Известия вузов. Математика
2008, №9, с. 69–75

http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/
e-mail: izvuz.matem@ksu.ru

<u>*Краткое сообщение*</u>

К.Н. ВДОВИНА, Н.Б. ПЛЕЩИНСКИЙ, Д.Н. ТУМАКОВ

ОБ ОРТОГОНАЛЬНОСТИ СОБСТВЕННЫХ ВОЛН ПОЛУОТКРЫТОГО УПРУГОГО ВОЛНОВОДА

Аннотация. Рассмотрена двухслойная упругая волноводная структура, один слой которой неограничен в поперечном направлении, а на границе другого заданы стандартные граничные условия. Исследовано множество ее собственных волн, имеющих в общем случае комплексную продольную постоянную распространения (спектральный параметр). На основе формулы Грина введено скалярное произведение двух волн и показано, что система собственных волн полуоткрытого упругого волновода ортогональна. Построены семейства волн, относящиеся как к дискретной, так и к непрерывной частям спектра.

Ключевые слова: упругие волны, волновод, слоистая среда, собственные волны, формула Грина, скалярное произведение, дискретный и непрерывный спектр.

УДК: 517.958 : 539.3

Abstract. We consider a two-layer elastic waveguide structure such that its one layer is unbounded in the lateral direction and at the boundary of the other one the standard boundary conditions are stated. We study several kinds of eigenwaves of this structure. In general, they have a complex-valued longitudinal propagation constant (the spectral parameter). On the base of the Green formula we introduce the scalar product of two waves and prove that the set of eigenwaves of the semiopen elastic waveguide is orthogonal. We construct families of waves which belong to discrete and continuous parts of the spectrum.

Keywords: elastic waves, waveguide, stratified medium, eigenwaves, Green formula, scalar product, discrete and continuous spectrum.

Слоистые среды имеют волноводные свойства — в таких структурах волны могут распространяться без источников. В работе [1] методом разделения переменных были найдены собственные волны полуоткрытого диэлектрического волновода, относящиеся к дискретной и непрерывной частям спектра. Оказалось, что значения продольной постоянной распространения (спектрального параметра) образуют на комплексной плоскости множество, состоящее из вертикальной полуоси, горизонтального отрезка и отдельных точек (“клюшка с шайбами”). Было показано, что собственные волны полуоткрытого волновода ортогональны относительно введенного естественным образом скалярного произведения и образуют полную систему мод, по которой как по базису может быть разложена любая волна, распространяющаяся в бесконечном полуоткрытом волноводе.

Поступила 18.08.2007, краткое сообщение 07.05.2008

В данной работе исследованы свойства собственных волн волноводной структуры, которую образуют находящиеся в полном контакте упругая полоса и упругая полуплоскость в двумерном (плоском) случае (см. рисунок).

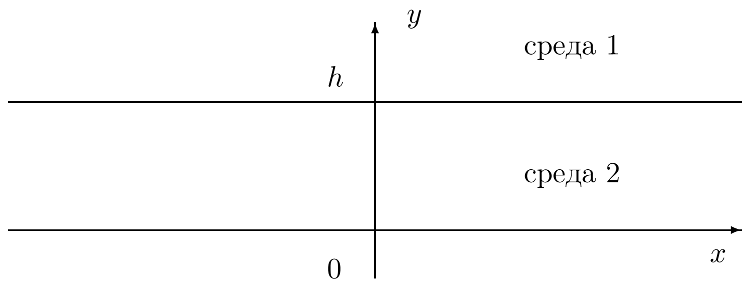

Рис. Полуоткрытый упругий волновод

Упругим волнам в слоистых средах посвящены, например, монографии [2] и [3], в которых основное внимание уделено задачам об отражении и преломлении упругих волн и физической интерпретации результатов. Хорошо известны собственные волны, распространяющиеся в упругой полуплоскости — поверхностные волны Релея, а также волны Лява, распространяющиеся в упругом слое, лежащем на упругом полупространстве.

