УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО ГОСУДАРСТВЕННОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 148, кн. 1 Физико-математические науки *2006*

УДК 530.1:512.54

ТОЧНОЕ РЕШЕНИЕ МОДЕЛИ ДЖЕЙНСА – КАММИНГСА ДЛЯ АТОМА, ДВИЖУЩЕГОСЯ СКВОЗЬ НЕИДЕАЛЬНЫЙ РЕЗОНАТОР

А.В. Горохов, И.Е. Синайский

Аннотация

В работе построено точное решение модели Джейнса – Каммингса с учетом многоквантовых переходов, неидеальности резонатора и движения атома сквозь резонатор для произвольных начальных состояний атомной и фотонной подсистем. На основе найденной в явном виде матрицы плотности системы построены выражения для наблюдаемых и рассчитаны их временные зависимости.

Введение

В 1963 г. Джейнс и Каммингс предложили простую и очень полезную модель взаимодействия излучения с веществом [1, 2]. Значение этой модели, описывающей взаимодействие двухуровневого атома с квантованной модой электромагнитного поля в идеальном резонаторе, для современной квантовой оптики трудно переоценить. Предсказан ряд фундаментальных эффектов, таких, как осцилляции Раби в вакуумном поле, восстановление и уничтожение осцилляций Раби для фотонной моды, приготовленной в когерентном состоянии [3–6]. Все эти предсказания были успешно проверены на экспериментах с одноатомными мазерами [7, 8]. Обзор МДК и множества ее обобщений приведен в работе [9].

В предыдущих работах [10, 11] авторами получена точная формула для матрицы плотности обобщенной МДК в резонаторе с потерями в случае неподвижного атома для произвольного начального состояния фотонной подсистемы и возбужденной атомной. В данной работе на основе обобщения ранее развитого формализма найдена матрица плотности системы в реальном резонаторе с учетом движения атома и проведено сравнение моделей с неподвижным и движущимся атомом.

1. Модель

В данной работе получено аналитическое решение для модели двухуровневого атома, пролетающего сквозь резонатор конечной добротности. Атом считается достаточно тяжелым, и его движение описывается классически. Рассматривается возможность взаимодействия атома с r-фотонными модами, так что $\omega_0 \approx r\omega$ и гамильтониан системы имеет вид

$$\hat{H} = \hat{H}_A + \hat{H}_F + \hat{H}_B + \hat{H}_{AF} + \hat{H}_{BF},$$

где $\hat{H}_A = \hbar\omega_0 \hat{S}_3$ – гамильтониан свободного атома; $\hat{H}_F = \hbar\omega(\hat{a}^+\hat{a} + 1/2)$ – гамильтониан фотонной моды, $\hat{H}_B = \sum\limits_\alpha \hbar\tilde{\omega}_\alpha(\hat{c}_\alpha^+\hat{c}_\alpha + 1/2)$ – гамильтониан «бани», $\hat{H}_{AF} = \hbar f(t)\left((\hat{a}^+)^r\hat{S}^- + (\hat{a})^r\hat{S}^+\right)$ – гамильтониан взаимодействия атома с полем, $f(t)$ – функция, учитывающая движение атома через резонатор. Например, если рассматривается одноквантовый переход, тогда $f(t) = g\sin(p\pi vt/L)$ [12]; $\hat{H}_{BF} = \sum\limits_{\alpha}\left(\hat{c}_{\alpha}^{+}\hat{a}f_{\alpha} + \hat{c}_{\alpha}\hat{a}^{+}\bar{f}_{\alpha}\right)$ – гамильтониан взаимодействия поля с «баней», $\Delta = \omega_0 - r\omega$.

