ЗАДАЧИ И РЕШЕНИЯ
студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского
1 декабря 2024 г.

---

1. Доказать, что кривая $y = x^4+3x^2+2x$ не пересекается с прямой $y = 2x-1$ и найти кратчайшее расстояние между их точками.
Ответ: $d = \frac{1}{\sqrt{5}}$.
Решение. Уравнение $x^4 + 3x^2 + 2x = 2x - 1$ очевидным образом не имеет вещественных решений.
Найдем точку графика функции $y = x^4 + 3x^2 + 2x$, в которой касательная параллельна прямой $y = 2x - 1$. Уравнение $(x^4 + 3x^2 + 2x)' = 2$ имеет единственное решение $x = 0$. Поэтому искомой точкой является начало координат, и касательная в начале координат имеет уравнение $y = 2x$. Поскольку $x^4 + 3x^2 + 2x \geqslant 2x$ для всех x, то искомое кратчайшее расстояние равно расстоянию от начала координат до прямой $y = 2x - 1$. Пользуясь формулой $d = \frac{|Ax_0+By_0+C|}{\sqrt{A^2+B^2}}$ для расстояния от точки $M(x_0, y_0)$ до прямой $Ax+By+C = 0$, находим требуемое расстояние $\frac{1}{\sqrt{1+4}} = \frac{1}{\sqrt{5}}$.

2. Пусть $\lceil\cdot\rceil$ — операция округления вещественного числа вверх до ближайшего целого. Необходимо найти точное значение суммы $s = \lceil\sqrt{1}\rceil + \lceil\sqrt{2}\rceil + \lceil\sqrt{3}\rceil + \ldots + \lceil\sqrt{2024}\rceil$.
Ответ: $s = 61710$.
Решение. Пусть $n = 45$, χ(неравенство) — индикатор выполнения некого неравенства, то есть функция принимающая значение единица, если неравенство выполняется, ноль — иначе. Имеем

$$s + n = \sum_{k=1}^{n^2}\lceil\sqrt{k}\rceil = \sum_{m=1}^{n} m \sum_{k=1}^{n^2} \chi((m-1)^2 < k \leqslant m^2) = \sum_{m=1}^{n} m(2m-1) = \frac{(n+1)n(4n-1)}{6},$$

где в последнем переходе мы использовали известную формулу $\sum\limits_{m=1}^{n} m^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$.
Искомая сумма $s = \frac{(n+1)n(4n-1)}{6} - n = \frac{(n-1)n(4n+7)}{6}$.
Подставив $n = 45$, получим ответ $s = 61710$.
Замечание: Если N — произвольное натуральное число, $n = \lceil\sqrt{N}\rceil$, то $\sum_{k=1}^{N}\lceil\sqrt{k}\rceil = nN - \frac{n^3}{3} + \frac{n^2}{2} - \frac{n}{6}$.

3. Даны 2024 различных натуральных числа a_k, меньших n и расположенных в порядке возрастания. При каком наибольшем n можно гарантировать, что по крайней мере для одной пары i и j выполняется соотношение $a_1 + a_i = a_j$?
Ответ: $n = 4047$.
Решение. Решим в общем случае для k чисел. Рассмотрим $k-1$ положительных, попарно различных чисел $a_2 - a_1, \ldots, a_k - a_1$. Вместе с k заданными они образуют множество, состоящее из $2k - 1$ положительных чисел, меньших n. Если $n = 2k - 1$, оба набора содержат по крайней мере одно общее число, т.е. по крайней мере один раз выполняется равенство $a_j - a_1 = a_i$.
Если $n = 2k = 4048$ условие не гарантируется. Например, оно не выполняется для набора нечётных чисел: $a_1 = 1$, $a_2 = 3$, $\ldots$, $a_{2024} = 4047$.

