НОВЫЕ КЛАССЫ ОТОБРАЖЕНИЙ В КВАЗИКОНФОРМНОМ АНАЛИЗЕ и ЕГО ПРИМЕНЕНИЯ

С. К. ВОДОПЬЯНОВ

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН

«Лобачевские чтения-2015» 23 октября

Пространство Соболева $L^1_p(D)$, $D \subset \mathbb{R}^n$, $p \in [1,\infty]$,

состоит из локально интегрируемых функций $f : D \to \mathbb{R}$, имеющих первые обобщенные производные $\frac{\partial f}{\partial x_i}(x)$:

$$\int\limits_D \frac{\partial f}{\partial x_i}(x)\varphi(x)\,dx = -\int\limits_D f(x)\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x)\,dx \quad \forall \varphi \in C_0^\infty(D),$$

$i = 1, \dots, n$, и конечную полунорму

$$\|f \mid L^1_p(D)\| = \|\nabla f \mid L_p(D)\|, \quad \nabla f = \left(\frac{\partial f}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial f}{\partial x_n}\right).$$

С. Л. Соболев. О некоторых группах преобразований n-мерного пространства (Докл. АН. 1941. Т. 32, № 6.)

Теорема. *Пространство Соболева* L_p^1 *сохраняется при преобразованиях группы* G*, состоящей из таких диффеоморфизмов* $\varphi \in C^1$*, для которых*
1) $|D\varphi(x)| \leq M < \infty$; 2) $|J(x, \varphi)| \geq \mu > 0$.

С. Л. Соболев. О некоторых группах преобразований n-мерного пространства (Докл. АН. 1941. Т. 32, № 6.)

Теорема. *Пространство Соболева* L^1_p *сохраняется при преобразованиях группы* G, *состоящей из таких диффеоморфизмов* $\varphi \in C^1$, *для которых*
1) $|D\varphi(x)| \leq M < \infty$; 2) $|J(x, \varphi)| \geq \mu > 0$.

Здесь $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ для диффеоморфизма $\varphi : D \to D'$ определяется по формуле $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, где $f \in L^1_p(D')$.

С. Л. Соболев. О некоторых группах преобразований n-мерного пространства (Докл. АН. 1941. Т. 32, № 6.)

Теорема. *Пространство Соболева L^1_p сохраняется при преобразованиях группы G, состоящей из таких диффеоморфизмов $\varphi \in C^1$, для которых*
1) $|D\varphi(x)| \leq M < \infty$; 2) $|J(x,\varphi)| \geq \mu > 0$.

Здесь $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ для диффеоморфизма $\varphi : D \to D'$ определяется по формуле $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, где $f \in L^1_p(D')$.

Из заключения теоремы $\varphi : D \to D'$ — квазиизометрия класса C^1: $\overline{\lim\limits_{y \to x}} \frac{|\varphi(y)-\varphi(x)|}{|y-x|} \leq M$ для всех $x \in D$ и то же самое для φ^{-1}.

С. Л. Соболев. О некоторых группах преобразований n-мерного пространства (Докл. АН. 1941. Т. 32, № 6.)

Теорема. *Пространство Соболева* L^1_p *сохраняется при преобразованиях группы* G, *состоящей из таких диффеоморфизмов* $\varphi \in C^1$, *для которых*
1) $|D\varphi(x)| \leq M < \infty$; 2) $|J(x,\varphi)| \geq \mu > 0$.

Здесь $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ для диффеоморфизма $\varphi : D \to D'$ определяется по формуле $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$, где $f \in L^1_p(D')$.

Из заключения теоремы $\varphi : D \to D'$ — квазиизометрия класса C^1: $\overline{\lim\limits_{y\to x}} \frac{|\varphi(y)-\varphi(x)|}{|y-x|} \leq M$ для всех $x \in D$ и то же самое для φ^{-1}.

"Весьма вероятно, что группа G есть группа всех преобразований, сохраняющих L^1_p. Доказательство этого автору не известно."

Определение квазиконформного отображения

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется *квазиконформным*, если

Определение квазиконформного отображения

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется *квазиконформным*, если

$|D\varphi(x)|^n \leq KJ(x,\varphi)$ п. вс. в D, где $1 \leq K < \infty$.

Определение квазиконформного отображения

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется *квазиконформным*, если

$|D\varphi(x)|^n \leq KJ(x,\varphi)$ п. вс. в D, где $1 \leq K < \infty$.

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется *квазиизометрическим*, если

Определение квазиконформного отображения

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется *квазиконформным*, если

$|D\varphi(x)|^n \leq KJ(x,\varphi)$ п. вс. в D, где $1 \leq K < \infty$.

