О вычислимо перечислимых отношениях эквивалентности и булевых алгебрах

Н. А. Баженов

Институт математики им. С. Л. Соболева СО РАН (Новосибирск)

20 октября 2017 г.

(I) Вычислимо перечислимые отношения эквивалентности:

a. Вычислимая сводимость $\leq_c$.
b. Вычислимо перечислимые булевы алгебры.

(II) Степени бивложимой категоричности.

(III) Вычислимые по Тьюрингу вложения.

(I) Вычислимо перечислимые отношения эквивалентности

В данном разделе все рассматриваемые отношения эквивалентности заданы на $\mathbb{N}$.

Говорят, что отношение эквивалентности E **вычислимо сводится** к отношению эквивалентности F, если существует вычислимая функция $f(x)$ со следующим свойством: для любых $x, y \in \mathbb{N}$ условия $(x\ E\ y)$ и $(f(x)\ F\ f(y))$ эквивалентны. Используется следующее обозначение — $f\colon E \leq_c F$.

Отношение эквивалентности E называют **предполным**, если существует всюду определённая вычислимая функция $g(x)$, такая что для любого $e \in \mathbb{N}$ выполнено: если $\varphi_e(g(e))$ определено, то $(\varphi_e(g(e))\ E\ g(e))$.

Предполные отношения эквивалентности изучались А. И. Мальцевым и Ю. Л. Ершовым. Эти отношения связаны с теорией нумераций.

Предполные в.п. отношения эквивалентности

В.п. отношение эквивалентности E называют **универсальным**, если для любого в.п. отношения эквивалентности F выполнено $F \leq_c E$.

Говорят, что отношения эквивалентности E и F *вычислимо изоморфны*, если существует вычислимая перестановка $f\colon E \leq_c F$.

- Любое предполное в.п. отношение эквивалентности является универсальным [К. Бернарди, А. Сорби 1983].
- Все предполные в.п. отношения эквивалентности вычислимо изоморфны [А. Лахлан 1987].

Слабо предполные в.п. отношения эквивалентности

Определение (С. А. Бадаев 1991)

Отношение эквивалентности E является **слабо предполным**, если существует частично вычислимая функция fix, такая что для любого $e \in \mathbb{N}$ выполнено:

$$(\varphi_e \text{ всюду определена}) \;\Rightarrow\; [\mathrm{fix}(e){\downarrow} \;\&\; (\varphi_e(\mathrm{fix}(e)) \; E \; \mathrm{fix}(e))].$$

- Существует бесконечно много попарно не вычислимо изоморфных, слабо предполных в.п. отношений эквивалентности [С. А. Бадаев 1991].
- Существует бесконечно много попарно не вычислимо изоморфных, слабо предполных, универсальных в.п. отношений эквивалентности. Аналогичный результат верен и для неуниверсальных отношений [С. А. Бадаев, А. Сорби 2016].

Тёмные и светлые в.п. отношения эквивалентности

Определение (А. Сорби, У. Эндрюс)

Говорят, что отношение эквивалентности E является **тёмным** (dark), если оно несравнимо относительно сводимости $\leq_c$ с тождественным отношением Id. Если E не является тёмным, то его называют **светлым** (light).

Пример. Пусть W — это в.п. множество. Определим в.п. отношение эквивалентности

$$E(W) := \{(x,x) : x \in \mathbb{N}\} \cup \{(x,y) : x, y \in W\}.$$

- Нетрудно проверить, что $E(W)$ является тёмным в том и только том случае, когда множество W простое.
- Интервал $([\deg(Id), \deg(E(\emptyset'))]; \leq_c)$ изоморфен частичному порядку $([\mathbf{0}_1, \mathbf{0}_1']; \leq_1)$. [У. Эндрюс, С. Лемпп, Дж. Миллер, К. М. Нг, Л. Сан Мауро, А. Сорби 2014]

В.п. отношение эквивалентности E называют **минимальным**, если E имеет бесконечно много классов и выполнено следующее свойство: если $F \leq_c E$, то либо $F \equiv_c E$, либо F имеет лишь конечное число классов.

