Известия вузов. Математика
2016, №10, с. 36–40

http://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm/
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

М. МИРСАБУРОВ, И.Н. ХАЙРУЛЛАЕВ, У.Э. БОБОМУРОДОВ

ОБ ОДНОМ ОБОБЩЕНИИ ЗАДАЧИ БИЦАДЗЕ–САМАРСКОГО ДЛЯ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ТИПА

Аннотация. Исследуется задача с условиями Бицадзе–Самарского на граничной характеристике на специальной внутренней кривой и на отрезке вырождения для уравнения смешанного типа. С помощью принципа максимума доказана единственность, а с помощью метода интегральных уравнений — существование решения задачи.

Ключевые слова: условие Бицадзе–Самарского, функциональное уравнение, интегральное уравнение Трикоми, индекс.

УДК: 517.956

1. Постановка задачи А. Рассмотрим уравнение
$$(\operatorname{sign} y)|y|^m u_{xx} + u_{yy} - (m/2y)u_y = 0, \quad m > 0. \tag{1}$$

Пусть Ω — конечная односвязная область комплексной плоскости $z = x+iy$, ограниченная при $y > 0$ нормальной кривой $\sigma_0 : x^2 + 4(m+2)^{-2}y^{m+2} = 1$ с концами в точках $A(-1, 0)$ и $B(1, 0)$, а при $y < 0$ — характеристиками AC и BC уравнения (1).

Обозначим через Ω^+ и Ω^- части области Ω, лежащие соответственно в полуплоскостях $y > 0$ и $y < 0$, $I = \{(x, y) \mid -1 < x < 1, \, y = 0\}$.

В 1969 году А.В. Бицадзе и А.А. Самарский [1] сформулировали и исследовали новую задачу для равномерно эллиптического уравнения. Своеобразие этой задачи состоит в том, что граничные значения искомого решения повторяются во внутренних точках области, где искомая функция должна удовлетворять уравнению. В работе ([2], с. 223) для уравнения смешанного типа исследована задача с условием Бицадзе–Самарского на граничной характеристике AC и отрезке вырождения AB.

В данной работе исследуется задача с нагруженным условием Бицадзе–Самарского, связывающим значения искомого решения на характеристике AC, на отрезке вырождения AB и на внутренней кривой AC_1, в точках которой искомая функция должна удовлетворять уравнению (1).

Задача А. Найти в области Ω функцию $u(x, y) \in C\left(\overline{\Omega}\right)$, удовлетворяющую следующим условиям:

1) $u(x, y)$ принадлежит $C^2(\Omega^+)$ и удовлетворяет уравнению (1) в области Ω^+;

2) $u(x, y)$ является обобщенным решением класса R_1 (([2], с. 129), $\tau'(x), \nu(x) \in H$, причем $\tau'(x)$, $\nu(x)$ непрерывны в точке $x = -1$) уравнения (1) в области Ω^-;

3) на интервале вырождения имеет место условие сопряжения
$$\lim_{y\to-0}(-y)^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y} = \lim_{y\to+0} y^{-m/2}\frac{\partial u}{\partial y}, \quad x \in I, \tag{2}$$

Поступили перый вариант 15.03.2015, окончательный вариант 20.05.2015

причем эти пределы при $x \to 1$ могут иметь особенности порядка ниже единицы;

4) выполнены условия

$$u(x,y)|_{\sigma_0} = \varphi(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{3}$$

$$u[\theta(x)] = \mu u[\theta_k(x)] + (1-\mu)u(x,0) + \psi(x), \quad x \in \overline{I}, \tag{4}$$

где постоянная $\mu \neq 1$, заданные функции $\varphi(x) \in C^{1,\alpha_0}(\overline{I})$, $\psi(x) \in C^{2,\alpha_0}(\overline{I})$, $\alpha_0 = \mathrm{const} < 1$, причем $\varphi(\pm 1) = 0$, $\psi(-1) = 0$,

$$\theta(x) = (x_0 - 1)/2 - i[(m+2)(1+x_0)/4]^{2/(m+2)},$$

$$\theta_k(x) = (kx_0 - 1)/(1+k) - i[(m+2)(1+x_0)/2(1+k)]^{2/(m+2)}$$

— аффиксы точек пересечения характеристики AC и кривой

$$AC_1 : x - (2k/(m+2))(-y)^{(m+2)/2} = -1, \quad k = \mathrm{const} > 1,$$

где $C_1 \in BC$, с характеристикой, исходящей из точки $(x_0, 0)$, $x_0 \in I$.

