейной теории слоистых элементов конструкций*, ПММ **69** (5), 862–882 (2005).
- [12] Паймушин В.Н. *Контактная постановка нелинейных задач механики оболочек, соединенных по торцевым сечениям плоским криволинейным стержнем*, ПММ **78** (1), 125–144 (2014).
- [13] Паймушин В.Н. *К вариационным методам решения пространственных задач сопряжения деформируемых тел*, ДАН СССР **273** (5), 1083–1086 (1983).

И.Б. Бадриев

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия,
e-mail: ildar.badriev1@mail.ru

М.В. Макаров

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия;
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,
e-mail: makarovmaksim@mail.ru

В.Н. Паймушин

Казанский (Приволжский) федеральный университет,
ул. Кремлевская, д. 18, г. Казань, 420008, Россия;
Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева,
ул. К. Маркса, д. 10, г. Казань, 420111, Россия,
e-mail: vprajmushin@mail.ru

I.B. Badriev, M.V. Makarov, and V.N. Paimushhin

Contact statement of mechanical problems of reinforced on a contour sandwich plates with transversal-soft core

Abstract. For the sandwich plates and shells with transversal-soft core and carrier layers having on the outer contour of the reinforcing rod, for small deformations, and middle displacements refined geometrically nonlinear theory is built, allowing to describe the process of the subcritical deformation and identify all possible buckling of carrier layers and reinforcing rods. It is based on the introduction as unknown contact forces at the points of interaction mating surface of the outer layers with filler and carrier layers and a core with reinforcing rods at all points of the surface of their conjugation to the shell contour. To derive the basic equations of equilibrium, static boundary conditions for the shell and reinforcing rods, as well as conditions of the kinematic coupling of the carrier layers with a core, the carrier layers and a core with reinforcing rods previously proposed a generalized Lagrange variational principle is used.

Keywords: sandwich plates and shells, transversal-soft core, side member, medium bending, refined beam and core models, contact stress, Lagrange variational principle.

I.B. Badriev

Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,
e-mail: ildar.badriev@kpfu.ru

M.V. Makarov

*Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008, Russia;
Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev,
10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia,*

e-mail: makarovmaksim@mail.ru

V.N. Paimushin

*Kazan (Volga Region) Federal University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia;
Kazan National Research Technical University named after A.N. Tupolev,
10 K. Marks str., Kazan, 420111 Russia,*

e-mail: vpajmushin@mail.ru