- Существует бесконечно много минимальных, слабо предполных, тёмных в.п. отношений эквивалентности [К. Ш. Абешев, С. А. Бадаев, Б. С. Калмурзаев, У. Эндрюс].
- Существует ω-цепь, состоящая из слабо предполных, светлых в.п. отношений эквивалентности: $E_0 <_c E_1 <_c E_2 <_c \dots$ [С. А. Бадаев].

Теорема (Б., Калмурзаев)

Пусть E — тёмное в.п. отношение эквивалентности. Тогда существует слабо предполное, тёмное в.п. отношение эквивалентности F, такое что $E \leq_c F$.

Следствие

Пусть E — тёмное в.п. отношение эквивалентности. Тогда существует ω-цепь над E, состоящая из слабо предполных, тёмных в.п. отношений эквивалентности:
$E <_c F_0 <_c F_1 <_c F_2 <_c \dots$.

Отношения эквивалентности в иерархии Ершова

Пусть $a \in O$, $|a|_O \geq 2$ и $\Gamma \in \{\Sigma^{-1}_a, \Pi^{-1}_a\}$. Говорим, что E является *универсальным* Γ*-отношением эквивалентности*, если $E \in \Gamma$ и для любого Γ-отношения эквивалентности F выполнено $F \leq_c E$.

Предложение (Б., Калмурзаев)

Пусть $a \in O$, $|a|_O \geq 2$ и $\Gamma \in \{\Sigma^{-1}_a, \Pi^{-1}_a\}$. Тогда существует универсальное Γ-отношение эквивалентности.

Отметим, что для любого $n \geq 2$ существует универсальное Σ^0_n, но не существует универсального Π^0_n отношения эквивалентности [Е. Яновски, Р. Миллер, К. М. Нг, А. Нис 2014].

Вычислимо перечислимые линейные порядки

Пусть $\trianglelefteq$ — это в.п. предпорядок (т.е. в.п. рефлексивное транзитивное отношение на $\mathbb{N}$). Зададим в.п. отношение эквивалентности

$$E^{\trianglelefteq} := \{(x,y) : (x \trianglelefteq y) \& (y \trianglelefteq x)\}.$$

Если фактор-структура $(\mathbb{N}, \trianglelefteq)/E^{\trianglelefteq}$ линейно упорядочена, то говорят, что $\trianglelefteq$ есть **в.п. линейный порядок**.

В.п. линейный порядок Q называется **универсальным**, если $P \leq_c Q$ для произвольного в.п. линейного порядка P.

Предложение (Б., Калмурзаев)

Существует универсальный в.п. линейный порядок P_U.

Вычислимо перечислимые линейные порядки

Будем называть в.п. линейный порядок **тёмным**, если P несравним относительно сводимости $\leq_c$ ни с каким в.п. линейным порядком Q, таким что $E^Q = Id$. Если P не является тёмным, то будем говорить, что P **светлый**.

Предложение (Б., Калмурзаев)

- Существует ω-цепь тёмных в.п. линейных порядков: $P_0 <_c P_1 <_c P_2 <_c \dots$.
- Существует ω-цепь светлых в.п. линейных порядков: $Q_0 <_c Q_1 <_c Q_2 <_c \dots$.
- Существует счётная антицепь (относительно $\leq_c$) в.п. линейных порядков $\{R_k\}_{k\in\mathbb{N}}$, такая что $E^{R_k} = Id$ для каждого k.

Пусть E — отношение эквивалентности. Говорят, что:

- функция $f(x_1, \dots, x_n)$ *сохраняет* E, если

$$(x_1\ E\ y_1) \& \dots \& (x_n\ E\ y_n) \to [f(\bar{x})\ E\ f(\bar{y})];$$

- предикат $P(x_1, \dots, x_m)$ *сохраняет* E, если

$$(x_1\ E\ y_1) \& \dots \& (x_m\ E\ y_m) \to [P(\bar{x}) \leftrightarrow P(\bar{y})].$$

В.п. отношение эквивалентности E **реализует** структуру $\mathcal{A}$ конечного языка L, если существует L-структура $\mathcal{B} = (\mathbb{N}; P_0^{\mathcal{B}}, \dots, P_m^{\mathcal{B}}; f_0^{\mathcal{B}}, \dots, f_n^{\mathcal{B}}; c_0^{\mathcal{B}}, \dots, c_p^{\mathcal{B}})$, такая что:

- предикаты $P_i^{\mathcal{B}}$ в.п., а функции $f_j^{\mathcal{B}}$ вычислимы;
- все предикаты и функции $\mathcal{B}$ сохраняют E;
- фактор-структура $\mathcal{B}/E$ изоморфна $\mathcal{A}$.

