

МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ И НАУКИ РОССИЙСКОЙ ФЕДЕРАЦИИ  
Федеральное государственное автономное учреждение  
высшего профессионального образования  
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

УТВЕРЖДАЮ  
Проректор по научной деятельности КФУ  
Проф. Д.К. Нурғалиев  
« 22 » сентября 2014 г.



**Программа дисциплины**  
Б1.В.ДВ.1 Дополнительные главы комплексного анализа

Направление подготовки: 01.06.01 Математика и механика  
Направленность (профиль) подготовки: 01.01.04 Геометрия и топология  
Квалификация выпускника «Исследователь. Преподаватель-исследователь»  
Форма обучения: очная  
Язык обучения: русский

Казань  
2014

## 1. КРАТКАЯ АННОТАЦИЯ

Целью освоения дисциплины «Дополнительные главы комплексного анализа» является расширение базовых знаний по комплексному анализу: В процессе изучения курса аспиранты творчески усваивают дифференциальные, интегральные и геометрические свойства аналитических функций.

При освоении дисциплины вырабатывается общематематическая культура: умение логически мыслить, проводить доказательства основных утверждений, устанавливать логические связи между понятиями, применять полученные знания для решения задач, связанных с приложениями методов комплексного анализа в механике.

## 2. МЕСТО ДИСЦИПЛИНЫ В СТРУКТУРЕ ОПОП

Дисциплина входит в вариативную часть профессионального цикла аспирантуры. Осваивается на 2 курсе (4 семестр).

Для успешного освоения данной дисциплины нужно освоение в качестве предшествующих следующих дисциплин: Математический анализ, Теория функций комплексного переменного.

## 3. ПЕРЕЧЕНЬ ПЛАНИРУЕМЫХ РЕЗУЛЬТАТОВ ОБУЧЕНИЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ

Обучающийся, завершивший изучение дисциплины, должен

Знать: актуальные задачи комплексного анализа и научиться пользоваться современной журнальной и монографической литературой;

Уметь: использовать комплексный анализ при решении творческих задач

Владеть и ориентироваться в истории создания комплексного анализа.

Демонстрировать способность и готовность:  
применять результаты освоения дисциплины в профессиональной деятельности.

В результате освоения дисциплины формируются компетенции:

Шифр компетенции	Расшифровка приобретаемой компетенции
УК-1	способность к критическому анализу и оценке современных научных достижений, генерированию новых идей при решении исследовательских и практических задач, в том числе в междисциплинарных областях
УК-3	готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач
ОПК-1	способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
ОПК-1	способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных

	методов исследования и информационно-коммуникационных технологий
ПК-1	способность к организации и проведению научно-исследовательской деятельности в профессиональной области, в том числе руководству научно-исследовательской работой студентов
ПК-2	способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях
ПК-3	способность к преподаванию механико-математических дисциплин и учебно-методической работе в областях профессиональной деятельности, в том числе, на основе результатов проведенных теоретических и экспериментальных исследований

#### 4. СТРУКТУРА И СОДЕРЖАНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ «ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА»:

##### 4.1. Распределение трудоёмкости дисциплины (в часах) по видам нагрузки обучающегося и по разделам дисциплины

Общая трудоёмкость дисциплины составляет 3 зачетных единицы, 108 часов.

Форма промежуточной аттестации по дисциплине: зачет в 4 семестре.

№	Раздел дисциплины	Семестр	Неделя семестра семестра	Виды учебной работы, включая самостоятельную работу студентов и трудоёмкость (в часах)			
				Лекции	Практические занятия	Самостоятельная работа	Трудоёмкость
1	<b>ИНТЕГРАЛЬНЫЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ</b>	4	1-2	4	4	16	24
2	<b>РАЗЛИЧНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ</b>	4	3-4	4	4	16	24
3	<b>ГЕОМЕТРИЧЕСКИЕ СВОЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ</b>	4	5-6	4	4	16	24
4	<b>СЕМЕЙСТВА АНАЛИТИЧЕСКИХ</b>	4	7-8	4	4	16	24

	<b>ФУНКЦИЙ И ИХ СВОЙСТВА</b>						
5	<b>ОБЗОР ПРОБЛЕМ И ЗАДАЧ</b>	4	9	2	2	8	12
	<b>ИТОГИ</b>			18	18	72	108

#### 4.2 Содержание дисциплины

**Тема 1. Интегральные свойства аналитических функций**

**Тема 2. Различные представления аналитических функций, геометрические свойства аналитических функций**

**Тема 3. Семейства аналитических функций и их свойства**

**Тема 4. Обзор проблем и задач**

#### **5. ОБРАЗОВАТЕЛЬНЫЕ ТЕХНОЛОГИИ:**

Лекции, семинары с практическими занятиями, контрольная работа. В течение семестра аспиранты решают задачи, указанные преподавателем, к каждому практическому занятию, делают самостоятельные доклады.

