УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА.
СЕРИЯ ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИЕ НАУКИ

2016, Т. 158, кн. 1 ISSN 1815-6088 (Print)
С. 40–50 ISSN 2500-2198 (Online)

УДК 519.65

ПОЛИНОМИАЛЬНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ФУНКЦИИ ДВУХ ПЕРЕМЕННЫХ С БОЛЬШИМИ ГРАДИЕНТАМИ В ПОГРАНИЧНЫХ СЛОЯХ

А.И. Задорин, Н.А. Задорин

Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал, г. Омск, 644043, Россия

Аннотация

Исследован вопрос интерполяции функции двух переменных с большими градиентами. Предполагается, что область является прямоугольной и у ее границ интерполируемая функция имеет большие градиенты. Такая функция соответствует решению задачи для эллиптического уравнения с малыми параметрами при старших производных. Известно, что в случае такой функции и равномерной сетки погрешность полиномиальной интерполяции может быть порядка $O(1)$. Предложено использовать интерполяцию Лагранжа с k_1 узлами интерполяции по x и k_2 узлами интерполяции по y на кусочно-равномерной сетке Шишкина, сгущающейся в пограничных слоях. Получена оценка погрешности интерполяционной формулы, равномерная по малому параметру. Представлены результаты численных экспериментов.

Ключевые слова: функция двух переменных, большие градиенты, полиномиальная интерполяция, сетка Шишкина, оценка погрешности

Введение

На основе сингулярно возмущенных задач моделируются конвективно диффузионные процессы с преобладающей конвекцией. Известно, что решение сингулярно возмущенной краевой задачи имеет большие градиенты в области пограничного слоя. Применение классических разностных схем для численного решения таких задач приводит к погрешностям порядка $O(1)$ [1]. Вопрос построения разностных схем для задач с пограничным слоем исследуется довольно широко, начиная с работы А.М. Ильина [1], в которой построена разностная схема, подогнанная к погранслойной составляющей, и работы Н.С. Бахвалова [2], в которой предложено применять классическую разностную схему на сетке, сгущающейся в пограничном слое.

Вопрос построения интерполяционных формул для функций с большими градиентами в пограничном слое также актуален. В [3] показано, что применение многочлена Лагранжа для интерполяции функций с большими градиентами в пограничном слое может приводить к погрешностям порядка $O(1)$. В [4] предложено выделить аддитивным образом погранслойную составляющую и строить интерполяционные формулы, точные на известной с точностью до множителя погранслойной составляющей. В [4] для функции одной переменной построены интерполяционные формулы с двумя и тремя узлами интерполяции. В [5] построена интерполяционная формула с произвольно заданным числом узлов интерполяции. Доказано, что при определенных ограничениях порядок точности построенной формулы равен $k-1$, где k – число узлов интерполяции.

В [6] исследован вопрос применения многочлена Лагранжа для интерполяции функции одной переменной с погранслойной составляющей на кусочно-равномерной сетке Шишкина [7], сгущающейся в пограничном слое. Получена оценка погрешности, равномерная по возмущающему параметру ε.

Остановимся на вопросе интерполяции функции двух переменных с большими градиентами в экспоненциальных пограничных слоях [7]. В [8] для интерполяции такой функции построена формула, точная на погранслойных составляющих интерполируемой функции. Доказано, что погрешность интерполяции не зависит от погранслойных составляющих и их производных. В настоящей работе исследуем другой подход: применение классической полиномиальной интерполяции на сетке, сгущающейся в пограничных слоях. Докажем, что погрешность интерполяции является равномерной по возмущающему параметру ε на сетке Шишкина [7]. Отметим, что сетка Шишкина широко применяется при численном решении сингулярно возмущенных краевых задач.

В дальнейшем под C и C_j будем подразумевать положительные постоянные, не зависящие от параметра ε и числа узлов сетки.

1. Построение и анализ интерполяционной формулы

Для построения и анализа точности разностных схем для сингулярно возмущенных задач в [7] предложено осуществить декомпозицию решений этих задач на регулярную и сингулярные составляющие. Сингулярные составляющие отвечают за большие градиенты решения дифференциальной задачи в пограничных слоях.

Мы предлагаем использовать такую декомпозицию для оценки погрешности полиномиальных интерполяционных формул при интерполяции функций с большими градиентами в пограничных слоях.

Итак, пусть интерполируемая функция $u(x,y)$ имеет представление

$$u(x,y) = p(x,y) + E_1(x,y) + E_2(x,y) + E_{1,2}(x,y), \tag{1.1}$$

где $(x,y) \in \overline{\Omega}$, $\overline{\Omega} = [0,1]^2$. Предполагаем, что в представлении (1.1) функция $p(x,y)$ – регулярная составляющая с ограниченными производными до некоторого порядка, функции E_1, E_2, $E_{1,2}$ – погранслойные составляющие, имеющие большие градиенты в пограничных слоях. Все составляющие в представлении (1.1) в явном виде не заданы, но известны оценки производных для всех составляющих.