Примеры.

a) Если W — в.п. множество и $E(W)$ реализует некоторый линейный порядок, то W не может быть ни гипергиперпростым, ни креативным, ни простым и при этом не гиперпростым. Существуют гиперпростые, не гипергиперпростые W, реализующие линейные порядки [А. Гаврюшкин, Б. Хусаинов, Ф. Стефан 2016].

b) Для любого ненулевого $n \in \mathbb{N}$ существует в.п. отношение эквивалентности E_n, реализующее только один линейный порядок $(\omega + 1 + \omega^*) \cdot n$ [А. Гаврюшкин, Б. Хусаинов, Ф. Стефан 2016].

c) Если в.п. отношение E реализует линейные порядки η и ω, то E вычислимо [Е. Фокина, Б. Хусаинов, П. Семухин, Д. Турецки 2016].

d) Существует невычислимое в.п. отношение эквивалентности E, реализующее η и ω^2 [Е. Фокина, Б. Хусаинов, П. Семухин, Д. Турецки 2016].

K-сводимость на в.п. отношениях эквивалентности

Определение (А. Гаврюшкин, С. Джайн, Б. Хусаинов, Ф. Стефан 2014)

Пусть K — это класс структур конечного языка L. Говорят, что в.п. отношение эквивалентности E K-**сводится** к в.п. отношению эквивалентности F (обозначается через $E \leq_K F$), если любая структура $\mathcal{A} \in K$, реализуемая E, также реализуется и F.

Например, для класса линейных порядков LO известны следующие результаты [А. Гаврюшкин, Б. Хусаинов, Ф. Стефан 2016]:

- Существует ω-цепь: $E_0 <_{LO} E_1 <_{LO} E_2 <_{LO} \dots$.
- Существует ω^*-цепь: $F_0 >_{LO} F_1 >_{LO} F_2 >_{LO} \dots$.
- Существует счётная антицепь относительно $\leq_{LO}$.

В.п. отношения, реализующие булевы алгебры

Предложение (Б., Мустафа, Стефан, Ямалеев 2017)

Если в.п. отношение эквивалентности E реализует некоторую булеву алгебру $\mathcal{B}$, то для любого $x \in \mathbb{N}$ верно $[x]_E \equiv_m E$.

Следствие

Пусть W — кобесконечное в.п. множество.

- Если W вычислимо, то $E(W)$ реализует в точности все бесконечные вычислимые булевы алгебры.
- Если W невычислимо, то $E(W)$ не реализует никаких булевых алгебр.

Замечание

Порядок $\leq_{BA}$ на в.п. отношениях эквивалентности имеет наименьшую степень и бесконечно много максимальных степеней.

Замечание

Если E — это слабо предполное в.п. отношение эквивалентности, то E не реализует булевых алгебр.

Теорема (Б., Мустафа, Стефан, Ямалеев 2017)

Пусть E — это в.п. отношение эквивалентности. Тогда существует в.п. отношение эквивалентности E^{Int}, такое что $E^{Int} \equiv_{tt} E$ и выполнено следующее условие: если E реализует линейный порядок $\mathcal{L}$, имеющий наименьший элемент, то E^{Int} реализует интервальную булеву алгебру $Int(\mathcal{L})$.

Известно следующее: если в.п. отношение эквивалентности E реализует некоторую группу (в языке $\{\times, (\cdot)^{-1}\}$), то для любого $x \in \mathbb{N}$ верно $[x]_E \equiv_m E$.

Предложение (Б., Мустафа, Стефан, Ямалеев 2017)

Существует в.п. отношение эквивалентности E, такое что:

- E невычислимо и $[x]_E \equiv_m E$ для каждого x;
- E реализует абелеву группу;
- E не реализует булевых алгебр.

(II) Бивложимая категоричность

Говорят, что структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ **бивложимы** (обозначается через $\mathcal{A} \approx \mathcal{B}$), если существуют изоморфные вложения $f\colon \mathcal{A} \hookrightarrow \mathcal{B}$ и $g\colon \mathcal{B} \hookrightarrow \mathcal{A}$. Пару (f, g) будем называть **бивложением** $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$.