Условие (4) является аналогом условия Бицадзе–Самарского и связывает значения искомой функции на AC, AC_1 и AB. При $\mu = 0$ задача A переходит в задачу Бицадзе–Самарского для уравнения смешанного типа ([2], с. 223).

Решение видоизмененной задачи Коши с данными

$$u(x,0) = \tau(x), \quad x \in \overline{I}; \quad \lim_{y \to -0} (-y)^{-m/2} \frac{\partial u}{\partial y} = \nu(x), \quad x \in I,$$

для уравнения (1) в области Ω^- задается формулой Даламбера

$$u(x,y) = \frac{1}{2}\left[\tau(x - \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}) + \tau(x + \frac{2}{m+2}(-y)^{(m+2)/2})\right] - \\ - \frac{(-y)^{(m+2)/2}}{m+2} \int_{-1}^{1} \nu\left[x + \frac{2t}{m+2}(-y)^{(m+2)/2}\right] dt. \tag{5}$$

В силу (5) из условия (4) имеем

$$\Phi(x) = \omega \Phi(p(x)) + \Psi(x), \tag{6}$$

где $\omega = \mu a/(\mu - 1)$, $p(x) = ax + a - 1$, $a = (k-1)/(1+k)$, $\Phi(x) = \tau'(x) - \nu(x)$, $\Psi(x) = 2\psi'(x)/(\mu - 1)$.

Решение функционального уравнения (6) будем искать в классе функций, ограниченных в точке $x = -1$. Если отказаться от этого требования, то соответствующее однородное функциональное уравнение (6) будет иметь нетривиальное решение $\Phi(x) = (1+x)^\lambda$, где $\lambda = -\log_a \omega < 0$. Решение функционального уравнения (6) будем искать методом итераций.

Переходя к пределу при $n \to \infty$ для n-й итерации

$$\Phi(x) = \omega^{n+1} \Phi(a^{n+1}x + a^{n+1} - 1) + \sum_{j=0}^{n} \omega^j \Psi(a^j x + a^j - 1), \tag{7}$$

с учетом

$$|\omega| = |\mu a/(\mu - 1)| < 1 \tag{8}$$

имеем

$$\tau'(x) - \nu(x) = F(x), \quad x \in I, \tag{9}$$

где $F(x) = \sum\limits_{j=0}^{\infty} \omega^j \Psi(a^j x + a^j - 1) \in C^{1,\alpha_0}(\overline{I})$.

Соотношение (9) является первым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенным на I из области Ω^-.

В силу соотношения (9) нетрудно убедиться в справедливости следующего принципа экстремума А.В. Бицадзе ([3], с. 301): *решение* $u(x,y)$ *задачи* А *при* $\psi(x)=0$ *свой положительный максимум и отрицательный минимум в замкнутой области* Ω^+ *принимает в точках кривой* σ_0. В силу этого принципа экстремума из соответствующего однородного краевого условия (3) следует, что решение задачи А единственно.

2. Существование решения задачи А. Решение видоизмененной задачи N с краевыми данными

$$u(x,y)|_{\sigma_0}=\varphi(x),\quad x\in I;\quad \lim_{y\to+0} y^{-\frac{m}{2}}\frac{\partial u}{\partial y}=\nu(x),\quad x\in I,$$

для уравнения (1) в области Ω^+ задается формулой

$$u(x,y)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\nu(t)\left\{\ln\left[(x-t)^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]-\ln\left[(1-xt)^2+\frac{4t^2}{(m+2)^2}y^{m+2}\right]\right\}dt-$$
$$-\frac{(m+2)(1-R^2)}{4\pi}\int_0^l \varphi(\xi(s))\eta^{-(m+2)/2}(s)(r^{-2}+r_1^{-2})d\xi(s),\quad (10)$$

где s — длина дуги кривой, отсчитываемая от точки $B(-1,0)$, l — длина всей дуги кривой σ_0, $(\xi(s),\,\eta(s))\in\sigma_0$,

$$r^2=(x-\xi(s))^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{(m+2)/2}-\eta^{(m+2)/2}(s)\right)^2,$$

$$r_1^2=(x-\xi(s))^2+\frac{4}{(m+2)^2}\left(y^{(m+2)/2}+\eta^{(m+2)/2}(s)\right)^2,$$

$$R^2=x^2+\frac{4}{(m+2)^2}y^{m+2}.$$

Переходя к пределу при $y\to 0$ в формуле (10), получим

$$\tau(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\nu(t)\left[\ln(x-t)^2-\ln(1-xt)^2\right]dt-$$
$$-\frac{(m+2)(1-x^2)}{2\pi}\int_0^l\varphi(\xi(s))\eta^{-(m+2)/2}(s)[1-2x\xi(s)+x^2]^{-1}d\xi(s).$$