Будем предполагать, что для некоторой постоянной C справедливы оценки

$$\left|\frac{\partial^i p(x,y)}{\partial x^i}\right| \le C, \quad \left|\frac{\partial^j p(x,y)}{\partial y^j}\right| \le C, \quad 0 \le i \le k_1, \quad 0 \le j \le k_2, \tag{1.2a}$$

$$\left|\frac{\partial^i E_1(x,y)}{\partial x^i}\right| \le \frac{C}{\varepsilon^i}\, e^{-\alpha x/\varepsilon}, \quad \left|\frac{\partial^j E_1(x,y)}{\partial y^j}\right| \le C, \quad 0 \le i \le k_1, \quad 0 \le j \le k_2, \tag{1.2b}$$

$$\left|\frac{\partial^i E_2(x,y)}{\partial x^i}\right| \le C, \quad \left|\frac{\partial^j E_2(x,y)}{\partial y^j}\right| \le \frac{C}{\varepsilon^j}\, e^{-\beta y/\varepsilon}, \quad 0 \le i \le k_1, \quad 0 \le j \le k_2, \tag{1.2c}$$

$$\left|\frac{\partial^i E_{1,2}(x,y)}{\partial x^i}\right| \le \frac{C}{\varepsilon^i} e^{-\alpha x/\varepsilon}, \ \left|\frac{\partial^j E_{1,2}(x,y)}{\partial y^j}\right| \le \frac{C}{\varepsilon^j} e^{-\beta y/\varepsilon}, \ 0 \le i \le k_1, \ 0 \le j \le k_2, \tag{1.2d}$$

где $\alpha > 0$, $\beta > 0$ отделены от нуля, $\varepsilon \in (0,1]$. В соответствии с $(1.2b)$–$(1.2d)$ производные функций $E_1(x,y)$, $E_2(x,y)$, $E_{1,2}(x,y)$ в погранслойных областях неограниченно растут при уменьшении параметра ε.

В соответствии, например, с [7, 9] представление (1.1) с ограничениями (1.2) справедливо для решения эллиптической задачи с регулярными пограничными слоями:

$$\varepsilon u_{xx} + \varepsilon u_{yy} + a_1(x)u_x + a_2(y)u_y - c(x,y)u = f(x,y), \quad (x,y) \in \Omega;$$

$$u(x,y) = g(x,y), \quad (x,y) \in \Gamma, \tag{1.3}$$

где $\Gamma = \overline{\Omega} \diagdown \Omega,\ a_1,\ a_2,\ c,\ f,\ g$ – достаточно гладкие функции,

$$a_1(x) \geq \alpha > 0, \quad a_2(y) \geq \beta > 0, \quad c(x,y) \geq 0, \quad \varepsilon > 0.$$

Представление (1.1) предполагает достаточную гладкость решения $u(x,y)$, при этом гладкость зависит от накладываемых условий согласования на коэффициенты задачи (1.3). С увеличением k_1, k_2 условия согласования принимают все более сложный вид.

Остановимся на вопросе построения двумерной полиномиальной интерполяционной формулы для функции вида (1.1).

Зададим в области $\overline{\Omega}$ кусочно-равномерную сетку [7]

$$\overline{\Omega}^h = \{(x_i, y_j),\ i = 0, 1, \ldots, N_1,\ j = 0, 1, \ldots, N_2\},$$

$$h_i = x_i - x_{i-1}, \quad \tau_j = y_j - y_{j-1}, \quad x_0 = 0, x_{N_1} = 1, \quad y_0 = 0, \quad y_{N_2} = 1,$$

причем

$$h_i = \frac{2\sigma_1}{N_1}, \quad 1 \leq i \leq \frac{N_1}{2}, \quad h_i = \frac{2(1-\sigma_1)}{N_1}, \quad \frac{N_1}{2} < i \leq N_1, \tag{1.4}$$

$$\tau_j = \frac{2\sigma_2}{N_2}, \quad 1 \leq j \leq \frac{N_2}{2}, \quad \tau_j = \frac{2(1-\sigma_2)}{N_2}, \quad \frac{N_2}{2} < j \leq N_2, \tag{1.5}$$

параметры $\sigma_1,\ \sigma_2$ зададим ниже.

Интерполяцию функции $u(x,y)$ будем проводить в прямоугольных ячейках, содержащих k_1 узлов интерполяции по x и k_2 узлов интерполяции по y. Для того чтобы шаги сетки в этих ячейках были постоянными, предполагаем, что N_1 кратно $2(k_1 - 1)$ и N_2 кратно $2(k_2 - 1)$. Тогда исходная область $\overline{\Omega}$ будет разбита на ячейки, целиком находящиеся или в пограничных слоях, или вне их.