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ называется *квазиизометрическим*, если

1) $|D\varphi(x)| \leq M < \infty$;
2) $|J(x,\varphi)| \geq \mu > 0$
п. вс. в D.

1962: из кандидатской работы В. Мазьи выводим, что

1962: из кандидатской работы В. Мазьи выводим, что

в категории C^1-диффеоморфизмов $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ — изоморфизм $\Leftrightarrow$

φ — квазиизометрия при $p \neq n$,

φ — квазиконформное отображение при $p = n$.

1962: из кандидатской работы В. Мазьи выводим, что

в категории C^1-диффеоморфизмов $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ — изоморфизм $\Leftrightarrow$
φ — квазиизометрия при $p \neq n$,
φ — квазиконформное отображение при $p = n$.

1971: из результатов F. Gehring, *Lipschitz Mappings and the p-capacity of Rings in n-space*, Advances in the Theory of Reimann surfaces, Ann. Math. Studies 6. 1971. pp. 175–193, выводим, что

1962: из кандидатской работы В. Мазьи выводим, что

в категории C^1-диффеоморфизмов $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ — изоморфизм $\Leftrightarrow$

φ — квазиизометрия при $p \neq n$,

φ — квазиконформное отображение при $p = n$.

1971: из результатов F. Gehring, *Lipschitz Mappings and the p-capacity of Rings in n-space*, Advances in the Theory of Reimann surfaces, Ann. Math. Studies 6. 1971. pp. 175–193, выводим, что

в категории гомеоморфизмов $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ — изоморфизм $\Leftrightarrow$

φ — квазиизометрия при $p \neq n$,

φ — квазиконформное отображение при $p = n$.

Теорема о жесткости геометрии пространств Соболева.

Пусть $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ *— ограниченный изоморфизм классов Соболева, индуцированный измеримым отображением* $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ *для* $f \in L^1_p(D')$.

Тогда $\varphi : D \to D'$ *совпадает п. вс. с*

1) *квазиконформным отображением* $\varphi : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ *в случае* $p = n$;

2) *квазиизометрическим отображением* $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ *в случае* $p \neq n$, $1 \leq p \leq \infty$.

Более того, соболевские пространства L^1_p *на открытых множествах* D' *и* $\varphi(D)$ *изоморфны.*

Теорема о жесткости геометрии пространств Соболева.

Пусть $\varphi^* : L^1_p(D') \to L^1_p(D)$ — ограниченный изоморфизм классов Соболева, индуцированный измеримым отображением $\varphi : D \to D'$, $D, D' \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$: $\varphi^*(f) = f \circ \varphi$ для $f \in L^1_p(D')$.

Тогда $\varphi : D \to D'$ совпадает п. вс. с

1) *квазиконформным отображением $\varphi : D \to \overline{\mathbb{R}^n}$ в случае $p = n$;*

2) *квазиизометрическим отображением $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ в случае $p \neq n$, $1 \leq p \leq \infty$.*

Более того, соболевские пространства L^1_p на открытых множествах D' и $\varphi(D)$ изоморфны.

$p = n$, D' ограничена — Водопьянов, Гольдштейн (1975)
$1 \leq p \neq n \leq \infty$, — Водопьянов (2005)
$p = n$, D' произвольная — Водопьянов, Евсеев (2015)

Публикации:

1) *Водопьянов С. К., Гольдштейн В. М. Структурные изоморфизмы пространств W_n^1 и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 1975. Т. 16, № 2. С. 224–246.*
2) *Vodopyanov S. K. Composition Operators on Sobolev Spaces // In: «Complex Analysis and Dynamical Systems II» Contemporary Mathematics, AMS, 2005. V. 382. P. 327–342.*
3) *Водопьянов С. К., Евсеев Н. А. Изоморфизмы соболевских пространств на группах Карно и квазиконформные отображения // Сиб. мат. журн. 2015. Т. 56, № 5. С. 989–1029.*

Классические результаты об обратных отображениях

Пусть D *— открытое множество в* $\mathbb{R}^n$*,*
$\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ *— иньективное отображение класса* C^1*, и*
$\det D\varphi(x) \neq 0$*.*
Тогда $\varphi(D) = D'$ *— открытое множество,*
$\psi = \varphi^{-1} : D' \to D$ *— класса* C^1 *и* $\det D\varphi^{-1}(y) \neq 0$*.*

Классические результаты об обратных отображениях

*Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$,
$\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ — иньективное отображение класса C^1, и
$\det D\varphi(x) \neq 0$.
Тогда $\varphi(D) = D'$ — открытое множество,
$\psi = \varphi^{-1} : D' \to D$ — класса C^1 и $\det D\varphi^{-1}(y) \neq 0$.*

Обратный к квазиконформному также квазиконформен.