#### **6. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЯ ДЛЯ САМОСТОЯТЕЛЬНОЙ РАБОТЫ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПО ДИСЦИПЛИНЕ (МОДУЛЮ)**

##### **Вопросы к практическим занятиям**

Лемма Шварца и различные её обобщения.

Разложения аналитических функций в ряды по полиномам Фабера.

Отображения односвязных и многосвязных областей на канонические области.

Модулярная функция.

Нормальные семейства и критерий нормальности.

Приложения комплексного анализа.

#### **7. ФОНД ОЦЕНОЧНЫХ СРЕДСТВ**

##### **7.1. Регламент дисциплины**

##### **Оценка «зачтено»**

Оценка "зачтено" ставится аспирантам, которые:

- решили не менее 60% задач из предложенных задач и заданий контрольной работы;
- при ответе на зачете демонстрируется владение понятийным аппаратом и минимальное знание программного материала, необходимое для предстоящей научно-исследовательской работы.

##### **7.2. Оценочные средства текущего контроля**

Примеры устных вопросов:

1. Интеграл от функции комплексного переменного и его свойства.
2. Теорема Коши в двух формах. Интеграл Коши.
3. Существование производных любого порядка у регулярных функций.
4. Теорема о среднем и принцип максимума модуля. Интеграл типа Коши.

5. Теорема Мореры, формула для вычисления определенного интеграла.
6. Теорема Лиувилля.
7. Степенные ряды. Теорема Абеля и круг сходимости. Единственность разложения регулярной функции в степенной ряд.
8. Ряд Тейлора.
9. Ряд Лорана. Единственность представления регулярной функции рядом по целым степеням.
10. Принцип аргумента.
11. Теорема Руше, основная теорема алгебры.
12. Аналитическое продолжение по непрерывности. Принцип симметрии.
13. Вывод формулы Кристоффеля-Шварца. Отображение полуплоскости на прямоугольник.
14. Понятие об эллиптических функциях. Полная аналитическая функция.
15. Теоремы единственности для регулярных функций.
16. Формулы для граничных значений интеграла типа Коши.

Пример билета контрольной работы

1. Найти  $\int_{|z|=2} \frac{zdz}{(z^2+1)^3}$ .
2. Исследовать нормальность семейства аналитических функций в единичном круге, не принимающих значений 0, 1 и 2.
3. Записать конформное отображение верхней полуплоскости на внутренность трапеции с углами  $45^\circ, 90^\circ, 90^\circ, 135^\circ$ .
4. Разложить в ряд Лорана функцию  $f(z) = \frac{z}{(z-1)(z-2)}$  в областях  $|z| < 1$ ,  $1 < |z| < 2$ ,  $|z| > 2$ .

### 7.3. Вопросы к зачету

1. Показать, что многосвязную область нельзя отобразить конформно и взаимно-однозначно на единичный круг.
2. Показать, что у функции, определённой на всей комплексной плоскости, не может быть единственной точки ветвления. Привести примеры функций с двумя или тремя точками ветвления.
3. Проиллюстрировать теорему Сохоцкого о поведении функции в окрестности существенно-особой точки на одном из примеров.
4. Существует ли аналитическая в единичном круге функция, которая на отрезке  $[0, 1]$  совпадает с  $\exp(-1/x^2)$ .
5. Привести все функции, которые отображают плоскость на плоскость взаимно-однозначно и конформно. Обосновать.
6. Найти предельные значения  $z = \operatorname{sn}(w, k)$  при  $k \rightarrow 0$  и  $k \rightarrow 1$ . Какие области получаются при отображении на верхнюю полуплоскость этими функциями.
7. При каких суперпозициях с гармонической функцией сохраняется гармоничность.
8. При каких суперпозициях с аналитической функцией сохраняется аналитичность.