В работах [4] и [5] исследовались собственные волны упругой полосы и двух сопряженных упругих полос. Был использован метод интегрального преобразования Фурье. Переопределенные задачи Коши для упругой полуплоскости и для упругой полосы рассматривались также в [6].

1. Спектральная задача для системы уравнений плоской теории упругости в слоистой среде

Будем искать при $y > 0$ и $y \neq h$ решения системы уравнений плоской динамической теории упругости

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u_x}{\partial t^2} = 0, \quad \frac{\partial \tau}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} - \rho \frac{\partial^2 u_y}{\partial t^2} = 0, \tag{1}$$

$$\sigma_x = (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_x}{\partial x} + \lambda \frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \sigma_y = \lambda \frac{\partial u_x}{\partial x} + (\lambda + 2\mu)\frac{\partial u_y}{\partial y}, \quad \tau = \mu \frac{\partial u_x}{\partial y} + \mu \frac{\partial u_y}{\partial x} \tag{2}$$

с вещественными кусочно-постоянными коэффициентами Ламе λ, μ и плотностью ρ. Пусть на границе раздела сред выполнены условия сопряжения (полный контакт)

$$\begin{aligned} u_x(x, h+0) = u_x(x, h-0), \quad & u_y(x, h+0) = u_y(x, h-0), \\ \sigma_y(x, h+0) = \sigma_y(x, h-0), \quad & \tau(x, h+0) = \tau(x, h-0). \end{aligned} \tag{3}$$

На нижней стороне полосы $y = 0$ могут быть заданы различные граничные условия. Ограничимся случаем, когда упругий волновод установлен на жесткое основание. Тогда

$$u_x(x, 0) = 0, \quad u_y(x, 0) = 0. \tag{4}$$

Примем условие на бесконечности: при $y \to +\infty$ все компоненты решения системы уравнений (1), (2) должны быть ограничены. Будем считать также, что искомые функции имеют непрерывные производные в полосе и в полуплоскости и непрерывно продолжимы на границы этих областей.

Предположим, что зависимость решений системы уравнений (1), (2) от времени имеет вид $e^{-i\omega t}$, и перейдем к комплексным амплитудам искомых функций (не изменяя обозначений).

Зададим зависимость искомых функций от координаты x в виде $e^{-i\alpha x}$, где комплексное число α — спектральный параметр (продольная постоянная распространения упругой волны). В дальнейшем у зависящих от y множителей аргумент y писать не будем, но будем указывать, к какому значению спектрального параметра относятся эти множители. Поэтому из уравнений (1) и (2) следует система обыкновенных дифференциальных уравнений 1-го порядка

$$\begin{gathered} -i\alpha\sigma_x(\alpha)+\tau'(\alpha)+\rho\omega^2 u_x(\alpha)=0, \quad -i\alpha\tau(\alpha)+\sigma_y'(\alpha)+\rho\omega^2 u_y(\alpha)=0, \\ \sigma_x(\alpha)+i\alpha(\lambda+2\mu)u_x(\alpha)-\lambda u_y(\alpha)=0, \quad \sigma_y(\alpha)+i\alpha\lambda u_x(\alpha)-(\lambda+2\mu)u_y'(\alpha)=0, \\ \tau(\alpha)-\mu u_x'(\alpha)+i\alpha\mu u_y(\alpha)=0. \end{gathered} \tag{5}$$

Исследуем задачу на собственные значения: найти значения параметра α, при которых система уравнений (5) имеет ненулевые решения, удовлетворяющие условиям сопряжения (3), граничным условиям (4) и условиям на бесконечности. Соответствующие таким значениям α решения краевой задачи определяют собственные волны (моды) полуоткрытого упругого волновода.