Другими словами, обратный к гомеоморфизму $\varphi : D \to D'$ класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ с условием $|D\varphi(x)|^n \leq KJ(x,\varphi)$ обладает теми же свойствами.

Классические результаты об обратных отображениях

Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$,
$\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ — инъективное отображение класса C^1, и
$\det D\varphi(x) \neq 0$.
Тогда $\varphi(D) = D'$ — открытое множество,
$\psi = \varphi^{-1} : D' \to D$ — класса C^1 и $\det D\varphi^{-1}(y) \neq 0$.

Обратный к квазиконформному также квазиконформен.

Другими словами, обратный к гомеоморфизму $\varphi : D \to D'$ класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ с условием $|D\varphi(x)|^n \leq KJ(x, \varphi)$ обладает теми же свойствами.

Обратный к квазиизометрическому также квазиизометричен.

Классические результаты об обратных отображениях

Пусть D — открытое множество в $\mathbb{R}^n$,
$\varphi : D \to \mathbb{R}^n$ — иньективное отображение класса C^1, и
$\det D\varphi(x) \neq 0$.
Тогда $\varphi(D) = D'$ — открытое множество,
$\psi = \varphi^{-1} : D' \to D$ — класса C^1 и $\det D\varphi^{-1}(y) \neq 0$.

Обратный к квазиконформному также квазиконформен.

Другими словами, обратный к гомеоморфизму $\varphi : D \to D'$ класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}$ с условием $|D\varphi(x)|^n \leq KJ(x, \varphi)$ обладает теми же свойствами.

Обратный к квазиизометрическому также квазиизометричен.

Какие свойства регулярности имеет гомеоморфизм, обратный к соболевскому?

Две функции искажения.

$$D\varphi(x)\,\mathrm{adj}\,D\varphi(x) = \mathrm{Id}\det D\varphi(x).$$

Две функции искажения.

$$D\varphi(x)\,\mathrm{adj}\,D\varphi(x) = \mathrm{Id}\det D\varphi(x).$$

Для $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ определим

$$D \ni x \mapsto \mathcal{K}_{\varphi,p}(x) = \begin{cases} \dfrac{|\,\mathrm{adj}\,D\varphi(x)|}{|J(x,\varphi)|^{\frac{n-1}{p}}} & \text{при } x \in D \setminus Z, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{1}$$

(здесь $Z = \{x \in D \mid \det D\varphi(x) = 0\}$).

Две функции искажения.

$$D\varphi(x)\,\mathrm{adj}\,D\varphi(x) = \mathrm{Id}\det D\varphi(x).$$

Для $\varphi : D \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D)$ определим

$$D \ni x \mapsto \mathcal{K}_{\varphi,p}(x) = \begin{cases} \dfrac{|\,\mathrm{adj}\,D\varphi(x)|}{|J(x,\varphi)|^{\frac{n-1}{p}}} & \text{при } x \in D \setminus Z, \\ 0 & \text{в остальных случаях} \end{cases} \tag{1}$$

(здесь $Z = \{x \in D \mid \det D\varphi(x) = 0\}$).

$\psi : D' \to \mathbb{R}^n$, $D \subset \mathbb{R}^n$, класса $W^1_{1,\mathrm{loc}}(D')$ положим

$$D' \ni y \mapsto K_{\psi,q'}(y) = \begin{cases} \dfrac{|D\psi(y)|}{|J(y,\psi)|^{\frac{1}{q'}}} & \text{при } y \in D' \setminus Z', \\ 0 & \text{в остальных случаях.} \end{cases} \tag{2}$$

Описание гомеоморфизмов, обратных к соболевским

Теорема. Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, $n-1 \leq q \leq \infty$,
2) φ имеет конечное коискажение: $\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z,
3) $\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \in L_\varrho(D)$, где $\frac{1}{\varrho} = \frac{n-1}{q} - \frac{n-1}{p}$, $n-1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Описание гомеоморфизмов, обратных к соболевским

Теорема. Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, $n-1 \leq q \leq \infty$,
2) φ имеет конечное коискажение: $\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z,
3) $\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \in L_\varrho(D)$, где $\frac{1}{\varrho} = \frac{n-1}{q} - \frac{n-1}{p}$, $n-1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{p',\mathrm{loc}}(D')$, где $p' = \frac{p}{p-n+1}$,
5) φ^{-1} имеет конечное искажениех,
6) $K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \in L_\varrho(D')$, где $q' = \frac{q}{q-n+1}$.