### 7.4. Таблица соответствия компетенций, критериев оценки их освоения и оценочных средств

Индекс компетенции	Расшифровка компетенции	Показатель формирования компетенции	Оценочное средство
		для	

		<b>данной дисциплины</b>	
УК-3	Готовность участвовать в работе российских и международных исследовательских коллективов по решению научных и научно-образовательных задач	Способность сделать доклад на научной конференции	Контрольная работа №1 и сдача зачёта
УК-5	Способность планировать и решать задачи собственного профессионального и личностного развития	Умение использовать современную научную литературу.	контрольная работа №2 и сдача зачёта
ОПК-1	Способность самостоятельно осуществлять научно-исследовательскую деятельность в соответствующей профессиональной области с использованием современных методов исследования и информационно-коммуникационных технологий	Написание научной статьи	Выступление на научном семинаре
ОПК-2	Готовность к преподавательской деятельности по основным образовательным программам высшего образования	Консультации для студентов	Проведение пробных практических занятий и лекций
ПК-2	Способность подготавливать научные работы для публикации в ведущих российских и международных изданиях, а также выступления на российских и международных научно-практических конференциях	Выступление на научной конференции	Подготовка тезисов выступления

САМОСТОЯТЕЛЬНАЯ РАБОТА АСПИРАНТОВ (СРА) включает следующие виды работ: решение задач к каждому практическому занятию, подготовка докладов к семинарским занятиям.

## **8. МЕТОДИЧЕСКИЕ УКАЗАНИЯ ДЛЯ ОБУЧАЮЩИХСЯ ПРИ ОСВОЕНИИ ДИСЦИПЛИНЫ**

Очень важным при изучении курса является систематическое и последовательное изучение предмета.

Необходимо:

1. регулярно посещать лекционные занятия;
2. записывать конспект каждой лекции, чтобы к концу семестра иметь полный курс лекций;
3. перед очередной лекцией повторить содержание предыдущих лекций;
4. с целью более глубокого изучения курса и его применения к решению практических задач в рамках самостоятельного изучения учебного курса рекомендуется обращаться к книгам, приведенным в списке литературы.

## **9. УЧЕБНО-МЕТОДИЧЕСКОЕ И ИНФОРМАЦИОННОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ:**

### **9.1. Основная литература:**

1. Евграфов М.А. Аналитические функции. Санкт-Петербург: Лань, 2008. - 448 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=134](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=134)
2. Шабунин М.И. Сидоров Ю.В. - Теория функций комплексного переменного. - М.: Бином. Лаборатория знаний, 2013. - 248с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=42610](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=42610)
3. Авхадиев Ф.Г.- Введение в геометрическую теорию функций. - Казанский университет, 2012. - 127 с.

### **9.2. Дополнительная литература**

4. Привалов И.И. - Введение в теорию функций комплексного переменного. - Санкт-Петербург: Лань, 2009. - 432 с. [http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1\\_id=322](http://e.lanbook.com/books/element.php?pl1_id=322)
5. Введение в теорию функций комплексного переменного - примеры и задачи [Текст : электронный ресурс] : (методические указания) / Казан. гос. ун-т, Мех.-мат. фак. ; сост.: С. Н. Киясов, Ю. В. Обносов, Л. Г. Салехов. : Электронные данные (1 файл: 0,41 Мб) . (Казань : Научная библиотека Казанского федерального университета, 2014) .  
[URL:http://libweb.kpfu.ru/ebooks/publicat/0-746576.pdf](http://libweb.kpfu.ru/ebooks/publicat/0-746576.pdf).

### **9.3 Программное обеспечение и Интернет-ресурсы:**

1. Авхадиев Ф.Г. Введение в геометрическую теорию функций. Казань, 2012 - [http://kpfu.ru/docs/F1384383646/%CВ%E5%EA%F6%E8%E8%20%EF%EE%20%C3%D2%D4\\_%EA%ED.pdf](http://kpfu.ru/docs/F1384383646/%CВ%E5%EA%F6%E8%E8%20%EF%EE%20%C3%D2%D4_%EA%ED.pdf)
2. Белашапка В.К. Курс лекций по комплексному анализу. Москва. 2005 - <http://dmvn.mexmat.net/content/ccalculus/complexcalculus-6s-beloshapka.pdf>
3. Домрин А.В., Сергеев А.Г. Лекции по комплексному анализу. Ч.1. М.: МИАН, 2004 - <http://www.mi.ras.ru/books/pdf/ser1.pdf>
4. Львовский С.М. Лекции по комплексному анализу. Москва. 2009 - <http://www.mccme.ru/free-books/lvovski/lvovski-complan.pdf>

## **10. МАТЕРИАЛЬНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ОБЕСПЕЧЕНИЕ ДИСЦИПЛИНЫ (МОДУЛЯ) ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ГЛАВЫ КОМПЛЕКСНОГО АНАЛИЗА:**

учебные аудитории для проведения лекционных и практических занятий, доступ аспирантов к компьютеру с Microsoft Office.

Программа составлена в соответствии с требованиями ФГОС ВО аспирантуры (Приказ Минобрнауки РФ от 30.07.2014 № 866 )

Автор: проф. Л.А.Аксентьев  
Рецензент: профессор Шабалин П.Л.

Программа одобрена на заседании Учебно-методической комиссии Института математики и механики КФУ от 29 августа 2015 года, протокол № 11.