4. Последовательность $\{a_n\}$ образована по правилу $a_n = \sqrt{\frac{1+a_{n-1}}{2}}$, причём $a_1 = 0$.
а) Найдите предел A этой последовательности (2 балла).
б) Исследуйте асимптотику $\{a_n\}$, т.е. найдите такие числа B и $C > 0$, что $\lim\limits_{n\to\infty}(A - a_n)B^n = C$ (5 баллов).

(Абзалилов Д.Ф.)

Ответ: $A = 1$, $B = 4$, $C = \pi^2/2$.
Решение. Согласно формуле понижения степени $\cos^2\frac{\alpha}{2} = \frac{1+\cos\alpha}{2}$, заметим, что $a_n = \cos\frac{\pi}{2^n}$. Поэтому $A = 1$. Далее $1 - a_n = 2\sin^2\frac{\pi}{2^{n+1}} \sim \frac{\pi^2}{2^{2n+1}}$. Следовательно $\lim\limits_{n\to\infty}(1 - a_n)4^n = \lim\limits_{n\to\infty}\frac{\pi^2\cdot 4^n}{2^{2n+1}} = \frac{\pi^2}{2}$.

5. Найти все непрерывные функции $y(x)$, заданные на $\mathbb{R}$ и удовлетворяющие уравнению

$$\int\limits_{-x}^{x} ty(t)dt = y(x) + xe^{x^2} - x^2.$$

(Григорьева И.С.)

Ответ: $y(x) = x^2 - \left(\dfrac{2x^3}{3} + x\right) e^{x^2}$.

Обозначим левую часть уравнения через $z(x)$, это нечётная функция. Имеем $y(x) = z(x) - xe^{x^2} + x^2$. Подставив это выражение в исходное уравнение, получим $z(x) = \int\limits_{-x}^{x} t[z(t) - te^{t^2} + t^2]dt = 2\int\limits_{0}^{x} t[z(t) - te^{t^2}]dt$.

Так как $z(x)$ непрерывна, то она и дифференцируема как интеграл с переменным верхним пределом, и $z'(x) = 2x[z(x) - xe^{x^2}]$. Решим это линейное дифференциальное уравнение:

$$z = C(x)e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad C'(x)e^{x^2} + C(x)e^{x^2}2x = 2xC(x)e^{x^2} - 2x^2e^{x^2} \quad \Rightarrow \quad C'(x) = -2x^2 \quad \Rightarrow$$

$$\Rightarrow \quad C(x) = C_1 - \frac{2x^3}{3} \quad \Rightarrow \quad z(x) = \left(C_1 - \frac{2x^3}{3}\right) e^{x^2}.$$

В силу нечётности z имеем $C_1 = 0 \quad \Rightarrow \quad y(x) = x^2 - \left(\dfrac{2x^3}{3} + x\right) e^{x^2}$.

6. Нео обнаружил, что матрицы $A = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{5} & \mathbf{6} & \mathbf{5} \\ \mathbf{8} & \mathbf{9} & \mathbf{4} \end{pmatrix}$ и $B = \begin{pmatrix} 4 & 0 & 2 \\ 5 & 9 & 0 \\ 1 & 3 & 8 \end{pmatrix}$ при нахождении произведения AB дают неожиданный результат: $\begin{pmatrix} \mathbf{2}4 & \mathbf{3}0 & \mathbf{1}2 \\ \mathbf{5}5 & \mathbf{6}9 & \mathbf{5}0 \\ \mathbf{8}1 & \mathbf{9}3 & \mathbf{4}8 \end{pmatrix}$. Более того, оказалось, что эта же матрица получается, если перемножить матрицы A и B в обратном порядке. Доказать, что это не случайно, т.е. если квадратные матрицы A и B обладают свойством $AB = kA + mB$ (для ненулевых чисел k и m), то они всегда коммутируют друг с другом.

(Абзалилов Д.Ф., Лернер Э.Ю.)