Теорема. Пусть гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ обладает следующими свойствами:

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(D)$, $n-1 \leq q \leq \infty$,
2) φ имеет конечное коискажение: $\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ почти всюду на множестве Z,
3) $\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \in L_\varrho(D)$, где $\frac{1}{\varrho} = \frac{n-1}{q} - \frac{n-1}{p}$, $n-1 \leq q \leq p \leq \infty$.

Тогда обратный гомеоморфизм имеет свойства:

4) $\varphi^{-1} \in W^1_{p',\mathrm{loc}}(D')$, где $p' = \frac{p}{p-n+1}$,
5) φ^{-1} имеет конечное искажениеx,
6) $K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \in L_\varrho(D')$, где $q' = \frac{q}{q-n+1}$.

Более того, $\|K_{\varphi^{-1},q'}(\cdot) \mid L_\varrho(D')\| = \|\mathcal{K}_{\varphi,p}(\cdot) \in L_\varrho(D)\|$.

Определение.

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ класса $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющий неравенству $|D\varphi(x)|^n \leq K|J(x,\varphi)|$ для почти всех $x \in D$, называется *квазиконформным*.

СЛЕДСТВИЯ:

Определение.

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ класса $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющий неравенству $|D\varphi(x)|^n \leq K|J(x,\varphi)|$ для почти всех $x \in D$, называется *квазиконформным*.

1 (Новое определение квазиконформности). Пусть $\varphi : D \to D'$ — гомеоморфизм класса $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$.

Если для некоторого неотрицательного числа $M \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\operatorname{adj} D\varphi(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq M|J(x,\varphi)|$ для почти всех $x \in D$, то отображение φ квазиконформно.

Определение.

Гомеоморфизм $\varphi : D \to D'$ класса $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$, удовлетворяющий неравенству $|D\varphi(x)|^n \leq K|J(x,\varphi)|$ для почти всех $x \in D$, называется *квазиконформным*.

1 (Новое определение квазиконформности). Пусть $\varphi : D \to D'$ — гомеоморфизм класса $\varphi \in W^1_{n,\mathrm{loc}}(D)$.

Если для некоторого неотрицательного числа $M \in \mathbb{R}$ выполняется неравенство $|\operatorname{adj} D\varphi(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq M|J(x,\varphi)|$ для почти всех $x \in D$, то отображение φ квазиконформно.

Таким образом, из $\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ п. вс. на Z вытекает $D\varphi(x) = 0$ п. вс. на Z.

Публикации:

1) *Водопьянов С. К. Об обратимости гомеоморфизмов классов Соболева // Докл. АН. 2008. Т. 423, № 5. С. 592-596.*
2) *Водопьянов С. К. Отображения с конечным коисказжением и классы функций Соболева // Докл. АН. 2011. Т. 440, № 3. С. 301-305.*
3) *Водопьянов С. К. О регулярности отображений, обратных к соболевским // Матем. сб. 2012. Т. 203, № 10. С. 3-32.*

Применения: (совместно с Молчановой А. О.)

Краевая задача стационарной теории упругости

$$\begin{cases} -\mathrm{div}\, T_R(x) = f(x), & x \in \Omega, \\ T(x)n = g(x), & x \in \Gamma_1, \\ \varphi(x) = \varphi_0(x), & x \in \Gamma_0, \end{cases}$$

$T_R(x)$ — первый тензор напряжений Пиолы-Кирхгофа,
$f : \Omega \to \mathbb{R}^3$ — массовые силы,
$g : \Gamma_1 \to \mathbb{R}^3$ — поверхностные силы,
$\Gamma_0 \cup \Gamma_1 = \partial\Omega$.

Задача минимизации функционала

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi), \; \varphi \in \mathcal{A}$$

Задача минимизации функционала

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi), \ \varphi \in \mathcal{A}$$

$$I(\psi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\psi(x))\, dx - \left(\int\limits_{\Omega} f\psi\, dx + \int\limits_{\Gamma} g\psi\, ds \right)$$

Поливыпуклость

$\mathbb{M}^n$ — множество $(n \times n)$-матриц.

Функция $W : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ называется **поливыпуклой,** если существует выпуклая функция $G : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F > 0$, выполнено равенство

$$G(F, \operatorname{adj} F, \det F) = W(F)$$

$\mathbb{M}^n$ — множество $(n \times n)$-матриц.

Функция $W : \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ называется **поливыпуклой**, если существует выпуклая функция $G : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F > 0$, выполнено равенство

$$G(F, \operatorname{adj} F, \det F) = W(F)$$

$$W(F) = \det F$$

Метод Болла

$\{\varphi_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала I на множестве $\mathcal{A}$.

Метод Болла

$\{\varphi_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала I на множестве $\mathcal{A}$.

Коэрцитивное неравенство

φ

$\{\varphi_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала I на множестве $\mathcal{A}$.