Отсюда

$$\tau'(x)=-\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}\right)\nu(t)dt=F_1(x),\quad (11)$$

где

$$F_1(x)=-\frac{m+2}{2\pi}\frac{d}{dx}\left\{(1-x^2)\int_0^l\varphi(\xi(s))\eta^{-(m+2)/2}(s)[1-2x\xi(s)+x^2]^{-1}d\xi(s)\right\}.$$

Соотношение (11) является вторым функциональным соотношением между неизвестными функциями $\tau(x)$ и $\nu(x)$, привнесенным на I из области Ω^+.

Теперь, исключая $\tau'(x)$ из соотношений (9) и (11), с учетом (2) и равенства

$$\frac{1}{t-x}-\frac{t}{1-xt}=\frac{1+t}{1+x}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)$$

получим интегральное уравнение Трикоми

$$\nu(x)+\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{1+t}{1+x}\left(\frac{1}{t-x}-\frac{1}{1-xt}\right)\nu(t)dt=F_2(x),\quad (12)$$

где $F_2(x) = F_1(x) - F(x) \in C(\overline{I}) \cap C^{1,\alpha_0}(I)$. Уравнение (12) является уравнением нормального типа и его индекс в классе функций Гёльдера, ограниченных в точке $x = -1$, т. е. в классе $h(-1)$, равен нулю.

Применяя к уравнению (12) метод регуляризации Карлемана, развитый С.Г. Михлиным [4], получим решение в замкнутой форме

$$\nu(x) = \frac{1}{2}F_2(x) - \frac{1}{2\pi}\int_{-1}^{1}\sqrt{\frac{(1-t)(1+x)}{(1+t)(1-x)}}\left(\frac{1}{t-x} - \frac{t}{1-xt}\right)F_2(t)dt. \tag{13}$$

Из формулы (13) видно, что решение $\nu(x)$ при $x = -1$ особенности не имеет, а при $x = 1$ имеет особенность порядка $1/2$. Дифференцируемость найденной функции $\nu(x)$ при $x \in I$ проверяется интегрированием по частям в формуле (13).

Таким образом, доказана

Теорема. *Задача* A *при выполнении условия* (8) *однозначно разрешима.*

Литература

[1] Бицадзе А.В., Самарский А.А. *О некоторых простейших обобщениях линейных эллиптических краевых задач*, ДАН СССР **185** (4), 739–740 (1969).
[2] Смирнов М.М. *Уравнения смешанного типа* (Высш. школа, М., 1985).
[3] Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных* (Наука, М., 1981).
[4] Михлин С.Г. *Об интегральном уравнении F. Trikomi*, ДАН СССР **59** (6), 1053–1056 (1948).

М. Мирсабуров

Термезский государственный университет,
ул. Ф. Ходжаева, д. 43, г. Термез, 190111, Республика Узбекистан,

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru

И.Н. Хайруллаев

Термезский государственный университет,
ул. Ф. Ходжаева, д. 43, г. Термез, 190111, Республика Узбекистан,

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru

У.Э. Бобомуродов

Термезский государственный университет,
ул. Ф. Ходжаева, д. 43, г. Термез, 190111, Республика Узбекистан,

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru

M. Mirsaburov, I.N. Khairullaev, and U.E. Bobomurodov

On a generalization of Bitsadze–Samarskii equation for mixed type equation

Abstract. For mixed type equation we study a problem with Bitsadze–Samarskii conditions on boundary characteristic on special inner curve and on a segment of degeneration. With the help of the maximum principle we prove uniqueness of a solution to the problem and with the help of the method of integral equations we prove its existence.

Keywords: Bitsadze–Samarskii condition, functional equation, Tricomi type integral equation, index.

M. Mirsaburov

Termez State University,
43 F. Khodzhaev str., Termez, 190111 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru

I.N. Khairullaev

Termez State University,
43 F. Khodzhaev str., Termez, 190111 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru

U.E. Bobomurodov

Termez State University,
43 F. Khodzhaev str., Termez, 190111 Republic of Uzbekistan,

`e-mail:` mirsaburov@mail.ru