Зададим в (1.4), (1.5)

$$\sigma_1 = \min\Big\{\frac{1}{2}, \frac{k_1\varepsilon}{\alpha} \ln N_1\Big\}, \quad \sigma_2 = \min\Big\{\frac{1}{2}, \frac{k_2\varepsilon}{\beta} \ln N_2\Big\}. \tag{1.6}$$

Итак, предполагаем, что область $\overline{\Omega}$ разбита на непересекающиеся ячейки:

$$\overline{\Omega} = \bigcup_{\substack{i=0,\, k_1-1, \ldots, N_1-k_1+1 \\ j=0,\, k_2-1, \ldots, N_2-k_2+1}} \Omega_{i,j}, \quad \Omega_{i,j} = [x_i, x_{i+k_1-1}] \times [y_j, y_{j+k_2-1}]. \tag{1.7}$$

Построим полиномиальную интерполяционную формулу для функции $u(x,y)$ в произвольной ячейке $\Omega_{i,j}$.

Для этого сначала при заданном y осуществляем интерполяцию по x на основе многочлена Лагранжа:

$$L_{k_1}(u,x,y) = \sum_{m=0}^{k_1-1} u(x_{i+m}, y) \prod_{\substack{n=0 \\ n \neq m}}^{k_1-1} \frac{x - x_{i+n}}{x_{i+m} - x_{i+n}}. \tag{1.8}$$

Аналогичным образом задаем интерполяцию по y :

$$L_{k_2}(u,x,y)=\sum_{m=0}^{k_2-1}u(x,y_{j+m})\prod_{\substack{n=0\\n\neq m}}^{k_2-1}\frac{y-y_{j+n}}{y_{j+m}-y_{j+n}}.$$

Учитывая (1.8), получаем формулу двумерной полиномиальной интерполяции:

$$L_{k_1,k_2}(u,x,y)=L_{k_2}(L_{k_1}(u,x,y),x,y). \tag{1.9}$$

Лемма 1. *Пусть $h_{i,x}$, $h_{j,y}$ – шаги сетки $\overline{\Omega}^h$ по x и y в ячейке $\Omega_{i,j}$. Тогда существует такая постоянная C_1, что справедлива оценка*

$$\left|L_{k_1,k_2}(u,x,y)-u(x,y)\right|\le C_1\left[M_{k_1,x}h_{i,x}^{k_1}+M_{k_2,y}h_{j,y}^{k_2}\right],\quad (x,y)\in\Omega_{i,j}, \tag{1.10}$$

где

$$M_{k_1,x}=\max_{(x,y)\in\Omega_{i,j}}\left|\frac{\partial^{k_1}u(x,y)}{\partial x^{k_1}}\right|,\quad M_{k_2,y}=\max_{(x,y)\in\Omega_{i,j}}\left|\frac{\partial^{k_2}u(x,y)}{\partial y^{k_2}}\right|. \tag{1.11}$$

Доказательство. Учитывая (1.9), получаем оценку

$$\left|L_{k_1,k_2}(u,x,y)-u(x,y)\right|\le\left|L_{k_2}(L_{k_1}(u,x,y)-u(x,y),x,y)\right|+\left|L_{k_2}(u,x,y)-u(x,y)\right|. \tag{1.12}$$

Для интерполяционного многочлена Лагранжа на равномерной сетке справедливы оценки погрешности [10, с. 86]

$$\left|L_{k_1}(u,x,y)-u(x,y)\right|\le\frac{M_{k_1,x}h_{i,x}^{k_1}}{4k_1},\quad \left|L_{k_2}(u,x,y)-u(x,y)\right|\le\frac{M_{k_2,y}h_{j,y}^{k_2}}{4k_2}, \tag{1.13}$$

$$(x,y)\in\Omega_{i,j}$$

и устойчивости [11, с. 27]

$$\left|L_{k_2}(u,x,y)\right|\le\max_{x,y}|u(x,y)|\,2^{k_2-1}. \tag{1.14}$$

Подставляя (1.13), (1.14) в (1.12), получаем

$$\left|L_{k_1,k_2}(u,x,y)-u(x,y)\right|\le\frac{M_{k_1,x}h_{i,x}^{k_1}}{4k_1}2^{k_2-1}+\frac{M_{k_2,y}h_{j,y}^{k_2}}{4k_2}. \tag{1.15}$$

Из (1.15) следует оценка (1.10). Лемма доказана. □

Во всей области $\overline{\Omega}$ проведем интерполяцию функции $u(x,y)$ на основе интерполяции по всем ячейкам $\Omega_{i,j}$. Для каждой ячейки $\Omega_{i,j}$ имеем оценку погрешности интерполяции (1.10). Докажем для построенной сетки с условиями (1.4)–(1.6), что интерполяционная формула (1.9) имеет погрешность, равномерную по параметру ε.