Будем искать матрицу плотности в следующем виде

$$\hat{\rho}(t) = \hat{\rho}_{AF}(t) \otimes \hat{\rho}_B(0),$$

то есть воспользуемся гипотезой необратимости и, усреднив по переменным термостата уравнение Лиувилля, получим кинетическое уравнение для редуцированной матрицы плотности:

$$\frac{\partial\hat{\rho}_{AF}}{\partial t} = \frac{1}{i\hbar}\left[\hat{H}_{AF}^{(I)}, \hat{\rho}_{AF}\right] - \frac{\gamma}{2}\left(\hat{a}^{+}\hat{a}\hat{\rho}_{AF} - 2\hat{a}\hat{\rho}_{AF}\hat{a}^{+} + \hat{\rho}_{AF}\hat{a}^{+}\hat{a}\right). \tag{1}$$

2. Матрица плотности модели

Для нахождения решения уравнения (1) воспользуемся P-представлением Глаубера – Сударшана:

$$\hat{\rho}_{AF} = \sum_{\mu,\nu=1}^{2}\int\frac{d^2\alpha}{\pi}P_{\mu\nu}(\alpha,t)\left|\alpha\right\rangle\left\langle\alpha\right|\otimes\left|\mu\right\rangle\left\langle\nu\right|,$$

и сделаем унитарное преобразование

$$\hat{\rho}' = U_{AF}^{-1}\hat{\rho}'_{AF}U_{AF},$$

где

$$i\dot{U}_{AF} = H_{AF}^{(I)}U_{AF}.$$

Тогда кинетическое уравнение примет вид

$$\frac{\partial\hat{\rho}_{AF}^{'}}{\partial t} = -\frac{\gamma}{2}\left(\hat{a}^{+'}\hat{a}^{'}\hat{\rho}_{AF}^{'} - 2\hat{a}^{'}\hat{\rho}_{AF}^{'}\hat{a}^{+'} + \hat{\rho}_{AF}^{'}\hat{a}^{+'}\hat{a}^{'}\right).$$

Здесь

$$\hat{a}' = U_{AF}^{-1}\hat{a}U_{AF}, \quad \hat{a}^{+'} = U_{AF}^{-1}\hat{a}^{+}U_{AF}, \left|\alpha'\right\rangle = U_{AF}^{-1}\left|\alpha\right\rangle.$$

Необходимо отметить, что собственные значения оператора уничтожения остались прежними:

$$\hat{a}'\left|\alpha'\right\rangle = \alpha\left|\alpha'\right\rangle.$$

Нетрудно заметить, что полученное уравнение для матрицы плотности – это известное уравнение Фоккера – Планка, описывающее релаксацию фотонной моды в резонаторе, с хорошо известным решением

$$P(\alpha,t) = \int\left(\frac{d^2\alpha_0}{\pi}\delta_2\left(\alpha - \alpha_0 e^{-\gamma_j t/2}\right)\right)P(\alpha_0, 0).$$

Функция $P(\alpha_0, 0)$ описывает P-символ начальной полевой моды. Для того чтобы воспользоваться полученным решением, необходимо вернуться в исходное представление для матрицы плотности. Для этого определим следующий объект: $\left|\alpha'\right\rangle = U_{AF}^{-1}\left|\alpha\right\rangle$. Разложим

$$\left|\alpha\right\rangle = e^{-|\alpha|^2/2}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha^n}{\sqrt{n!}}\left|n\right\rangle$$

по фоковскому базису и воспользуемся начальным условием для атомной подсистемы:

$$\hat{\rho}_A(0) = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}, \quad (a + b = 1; \quad a,\, b \geqslant 0).$$

Таким образом, задача сводится к отысканию $U_{AF}^{-1}\left|n,+\right\rangle$ и $U_{AF}^{-1}\left|n,-\right\rangle$. Для этого необходимо найти решение уравнения Шредингера для движущегося атома в идеальном резонаторе:

$$i\dot{U}_{AF} = f\,(t)\,((\hat{a}^+)^r \hat{S}^- e^{-i\Delta t} + (\hat{a})^r \hat{S}^+ e^{i\Delta t})U_{AF}.$$

Задача будет решаться в биортогональном базисе $\{\left|n,+\right\rangle, \left|n+r,-\right\rangle\}$, в котором уравнение примет вид

$$i\dot{U}_{AF} = f\,(t)\,\sqrt{M_{[n]}^{[r]}}(\hat{S}^- e^{-i\Delta t} + \hat{S}^+ e^{i\Delta t})U_{AF}.$$

Здесь $M_{[n]}^{[r]} = \dfrac{(n+r)!}{n!}$.