Коэрцитивное неравенство

Поливыпуклость

φ

$$I(\varphi) \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} I(\varphi_k)$$

Метод Болла

$\{\varphi_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала I на множестве $\mathcal{A}$.

Коэрцитивное неравенство	φ
Поливыпуклость	$I(\varphi) \leq \varliminf\limits_{k\to\infty} I(\varphi_k)$
Барьерность	$\varphi \in \mathcal{A}$

Метод Болла

$\{\varphi_k\}$ — минимизирующая последовательность функционала I на множестве $\mathcal{A}$.

Коэрцитивное неравенство	φ
Поливыпуклость	$I(\varphi) \leq \underline{\lim}_{k\to\infty} I(\varphi_k)$
Барьерность	$\varphi \in \mathcal{A}$
Гомеоморфизм на границе и барьерность	φ — гомеоморфизм

Теорема Дж. Болл, 1981

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ — ограниченная область с липшицевой границей, $W : \Omega \times \mathbb{M}^n \to \mathbb{R}$ — функция запасённой энергии, которая со свойствами:

(a) Поливыпуклость:

существует выпуклая функция $G(x, \cdot) : \mathbb{M}^n \times \mathbb{M}^n \times \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ такая, что для всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F > 0$, выполнено равенство

$$G(x, F, \operatorname{adj} F, \det F) = W(x, F) \quad \text{п. вс. в } \Omega.$$

(b) Коэрцитивность:

существуют постоянные $\alpha > 0$, $p > n$, $q > n$, $r > 1$, $s > \frac{(n-1)q}{q-n}$ и функция $g \in L_1(\Omega)$ такие, что

$$W(x, F) \geq \alpha(||F||^p + ||\operatorname{adj} F||^q + (\det F)^r + (\det F)^{-s}) + g(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F > 0$.

Теорема Дж. Болл, 1981

Пусть $\Gamma = \partial\Omega$, $\varphi_0 : \Gamma \to \mathbb{R}^n$ — измеримое отображение, множество

$$\mathcal{A} = \{\psi \in W_p^1(\Omega),\ \operatorname{adj} D\psi \in L_q(\Omega),\ J(x,\psi) \in L_r(\Omega),$$
$$\psi|_\Gamma = \varphi_0|_\Gamma \text{ п. вс. на } \Gamma,\ J(x,\psi) > 0 \text{ п. вс. в } \Omega\}$$

непустое. Здесь $\varphi_0 \in W_p^1(\Omega)$, $\varphi_0 : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — гомеоморфизм.

Определим функционал

$$I(\psi) = \int\limits_{\Omega} W(x, D\psi(x))\, dx$$

и предположим, что $\inf\limits_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.

Определим функционал

$$I(\psi) = \int_{\Omega} W(x, D\psi(x))\, dx$$

и предположим, что $\inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.

Тогда существует по крайней мере один гомеоморфизм $\varphi : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ из $\mathcal{A}$ такой, что

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi).$$

$\psi \in W_p^1(\Omega)$, $p > n$

$\psi \in W_n^1(\Omega)$

$\psi \in W_p^1(\Omega), \ p > n$

$\operatorname{adj} D\psi \in L_q(\Omega), \ q > n$

$\psi \in W_n^1(\Omega)$

$\psi \in W^1_p(\Omega)$, $p > n$

$\operatorname{adj} D\psi \in L_q(\Omega)$, $q > n$

$J(x,\psi) > 0$ п. вс. в Ω

$\psi \in W^1_n(\Omega)$

$J(x,\psi) \geq 0$ п. вс. в Ω

$\psi \in W_p^1(\Omega),\ p > n$

$\operatorname{adj} D\psi \in L_q(\Omega),\ q > n$

$J(x,\psi) > 0$ п. вс. в Ω

$$\lim_{\det F \to 0_+} W(x,F) = \infty$$

$\psi \in W_n^1(\Omega)$

$J(x,\psi) \geq 0$ п. вс. в Ω

$\psi \in W^1_p(\Omega),\ p > n$

$\operatorname{adj} D\psi \in L_q(\Omega),\ q > n$

$J(x,\psi) > 0$ п. вс. в Ω

$$\lim_{\det F \to 0_+} W(x,F) = \infty$$

$$W(x,F) \geq \alpha(\|F\|^p + \\ + \|\operatorname{adj} F\|^q + \\ + (\det F)^r + (\det F)^{-s})$$

$\psi \in W^1_n(\Omega)$

$J(x,\psi) \geq 0$ п. вс. в Ω

$$W(x,F) \geq \alpha(\|F\|^n + \\ + (\det F)^r)$$

Компенсация за ослабление условий:

$$\int\limits_{\Omega} \left(\frac{|D\psi(x)|^n}{J(x,\psi)} \right)^s dx < M, \; s > n-1$$

(b) Коэрцитивность:

существуют постоянные $\alpha > 0$, $r > 1$ и функция $g \in L_1(\Omega)$ такие, что

$$W(x, F) \geq \alpha(||F||^n + (\det F)^r) + g(x)$$

для почти всех $x \in \Omega$ и всех $F \in \mathbb{M}^n$, $\det F \geq 0$.