Теорема 1. *Существует такая постоянная C, что справедлива оценка погрешности*

$$\left|L_{k_1,k_2}(u,x,y)-u(x,y)\right|\le C\left[\left(\frac{\ln N_1}{N_1}\right)^{k_1}+\left(\frac{\ln N_2}{N_2}\right)^{k_2}\right],\quad (x,y)\in\Omega_{i,j}, \tag{1.16}$$

$\Omega_{i,j}$ – произвольная ячейка из (1.7).

Доказательство. Учитываем представление (1.1) для функции $u(x,y)$ и оценим погрешность интерполяции на каждой составляющей. В силу (1.2 a), (1.10) для некоторой постоянной C_2 получаем

$$\big|L_{k_1,k_2}(p,x,y) - p(x,y)\big| \le C_2\big[h_{i,x}^{k_1} + h_{j,y}^{k_2}\big], \quad (x,y) \in \Omega_{i,j},$$

следовательно,

$$\big|L_{k_1,k_2}(p,x,y) - p(x,y)\big| \le C_3\big[N_1^{-k_1} + N_2^{-k_2}\big], \quad (x,y) \in \Omega_{i,j}. \tag{1.17}$$

Для оценки погрешности на погранслойных составляющих рассмотрим случаи, когда сетка равномерна и когда она неравномерна.

Пусть сетка неравномерна и

$$\sigma_1 = \frac{k_1\varepsilon}{\alpha}\ln N_1, \quad \sigma_2 = \frac{k_2\varepsilon}{\beta}\ln N_2.$$

Оценим отдельно величину $|L_{k_1,k_2}(E_1,x,y) - E_1(x,y)|$, когда интервал $[x_i, x_{i+k_1-1}]$ находится в пограничном слое по x и вне его.

Пусть $x_{i+k_1-1} \le \sigma_1$. Учитывая (1.2 b), (1.6), из (1.10) для некоторой постоянной C_4 получаем

$$\big|L_{k_1,k_2}(E_1,x,y) - E_1(x,y)\big| \le C_4\left[\left(\frac{\ln N_1}{N_1}\right)^{k_1} + \frac{1}{N_2^{k_2}}\right], \quad (x,y) \in \Omega_{i,j}. \tag{1.18}$$

Пусть $x_i \ge \sigma_1$. Тогда в соответствии с (1.2 b), (1.6)

$$|E_1(x,y)| \le \frac{C}{N_1^{k_1}}. \tag{1.19}$$

В силу оценки устойчивости (1.14) имеем

$$|L_{k_1,k_2}(E_1,x,y)| \le \max_{x,y\in\Omega_{i,j}} |E_1(x,y)| 2^{k_1+k_2-2}, \quad (x,y) \in \Omega_{i,j}, \tag{1.20}$$

откуда, принимая во внимание (1.19), (1.20), для некоторой постоянной C_5 следует, что

$$\big|L_{k_1,k_2}(E_1,x,y) - E_1(x,y)\big| \le \big|L_{k_1,k_2}(E_1,x,y)\big| + \big|E_1(x,y)\big| \le \frac{C_5}{N_1^{k_1}}. \tag{1.21}$$

Оценки (1.18), (1.21) объединим в одну:

$$\big|L_{k_1,k_2}(E_1,x,y) - E_1(x,y)\big| \le C_6\left[\left(\frac{\ln N_1}{N_1}\right)^{k_1} + \frac{1}{N_2^{k_2}}\right], \quad (x,y) \in \Omega_{i,j}. \tag{1.22}$$

Аналогично нетрудно проверить, что

$$\big|L_{k_1,k_2}(E_2,x,y) - E_2(x,y)\big| \le C_7\left[\left(\frac{\ln N_2}{N_2}\right)^{k_2} + \frac{1}{N_1^{k_1}}\right], \quad (x,y) \in \Omega_{i,j}. \tag{1.23}$$

Остается оценить $|L_{k_1,k_2}(E_{1,2},x,y) - E_{1,2}(x,y)|$.