Решение. Из условия следует $(\frac{1}{m}A - I)(\frac{1}{k}B - I) = I$, где I — единичная матрица. Значит, матрицы $(\frac{1}{m}A - I)$ и $(\frac{1}{k}B - I)$ взаимообратны, следовательно коммутируют. Раскрыв скобки в равенстве

$$\left(\frac{1}{m}A - I\right)\left(\frac{1}{k}B - I\right) = \left(\frac{1}{k}B - I\right)\left(\frac{1}{m}A - I\right)$$

и сократив одинаковые слагаемые, получим $AB = BA$.

Замечание: Матрица $A - mI$ обратима и поэтому B выражается через A по формуле $B = k(A - mI)^{-1}A$. Компьютерным перебором можно убедиться, что существует ровно 100 пар матриц A, B размера 2×2 и 23401 пара матриц A, B размера 3×3 таких, что $AB = 10A + B$, при этом элементы матрицы A из множества $\{1, \ldots, 9\}$, а элементы B – из множества $\{0, \ldots, 9\}$.

7. "Латинские подквадраты". Латинским квадратом порядка n называется матрица $n \times n$, заполненная n символами так, что в каждой строке и в каждом столбце матрицы каждый символ встречается в точности один раз. Пусть A – некоторая матрица, а $k(A)$ – максимальный порядок всех подматриц этой матрицы, являющихся латинскими квадратами. Чему может быть равно $k(A)$, если A – латинский квадрат порядка $n = 5$?

Замечание: Подматрицу порядка k образуют элементы, стоящие на пересечение каких-нибудь k строк и k столбцов.

(Бардаков В.Г., Лернер Э.Ю.)

Ответ: $k = 1$ или 2.

Решение. Докажем, что в латинском квадрате порядка n не может быть латинского подквадрата порядка $m > n/2$. Действительно, это бы привело к тому, что в каждой из m строк, содержащих латинский подквадрат, в оставшихся $n - m$ столбцах должны были бы разместиться $n - m$ символов. Поскольку $m > n - m$, то какой-то из этих символов встречался бы 2 раза в одном из рассматриваемых столбцов, противоречие.

Таким образом, вопрос задачи сводится к тому содержит ли латинский квадрат порядка 5 латинские подквадраты порядка 2. Несложно привести примеры когда ответ на этот вопрос как положительный, так и отрицательный:

$$\begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ B & C & D & E & A \\ C & D & E & A & B \\ D & E & A & B & C \\ E & A & B & C & D \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} A & B & C & D & E \\ B & A & E & C & D \\ C & D & A & E & B \\ D & E & B & A & C \\ E & C & D & B & A \end{pmatrix}.$$

В первом примере латинских подквадратов 2-го порядка нет, а во втором существует 4 латинских подквадрата 2-го порядка.

Замечание: Ответ на вопрос задачи для любого n служит предметом современных исследований, которые можно найти по запросу "Latin subsquare".

8. Саша и Коля играют в следующую игру. Имеется известный обоим игрокам список слов длины 5 в алфавите, состоящем из трёх букв A, B, C. На первом ходу Саша называет одну из букв алфавита, а Коля пишет на доске отличную от названной букву этого же алфавита. В следующие ходы данная операция повторяется: Саша называет какую-либо букву, а Коля дописывает справа от уже написанных букв букву, отличную от названной. Игра продолжается до тех пор, пока Коля не составит на доске слово из 5 букв. Коля выигрывает, если это слово окажется в упомянутом выше списке, в противном случае выигрывает Саша. Каково наибольшее количество слов в списке, если известно, что Саша имеет выигрышную стратегию?

(Калимуллин И.Ш.)

Ответ: $3^5 - 2^5 = 211$.