Теорема

Пусть $\Gamma = \partial\Omega$, $\varphi_0 \in W_n^1(\Omega)$

$$\mathcal{A} = \{\psi \in W_n^1(\Omega),\ J(x,\psi) \in L_r(\Omega),\ \int\limits_{\Omega} \left(\frac{|D\psi(x)|^n}{J(x,\psi)}\right)^s dx < M,$$

$$s > n-1,\ \psi|_\Gamma = \varphi_0|_\Gamma \text{ п. вс. на } \Gamma,\ J(x,\psi) \geq 0 \text{ п. вс. в } \Omega\}$$

Теорема

Пусть выполнены условия **(a)** и **(b)** на функцию $W(x, F)$, $\varphi_0 : \overline{\Omega} \to \overline{\Omega'}$ — гомеоморфизм, множество $\mathcal{A}$ непусто и $\inf\limits_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi) < \infty$.
Тогда существует по крайней мере один гомеоморфизм $\varphi \in \mathcal{A}$ такое, что

$$I(\varphi) = \inf_{\psi \in \mathcal{A}} I(\psi).$$

Пример

$$W(F) = a\,\mathrm{tr}(F^T F)^{\frac{3}{2}} + c(\det F)^r$$

Публикации:

1) *Ball J. M. Convexity conditions and existence theorems in nonlinear elasticity // Arch. Ration. Mech. and Analys, V. 63, 337–403 (1977).*
2) *Водопьянов С. К., Молчанова А.О. Вариационные задачи нелинейной теории упругости в некоторых классах отображений с конечным искажением // Докл. АН. 2015. Т. 465, № 5. С. 523–526*
3) *Molchanova A. O., Vodopyanov S. K. Variational problems of nonlinear elasticity in certain classes of mappings with finite distortion // ArXive: 1508.06825v1*

Отображения с ограниченным искажением

Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется отображением с ограниченным искажением, если

$$|Df(x)|^n \leq KJ(x, f) \text{ п. вс. в } x \in \Omega,$$

где K — постоянная, $J(x, f) = \det Df(x)$.

Отображения с ограниченным искажением

Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется отображением с ограниченным искажением, если

$$|Df(x)|^n \leq KJ(x,f) \text{ п. вс. в } x \in \Omega,$$

где K — постоянная, $J(x,f) = \det Df(x)$.

Аналитические функции суть таковые при $K = 1$; $n = 2$.

Отображения с ограниченным искажением

Отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ класса $W^1_{n,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, называется отображением с ограниченным искажением, если

$$|Df(x)|^n \leq KJ(x,f) \text{ п. вс. в } x \in \Omega,$$

где K — постоянная, $J(x,f) = \det Df(x)$.

Аналитические функции суть таковые при $K = 1$; $n = 2$.

В 1967 Ю. Г. Решетняк доказал, что

всякое непостоянное отображение с ограниченным искажением непрерывно открыто дискретно.

Новое определение

Пусть $\theta : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — локально интегрируемая функция: $0 < \theta < \infty$ п. вс.

- Непрерывное открытое и дискретное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным θ-весовым (p, q)-искажением*, $n - 1 \leq q \leq p < \infty$, если:

Новое определение

Пусть $\theta : \mathbb{R}^n \to [0, \infty]$ — локально интегрируемая функция: $0 < \theta < \infty$ п. вс.

- Непрерывное открытое и дискретное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным* θ*-весовым* (p, q)*-искажением*, $n - 1 \le q \le p < \infty$, если:
- $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $J(x, f) \ge 0$, и f имеет конечное искажение: $Df(x) = 0$ п. вс. на множестве $Z = \{x \in \Omega : J(x, f) = 0\}$;

Пусть $\theta : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — локально интегрируемая функция: $0 < \theta < \infty$ п. вс.

- Непрерывное открытое и дискретное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным θ-весовым (p,q)-искажением*, $n-1 \le q \le p < \infty$, если:
- $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $J(x,f) \ge 0$, и f имеет конечное искажение: $Df(x) = 0$ п. вс. на множестве $Z = \{x \in \Omega : J(x,f) = 0\}$;
- функция θ-весового (p,q)-искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K^{\theta}_{p,q}(x,f) = \begin{cases} \dfrac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df|(x)}{J(x,f)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x,f) \ne 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \tag{3}$$

принадлежит $L_\kappa(\Omega)$, где $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\kappa = \infty$, если $p = q$).