Если $x_i \ge \sigma_1$, то $|E_{1,2}(x,y)| \le C_8 N_1^{-k_1}$. Если же $y_j \ge \sigma_2$, то $|E_{1,2}(x,y)| \le$ $\le C_9 N_2^{-k_2}$. Следовательно, в обоих случаях

$$\big|L_{k_1,k_2}(E_{1,2},x,y) - E_{1,2}(x,y)\big| \le C\left[\frac{1}{N_1^{k_1}} + \frac{1}{N_2^{k_2}}\right], \quad (x,y) \in \Omega_{i,j}. \tag{1.24}$$

Наконец, пусть $x_{i+k_1-1} \le \sigma_1$, $y_{j+k_2-1} \le \sigma_2$. Подставляя (1.2d), (1.6) в (1.10), выводим

$$\left|L_{k_1,k_2}(E_{1,2},x,y)-E_{1,2}(x,y)\right| \le C\left[\left(\frac{\ln N_1}{N_1}\right)^{k_1}+\left(\frac{\ln N_2}{N_2}\right)^{k_2}\right], \quad (x,y)\in\Omega_{i,j}. \quad (1.25)$$

Тогда из (1.1) с учетом (1.17), (1.22)–(1.25) вытекает оценка (1.16).

Пусть теперь сетка является равномерной,

$$\sigma_1=\frac{1}{2}, \quad \sigma_2=\frac{1}{2}.$$

Тогда

$$\varepsilon \ge \frac{\alpha}{2k_1\ln N_1}, \quad \varepsilon \ge \frac{\beta}{2k_2\ln N_2}. \quad (1.26)$$

Остановимся на оценке $|L_{k_1,k_2}(E_1,x,y)-E_1(x,y)|$. Учитывая (1.2$b$) в (1.10), имеем

$$\left|L_{k_1,k_2}(E_1,x,y)-E_1(x,y)\right| \le C_{10}\left[\frac{1}{(N_1\varepsilon)^{k_1}}+\frac{1}{(N_2\varepsilon)^{k_2}}\right], \quad (x,y)\in\Omega_{i,j}, \quad (1.27)$$

Откуда в силу (1.26), (1.27), получаем требуемую оценку (1.16).

Анализ погрешности на составляющих $E_2(x,y)$, $E_{1,2}(x,y)$ проводится аналогично.

Другие случаи, когда, например, $\sigma_1=1/2$, $\sigma_2\ne 1/2$, рассматриваются аналогично. Теорема доказана. □

2. Результаты численных экспериментов

Рассмотрим функцию

$$u(x,y)=\left(1-e^{-x/\varepsilon}\right)\left(1-e^{-2y/\varepsilon}\right)(1-x)(1-y)+\cos\frac{\pi x}{2}\,e^{-y}, \ \varepsilon>0, \ x,\, y\in[0,1], \quad (2.1)$$

представимую в виде (1.1) при

$$p(x,y)=\cos\frac{\pi x}{2}\,e^{-y}+(1-x)(1-y), \quad E_1(x,y)=-(1-x)(1-y)e^{-x/\varepsilon},$$

$$E_2(x,y)=-(1-x)(1-y)e^{-2y/\varepsilon}, \quad E_{1,2}(x,y)=(1-x)(1-y)e^{-(x+2y)/\varepsilon}.$$

Будем предполагать, что $N_1=N_2=N$, $k_1=k_2=k$. Тогда в соответствии с (1.16) для погрешности интерполяции справедлива оценка

$$|L_{k,k}(u,x,y)-u(x,y)| \le C\left(\frac{\ln N}{N}\right)^k, \quad (x,y)\in\overline{\Omega}. \quad (2.2)$$

В (2.2) учитывается, что точка (x,y) принадлежит одной из ячеек $\Omega_{i,j}$, в которой осуществляется интерполяция. Будем вычислять погрешность в средних точках сеточных интервалов: $\widetilde{x}_i=(x_{i-1}+x_i)/2$, $\widetilde{y}_j=(y_{j-1}+y_j)/2$, $i,j=1,2,\dots,N$.

В табл. 1 в случае $k=2$ и равномерной сетки приведены величины погрешности

$$\Delta_{\varepsilon,N}=\max_{i,j}\left|L_{2,2}(u,\widetilde{x}_i,\widetilde{y}_j)-u(\widetilde{x}_i,\widetilde{y}_j)\right|$$

при различных значениях ε и N. Из табл. 1 следует, что при $\varepsilon\le h$ погрешность интерполяции не понижается с уменьшением шага h.

Табл. 1

Погрешность полиномиальной интерполяционной формулы на равномерной сетке, $k_1 = k_2 = 2$

ε	N				
	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	$1.34e-3$	$3.37e-4$	$8.47e-5$	$2.12e-5$	$5.31e-6$
2^{-3}	$5.71e-2$	$1.80e-2$	$5.07e-3$	$1.35e-3$	$3.48e-4$
2^{-4}	$1.65e-1$	$6.36e-2$	$2.01e-2$	$5.69e-3$	$1.51e-3$
2^{-5}	$3.38e-1$	$1.77e-1$	$6.88e-2$	$2.17e-2$	$6.14e-3$
2^{-6}	$5.82e-1$	$3.53e-1$	$1.86e-1$	$7.22e-2$	$2.28e-2$
2^{-7}	$7.02e-1$	$5.92e-1$	$3.60e-1$	$1.92e-1$	$7.44e-2$
2^{-8}	$7.19e-1$	$7.17e-1$	$5.98e-1$	$3.66e-1$	$1.95e-1$

