Факторно делимые группы и их обобщения

Царев А.В.

26 августа 2021 г.

Введение

Определение (Fomin–Wickless).

Абелева группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит делимых периодических подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — делимая периодическая группа.

Fomin A.A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. AMS (1998) V. 126, 45–52.

Введение

Определение (Fomin–Wickless).

Абелева группа A называется *факторно делимой*, если она не содержит делимых периодических подгрупп, но содержит такую свободную подгруппу F конечного ранга, что A/F — делимая периодическая группа.

Fomin A.A., Wickless W. Quotient divisible abelian groups // Proc. AMS (1998) V. 126, 45–52.

Примеры:

1) $\mathbb{Q}^n$, $\mathbb{Z}^n$ — факторно делимые группы ($n \in \mathbb{N}$).

2) $\mathbb{Q} \oplus \mathbb{Z}_m$ — факторно делимая группа.

3) $A = \langle p^{-1} \mid p \in P \rangle \subset \mathbb{Q}$ — не факторно делимая группа.

История вопроса: факторно делимые группы без кручения

Определение (Beaumont–Pierce, 1961).

Пусть A — группа без кручения. Тогда A называется *факторно делимой* группой (фд-группой) содержит широкую подгруппу B, такую что B — свободная группа и A/B — прямая сумма делимой и ограниченной группы.

Beaumont R., Pierce R. Torsion Free Rings // Ill. J. Math. (1961) V. 5, 61–98.

Лемма.

Пусть A — факторно делимая группа, тогда A содержит свободную подгруппу F, такую что A/F — делимая периодическая группа.

Факторно делимые группы без кручения

Аддитивные группы колец из следующих классов являются факторно делимыми:

- полупримитивные кольца без кручения конечного ранга;
- кольца алгебраических чисел;
- кольца без кручения R конечного ранга, такие что $r_p(R^+) \leqslant 1$;
- не нильпотентные кольца без кручения ранга 1;
- E-кольца без кручения конечного ранга...

Факторно делимые группы без кручения

Пусть A — группа без кручения конечного ранга n; $F = \bigoplus\limits_{i=1}^{n} \mathbb{Z} x_i \subset A$.

$$A/F = \bigoplus_{p \in P} t_p(A/F) \cong \bigoplus_{p \in P} \left[\bigoplus_{i=1}^{r_p} \mathbb{Z}_{p^{k_{ip}}} \oplus \bigoplus_{n-r_p} \mathbb{Z}_{p^\infty} \right].$$

Здесь $r_p = r_p(A) = \dim_{\mathbb{Z}_p} A/pA$ — p-ранг группы A; $k_{ip} \in \mathbb{N} \cup \{0\}$.

Категория $\mathcal{QD}$: квазигомоморфизмы

A и B — произвольные группы. Элементы $\mathbb{Q}$-пространства $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}\,(A,\ B)$ называются *квазигомоморфизмами* из A в B.

Если A и B — группы без кручения, то квазигомоморфизм $f : A \to B$ это гомоморфизм векторных пространств

$$f : \mathbb{Q} \otimes A \to \mathbb{Q} \otimes B,$$

такой что $nf(A) \subset B$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.

Категория $\mathcal{QD}$: квазигомоморфизмы

A и B — произвольные группы. Элементы $\mathbb{Q}$-пространства $\mathbb{Q} \otimes \mathrm{Hom}\,(A, B)$ называются *квазигомоморфизмами* из A в B.

Если A и B — группы без кручения, то квазигомоморфизм $f : A \to B$ это гомоморфизм векторных пространств

$$f : \mathbb{Q} \otimes A \to \mathbb{Q} \otimes B,$$

такой что $nf(A) \subset B$ при некотором $n \in \mathbb{N}$.

Теорема (Arnold, 1972).

Категория факторно делимых групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов самодвойственна.

Категория $\mathcal{QD}$: класс $\mathcal{G}$

Определение (Glaz–Wickless, 1994).