Пусть $\mathbf{d}$ — тьюрингова степень. Вычислимая структура $\mathcal{A}$ **$\mathbf{d}$-вычислимо бивложимо категорична**, если для любой вычислимой структуры $\mathcal{B} \approx \mathcal{A}$, существует $\mathbf{d}$-вычислимое бивложение $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$.

Если $\mathbf{d}$ — это наименьшая степень, относительно которой $\mathcal{A}$ $\mathbf{d}$-вычислимо бивложимо категорична, то $\mathbf{d}$ называют **степенью бивложимой категоричности** $\mathcal{A}$.

Пусть α — вычислимый ординал. Структура $\mathcal{A}$ **относительно Δ^0_α бивложимо категорична**, если для любой структуры $\mathcal{B} \approx \mathcal{A}$ существует $\Delta^0_\alpha(\mathcal{A} \oplus \mathcal{B})$-вычислимое бивложение из $\mathcal{A}$ в $\mathcal{B}$.

Нетрудно показать, что *любая* счётная структура эквивалентности $\mathcal{E}$ бивложима с некоторой вычислимой структурой эквивалентности. Говорят, что $\mathcal{E}$ имеет ограниченный характер, если размеры всех её конечных классов ограничены.

Теорема (Б., Фокина, Россеггер, Сан Мауро 2017)

Пусть $\mathcal{E}$ — это вычислимая структура эквивалентности. Тогда:

1. $\mathcal{E}$ вычислимо бивложимо категорична $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ относительно Δ^0_1 бивложимо категорична $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ имеет ограниченный характер и конечное число бесконечных классов.
2. $\mathcal{E}$ Δ^0_2 бивложимо категорична $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ относительно Δ^0_2 бивложимо категорична $\Leftrightarrow$ $\mathcal{E}$ имеет конечное число бесконечных классов.
3. $\mathcal{E}$ всегда относительно Δ^0_3 бивложимо категорична.

Более того, $\mathcal{E}$ имеет степень бивложимой категоричности $\mathbf{d} \in \{\mathbf{0}, \mathbf{0}', \mathbf{0}''\}$.

Булевы алгебры и линейные порядки

Теорема (Б., Фокина, Россеггер, Сан Мауро)

1. Вычислимая булева алгебра $\mathcal{B}$ вычислимо бивложимо категорична в том и только том случае, когда $\mathcal{B}$ конечна.
2. Вычислимый линейный порядок $\mathcal{L}$ вычислимо бивложимо категоричен в том и только том случае, когда $\mathcal{L}$ конечен.

Сильно локально конечные графы

Неориентированный граф называют *сильно локально конечным*, если любая его компонента связности конечна.

Нетрудно показать, что любой сильно локально конечный граф является относительно Δ^0_2 категоричным (в классическом смысле).

Предложение (Б., Фокина, Россеггер, Сан Мауро)

Существует вычислимый, сильно локально конечный граф, не гиперарифметически бивложимо категоричный.

Теорема (Б., Фокина, Россеггер, Сан Мауро)

Индексное множество Δ^0_2 бивложимо категоричных, сильно локально конечных графов Π^1_1 полно.

(III) Вычислимые по Тьюрингу вложения

В данном разделе:

- Рассматриваются только вычислимые языки.
- Для каждой рассматриваемой структуры $\mathcal{S}$ её носитель есть подмножество $\mathbb{N}$.
- Для каждого рассматриваемого класса структур K все структуры из K имеют один и тот же язык. Кроме того, считается, что класс K замкнут относительно изоморфизма (по модулю соглашения на носители структур).

Вычислимые по Тьюрингу вложения

Пусть K_1 и K_2 — классы структур, E_i — отношение эквивалентности на классе K_i. **Вычислимым по Тьюрингу вложением** (**tc-вложением**) из (K_1, E_1) в (K_2, E_2) называют тьюрингов оператор $\Phi = \varphi_e$ со следующими свойствами:

1. Для любой структуры $\mathcal{A} \in K_1$ существует структура $\mathcal{B} \in K_2$, такая что $\chi_{D(\mathcal{B})} = \varphi_e^{D(\mathcal{A})}$. Эта структура $\mathcal{B}$ обозначается через $\Phi(\mathcal{A})$.
2. Для любых структур $\mathcal{A}_0, \mathcal{A}_1 \in K_1$ выполнено: $\mathcal{A}_0 E_1 \mathcal{A}_1$ в том и только том случае, когда $\Phi(\mathcal{A}_0) E_2 \Phi(\mathcal{A}_1)$.