Табл. 2

Погрешность полиномиальной интерполяционной формулы на сетке Шишкина, $k_1 = k_2 = 2$

ε	N				
	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	$1.34e-3$	$3.37e-4$	$8.47e-5$	$2.12e-5$	$5.31e-6$
2^{-3}	$3.28e-2$	$1.41e-2$	$5.08e-3$	$1.35e-3$	$3.48e-4$
2^{-4}	$4.20e-2$	$1.86e-2$	$6.75e-3$	$2.22e-3$	$7.44e-4$
2^{-5}	$4.19e-2$	$1.85e-2$	$7.27e-3$	$2.61e-3$	$8.80e-4$
2^{-6}	$4.22e-2$	$1.86e-2$	$7.31e-3$	$2.62e-3$	$8.85e-4$
2^{-7}	$4.35e-2$	$1.87e-2$	$7.34e-3$	$2.64e-3$	$8.90e-4$
2^{-8}	$4.45e-2$	$1.92e-2$	$7.39e-3$	$2.64e-3$	$8.92e-4$

Табл. 3

Вычисленный порядок точности полиномиальной интерполяционной формулы на сетке Шишкина, $k_1 = k_2 = 2$

ε	N			
	2^4	2^5	2^6	2^7
1	2.0	2.0	2.0	2.0
2^{-3}	1.2	1.5	1.9	2.0
2^{-4}	1.2	1.5	1.6	1.6
2^{-5}	1.2	1.4	1.5	1.6
2^{-6}	1.2	1.4	1.5	1.6
$CR_{2,N}$	1.4	1.5	1.6	1.65

В табл. 2 в случае $k = 2$ и сетки Шишкина $\overline{\Omega}^h$ приведены величины погрешности $\Delta_{\varepsilon,N}$ при различных значениях ε и N. В табл. 3 для данного случая приведен порядок точности, для заданного N вычисленный по формуле

$$M_{\varepsilon,N} = \log_2 \frac{\Delta_{\varepsilon,N}}{\Delta_{\varepsilon,2N}}.$$

В нижней строке табл. 3 приведен теоретический порядок точности $CR_{2,N}$, соответствующий оценке (2.2) и для заданного k вычисляемый в виде

$$CR_{k,N} = k \log_2 \frac{2 \ln N}{\ln(2N)}.$$

Табл. 4

Погрешность полиномиальной интерполяционной формулы на равномерной сетке, $k_1 = k_2 = 3$

ε	N				
	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	$8.90e{-5}$	$1.14e{-5}$	$1.45e{-6}$	$1.82e{-7}$	$2.79e{-8}$
2^{-3}	$2.07e{-2}$	$3.88e{-3}$	$6.02e{-4}$	$8.40e{-5}$	$1.11e{-5}$
2^{-4}	$8.84e{-2}$	$2.29e{-2}$	$4.30e{-3}$	$6.65e{-4}$	$9.26e{-5}$
2^{-5}	$2.29e{-1}$	$9.48e{-2}$	$2.46e{-2}$	$4.60e{-3}$	$7.10e{-4}$
2^{-6}	$4.52e{-1}$	$2.40e{-1}$	$9.94e{-2}$	$2.57e{-2}$	$4.80e{-3}$
2^{-7}	$5.69e{-1}$	$4.59e{-1}$	$2.44e{-1}$	$1.02e{-1}$	$2.64e{-2}$
2^{-8}	$5.85e{-1}$	$5.80e{-1}$	$4.63e{-1}$	$2.48e{-1}$	$1.04e{-1}$

Табл. 5

Погрешность полиномиальной интерполяционной формулы на сетке Шишкина, $k_1 = k_2 = 3$

ε	N				
	2^4	2^5	2^6	2^7	2^8
1	$8.90e{-5}$	$1.14e{-5}$	$1.45e{-6}$	$1.82e{-7}$	$2.29e{-8}$
2^{-3}	$2.06e{-2}$	$3.88e{-3}$	$6.02e{-4}$	$8.40e{-5}$	$1.11e{-5}$
2^{-4}	$2.79e{-2}$	$8.42e{-3}$	$2.24e{-3}$	$5.10e{-4}$	$9.26e{-5}$
2^{-5}	$2.99e{-2}$	$9.92e{-3}$	$2.65e{-3}$	$6.06e{-4}$	$1.11e{-4}$
2^{-6}	$2.98e{-2}$	$9.88e{-3}$	$2.64e{-3}$	$6.02e{-4}$	$1.22e{-4}$
2^{-7}	$2.98e{-2}$	$9.88e{-3}$	$2.64e{-3}$	$6.02e{-4}$	$1.22e{-4}$
2^{-8}	$2.98e{-2}$	$9.90e{-3}$	$2.64e{-3}$	$6.02e{-4}$	$1.22e{-4}$