Класс $\mathcal{G}$ состоит из всех групп вида $G = D \oplus H$, где D — делимая группа без кручения конечного ранга (может быть и нулевой), а H — редуцированная группа с периодической частью $t(H) = \bigoplus_{p \in P} t_p(H)$, удовлетворяющая условиям:

1) каждая группа $t_p(H)$ конечна;
2) H сервантно вкладывается в группу $\prod_{p \in P} t_p(H)$;
3) $H/t(H)$ — делимая группа конечного ранга;
4) (*условие на проекции*) существует свободная подгруппа F в G, такая что образ ограничения проекции $G \to t_p(G)$ на F совпадает с $t_p(G)$ (почти) для всех простых p.

Категория $\mathcal{QD}$: класс $\mathcal{G}$

A — *самомалая группа*, если $\mathrm{Hom}\,(A, \bigoplus_{\mathfrak{m}} A) \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}} \mathrm{Hom}\,(A, A)$.

Теорема (Albrecht–Goeters–Wickless, 1995).

Группа G принадлежит классу $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда G — самомалая группа и $G/t(G)$ — делимая группа конечного ранга.

Категория $\mathcal{QD}$: класс $\mathcal{G}$

A — *самомалая группа*, если $\operatorname{Hom}(A, \bigoplus_{\mathfrak{m}} A) \cong \bigoplus_{\mathfrak{m}} \operatorname{Hom}(A, A)$.

Теорема (Albrecht–Goeters–Wickless, 1995).

Группа G принадлежит классу $\mathcal{G}$ тогда и только тогда, когда G — самомалая группа и $G/t(G)$ — делимая группа конечного ранга.

Категория $\mathcal{QG}$: объекты — группы из $\mathcal{G}$, морфизмы — квазигомоморфизмы.

Теорема (Fomin–Wickless, 1995).

Категория $\mathcal{QG}$ двойственна категории локально свободных групп без кручения конечного ранга с квазигомоморфизмами в качестве морфизмов.

Категория $\mathcal{QD}$: смешанные факторно делимые группы

Предложение.

Пусть $G \in \mathcal{G}$ и F — свободная подгруппа группы G, удовлетворяющая строгому условию на проекции, тогда G/F — делимая периодическая группа.

Категория $\mathcal{QD}$: объекты — факторно делимые группы, морфизмы — квазигомоморфизмы.

Категория $\mathcal{QTF}$: объекты — группы без кручения конечного ранга, морфизмы — квазигомоморфизмы.

Категория $\mathcal{QD}$: смешанные факторно делимые группы

Предложение.

Пусть $G \in \mathcal{G}$ и F — свободная подгруппа группы G, удовлетворяющая строгому условию на проекции, тогда G/F — делимая периодическая группа.

Категория $\mathcal{QD}$: объекты — факторно делимые группы, морфизмы — квазигомоморфизмы.

Категория $\mathcal{QTF}$: объекты — группы без кручения конечного ранга, морфизмы — квазигомоморфизмы.

Теорема (Fomin–Wickless, 1998).

Категории $\mathcal{QD}$ и $\mathcal{QTF}$ двойственны.

Свойства факторно делимых групп

1. *Конечная прямая сумма факторно делимых групп является факторно делимой группой.*
2. *Если* G *— факторно делимая группа, то* $G/t(G)$ *— факторно делимая группа без кручения.*
3. *Если* G *— факторно делимая группа, то* $G = t_p(G) \oplus G^{(p)}$*, где* $t_p(G)$ *— конечная группа, а* $G^{(p)}$ *— факторно делимая группа без p-кручения.*
4. *Первая ульмовская подгруппа факторно делимой группы совпадает с ее делимой частью.*
5. *Если* G *— факторно делимая группа, то ее редуцированная часть может и не быть факторно делимой группой, однако, она представима в виде* $H \oplus K$*, где* H *— факторно делимая, а* K *— конечная группа.*
6. *Факторно делимая группа расщепляется тогда и только тогда, когда она имеет конечную периодическую часть.*

Свойства факторно делимых групп

Теорема.

