

УДК 539.3

## ВОЗДЕЙСТВИЕ НЕСТАЦИОНАРНОГО ДАВЛЕНИЯ НА ЦИЛИНДРИЧЕСКУЮ ОБОЛОЧКУ С УПРУГИМ ЗАПОЛНИТЕЛЕМ

*Д.В. Тарлаковский<sup>1,2</sup>, Г.В. Федотенков<sup>2</sup>*

<sup>1</sup>*НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова, г. Москва, 119192, Россия*

<sup>2</sup>*Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет), г. Москва, 125993, Россия*

### Аннотация

Решена нестационарная задача для тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки, заполненной упругой средой, при воздействии на нее внешнего нестационарного давления. С использованием принципа суперпозиции задача сведена к интегральному соотношению между нормальными перемещениями оболочки и внешним давлением. Ядром этого соотношения является функция влияния, которая построена с использованием аппарата разложений в ряды Фурье и интегрального преобразования Лапласа по времени. Получение оригиналов коэффициентов рядов осуществлено аналитически с применением асимптотически эквивалентных функций. Приведены примеры расчетов.

**Ключевые слова:** нестационарные задачи, модель оболочки С.П. Тимошенко, упругий наполнитель, функция влияния, принцип суперпозиции, нестационарное давление

### Введение

Нестационарные задачи теории оболочек являются актуальными для самых различных областей науки и технологий. Особо важные приложения они имеют в аэрокосмической отрасли, так как в процессе проектирования конструкций летательных аппаратов требуется обеспечить необходимые значения коэффициентов запаса прочности, жесткости и устойчивости при одновременном обеспечении минимальных значений массовых характеристик соответствующих элементов. Для решения этих проблем широко используется теория оболочек. В настоящее время она хорошо развита. Имеется множество опубликованных работ, в которых получены решения различных задач. Однако наряду с большим количеством публикаций, посвященных статическим и квазистационарным задачам, лишь ограниченный круг работ направлен на исследование нестационарных задач [1–7]. В настоящей работе построено решение нестационарной задачи для тонкой упругой круговой цилиндрической оболочки с упругим наполнителем. Полученные результаты могут служить основой для разработки и реализации методов решения нестационарных контактных задач для оболочек с упругими наполнителями.

### 1. Постановка задачи

В начальный момент времени  $\tau = 0$  к заполненной сплошной упругой средой тонкой упругой круговой цилиндрической оболочке радиуса  $R$  и толщины  $h$  прикладывается внешняя поверхностная нагрузка  $\mathbf{p}$ , которая зависит от времени и угловой координаты. Для оболочки использованы уравнения модели С.П. Тимошенко в перемещениях [8]. В цилиндрической системе координат  $Ora$  с центром

на оси оболочки и полярным углом  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  они имеют вид (точками над величиной здесь и далее обозначены производные по времени):

$$\begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{L}\mathbf{w} + \mathbf{p}, \\ \mathbf{w} &= (u, w, \chi)^T, \quad \mathbf{L} = (L_{ij})_{3 \times 3}, \quad \mathbf{p} = (0, p, 0)^T \\ L_{11} &= \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - \eta^2 k^2, \quad L_{12} = -L_{21} = (1 + \eta^2 k^2) \frac{\partial}{\partial \alpha}, \\ L_{13} &= -\gamma^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} + \eta^2 k^2, \quad L_{22} = \eta^2 k^2 \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2} - 1, \\ L_{23} &= \eta^2 k^2 \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad L_{31} = -L_{33} = \gamma^{-2} L_{13}, \\ L_{32} &= -\eta^2 k^2 \gamma^{-2} \frac{\partial}{\partial \alpha}, \quad k^2 = \frac{5}{6}, \end{aligned} \quad (1)$$

$u$ ,  $w$  – касательные и нормальные перемещения оболочки;  $\chi$  – угол поворота нормального к срединной поверхности до деформации волокна за счет сдвиговых деформаций,  $p$  – внешнее нормальное давление.

Движение заполнителя подчиняется уравнениям теории упругости относительно скалярного  $\varphi$  и ненулевой компоненты  $\psi$  векторного потенциала упругих перемещений [8]:

$$\ddot{\varphi} = \beta_1^2 \Delta \varphi, \quad \ddot{\psi} = \eta_1^2 \Delta \psi, \quad \Delta = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \alpha^2}. \quad (2)$$

Радиальные  $u_r$  и угловые  $u_\alpha$  перемещения заполнителя связаны с упругими потенциалами следующими равенствами [8]:

$$u_r = \frac{\partial \varphi}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi}{\partial \alpha}, \quad u_\alpha = \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi}{\partial \alpha} - \frac{\partial \psi}{\partial r}. \quad (3)$$