Из системы уравнений (1), (2) легко исключить напряжения σ_x, σ_y, τ и получить для перемещений u_x, u_y систему уравнений Ламе. При гармонической зависимости от времени и выбранной зависимости от координаты x придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений 2-го порядка

$$\begin{aligned} &\mu u_x''(\alpha)+[\rho\omega^2-\alpha^2(\lambda+2\mu)]u_x(\alpha)-i\alpha(\lambda+\mu)u_y'(\alpha)=0, \\ &(\lambda+2\mu)u_y''(\alpha)+[\rho\omega^2-\alpha^2\mu]u_y(\alpha)-i\alpha(\lambda+\mu)u_x'(\alpha)=0. \end{aligned} \tag{6}$$

2. Формула Грина и скалярное произведение мод

Приведем несколько вспомогательных утверждений, с помощью которых можно будет корректно ввести скалярное произведение собственных волн рассматриваемой волноводной структуры.

Лемма 1 (тождество Лагранжа)**.**

$$\begin{aligned} &\big[\tau(\alpha)u_x^*(\beta)-u_x(\alpha)\tau^*(\beta)+\sigma_y(\alpha)u_y^*(\beta)-u_y(\alpha)\sigma_y^*(\beta)\big]'- \\ &\qquad -(\beta^*-\alpha)i\big[u_x(\alpha)\sigma_x^*(\beta)-\sigma_x(\alpha)u_x^*(\beta)+u_y(\alpha)\tau^*(\beta)-\tau(\alpha)u_y^*(\beta)\big]=0. \end{aligned} \tag{7}$$

Для вывода тождества Лагранжа нужно записать линейную комбинацию из уравнений системы (5) с множителями $u_x^*(\beta)$, $u_y^*(\beta)$, $i\beta^* u_x^*(\beta)$, $u_y^{*\prime}(\beta)$, $u_x^{*\prime}(\beta)+i\beta^* u_y^*(\beta)$ и системы уравнений, полученной из (5) после замены α на β и комплексного сопряжения, с множителями $-u_x(\alpha)$, $-u_y(\alpha)$, $i\alpha u_x(\alpha)$, $-u_y'(\alpha)$ и $-u_x'(\alpha)+i\alpha u_y(\alpha)$. Равенство (7) будет получено после приведения подобных членов и перегруппировки слагаемых. Тождество Лагранжа можно также получить в терминах перемещений исходя из системы уравнений (6).

Лемма 2 (формула Грина)**.**

$$\begin{aligned} &\int_0^{+\infty}\big[u_x(\alpha)\sigma_x^*(\beta)-\sigma_x(\alpha)u_x^*(\beta)+u_y(\alpha)\tau^*(\beta)-\tau(\alpha)u_y^*(\beta)\big]dy= \\ &\qquad =\lim_{A\to+\infty} i\frac{\tau(\alpha)u_x^*(\beta)-u_x(\alpha)\tau^*(\beta)+\sigma_y(\alpha)u_y^*(\beta)-u_y(\alpha)\sigma_y^*(\beta)}{\alpha-\beta^*}. \end{aligned} \tag{8}$$

Формула (8) — результат интегрирования тождества Лагранжа (7) по y от 0 до $+\infty$. При этом нужно учесть, что решения систем уравнений вида (5) удовлетворяют условиям сопряжения при $y = h$ и граничным условиям при $y = 0$.

Скалярное произведение двух собственных волн определим в виде

$$\int_0^{+\infty} \big[u_x(\alpha)\sigma_x^*(\beta) - \sigma_x(\alpha)u_x^*(\beta) + u_y(\alpha)\tau^*(\beta) - \tau(\alpha)u_y^*(\beta)\big]\, dy \tag{9}$$

(здесь используются только зависящие от y множители из выражений потенциальных функций).