Запись $(K_1, E_1) \leq_{tc} (K_2, E_2)$ означает, что существует tc-вложение из (K_1, E_1) в (K_2, E_2). Отношение $\leq_{tc}$ является предпорядком.

TC-универсальность относительно отношения E

Пусть E — это отношение эквивалентности на классе структур (например, отношение изоморфизма $\cong$). Класс K называется tc-**универсальным относительно** E, если для любого класса K_1 имеет место $(K_1, E) \leq_{tc} (K, E)$.

Следующие классы tc-универсальны относительно $\cong$:

Неориентированные графы, линейные порядки, поля произвольной фиксированной характеристики p, 2-ступенно нильпотентные группы [Х. Фридман, Л. Стенли 1989]; вещественно замкнутые поля [Д. Маркер]; полимодальные булевы алгебры [Б. 2016].

Σ^c_α эквивалентность

Пусть α — вычислимый ординал, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — структуры языка L. Говорят, что структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ Σ^c_α-**эквивалентны** ($\mathcal{A} \sim^c_\alpha \mathcal{B}$), если для любого Σ^c_α-предложения ψ выполнено:

$$\mathcal{A} \models \psi \;\Leftrightarrow\; \mathcal{B} \models \psi$$

Σ^c_α эквивалентность

Пусть α — вычислимый ординал, $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ — структуры языка L. Говорят, что структуры $\mathcal{A}$ и $\mathcal{B}$ Σ^c_α-**эквивалентны** ($\mathcal{A} \sim^c_\alpha \mathcal{B}$), если для любого Σ^c_α-предложения ψ выполнено:

$$\mathcal{A} \models \psi \iff \mathcal{B} \models \psi$$

Известно [Е. Фокина, Дж. Найт, А. Мельников, С. Куинн, К. Сафрански 2011], что класс всех абелевых p-групп не tc-универсален относительно $\cong$.

Теорема (С. ВанДенДрише 2013)

Пусть α — вычислимый ординал, такой что $\alpha \geq 2$. Тогда класс всех абелевых p-групп tc-универсален относительно $\sim^c_\alpha$.

Проблема. Какие результаты о tc-вложимости можно получить для естественных подклассов класса всех линейных порядков?

Линейные порядки

Проблема. Какие результаты о tc-вложимости можно получить для естественных подклассов класса всех линейных порядков?

Известно, что класс всех ординалов ORD не tc-универсален относительно $\cong$.

Предложение

Для любого вычислимого ординала α класс ORD не является tc-универсальным относительно $\sim^c_\alpha$.

Класс WMB

Напомним, что для линейного порядка $\mathcal{L}$ **отношение блока** $B(\mathcal{L})$ задаётся по правилу:

$$B(\mathcal{L}) = \{(a,b) : a,b \in \mathcal{L} \text{ и } \exists^{<\infty} x[(a \leq_{\mathcal{L}} x \leq_{\mathcal{L}} b) \vee (b \leq_{\mathcal{L}} x \leq_{\mathcal{L}} a)]\}.$$

Определим класс линейных порядков WMB следующим образом: линейный порядок $\mathcal{L}$ принадлежит WMB в том и только том случае, когда фактор-структура $\mathcal{L}/B(\mathcal{L})$ есть вполне упорядоченное множество.

Теорема (Б. 2017)

- Класс WMB не является tc-универсальным относительно изоморфизма.
- Пусть α — вычислимый ординал, такой что $\alpha \geq 5$. Тогда класс WMB tc-универсален относительно $\sim^c_\alpha$.

Изоморфизм и бивложимость

Предложение

1. Класс всех неориентированных графов UG tc-универсален относительно отношения бивложимости $\approx$.
2. Класс всех линейных порядков LO не tc-универсален относительно $\approx$.

Спасибо за внимание.