Ненулевые компоненты  $\varepsilon_{rr}$ ,  $\varepsilon_{\alpha\alpha}$ ,  $\varepsilon_{r\alpha}$  тензора деформаций связаны с перемещениями соотношениями Коши:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{\partial u_r}{\partial r}, \quad \varepsilon_{\alpha\alpha} = \frac{1}{r} \frac{\partial u_\alpha}{\partial \alpha} + \frac{u_r}{r}, \quad \varepsilon_{r\alpha} = \frac{1}{2} \left( \frac{\partial u_\alpha}{\partial r} + \frac{1}{r} \frac{\partial u_r}{\partial \alpha} - \frac{u_\alpha}{r} \right). \quad (4)$$

Связь ненулевых компонент  $\sigma_{rr}$ ,  $\sigma_{\alpha\alpha}$ ,  $\sigma_{r\alpha}$  тензора напряжений с деформациями определяется законом Гука:

$$\sigma_{rr} = \varkappa_1 \varepsilon_{rr} + \varkappa_2 \varepsilon_{\alpha\alpha}, \quad \sigma_{\alpha\alpha} = \varkappa_1 \varepsilon_{\alpha\alpha} + \varkappa_2 \varepsilon_{rr}, \quad \sigma_{r\alpha} = (\varkappa_1 - \varkappa_2) \varepsilon_{r\alpha}. \quad (5)$$

Предполагаем, что контакт между оболочкой и заполнителем происходит в условиях свободного проскальзывания, что соответствует следующим граничным условиям:

$$u_r|_{r=1} = w \quad (\alpha \in (-\pi, \pi]), \quad \sigma_{r\alpha}|_{r=1} = 0 \quad (\alpha \in (-\pi, \pi]). \quad (6)$$

Полагаем также, что в центральной точке заполнителя искомые функции ограничены.

Задача замыкается однородными начальными условиями

$$\begin{aligned} u|_{\tau=0} = w|_{\tau=0} = \chi|_{\tau=0} = \varphi|_{\tau=0} = \psi|_{\tau=0} = 0, \\ \dot{u}|_{\tau=0} = \dot{w}|_{\tau=0} = \dot{\chi}|_{\tau=0} = \dot{\varphi}|_{\tau=0} = \dot{\psi}|_{\tau=0} = 0. \end{aligned} \quad (7)$$

Все величины и параметры имеют безразмерный вид, определяемый следующими выражениями (штрихом обозначены размерные величины):

$$\begin{aligned} u &= \frac{u'}{R}, & w &= \frac{w'}{R}, & u_r &= \frac{u'_r}{R}, & u_\alpha &= \frac{u'_\alpha}{R}, \\ r &= \frac{r'}{R}, & \tau &= \frac{c_1 t}{R}, & \gamma^2 &= \frac{h^2}{12R^2}, & \eta^2 &= \frac{c_2^2}{c_1^2}, & \eta_1^2 &= \frac{c_{21}^2}{c_1^2}, \\ \beta_1^2 &= \frac{c_{11}^2}{c_1^2}, & c_1^2 &= \frac{\lambda + 2\mu}{\rho}, & c_2^2 &= \frac{\mu}{\rho}, & c_{11}^2 &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\rho_1}, & c_{21}^2 &= \frac{\mu_1}{\rho_1}, \\ p &= \frac{p'}{\sigma}, & \sigma &= 2\sqrt{3}(\lambda + 2\mu)\gamma, & \sigma_{rr} &= \frac{\sigma'_{rr}}{\sigma}, & \sigma_{\alpha\alpha} &= \frac{\sigma'_{\alpha\alpha}}{\sigma}, \\ \sigma_{r\alpha} &= \frac{\sigma'_{r\alpha}}{\sigma}, & \varphi &= \frac{\varphi'}{R^2}, & \psi &= \frac{\psi'}{R^2}, & \varphi &= \frac{\varphi'}{R^2}, & \varkappa_1 &= \frac{\lambda_1 + 2\mu_1}{\sigma}, & \varkappa_2 &= \frac{\lambda_1}{\sigma}, \end{aligned}$$

где  $t$  – размерное время;  $c_1, c_{11}$  – скорости волн растяжения-сжатия в оболочке и заполнителе соответственно;  $c_2, c_{21}$  – скорости волн сдвига в оболочке и заполнителе соответственно;  $\rho$  и  $\rho_1$  – плотности материала оболочки и заполнителя;  $\lambda, \mu$  и  $\lambda_1, \mu_1$  – параметры Ламе материала оболочки и заполнителя соответственно.

## 2. Разрешающее интегральное соотношение

С использованием принципа суперпозиции [1–4, 7] нормальные перемещения оболочки представляются в виде

$$w(x, \tau) = \int_0^\tau \int_{-b(t)}^{b(t)} G_2(x - \xi, \tau - t) p(\xi, t) d\xi dt, \quad (8)$$

где  $G_2(x, \tau)$  – функция влияния для оболочки с заполнителем [1–4].