Пусть $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — произвольные элементы группы A, $F = \langle a_1, a_2, \ldots, a_n \rangle$. Следующие утверждения равносильны:

1. Факторгруппа A/F делимая;
2. Для каждого $m \in \mathbb{N}$ группа A/mA порождается элементами
$$\overline{a}_1 = a_1 + mA, \overline{a}_2 = a_2 + mA, \ldots, \overline{a}_n = a_n + mA \in A/mA,$$
3. Для каждого простого p группа A/pA порождается элементами
$$\overline{a}_1 = a_1 + pA, \overline{a}_2 = a_2 + pA, \ldots, \overline{a}_n = a_n + pA \in A/pA,$$

Свойства факторно делимых групп

Теорема о наращивание.

Пусть A — факторно делимая группа и $p \in P$. Если $r_p(A) < r(A)$, то группа $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus A$ также является факторно делимой.

Свойства факторно делимых групп

Теорема о наращивание.

Пусть A — факторно делимая группа и $p \in P$. Если $r_p(A) < r(A)$, то группа $\mathbb{Z}_{p^k} \oplus A$ также является факторно делимой.

Теорема о вложении.

Пусть A — группа с конечной максимальной линейно независимой над $\mathbb{Z}$ системой элементов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не содержащая ненулевых периодических делимых подгрупп. Группа A является факторно делимой с базисом $a_1, a_2, \ldots, a_n$ тогда и только тогда, когда элементы $a_1^\circ, a_2^\circ, \ldots, a_n^\circ$ порождают модуль $\widehat{A}$ над кольцом $\widehat{\mathbb{Z}}$.

Следствия из теоремы о вложении

Следствие 1.

Пусть M — конечно порожденный $\widehat{\mathbb{Z}}$-модуль и $a_1, \ldots, a_n$ — его лнз порождающие элементы. Тогда группа

$$A = \langle a_1, \ldots, a_n \rangle_* = \{b \in M \mid mb = k_1 a_1 + \ldots + k_n a_n, \;\; m \in \mathbb{N}, \; k_1, \ldots, k_n \in \mathbb{Z}\}$$

является факторно делимой, причем $\widehat{A} \cong M$.

Факторно делимые группы ранга 1

Пусть $\chi = (m_p)$, $p \in P$, $m_p \in \mathbb{N} \cup \{0, \infty\}$.

$$\mathbb{Z}_\chi = \prod_{p \in P} K_p, \text{ где } K_p = \begin{cases} 0, & m_p = 0 \\ \mathbb{Z}/p^{m_p}\mathbb{Z}, & 0 < m_p < \infty \\ \widehat{\mathbb{Z}}_p, & m_p = \infty \end{cases};$$

$\mathbb{Z}_\chi$ — кольцо; — циклический $\widehat{\mathbb{Z}}$-модуль.

Теорема.

Если A — факторно делимая группа ранга 1, то $\widehat{A} \cong \mathbb{Z}_\chi$ для некоторой характеристики χ.

Факторно делимые группы ранга 1

Теорема (Давыдова, 2007).
Пусть A, B *— факторно делимые группы ранга* 1*. Тогда* $A \cong B \iff \widehat{A} \cong \widehat{B}$.

Факторно делимые группы ранга 1

Теорема (Давыдова, 2007).

Пусть A, B — факторно делимые группы ранга 1. Тогда $A \cong B \quad \Leftrightarrow \quad \widehat{A} \cong \widehat{B}$.

Теорема (Baer, 1937).

Пусть A, B — группы без кручения ранга 1, $a \in A \setminus \{0\}$, $b \in B \setminus \{0\}$. Тогда $A \cong B \quad \Leftrightarrow \quad A/\langle a\rangle \doteq B/\langle b\rangle$.

Факторно делимые группы ранга 1

Теорема (Давыдова, 2007).

Пусть A, B — факторно делимые группы ранга 1. Тогда $A \cong B \;\Leftrightarrow\; \widehat{A} \cong \widehat{B}$.

Теорема (Baer, 1937).

Пусть A, B — группы без кручения ранга 1, $a \in A \setminus \{0\}$, $b \in B \setminus \{0\}$. Тогда $A \cong B \;\Leftrightarrow\; A/\langle a\rangle \doteq\!\!\!\!\cong B/\langle b\rangle$.

$$A/\langle a\rangle \cong \bigoplus_{p\in P} \mathbb{Z}_{p^{m_p}},\ m_p = \infty, 0, 1, 2, \dots$$

Случай бесконечного ранга

Определение.