Табл. 6

Вычисленный порядок точности полиномиальной интерполяционной формулы на сетке Шишкина, $k_1 = k_2 = 3$

ε	N			
	2^4	2^5	2^6	2^7
1	3.0	3.0	3.0	2.9
2^{-3}	2.4	2.7	2.8	2.9
2^{-4}	1.7	1.9	2.2	2.5
2^{-5}	1.6	1.9	2.2	2.5
2^{-6}	1.6	1.9	2.2	2.3
2^{-7}	1.6	1.9	2.2	2.3
$CR_{3,N}$	2.0	2.2	2.3	2.4

При малых значениях ε вычисленный порядок точности согласуется с теоретическим порядком точности, что соответствует оценке (2.2).

Остановимся на численном анализе интерполяционной формулы (1.9) в случае $k = 3$.

В табл. 4 в случае $k = 3$ и равномерной сетки приведены величины погрешности

$$\Delta_{\varepsilon,N} = \max_{i,j} \left| L_{3,3}(u, \widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j) - u(\widetilde{x}_i, \widetilde{y}_j) \right|$$

при различных значениях ε и N. Видно, что при $\varepsilon \leq h$ точность интерполяции не повышается с уменьшением шага h.

В табл. 5 в случае $k = 3$ и сетки Шишкина приведены величины погрешности $\Delta_{\varepsilon,N}$ при различных значениях ε и N. В табл. 6 для этого случая приведен вычисленный порядок точности $M_{\varepsilon,N}$. В нижней строке табл. 6 приведен теоретический порядок точности $CR_{3,N}$. При малых значениях ε вычисленный порядок точности согласуется с теоретическим порядком точности, что соответствует полученной оценке (2.2).

Заключение

Исследован вопрос полиномиальной интерполяции функции двух переменных с большими градиентами в пограничных слоях в предположении, что область является прямоугольной и у ее границ интерполируемая функция имеет большие градиенты. Интерполируемая функция соответствует решению задачи для эллиптического уравнения с малыми параметрами при старших производных. Предложено использовать интерполяцию Лагранжа с k_1 узлами интерполяции по x и k_2 узлами интерполяции по y на кусочно-равномерной сетке Шишкина, сгущающейся в пограничных слоях. Доказано, что при этом оценка погрешности интерполяционной формулы равномерна по малому параметру. Проведены соответствующие вычислительные эксперименты.

Благодарности. Работа выполнена при частичной финансовой поддержке РФФИ (проекты № 15-01-06584, 16-01-00727).

Литература

1. *Ильин А.М.* Разностная схема для дифференциального уравнения с малым параметром при старшей производной // Матем. заметки. – 1969. – Т. 6, № 2. – С. 237–248.
2. *Бахвалов Н.С.* К оптимизации методов решения краевых задач при наличии пограничного слоя // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 1969. – Т. 9, № 4. – С. 841–859.
3. *Задорин А.И.* Метод интерполяции для задачи с пограничным слоем // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2007. – Т. 10, № 3. – С. 267–275.
4. *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Сплайн-интерполяция на равномерной сетке функции с погранслойной составляющей // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2010. – Т. 50, № 2. – С. 221–233.
5. *Zadorin A.I., Zadorin N.A.* Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation // Сиб. электрон. матем. изв. – 2012. – Т. 9. – С. 445–455.
6. *Задорин А.И.* Интерполяция Лагранжа и формулы Ньютона – Котеса для функций с погранслойной составляющей на кусочно-равномерных сетках // Сиб. журн. вычисл. матем. – 2015. – Т. 18, № 3. – С. 289–303.
7. *Шишкин Г.И.* Сеточные аппроксимации сингулярно возмущенных эллиптических и параболических уравнений. – Екатеринбург: УрО РАН, 1992. – 233 с.
8. *Задорин А.И.* Интерполяция функции двух переменных с большими градиентами в пограничных слоях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. – 2015. – Т. 157, кн. 2. – С. 55–67.
9. *Linß T., Stynes M.* Asymptotic analysis and Shishkin-type decomposition for an elliptic convection–diffusion problem // J. Math. Anal. Appl. – 2001. – V. 261, No 2. – P. 604–632. – doi: 10.1006/jmaa.2001.7550.
10. *Ильин В.П.* Численный анализ. Ч. 1.– Новосибирск: Изд-во ИВМ и МГ СО РАН, 2004. – 337 с.

11. *Корнев А.А., Чижонков Е.В.* Упражнения по численным методам. Ч. 2. – М.: Моск. гос. ун-т, 2003. – 200 с.