Функция влияния для оболочки с заполнителем представляет собой нормальные перемещения  $w = G_2(\alpha, \tau)$  как реакцию на воздействие внешней сосредоточенной нормальной нагрузки вида  $p_0 = \delta(\alpha)\delta(\tau)$ , где  $\delta(z)$  – дельта-функция Дирака. В этом случае для тангенциальных перемещений оболочки и угла поворота нормали к срединной поверхности введем обозначения  $u = G_1(\alpha, \tau)$ ,  $\chi = G_3(\alpha, \tau)$ .

## 3. Функция влияния для оболочки с заполнителем

Постановка задачи об определении функции влияния для оболочки с заполнителем включает в себя уравнения, соотношения, начальные и граничные условия (1)–(7), в которых  $\mathbf{w} = \mathbf{G} = (G_1, G_2, G_3)^T$ ,  $p = p_0 - \sigma_r$ ,  $\sigma_r = \sigma_{rr}|_{r=1}$ .

Представим искомые и заданные функции в виде тригонометрических рядов Фурье

$$\begin{aligned} G_1 &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{1n}(\tau) \sin n\alpha, & G_2 &= \sum_{n=0}^{\infty} G_{2n}(\tau) \cos n\alpha, & G_3 &= \sum_{n=1}^{\infty} G_{3n}(\tau) \sin n\alpha, \\ \varphi &= \sum_{n=0}^{\infty} \varphi_n(r, \tau) \cos n\alpha, & \psi &= \sum_{n=1}^{\infty} \psi_n(r, \tau) \sin n\alpha, \\ u_r &= \sum_{n=0}^{\infty} u_{rn}(r, \tau) \cos n\alpha, & u_\alpha &= \sum_{n=1}^{\infty} u_{\alpha n}(r, \tau) \sin n\alpha, \\ \sigma_{rr} &= \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{rrn}(r, \tau) \cos n\alpha, & \sigma_{r\alpha} &= \sum_{n=1}^{\infty} \sigma_{r\alpha n}(r, \tau) \sin n\alpha. \end{aligned} \quad (9)$$

$$\delta(\alpha) = \frac{\delta_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \delta_n \cos n\alpha, \quad \delta_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \delta(\alpha) \cos n\alpha = \frac{1}{\pi}. \quad (10)$$

Как следует из соотношений (3)–(5), коэффициенты рядов (9) связаны между собой формулами

$$\begin{aligned} u_{rn} &= \frac{\partial \varphi_n}{\partial r} + \frac{n}{r} \psi_n, & \sigma_{rrn} &= \varkappa_1 \frac{\partial u_{rn}}{\partial r} + \frac{\varkappa_2}{r} (u_{rn} + nu_{\alpha n}), \\ u_{\alpha n} &= -\frac{n}{r} \varphi_n - \frac{\partial \psi_n}{\partial r}, & \sigma_{r\alpha n} &= \varkappa \left( \frac{\partial u_{\alpha n}}{\partial r} - \frac{nu_{rn} + u_{\alpha n}}{r} \right), \end{aligned} \quad (11)$$

где  $\varkappa = (\varkappa_1 - \varkappa_2)/2$ .

Подставляя (9) и (10) в уравнения (1) и (2), получаем при  $n \geq 1$

$$\begin{aligned} \ddot{\mathbf{G}}_n &= \mathbf{M}\mathbf{G}_n + \mathbf{p}_n, & \mathbf{G}_n &= (G_{1n}, G_{2n}, G_{3n})^T, & \mathbf{p}_n &= (0, p_n, 0)^T, \\ p_n &= \frac{1}{\pi} \delta(\tau) - \sigma_{rn}, & \sigma_{rn} &= \sigma_{rrn}|_{r=1}, & G_{kn}|_{\tau=0} &= \dot{G}_{kn}|_{\tau=0} = 0 \quad (k = 1, 2, 3), \end{aligned} \quad (12)$$

$$\mathbf{M} = \begin{pmatrix} -(n^2 + \eta^2 k^2) & -n(1 + \eta^2 k^2) & \gamma^2 n^2 + \eta^2 k^2 \\ -n(1 + \eta^2 k^2) & -(1 + n^2 \eta^2 k^2) & n\eta^2 k^2 \\ n^2 + \eta^2 k^2 \gamma^{-2} & -n\eta^2 k^2 \gamma^{-2} & -(n^2 + \eta^2 k^2 \gamma^{-2}) \end{pmatrix},$$

$$\begin{aligned} \dot{\varphi}_n &= \beta_1^2 \Delta_{rn} \varphi_n, & \ddot{\psi}_n &= \eta_1^2 \Delta_{rn} \psi_n, & \Delta_{rn} &= \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} - \frac{n^2}{r^2}, \\ u_{rn}|_{r=1} &= G_{2n}, & \sigma_{r\alpha n}|_{r=1} &= 0, \\ \varphi_n|_{\tau=0} &= \dot{\varphi}_n|_{\tau=0} = \psi_n|_{\tau=0} = \dot{\psi}_n|_{\tau=0} = 0; \end{aligned} \quad (13)$$