Так как полученный эффективный гамильтониан является линейной комбинацией генераторов группы $SU(2)$, можно воспользоваться техникой «распутывания» [13]. Любой элемент группы $SU(2)$ можно записать в виде

$$U = \exp\left(\alpha S_+\right) \exp\left(\beta S_3\right) \exp\left(\gamma S_-\right).$$

Подставив его в уравнение Шредингера, получим систему дифференциальных уравнений для неизвестных функций α, β, γ

$$\alpha' - \beta'\alpha - \gamma' e^{-\beta}\alpha^2 = -i\chi,$$

$$\gamma' e^{-\beta} = -i\bar{\chi},$$

$$\beta' - i2\bar{\chi}\alpha = 0.$$

Эта система сводится к уравнению Рикатти

$$\alpha' - i\bar{\chi}\alpha^2 = -i\chi,$$

где $\chi = f\,(t)\,\sqrt{M_{[n]}^{[r]}} e^{i\Delta t}$.

К сожалению, это уравнение в общем виде точно не решается, и в данной работе рассматривается только случай резонанса, т. е. $\Delta = 0$. Если обозначить $F\,(t) = \int\limits_0^t d\tau f\,(\tau)$, то

$$\alpha = \gamma = -i\mathrm{tg}\left(\sqrt{M_{[n]}^{[r]}} F\,(t)\right), \quad \beta = -2ln\left(\cos\left(\sqrt{M_{[n]}^{[r]}} F\,(t)\right)\right).$$

Тогда

$$U_{AF} = \begin{pmatrix} \cos\left(\sqrt{M_{[n]}^{[r]}} F\,(t)\right) & -i\sin\left(\sqrt{M_{[n]}^{[r]}} F\,(t)\right) \\ -i\sin\left(\sqrt{M_{[n]}^{[r]}} F\,(t)\right) & \cos\left(\sqrt{M_{[n]}^{[r]}} F\,(t)\right) \end{pmatrix}.$$

Найдя оператор эволюции и подставив его в выражение для матрицы плотности, получим аналитическое решение модели

$$\begin{aligned}
\hat{\rho}_{AF}(t) = \int \frac{d^2\alpha_0}{\pi} P(\alpha_0, 0)\times \\
\times \Big\{ \sum_{n,m=0}^{\infty} [(aF_{nm}(\alpha_0,t)\bar{c}_n c_m + bF_{n+r,m+r}(\alpha_0,t)d_n\bar{d}_m)|n,+\rangle\langle m,+|+ \\
+ (aF_{nm}(\alpha_0,t)\bar{d}_n d_m + bF_{n+r,m+r}(\alpha_0,t)c_n\bar{c}_m)|n+r,-\rangle\langle m+r,-|+ \\
+ (aF_{nm}(\alpha_0,t)\bar{c}_n d_m - bF_{n+r,m+r}(\alpha_0,t)d_n\bar{c}_m)|n,+\rangle\langle m+r,-|+ \\
+ (aF_{nm}(\alpha_0,t)\bar{d}_n c_m - bF_{n+r,m+r}(\alpha_0,t)c_n\bar{d}_m)|n+r,-\rangle\langle m,+|]+ \\
+ \sum_{n,m=0}^{r-1} bF_{nm}(\alpha_0,t)|n,-\rangle\langle m,-|+ \\
+ \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{m=0}^{r-1} bF_{n,m}(\alpha_0,t)(-d_n|n,+\rangle\langle m,-| + c_n|n+r,-\rangle\langle m,-|)+ \\
+ \sum_{n=0}^{r-1}\sum_{m=0}^{\infty} bF_{n,m}(\alpha_0,t)(-\bar{d}_m|n,-\rangle\langle m,+| + \bar{c}_m|n,-\rangle\langle m+r,-|)\Big\}.
\end{aligned}$$