Решение. Поскольку у Саши имеется алгоритм, приводящий к выигрышу, и условия задачи предполагают, что он следует алгоритму, то от действий Коли ничего не зависит. На каждом ходу игры у Коли имеются две возможности, одинаково приводящие к проигрышу. Его ходы естественно рассматривать как ветки, в совокупности образующие бинарное дерево. Обозначим его T. Все 2^5 слов, состоящих из букв, образующих последовательные ветки дерева T, должны отсутствовать в списке. Поэтому в списке не может быть более $3^5 - 2^5$ слов.

Это является точной оценкой, поскольку Саша имеет выигрышную стратегию для списка, состоящего из всех пятибуквенных слов алфавита, содержащих букву A. Таких слов ровно $3^5 - 2^5$, а выигрышная стратегия Саши состоит в выборе буквы A на каждом ходу.

Опишем решение более детально. Пусть L – множество пятибуквенных слов, входящих в данный список. Тогда определим L' как множество четырёхбуквенных слов x таких, что по крайней мере два слова из $\{xA, xB, xC\}$ принадлежат L. Аналогично, пусть L'' – множество трёхбуквенных слов x таких, что как минимум два слова из $\{xA, xB, xC\}$ принадлежат L', и L''' – множество двухбуквенных слов x таких, что как минимум два слова из $\{xA, xB, xC\}$ принадлежат L''. Наконец, определим множество M, состоящее из таких букв X нашего алфавита, что по крайней мере два слова из $\{XA, XB, XC\}$ принадлежат L'''.

Заметим теперь, что если M состоит по меньшей мере из двух различных букв, то Коля всегда может выиграть. Действительно, на первом ходу он может написать букву из M, отличную от названной Сашей. Аналогично, на втором ходу он может выписать слово из L''', на третьем – слово из L'', на четвёртом – слово из L', а на пятом – слово из L.

Поэтому, если Саша имеет выигрышную стратегию, то имеется 2 различные буквы, не лежащие в M. Но тогда имеется 2^2 двухбуквенных слова, не лежащих в L''', 2^3 трёхбуквенных слов, не лежащих в L'', 2^4 четырёхбуквенных слов, не лежащих в L', и 2^5 пятибуквенных слов, не лежащих в L. Значит, в списке не может содержаться более $3^5 - 2^5$ слов.

9. "Семеро одного не ждут". Восемь приятелей решили совершить совместную прогулку и договорились встретиться у входа в парк. Время прихода каждого равномерно распределено между 12 и 13 часами. Как только набирается группа из 7 человек, она отправляется на прогулку, последнему пришедшему придется догонять. Найти математическое ожидание времени начала прогулки.

(Абзалилов Д.Ф.)

Ответ: 12 ч. 46 мин. 40 сек.

Решение. В пространстве $\mathbb{R}^8$ областью элементарных исходов будет гиперкуб со стороной 1, объём которого равен 1. Функция распределения $F(x)$ времени X начала прогулки по определению есть вероятность события $p(X < x)$, найдем эту вероятность. Данная вероятность – объём благоприятной области, она состоит из гиперкуба с объёмом x^8 (вероятности того, что все 8 приятелей пришли до времени x) и восьми параллелепипедов с объёмами $x^7(1-x)$ (вероятностей того, что 7 приятелей пришли до времени x, а один пришёл после). Поэтому $F(x) = 8x^7 - 7x^8$, функция плотности $f(x) = 56(x^6 - x^7)$. Математическое ожидание

$$\mathbb{E}[X] = \int\limits_0^1 xf(x)\,dx = 56\int\limits_0^1 (x^7 - x^8)\,dx = 56\left(\frac{1}{8} - \frac{1}{9}\right) = \frac{7}{9} \text{ (часа).}$$

Замечание: Задачу можно обобщить для группы из n человек и времени отправления при сборе группы из $m < n$ человек. Ответ в этом случае $\mathbb{E}[X] = \frac{m}{n+1}$.