при  $n = 0$

$$\ddot{G}_{20} = -G_{20} + \frac{1}{2\pi} \delta(\tau) - \sigma_{r0}, \quad G_{20}|_{\tau=0} = \dot{G}_{20}|_{\tau=0} = 0, \quad (14)$$

$$\ddot{\varphi}_0 = \beta_1^2 \Delta_{r0} \varphi_0, \quad \Delta_{r0} = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r}, \quad u_{r0}|_{r=1} = G_{20}, \quad \varphi_0|_{\tau=0} = \dot{\varphi}_0|_{\tau=0} = 0. \quad (15)$$

Кроме того, следует учесть ограниченность коэффициентов  $\varphi_n$  и  $\psi_n$  при  $r \rightarrow 0$ .

Применяя к (12)–(15) преобразование Лапласа по времени, получаем (верхний индекс “ $L$ ” у функции означает ее изображение Лапласа,  $s$  – параметр преобразования,  $\delta_{ij}$  – символ Кронекера):

при  $n \geq 1$ :

$$(\mathbf{M} - s^2 \mathbf{E}) \mathbf{G}_n^L + \mathbf{p}_n^L = 0, \quad (16)$$

$$\mathbf{G}_n^L = (G_{1n}^L, G_{2n}^L, G_{3n}^L)^T, \quad \mathbf{p}_n^L = (0, p_n^L, 0)^T, \quad \mathbf{E} = (\delta_{ij})_{3 \times 3}.$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_n^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_n^L}{\partial r} - \left( \frac{n^2}{r^2} + \frac{s^2}{\beta_1^2} \right) \varphi_n^L = 0,$$

$$\frac{\partial^2 \psi_n^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \psi_n^L}{\partial r} - \left( \frac{n^2}{r^2} + \frac{s^2}{\eta_1^2} \right) \psi_n^L = 0, \quad (17)$$

$$u_{rn}|_{r=1} = G_{2n}, \quad \sigma_{r\alpha n}|_{r=1} = 0.$$

при  $n = 0$ :

$$G_{20}^L = \frac{1}{s^2 + 1} \left( \frac{1}{2\pi} - \sigma_{r0}^L \right). \quad (18)$$

$$\frac{\partial^2 \varphi_0^L}{\partial r^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial \varphi_0^L}{\partial r} - \frac{s^2}{\beta_1^2} \varphi_0^L = 0, \quad (19)$$

$$u_{r0}^L|_{r=1} = G_{20}^L.$$

Ограниченные при  $r \rightarrow 0$  решения уравнений (17) и (19) определяются формулами [8]:

$$\begin{aligned} \varphi_n^L &= C_n(s) I_n(\xi), \quad \psi_n^L = D_n(s) I_n(\zeta), \\ \xi &= \frac{rs}{\beta_1}, \quad \zeta = \frac{rs}{\eta_1}, \quad D_0 = 0, \end{aligned} \quad (20)$$

где  $I_n(z)$  – модифицированная функция Бесселя [9].

Решение  $G_{2n}^L$  уравнений (16) имеет вид

$$G_{2n}^L = \left( \frac{1}{\pi} - \sigma_{rn}^L \right) Q(s, n), \quad Q(s, n) = \frac{\sum_{j=1}^2 P_j(s^2, n^2)}{\sum_{j=1}^3 R_j(s^2, n^2)}, \quad (21)$$

$$P_1(s, n) = \eta^2 k^2 [n(\gamma^2 - 1) - s(\gamma^2 + 1)],$$

$$P_2(s, n) = \gamma^2 [n(\gamma - 1) - s] [n(\gamma + 1) + s],$$

$$R_1(s, n) = \eta^2 k^2 [n(2\eta^2 k^2 + \gamma^2) - s(\gamma^2 + 1)],$$

$$\begin{aligned} R_2(s, n) &= -[\gamma^2 + \eta^2 k^2 (\gamma^2 + 1)] s^2 + [\eta^2 k^2 (3\gamma^2 - 1) - (2\eta^4 k^4 + \gamma^2)] sn + \\ &\quad + [2\eta^4 k^4 (\gamma^2 - 1) + \gamma^2 (2\eta^2 k^2 + \gamma^2)] n^2, \end{aligned}$$

$$R_3(s, n) = P_2(s, n) (\eta^2 k^2 n + s).$$

Подставляя (20) в формулы (11), находим

$$\begin{aligned} u_{rn}^L &= \frac{1}{r} [C_n \xi I_n'(\xi) + n D_n I_n(\zeta)], \quad u_{\alpha n}^L = -\frac{1}{r} [n C_n I_n(\xi) + D_n \zeta I_n'(\zeta)], \\ \sigma_{rrn}^L &= \frac{1}{r^2} \{ C_n [\kappa_1 \xi^2 I_n''(\xi) + \kappa_2 [\xi I_n'(\xi) - n^2 I_n(\xi)]] + 2\kappa n D_n [\zeta I_n'(\zeta) - I_n(\zeta)] \}, \\ \sigma_{r\alpha n}^L &= -\frac{\kappa}{r^2} \{ 2n C_n [\xi I_n'(\xi) - I_n(\xi)] + D_n [\zeta^2 I_n''(\zeta) - \zeta I_n'(\zeta) + n^2 I_n(\zeta)] \}. \end{aligned} \quad (22)$$