Группу A будем называть *обобщенной факторно делимой*, если она содержит свободную подгруппу F, такую что A/F — делимая периодическая группа.

Случай бесконечного ранга

Определение.

Группу A будем называть *обобщенной факторно делимой*, если она содержит свободную подгруппу F, такую что A/F — делимая периодическая группа.

Теорема (Reid, 1962).

Если A — группа без кручения бесконечного ранга, то найдется свободная подгруппа F группы A, такая что A/F — делимая периодическая группа.

Случай бесконечного ранга

Определение.

Группу A будем называть *обобщенной факторно делимой*, если она содержит свободную подгруппу F, такую что A/F — делимая периодическая группа.

Теорема (Reid, 1962).

Если A — группа без кручения бесконечного ранга, то найдется свободная подгруппа F группы A, такая что A/F — делимая периодическая группа.

Теорема (Царев, 2021).

Группа A бесконечного ранга является обобщенной факторно делимой тогда и только тогда, когда $r_p(A) \leqslant r_0(A)$ при всех простых p.

Случай бесконечного ранга

Примеры.

1) $A = \prod\limits_{p\in P} \mathbb{Z}_p$, $r_0(A) = c$ и $r_p(A) = 1$ при любом $p \in P$. Тогда A — обобщенная факторно делимая группа ($n \in \mathbb{N}$).

2) $\widehat{\mathbb{Z}}_p$ — обобщенная факторно делимая группа.

3) Пусть A — смешанная группа бесконечного ранга, все p-примарные компоненты которой конечны. Тогда $|t(A)| \leqslant \aleph_0$ и, поскольку $r_0(A) = \infty$, то $r_0(A) = |A/t(A)| = |A|$. Следовательно, $r_p(A) \leqslant |A/pA| \leqslant |A| = r_0(A)$ при всех простых p, т. е. A — обобщенная факторно делимая группа.

Другие варианты обобщения; примарный случай

Схема определения 1:

Группа A из *некоторого класса* содержит *некоторым образом* подгруппу F *некоторого вида*, такую что A/F — делимая периодическая группа.

Другие варианты обобщения; примарный случай

Схема определения 1:

Группа A из *некоторого класса* содержит *некоторым образом* подгруппу F *некоторого вида*, такую что A/F — делимая периодическая группа.

Теорема (Куликов, 1945)

Каждая примарная абелева группа A содержит подгруппу F, такую что

1) *F разлагается в прямую сумму циклических групп;*
2) *F — сервантная подгруппа группы A;*
3) *факторгруппа A/F является делимой группой.*

Другие варианты обобщения

Схема определения 2:

Группа A из *некоторого класса* содержит *некоторым образом* подгруппу F *некоторого вида*, такую что F *порождает* пополнение $\widehat{A}$ в *некоторой топологии*.

Другие варианты обобщения

Схема определения 2:

Группа A из *некоторого класса* содержит *некоторым образом* подгруппу F *некоторого вида*, такую что F *порождает* пополнение $\widehat{A}$ в *некоторой топологии*.

Периодически полной p-примарной группой называется периодическая часть $t(\widehat{B})$ p-адического пополнения $\widehat{B}$ прямой суммы B циклических p-примарных групп.

Другие варианты обобщения

Схема определения 2:

Группа A из *некоторого класса* содержит *некоторым образом* подгруппу F *некоторого вида*, такую что F *порождает* пополнение $\widehat{A}$ в *некоторой топологии*.

Периодически полной p-примарной группой называется периодическая часть $t(\widehat{B})$ p-адического пополнения $\widehat{B}$ прямой суммы B циклических p-примарных групп.

Теорема (Charles, 1967).

Пусть B — базисная подгруппа периодически полной p-приманой группы A. Тогда пополнение $\overline{A}$ в индуктивной p-адической топологии изоморфно $\overline{B}$.

Другие варианты обобщения

Проблема.

Описать группы A, такие что $\widehat{A} \cong \widehat{t(A)}$.

Другие варианты обобщения

Проблема.

Описать группы A, такие что $\widehat{A} \cong \widehat{t(A)}$.

Это sp-группы?

Спасибо за внимание!