Новое определение

Пусть $\theta : \mathbb{R}^n \to [0,\infty]$ — локально интегрируемая функция: $0 < \theta < \infty$ п. вс.

- Непрерывное открытое и дискретное отображение $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ называется *отображением с ограниченным θ-весовым (p,q)-искажением*, $n-1 \leq q \leq p < \infty$, если:
- $f \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $J(x,f) \geq 0$, и f имеет конечное искажение: $Df(x) = 0$ п. вс. на множестве $Z = \{x \in \Omega : J(x,f) = 0\}$;
- функция θ-весового (p,q)-искажения

$$\Omega \ni x \mapsto K^{\theta}_{p,q}(x,f) = \begin{cases} \dfrac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)|Df|(x)}{J(x,f)^{\frac{1}{p}}}, & \text{если } J(x,f) \neq 0, \\ 0 & \text{иначе,} \end{cases} \tag{3}$$

  принадлежит $L_\kappa(\Omega)$, где $\frac{1}{\kappa} = \frac{1}{q} - \frac{1}{p}$ ($\kappa = \infty$, если $p = q$).
- При $\theta \equiv 1$, $q = p = n$ имеем отображение с ограниченным искажением. Если дополнительно f — гомеоморфизм, то f квазиконформно.

Определение.

Весовое пространство Соболева $L^1_q(\Omega,\omega)$, $1 \le q < \infty$, состоит из локально интегрируемых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$,

имеющих слабый градиент и конечную полунорму

$$\|f \mid L^1_q(\Omega,\omega)\| = \Big(\int\limits_{\Omega} |\nabla f|^q(x)\omega(x)\,dx\Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Определение.

Весовое пространство Соболева $L^1_q(\Omega, \omega)$, $1 \leq q < \infty$, состоит из локально интегрируемых функций $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$,

имеющих слабый градиент и конечную полунорму

$$\|f \mid L^1_q(\Omega, \omega)\| = \Big(\int\limits_{\Omega} |\nabla f|^q(x)\omega(x)\, dx \Big)^{\frac{1}{q}}.$$

Все весовые функции предполагаются локально интегрируемыми.

Аналитическая мотивация

Теорема. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : (\Omega, \theta) \to \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор

$f^* : L^1_p(\Omega') \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega, \theta)$, $n - 1 \leq q \leq p < \infty$, весовых пространств Соболева по правилу $f^*(g) = g \circ f$ тогда и только тогда, когда f имеет θ-весовое (p, q)-искажение.

Аналитическая мотивация

Теорема. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : (\Omega, \theta) \to \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор

$f^* : L^1_p(\Omega') \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega, \theta)$, $n - 1 \leq q \leq p < \infty$, весовых пространств Соболева по правилу $f^*(g) = g \circ f$ тогда и только тогда, когда f имеет θ-весовое (p, q)-искажение.

Более того, $\alpha_{p,q} \Big\| K^\theta_q(\cdot, f) \mid L_\kappa(\Omega') \Big\| \leq \|f^*\| \leq \Big\| K^\theta_q(\cdot, f) \mid L_\kappa(\Omega') \Big\|$.

Аналитическая мотивация

Теорема. Сохраняющий ориентацию гомеоморфизм $f : (\Omega, \theta) \to \Omega'$ индуцирует ограниченный оператор

$f^* : L^1_p(\Omega') \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}}(\Omega') \to L^1_q(\Omega, \theta)$, $n - 1 \leq q \leq p < \infty$, весовых пространств Соболева по правилу $f^*(g) = g \circ f$ тогда и только тогда, когда f имеет θ-весовое (p, q)-искажение.

Более того, $\alpha_{p,q} \big\| K^\theta_q(\cdot, f) \mid L_\kappa(\Omega') \big\| \leq \|f^*\| \leq \big\| K^\theta_q(\cdot, f) \mid L_\kappa(\Omega') \big\|$.

REMARK: При $p = q = n$, $\theta \equiv 1$ мы получаем квазиконфомрные отображения.

Геометрическая мотивировка

Риманово многообразие $\mathbb{M}$ имеет ограниченную геометрию, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что каждое $B(x,\varepsilon) \subset \mathbb{M}$ диффеоморфно $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ с равномерно ограниченной постоянной Липшица.