Из граничных условий задачи (17) и соотношений (22) для  $C_n$  и  $D_n$  получаем систему уравнений

$$\begin{aligned} C_n \{ \xi_0 I_n'(\xi_0) + f(s, n) [\varkappa_1 \xi_0^2 I_n''(\xi_0) + \varkappa_2 [\xi_0 I_n'(\xi_0) - n^2 I_n(\xi_0)]] \} + \\ + n D_n \{ I_n(\zeta_0) - 2\varkappa f(s, n) [\zeta_0 I_n'(\zeta_0) - I_n(\zeta_0)] \} = g(s, n), \\ 2n C_n [\xi_0 I_n'(\xi_0) - I_n(\xi_0)] + D_n [\zeta_0^2 I_n''(\zeta_0) - \zeta_0 I_n'(\zeta_0) + n^2 I_n(\zeta_0)] = 0, \\ \xi_0 = \frac{s}{\beta_1}, \quad \zeta_0 = \frac{s}{\eta_1}, \end{aligned} \quad (23)$$

$$f(s, n) = \begin{cases} Q(s, n) & \text{при } n > 0, \\ \frac{1}{s^2 + 1} & \text{при } n = 0, \end{cases} \quad g(s, n) = \begin{cases} \frac{1}{\pi} Q(s, n) & \text{при } n > 0, \\ \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s^2 + 1} & \text{при } n = 0. \end{cases}$$

Далее ограничимся исследованием процесса на начальном временном этапе. При этом используем асимптотики для модифицированных функций Бесселя [9] и функции  $Q(s, n)$  при  $s \rightarrow \infty$ , соответствующие согласно предельной теореме для изображений [10] асимптотическим представлениям вышеупомянутых функций при  $\tau \rightarrow 0$ :

$$I_n(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad I'_n(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad I''_n(z) \sim \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}} \quad \text{при } z \rightarrow \infty, \quad (24)$$

$$Q(s, n) \sim \frac{1}{\eta^2 k^2 n^2 + s^2} \quad \text{при } s \rightarrow \infty.$$

Тогда из (23) и (24) следуют выражения для  $C_n$  и  $D_n$ , справедливые при больших  $s$ :

$$C_0 \sim \frac{1}{2\pi J(\xi_0)} \frac{\beta_1^2}{s[\beta_1 s^2 + \varkappa_1 s + \beta_1(\varkappa_2 + 1)]}, \quad D_0 = 0,$$

$$C_n \sim \frac{1}{\pi J(\xi_0)} \frac{\beta_1(s^2 + \eta_1^2 n^2)}{s^5 + a^2 n^8}, \quad D_n \sim -\frac{1}{\pi J(\zeta_0)} \frac{2ns\eta_1^2}{s^5 + a^2 n^8}, \quad (25)$$

$$J(z) = \frac{e^z}{\sqrt{2\pi z}}, \quad a^2 = 2\eta^4 \eta_1^2 k^4 \beta_1.$$

Из (21) с учетом (24) и (25) вытекают следующие соотношения для изображений коэффициентов ряда разложения функции влияния для оболочки с заполнителем при больших  $s$ :

$$G_2^L(\alpha, s) = G_{21}^L(\alpha, s) + G_{22}^L(\alpha, s), \quad (26)$$

$$G_{21}^L(\alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{2n1}^L(s) \cos n\alpha, \quad G_{22}^L(\alpha, s) = \sum_{n=0}^{\infty} G_{2n2}^L(s) \cos n\alpha,$$

$$G_{2n1}^L = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \frac{1}{s^2 + 1} & \text{при } n = 0, \\ \frac{1}{\pi} \frac{1}{s^2 + \eta^2 k^2 n^2} & \text{при } n > 0, \end{cases}$$

$$G_{2n2}^L = \begin{cases} -\frac{\varkappa_1 s + \varkappa_2 \beta_1}{\beta_1 s^2 + \varkappa_1 s + \beta_1(\varkappa_2 + 1)} G_{201}^L & \text{при } n = 0, \\ -\frac{\varkappa_1 s^4 - 4\varkappa \beta_1 \eta_1 n^2 s^2 - \varkappa_2 \beta_1^2 \eta_1^2 n^4}{s^5 + a^2 n^8} G_{2n1}^L & \text{при } n > 0. \end{cases}$$

Отметим, что первое слагаемое в правой части (26) соответствует изображению функции влияния для оболочки без заполнителя, а второе характеризует влияние заполнителя.