Поступила в редакцию
02.02.16

Задорин Александр Иванович, доктор физико-математических наук, заведующий лабораторией

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал

ул. Певцова, д. 13, г. Омск, 644043, Россия

E-mail: *zadorin@ofim.oscsbras.ru*

Задорин Никита Александрович, кандидат физико-математических наук, программист

Федеральное государственное бюджетное учреждение науки Институт математики им. С.Л. Соболева СО РАН, Омский филиал

ул. Певцова, д. 13, г. Омск, 644043, Россия

E-mail: *nik-zadorin@yandex.ru*

ISSN 1815-6088 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 1, pp. 40–50

Polynomial Interpolation of the Function of Two Variables with Large Gradients in the Boundary Layers

A.I. Zadorin, N.A. Zadorin***

Omsk Branch of Sobolev Institute of Mathematics, Siberian Branch, Russian Academy of Sciences, Omsk, 644043 Russia

E-mail: **zadorin@ofim.oscsbras.ru*, ***nik-zadorin@yandex.ru*

Received February 2, 2016

Abstract

The problem of interpolation of the function of two variables with large gradients in the boundary layers is investigated. It is assumed that the function has large gradients near the boundaries of a rectangular domain. Such function corresponds to the solution of the elliptic equation with a small parameter in the highest derivatives. It is known that the error of polynomial interpolation on a uniform grid for the function can be of the order of $O(1)$. It is suggested to use the two-dimensional Lagrange interpolation on the piecewise uniform Shishkin mesh, which is dense in the boundary layers. The Lagrange polynomial with k_1 interpolation nodes on x and with k_2 interpolation nodes on y is used. The error estimate which is uniform in the small parameter is obtained. Results of the numerical experiments are discussed.

Keywords: function of two variables, large gradients, polynomial interpolation, Shishkin mesh, error estimate

Acknowledgments. This study was supported in part by the Russian Foundation for Basic Research (projects nos. 15-01-06584 and 16-01-00727).

References

1. Il'in A.M. Differencing scheme for a differential equation with a small parameter affecting the highest derivative. *Math. Notes Acad. Sci. USSR*, 1969, vol. 6, no. 2, pp. 596–602.
2. Bakhvalov N.S. The optimization of the methods of solving boundary value problems in the presence of a boundary layer. *Comput. Math. Math. Phys.*, 1969, vol. 9, no. 4, pp. 139–166.
3. Zadorin A.I. Method of interpolation for a boundary layer problem. *Sib. Zh. Vychisl. Mat.*, 2007, vol. 10, no. 3, pp. 267–275. (In Russian)
4. Zadorin A.I., Zadorin N.A. Spline interpolation on a uniform grid for functions with a boundary-layer component. *Comput. Math. Math. Phys.*, 2010, vol. 50, no. 2, pp. 211–223.
5. Zadorin A.I., Zadorin N.A. Interpolation formula for functions with a boundary layer component and its application to derivatives calculation. *Sib. Electron. Math. Izv.*, 2012, vol. 9, pp. 445–455.
6. Zadorin A.I. Lagrange interpolation and Newton-Cotes formulas for functions with boundary layer components on piecewise-uniform grids. *Numer. Anal. Appl.*, 2015, vol. 8, no. 3, pp. 235–247.
7. Shishkin G.I. Grid Approximations of Singularly Perturbed Elliptic and Parabolic Equations. Yekaterinburg, Ural. Otd. Ross. Akad. Nauk, 1992. 233 p. (In Russian)
8. Zadorin A.I. Interpolation of the function of two variables with large gradients in the boundary layers. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2015, vol. 157, no. 2, pp. 55–67. (In Russian)
9. Linß T., Stynes M. Asymptotic analysis and Shishkin-type decomposition for an elliptic convection–diffusion problem. *J. Math. Anal. Appl.*, 2001, vol. 261, no. 2, pp. 604–632. doi: 10.1006/jmaa.2001.7550.
10. Il'in V.P. Numerical Analysis. Pt. 1. Novosibirsk, Izd. Inst. Vychisl. Mat. Mat. Geofiz. Sib. Otd. Ross. Akad. Nauk, 2004. 337 p. (In Russian)
11. Kornev A.A., Chizhonkov E.V. Exercises in Numerical Methods. Pt. 2. Moscow, Mosk. Gos. Univ., 2003. 200 p. (In Russian)

***Для цитирования*:** *Задорин А.И., Задорин Н.А.* Полиномиальная интерполяция функции двух переменных с большими градиентами в пограничных слоях // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 40–50.

***For citation*:** Zadorin A.I., Zadorin N.A. Polynomial interpolation of the function of two variables with large gradients in the boundary layers. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 40–50. (In Russian)