Здесь

$$F_{nm}(\alpha_0,t) = \frac{\alpha_0^n\bar{\alpha_0}^m}{\sqrt{n!m!}}\exp\left(-\gamma t(n+m)/2\right)\exp(-|\alpha_0|^2 e^{-\gamma t}),$$

$$c_n = \cos(\sqrt{M_{[n]}^{[r]}}F(t)), \quad d_n = -i\sin(\sqrt{M_{[n]}^{[r]}}F(t)).$$

3. Наблюдаемые

Получив в явном виде матрицу плотности, можно найти явные выражения для наблюдаемых величин и сравнить их для моделей с учетом и без учета движения атома.

- Среднее число фотонов

$$\begin{aligned}
n(t) = Tr[\hat{a}^+\hat{a}\hat{\rho}] = \int \frac{d^2\alpha_0}{\pi}P(\alpha_0)\Big\{\sum_{n=0}^{r-1} nbF_{nn}(\alpha_0,t)+ \\
+ \sum_{n=0}^{\infty}[aF_{nn}(\alpha_0,t)(n+r|d_n|^2) + bF_{n+r,n+r}(\alpha_0,t)(n+r|c_n|^2)]\Big\}.
\end{aligned}$$

- Инверсия населенности

$$\begin{aligned}
\Delta N(t) = Tr[\hat{S}_z\hat{\rho}] = \int \frac{d^2\alpha_0}{\pi}P(\alpha_0)\frac{1}{2}\Big\{-\sum_{n=0}^{r-1} bF_{nn}(\alpha_0,t)+ \\
+ \sum_{n=0}^{\infty}[F_{nn}(\alpha_0,t)(a|c_n|^2 + b|d_n|^2) - F_{n+r,n+r}(\alpha_0,t)(a|d_n|^2 + b|c_n|^2)]\Big\}.
\end{aligned}$$

В случае неподвижного атома $f(t) = g \Longrightarrow F(t) = gt$, а если атом движется сквозь резонатор, то $f(t) = g\sin\left(\frac{\pi vt}{L}\right) \Longrightarrow F(t) = \frac{2gL}{\pi v}\sin\left(\frac{\pi vt}{2L}\right)^2$.