Оригиналы коэффициентов  $G_{2n1}^L$  находятся элементарно:

$$G_{2n1}(\tau) = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \sin \tau & \text{при } n = 0, \\ \frac{1}{\pi \eta k n} \sin \eta k n \tau & \text{при } n > 0. \end{cases}$$

При этом сумма соответствующего ряда определяется по формуле [11, 12]:

$$\begin{aligned} G_{21}(\alpha, \tau) &= \frac{\sin \tau}{2\pi} + \frac{1}{\pi\eta k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin \eta k n \tau}{n} \cos n\alpha = \\ &= \frac{\sin \tau}{2\pi} + \frac{1}{2\pi\eta k} \left( \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\alpha + \eta k \tau)}{n} - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin n(\alpha - \eta k \tau)}{n} \right) = \\ &= \frac{\sin \tau}{2\pi} + \frac{1}{2\pi\eta k} \sum_{n=-\infty}^{\infty} [f(\alpha, \eta k \tau + 2\pi n) - f(\alpha, -\eta k \tau + 2\pi n)], \end{aligned}$$

где

$$f(\alpha, \tau) = \frac{\pi - \alpha - \tau}{2} [H(\alpha + \tau) - H(\alpha + \tau + 2\pi n)],$$

при определенных значениях  $\alpha \in (-\pi, \pi]$  и  $\tau \in [0, \infty)$  в сумме остается только одно ненулевое слагаемое.

Оригиналы коэффициентов  $G_{2n2}^L$  при каждом  $n = 0, 1, 2, \dots$  и при задании свойств материалов оболочки и заполнителя определяются аналитически с помощью теоремы разложения для преобразования Лапласа [10].

#### 4. Примеры расчетов

Рассмотрим два варианта внешней нагрузки:

$$p_1 = -H(\tau) H\left(\frac{\pi}{3} - |\alpha|\right) \cos(\alpha),$$

$$p_2 = -H(\tau) H\left(\frac{\pi}{30} - |\alpha|\right) \cos(\alpha).$$

В качестве материала оболочки выбрана сталь, а для заполнителя – алюминий, что соответствует следующим значениям безразмерных параметров:  $\eta = 0.546$ ,  $\eta_1 = 0.162$ ,  $\beta_1 = 0.329$ ,  $\varkappa_1 = 11.55$ ,  $\varkappa_2 = 5.95$ . Геометрический параметр оболочки  $\gamma = 0.025$ . В расчетах удерживалось 11 членов ряда при вычислении функции  $G_{22}(\alpha, \tau)$ .

Для получения результатов использовано представление (8), при этом входящие в него интегралы вычислялись аналитически.

На рис. 1 представлены распределения нормальных перемещений по углу в полярной системе координат с центром на оси оболочки и углом  $\alpha$  в момент времени  $\tau = 0.08$ . Сплошная кривая соответствует нагрузке  $p_1$ , а штриховая –  $p_2$ .

На рис. 2 представлено сравнение распределений нормальных перемещений, соответствующих нагрузке  $p_1$ , по углу  $\alpha$ . Сплошная кривая соответствует оболочке с заполнителем, а штриховая – пустой оболочке. Распределения построены в момент времени  $\tau = 0.08$ .

Динамика развития нормальных перемещений представлена на рис. 3, при этом распределения соответствуют первому варианту нагрузки в моменты времени  $\tau = 0.02, 0.04, 0.06, 0.08$ .

Сравнение результатов при учете различного числа членов ряда для функции  $G_{22}(\alpha, \tau)$  показано на рис. 4. Здесь представлены распределения нормальных перемещений, соответствующих нагрузке  $p_1$ , по углу  $\alpha$  в момент времени  $\tau = 0.08$ . Сплошная кривая построена с учетом 11 членов ряда, а штриховая – с учетом 6 членов. Видно, что отличие в результатах незначительное.