Теорема (Pierre Pansu установил этот результат для диффеоморфных f.) Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ — римановы многообразия с ограниченной геометрией, и предположим, что $\mathbb{N}$ удовлетворяет изопериметрическому неравенству порядка $d > n$:

$$\mathrm{Area}(\partial\Omega)^{d/(d-1)} \geq \mathrm{const.}\ \mathrm{Vol}(\Omega)$$

для всех компактных областей $\Omega \subset \mathbb{N}$ объема ≥ 1.
Если $d\frac{n-1}{d-1} < s < n$, то всякий гомеоморфизм $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{M},\mathbb{N})$ с ограниченным (s,s)-искажением – грубая квазиизометрия.

Геометрическая мотивировка

Риманово многообразие $\mathbb{M}$ имеет ограниченную геометрию, если существует $\varepsilon > 0$ такое, что каждое $B(x,\varepsilon) \subset \mathbb{M}$ диффеоморфно $B(0,1) \subset \mathbb{R}^n$ с равномерно ограниченной постоянной Липшица.

Теорема (Pierre Pansu установил этот результат для диффеоморфных f.) Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ — римановы многообразия с ограниченной геометрией, и предположим, что $\mathbb{N}$ удовлетворяет изопериметрическому неравенству порядка $d > n$:

$$\text{Area}(\partial\Omega)^{d/(d-1)} \geq \text{const.}\ \text{Vol}(\Omega)$$

для всех компактных областей $\Omega \subset \mathbb{N}$ объема ≥ 1.
Если $d\frac{n-1}{d-1} < s < n$, то всякий гомеоморфизм $f \in W^{1,1}_{loc}(\mathbb{M},\mathbb{N})$ с ограниченным (s,s)-искажением – грубая квазиизометрия.

Последнее означает, что $0 < \alpha^{-1} \leq \frac{d_{\mathbb{N}}(f(x),f(y))}{d_{\mathbb{M}}(x,y)} \leq \alpha$ для всех $x,y \in \mathbb{M}$ с $d_{\mathbb{M}}(x,y) \geq 1$.

Для отображений

с ограниченным θ-весовым (p, q)-искажением установлены

1) емкостные оценки,
2) модульные оценки,
3) доказаны теоремы об устранимых особенностях
4) и многие другие результаты.

Применение: Классификация многообразий

Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ — римановы многообразия топологической размерности $n \geq 2$, θ — весовая функция на $\mathbb{M}$ и $n - 1 < q \leq p < \infty$.

Применение: Классификация многообразий

Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ — римановы многообразия топологической размерности $n \geq 2$, θ — весовая функция на $\mathbb{M}$ и $n-1 < q \leq p < \infty$.

Риманово многообразие $\mathbb{M}$ называется (ω, r)-параболическим,

если $\operatorname{cap}_{\omega,r}(D, \mathbb{M}) = 0$ для любого компактного множества $D \subset \mathbb{M}$, где $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$, $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, $q > n-1$.

Применение: Классификация многообразий

Пусть $\mathbb{M}$ и $\mathbb{N}$ — римановы многообразия топологической размерности $n \geq 2$, θ — весовая функция на $\mathbb{M}$ и $n-1 < q \leq p < \infty$.

Риманово многообразие $\mathbb{M}$ называется (ω, r)-параболическим,

если $\operatorname{cap}_{\omega,r}(D, \mathbb{M}) = 0$ для любого компактного множества $D \subset \mathbb{M}$, где $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$, $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, $q > n-1$.

Theorem. *Пусть $f : \mathbb{M} \to \mathbb{N}$ — многобразие с ограниченным θ-весовым (p,q)-искажением, $n-1 < q \leq p < \infty$.*

Тогда если $\mathbb{M}$ (ω, r)-параболично, то N s-параболично при $r = \frac{q}{q-(n-1)}$, $s = \frac{p}{p-(n-1)}$, $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$.

Публикации:

1) *Решетняк Ю. Г. Пространственные отображения с ограниченным искажением. Н.: Наука, 1982.*
2) *Водопьянов С. К., Ухлов А. Д. Операторы суперпозиции в пространствах Соболева //* Известия ВУЗов. Математика. *2002. Т. 46, № 10. С. 11–33.*
3) *Водопьянов С. К. О регулярности функции Полецкого при слабых аналитических предположениях исходного отображения //* Докл. АН. *2014. Т. 455, № 2. С. 130–134.*
4) *Байкин А. Н., Водопьянов С. К. Емкостные оценки, теоремы типа Лиувилля и об устранении особенностей для отображений с ограниченным* (p,q)*-искажением //* Сиб. матем. ж. *2015. Т. 56, № 2. С. 290–321.*
4) *Трямкин М. В. Модульные неравенства для отображений с ограниченным весовым* (p,q)*-искажением //* Сиб. матем. ж. *56, № 6 (2015).*

Спасибо за внимание!