10. В пятимерном евклидовом пространстве $\mathbb{R}^5$ рассматривается многогранник P, являющийся выпуклой оболочкой десяти точек с координатами $(\pm1,0,0,0,0)$, $(0,\pm1,0,0,0)$, $(0,0,\pm1,0,0)$, $(0,0,0,\pm1,0)$, $(0,0,0,0,\pm1)$. Каких граней у многогранника P больше, двумерных или трёхмерных?

(Шурыгин В.В.)

Ответ: Число двумерных и трёхмерных граней одинаково.
Решение. Грань размерности k многогранника P является выпуклой оболочкой $k+1$ вершин, лежащих на разных осях координат. Набор из $k+1$ осей можно составить C_n^{k+1} способами. На каждой из осей составленного набора вершину можно выбрать двумя способами. Поэтому число граней размерности k равно $2^{k+1}C_n^{k+1}$. В результате оказывается, что многогранник P имеет 80 двумерных и 80 трёхмерных граней.
Замечание: Данный многогранник является аналогом октаэдра и называется 5-ортоплекс. Он двойственнен пятимерному кубу. Многогранник можно задать неравенством $|x_1| + |x_2| + |x_3| + |x_4| + |x_5| \leqslant 1$.
4-грани получаются, если в формуле неравенство заменить на равенство $\pm x_1 \pm x_2 \pm x_3 \pm x_4 \pm x_5 = 1$.
Число 4-граней равно 32, они представляют собой стандартные правильные 4-симплексы. Каждая такая 4-грань содержит пять 3-граней, являющихся правильными тетраэдрами. Их уравнения получаются, если одну из переменных приравнять нулю. У всех 32 4-граней будет $32 \times 5 = 160$ 3-граней, но каждая 3-грань является общей гранью двух 4-граней, в итоге получим 80 3-граней.

11. Эллиптическую плоскость Римана $\mathcal{S}_2$ можно определить как факторпространство сферы $\mathbb{S}^2$, представляющее собой множество пар $\{M, M'\}$ диаметрально противоположных точек сферы. Расстоянием между точками $\{A, A'\}$ и $\{B, B'\}$ на $\mathcal{S}_2$ является наименьшее из сферических расстояний AB и AB'. Прямой линией на $\mathcal{S}_2$ называется множество пар диаметрально противоположных точек сферы $\mathbb{S}^2$, принадлежащих большой окружности. Окружностью на $\mathcal{S}_2$ называется множество пар точек, равноудалённых от некоторой фиксированной точки, называемой центром.
Сколько различных окружностей в эллиптической плоскости можно провести через три её точки, не лежащие на одной прямой?

(Шурыгин В.В.)

Ответ: 4.
Решение. Пусть $A, B, C \in \mathcal{S}_2$ – точки, не лежащие на одной прямой. Отображение $p : \mathbb{S}^2 \to \mathcal{S}_2$, относящее точке $M \in \mathbb{S}^2$ пару $\{M, M'\}$, где M' – точка, диаметрально противоположная точке M, является двулистным накрытием эллиптической плоскости сферой. Точкам $A, B, C \in S_2$ соответствуют три пары $\{A_1, A_2\}$, $\{B_1, B_2\}$, $\{C_1, C_2\}$ диаметрально противоположных точек сферы. Окружности $\omega \subset \mathcal{S}_2$ соответствуют на сфере две симметричные относительно её центра окружности ω_1 и ω_2, проектирующиеся при накрытии p в ω. На сфере $\mathbb{S}^2$ имеются 8 окружностей ω_{ijk}, $i, j, k = 1, 2$, проходящих соответственно через точки A_i, B_j, C_k. Эти окружности разбиваются на пары, проектирующиеся в одну и ту же окружность на эллиптической плоскости. Все окружности ω_{ijk}, $i, j, k = 1, 2$, не являются прямыми плоскости S_2 (иначе три прямые A_1A_2, B_1B_2, C_1C_2 пространства $\mathbb{R}^3 \supset \mathbb{S}^2$ лежали бы в одной плоскости).