**Благодарности.** Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-08-00260).

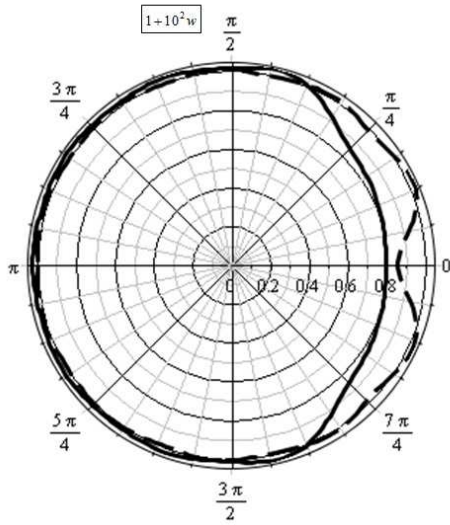


Рис. 1

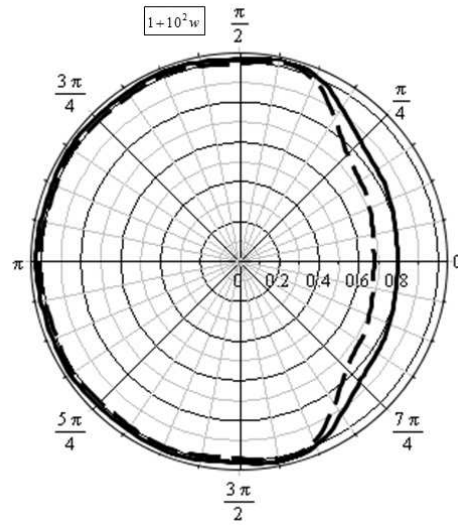


Рис. 2

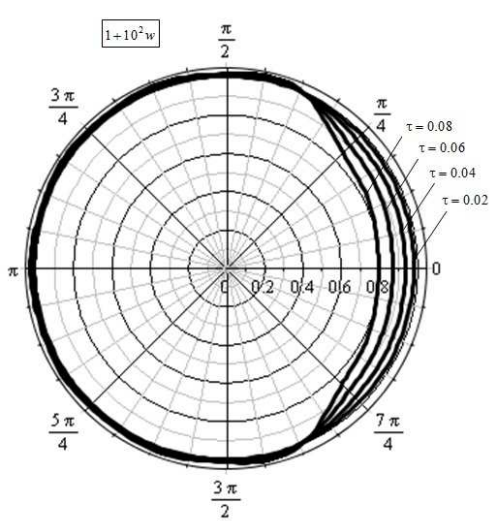


Рис. 3

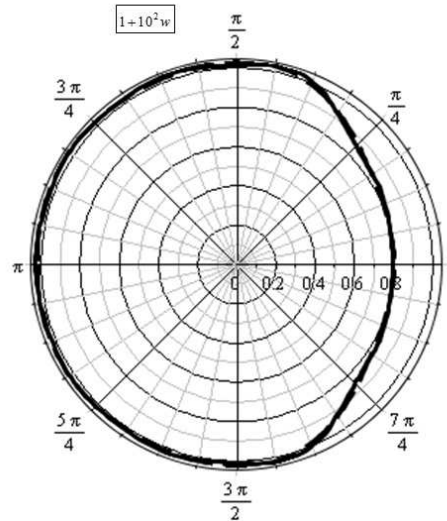


Рис. 4

### Литература

1. Gorshkov A.G., Tarlavovskii D.V., Fedotenkov G.V. Plane problem of a vertical cylindrical shell hit on elastic half-space // Mech. Solids. – 2000. – No 5. – P. 151–158.
2. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction) // Mech. Solids. – 2011. – V. 46, No 2. – P. 239–247. – doi: 10.3103/S0025654411020129.
3. Tarlavovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell // Mech. Solids. – 2015. – V. 50, No 2. – P. 208–217. – doi: 10.3103/S0025654415020107.

4. *Tarлакoвский Д.В., Федoтeнкoв Г.В.* Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells // J. Mach. Manufact. Reliab. – 2014. – V. 43, No 2. – P. 145–152. – doi: 10.3103/S1052618814010178.
5. *Кубeнко В.Д., Богданoв В.Р.* Осесимметричная задача удара оболочки об упругое полупространство // Прикл. механика. – 1995. – Т. 31, № 10. – С. 56–63.
6. *Сeницкий Ю.Э., Сeницкий А.Ю.* К проблеме разложения по собственным вектор-функциям в нестационарных начально-краевых задачах динамики оболочек вращения // Вестн. Сам. гос. техн. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2004. – Вып. 30. – С. 83–91.
7. *Михайлова Е.Ю., Тарлакoвский Д.В., Федoтeнкoв Г.В.* Нестационарный контакт сферической оболочки и упругого полупространства // Труды МАИ. – 2014. – № 78. – URL: <http://www.mai.ru/upload/iblock/540/540b786eac60d751a2e5f5b8f745d731.pdf>.
8. *Горшков А.Г., Медведский А.Л., Рабинский Л.Н., Тарлакoвский Д.В.* Волны в сплошных средах. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2004. – 472 с.
9. *Абрамовиц М., Стиган И.М.* Справочник по специальным функциям с формулами, графиками и математическими таблицами. – М.: Наука, 1979. – 832 с.
10. *Лаврeнтьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 749 с.
11. *Кеч В., Теодореску П.* Введение в теорию обобщенных функций с приложениями в технике. – М.: Мир, 1978. – 508 с.
12. *Градштейн И.С., Рыжик И.М.* Таблицы интегралов, сумм, рядов и произведений. – М.: Физматгиз, 1963. – 1100 с.