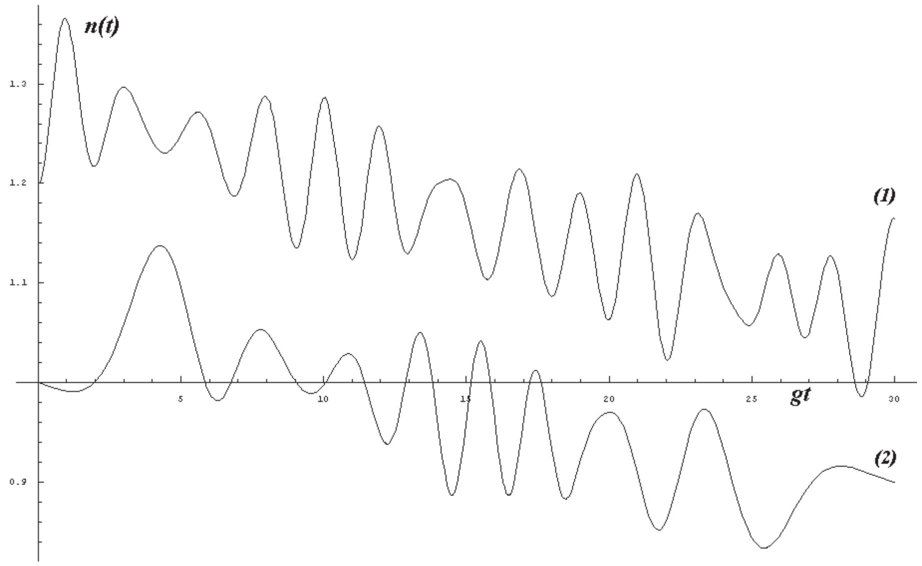

Рис. 1. Зависимость от времени среднего числа фотонов в случае неподвижного и движущегося атома, оба графика соответствуют начальному когерентному состоянию с параметром $|\alpha_0|^2 = 1$, начальное состояния атома – $a = b = 1/2$, по оси абсцисс отложено время в единицах константы g, $\gamma = 0.01$, на графике (1) приведена функция $[n(t) + 0.2]$ для неподвижного атома, на графике (2) – $n(t)$ для движущегося атома при этом $L/v = 30$

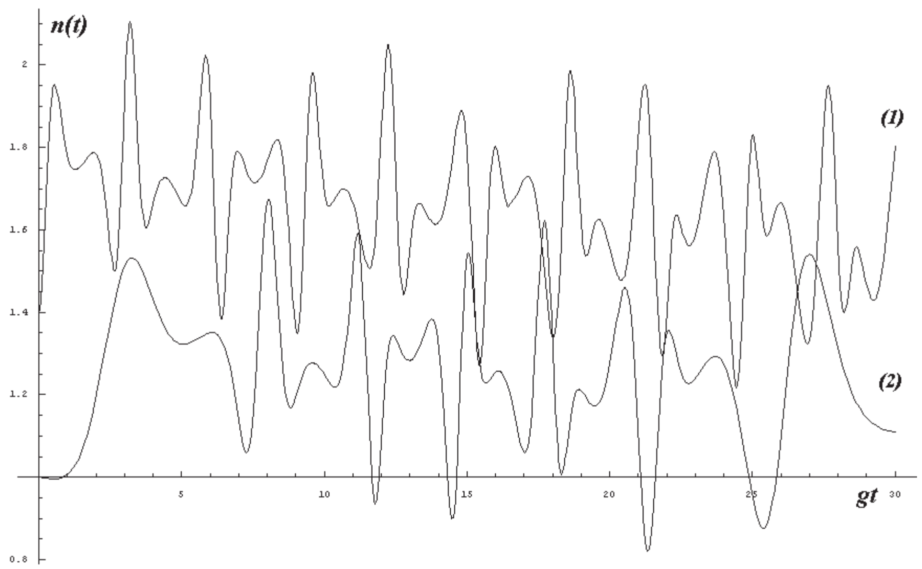

Рис. 2. Динамика среднего числа фотонов в случае двухквантовых переходов для неподвижного и движущегося атома, оба графика соответствуют начальному когерентному состоянию с параметром $|\alpha_0|^2 = 1$, начальное состояния атома – $a = b = 1/2$, по оси абсцисс отложено время в единицах константы g, $\gamma = 0.01$, на графике (1) приведена функция $[n(t) + 0.4]$ для неподвижного атома, на графике (2) – $n(t)$ для движущегося атома при этом $L/v = 30$