Поступила в редакцию  
24.08.15

---

**Тарлакoвский Дмитрий Валентинович**, доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией динамических испытаний; заведующий кафедрой «Сопротивление материалов, динамика и прочность машин»

НИИ механики МГУ имени М.В. Ломоносова  
Мичуринский проспект, д. 1, г. Москва, 119192, Россия  
Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет),  
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
E-mail: [tdvhome@mail.ru](mailto:tdvhome@mail.ru)

**Федoтeнкoв Григорий Валерьевич**, кандидат физико-математических наук, доцент, докторант

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)  
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия  
E-mail: [greghome@mail.ru](mailto:greghome@mail.ru)

ISSN 1815-6088 (Print)

ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.  
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI  
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2016, vol. 158, no. 1, pp. 141–151

### Impact of Non-Stationary Pressure on a Cylindrical Shell with Elastic Core

*D.V. Tarlakovskii<sup>a,b\*</sup>, G.V. Fedotenkov<sup>b\*\*</sup>*<sup>a</sup>Research Institute of Mechanics, Moscow State University, Moscow, 119192 Russia<sup>b</sup>Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia

E-mail: \*tdvhome@mail.ru, \*\*greghome@mail.ru

Received August 24, 2015

#### Abstract

The solution of the non-stationary problem for thin elastic circular cylindrical shell filled with an elastic medium under the influence of external non-stationary pressure has been obtained based on the superposition principle. Using the apparatus of expansions in the Fourier series and the Laplace integral transforms in time, the non-stationary function of the impact shell with core has been constructed. The construction of the original coefficients of the series expansions has been carried out analytically with the help of the asymptotically equivalent functions. Examples of calculations are presented.

**Keywords:** non-stationary problems, S.P. Timoshenko's shell model, elastic core, function of influence, principle of superposition, non-stationary pressure

**Acknowledgments.** This work was supported by the Russian Foundation for Basic Research (project no. 16-08-00260).

#### References

1. Gorshkov A.G., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Plane problem of a vertical cylindrical shell hit on elastic half-space. *Mech. Solids.*, 2000, no. 5, pp. 151–158.
2. Mikhailova E.Yu., Fedotenkov G.V. Nonstationary axisymmetric problem of the impact of a spherical shell on an elastic half-space (initial stage of interaction). *Mech. Solids*, 2011, vol. 46, no. 2, pp. 239–247. doi: 10.3103/S0025654411020129.
3. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary 3D motion of an elastic spherical shell. *Mech. Solids.*, 2015, vol. 50, no 2, pp. 208–217. doi: 10.3103/S0025654415020107.
4. Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Two-dimensional nonstationary contact of elastic cylindrical or spherical shells. *J. Mach. Manuf. Reliab.*, 2014, vol. 43, no. 2, pp. 145–152. doi: 10.3103/S1052618814010178.
5. Kubenko V.D., Bogdanov V.R. Axisymmetric impact of a shell on an elastic halfspace. *Int. Appl. Mech.*, 1995, vol. 31, no. 10, pp. 56–63.
6. Senitskii Yu.E., Senitskii A.Yu. To the problem of expansion in vector eigenfunctions in nonstationary initial boundary-value problems of dynamics of shells of revolution. *Vestn. Samar. Gos. Tekh. Univ. Ser. Fiz.-Mat. Nauki*, 2004, no. 30, pp. 83–91. (In Russian)
7. Mikhailova E.Yu., Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Nonstationary contact of a spherical shell and elastic half-space. *Tr. Mosk. Aviats. Inst.*, 2014, no. 78. Available at: <http://www.mai.ru/upload/iblock/540/540b786eac60d751a2e5f5b8f745d731.pdf>. (In Russian)
8. Gorshkov A.G., Medvedskii A.L., Rabinskii L.N., Tarlakovskii D.V. Waves in Continuous Mediums. Moscow, FIZMATLIT, 2004. 472 p. (In Russian)

9. Abramovits M., Stigan I.M. Handbook of Special Functions with Formulae, Diagrams, and Mathematical Tables. Moscow, Nauka, 1979. 832 p. (In Russian)
10. Lavrent'ev M.A., Shabat B.V. Methods of the Theory of Functions of a Complex Variable. Moscow, Nauka, 1973. 749 p. (In Russian)
11. Kech V., Teodorescu P. Introduction to the Theory of Generalized Functions with Applications in Engineering. Moscow, Mir, 1978. 508 p. (In Russian)
12. Gradshteyn I.S., Ryzhik I.M., Tables of Integrals, Sums, Series, and Products. Moscow, Fizmatgiz, 1963. 1100 p. (In Russian)

---

⟨ **Для цитирования:** Тарлаковский Д.В., Федотенков Г.В. Воздействие нестационарного давления на цилиндрическую оболочку с упругим заполнителем // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2016. – Т. 158, кн. 1. – С. 141–151. ⟩

⟨ **For citation:** Tarlakovskii D.V., Fedotenkov G.V. Impact of non-stationary pressure on a cylindrical shell with elastic core. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2016, vol. 158, no. 1, pp. 141–151. (In Russian) ⟩