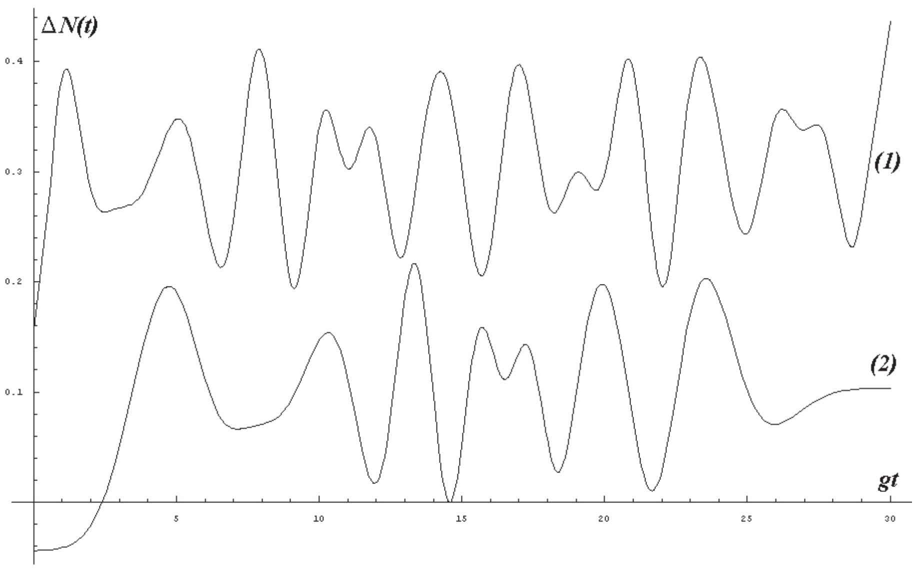

Рис. 3. Зависимость от времени инверсии населенности для неподвижного и движущегося атома, оба графика соответствуют начальному когерентному состоянию с параметром $|\alpha_0|^2 = 1$, начальное состояния атома – $a = 1/3$, $b = 2/3$, по оси абсцисс отложено время в единицах константы g, $\gamma = 0.01$, на графике (1) приведена функция $[\Delta N(t) + 0.2]$ для неподвижного атома, на графике (2) - $\Delta N(t)$ для движущегося атома при этом $L/v = 30$

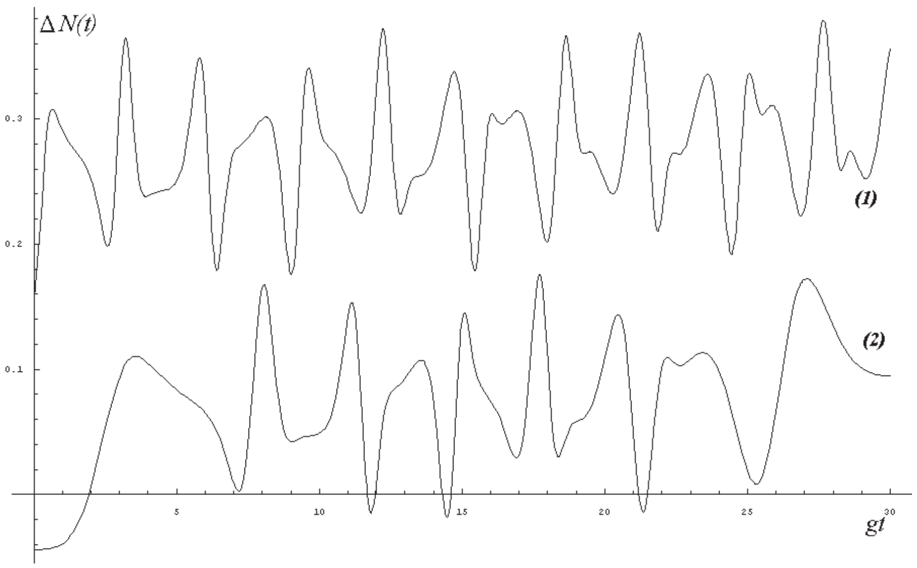

Рис. 4. Динамика инверсии населенности в случае двухквантовых переходов для неподвижного и движущегося атома, оба графика соответствуют начальному когерентному состоянию с параметром $|\alpha_0|^2 = 1$, начальное состояния атома – $a = 1/3$, $b = 2/3$, по оси абсцисс отложено время в единицах константы g, $\gamma = 0.01$, на графике (1) приведена функция $[\Delta N(t){+}0.2]$ для неподвижного атома, на графике (2) – $\Delta N(t)$ для движущегося атома при этом $L/v = 30$

При проведении численного моделирования соотношения между параметрами модели соответствуют аналогичным параметрам в одноатомном мазере [7, 8].

При рассмотрении поведения наблюдаемых величин время взаимодействия для наглядности берется в несколько раз больше, чем в реальном эксперименте, что является стандартом при анализе особенностей теоретических моделей одноатомного мазера.

Из рис. 1–4 видно, что модели неподвижного и движущегося атома хорошо согласуются. Однако в случае движущегося атома наблюдается меньшее количество осцилляций Раби за одинаковое время взаимодействия. Это связано с тем, что в принятой модели движения атома эффективная константа связи меньше, чем у неподвижного атома в начале и конце взаимодействия (при влете и вылете из резонатора).

Заключение

В данной работе построено точное выражение для матрицы плотности обобщения модели Джейнса – Каммингса, включающего учет движения атома сквозь резонатор, фотонные потери, а также произвольность начального состояния системы.

Характер рассчитанных зависимостей хорошо соотносится с данными экспериментов с одноатомным мазером и расчетами других авторов.

В перспективе планируется учесть более реалистичные модовые функции ($f(t)$) и нецентральность попадания атома в резонатор.

Авторы благодарят профессора В.В. Самарцева за проявленный интерес к работе.

Summary

A.V. Gorokhov, I.E. Sinaiski. Exact solution of the Jaynes – Cummings model for atom moving through the non-ideal cavity.

Exact solution for generalized Jaynes – Cummings model including r-quant transitions, non-ideal cavity and moving of the atom for arbitrary initial state of the system is obtained. Dependents from time for some observable using expression for density matrix are calculated.

Литература

1. *Jaynes E.T., Cummings F.W.* Comparison of quantum and semiclassical radiation theories with application to the Beam Maser // Proc. IEEE. – 1963. – V. 51, No 1. – P. 89–109.

2. *Tavis M., Cummings F.W.* Exact solution for an N-molecule-radiaton-field hamiltonian // Phys. Rev. – 1968. – V. 170. – P. 379–384.

3. *Yoo H.Y., Eberly J.H.* Dynamical theory of an atom with two and three levels interacting with quantized cavity fields // Physics Reports. – 1985. – V. 118. – P. 239–337.

4. *Singh S.* Field statistics in some generalized Jaynes – Cummings models // Phys. Rev. A. – 1982. – V. 25. – P. 3206–3216.

5. *Eberly J.H., Narozhny N.B., Sanches-Mondragon J.J.* Periodic spontaneous collapse and revival in a simple quantum model // Phys. Rev. Lett. – 1980. – V. 44. – P. 1323–1326.

6. *Scully M.O., Zubairy M.S.* Quantum Optics. – Cambridge: Cambridge University Press, 1997. – 630 p.

7. *Raithel G., Wagner C., Walther H., Narducci L.M., Scully M.O.* The micromaser: a providing ground for quantum physics, in Advances in atomic, molecular and optical physics / Ed. P. Berman. – N. Y.: Academic, 1994. – P. 57–121.

8. *Walther H.* Single atom experiments in cavities and traps // Proc. R. Soc. A – 1998. – V. 454. – P. 431–445.

9. *Shore B.W., Knight P.L.* Topical review. The Jaynes – Cummings model // J. Mod. Opt. – 1993. – V. 40. – P. 1195–1238.

10. *Gorokhov A.V., Sinaiski I.E.* Exact solution of the Jaynes – Cummings model with relaxation // Proc. SPIE. – 2003. – V. 5476. – P. 91–98.

11. *Горохов А.В., Синайский И.Е.* Метод уравнения Фоккера – Планка и статистика фотонов в теории одноатомного мазера // Изв. РАН. Сер. Физическая. – 2004. – Т. 68, № 9. – С. 1288–1291.

12. *Joshi A., Lawande S.V.* Effect of atom motion on Rydberg atoms undergoing the two-photon transitions in a lossless cavity // Phys. Rev. A. – 1990. – V. 42. – P. 1752–1756.

13. *Горохов А.В.* Методы теории групп в задачах квантовой физики. – Куйбышев: Куйбышевск. гос. ун-т, 1979. – 96 с.

Поступила в редакцию
01.02.06

Горохов Александр Викторович – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры общей и теоретической физики Самарского государственного университета.

E-mail: *gorokhov@ssu.samara.ru*

Синайский Илья Евгеньевич – аспирант кафедры оптики и спектроскопии Самарского государственного университета.

E-mail: *sinai@sama.ru*