Уточним физический смысл значения скалярного произведения (9) при $\beta = \alpha$. Как известно, вектор плотности потока энергии равен

$$\Big(- \frac{\partial u_x}{\partial t}\sigma_x - \frac{\partial u_y}{\partial t}\tau, \ \ -\frac{\partial u_x}{\partial t}\tau - \frac{\partial u_y}{\partial t}\sigma_y \Big).$$

Если перейти к комплексным амплитудам функций, то среднее (по периоду времени) его значение имеет вид

$$\frac{\omega}{2}\,\mathrm{Im}\,\big(u_x^*\sigma_x + u_y^*\tau, \ \ u_x^*\tau + u_y^*\sigma_y\big).$$

Таким образом, скалярное произведение собственной волны полуоткрытого волновода на себя пропорционально потоку энергии, которую эта волна переносит через его сечение.

3. Упругие волны в частичных областях

Рассмотрим систему уравнений (6). Понизим ее порядок с помощью замены искомых функций $v_1 = u_x$, $v_2 = u_x'$, $v_3 = u_y$, $v_4 = u_y'$ и перейдем к системе уравнений 1-го порядка вида $\mathbf{v}' = \mathbf{M}\mathbf{v}$, где искомая вектор-функция $\mathbf{v} = (v_1, v_2, v_3, v_4)$ и $\mathbf{M}$ — постоянная матрица.

Обозначим

$$k_1^2 = \frac{\rho\omega^2}{\lambda + 2\mu}, \quad k_2^2 = \frac{\rho\omega^2}{\mu}$$

и введем функции

$$\gamma_j = \gamma_j(\alpha) = \sqrt{k_j^2 - \alpha^2}, \quad j = 1, 2.$$

Условимся, как и в [1], что однозначные в комплексной плоскости, разрезанной по отрезку вещественной оси $[-k_j, k_j]$, непрерывные ветви функций $\gamma_j(\alpha)$ выбраны так, что в одной из точек положительной мнимой полуоси их значения — вещественные положительные числа (напр., $\gamma_j(i) = \sqrt{k_j^2 + 1}$).

Матрица $\mathbf{M}$ имеет собственные значения $\pm i\gamma_1$ и $\pm i\gamma_2$, им соответствуют собственные векторы $(\mp\alpha,\ -i\gamma_1\alpha,\ \gamma_1,\ \pm i\gamma_1^2)$ и $(\gamma_2,\ \pm i\gamma_2^2,\ \pm\alpha,\ i\gamma_2\alpha)$. Поэтому общее решение системы уравнений (6) будет иметь вид

$$\begin{aligned} u_x(y) &= -\alpha A e^{i\gamma_1 y} + \alpha B e^{-i\gamma_1 y} + \gamma_2 C e^{i\gamma_2 y} + \gamma_2 D e^{-i\gamma_2 y}, \\ u_y(y) &= \gamma_1 A e^{i\gamma_1 y} + \gamma_1 B e^{-i\gamma_1 y} + \alpha C e^{i\gamma_2 y} - \alpha D e^{-i\gamma_2 y} \end{aligned} \tag{10}$$

(теперь мы не указываем зависимость от спектрального параметра, но вспомнили об аргументе y).

В полуплоскости (среда 1) и в полосе (среда 2), образующих полуоткрытый волновод, значения λ, μ, ρ и, следовательно, k_j и γ_j, $j = 1, 2$, разные. В связи с этим в дальнейшем будем указывать в формулах, к какой среде относятся те или иные величины. Волновые числа k и функции $\gamma(\alpha)$ снабдим двумя индексами; первый из них — номер среды.

В полуплоскости формулы (10) запишем в виде

$$\begin{aligned} u_x(y) &= -\alpha A_1 e^{i\gamma_{11}(y-h)} + \alpha B_1 e^{-i\gamma_{11}(y-h)} + \gamma_{12} C_1 e^{i\gamma_{12}(y-h)} + \gamma_{12} D_1 e^{-i\gamma_{12}(y-h)}, \\ u_y(y) &= \gamma_{11} A_1 e^{i\gamma_{11}(y-h)} + \gamma_{11} B_1 e^{-i\gamma_{11}(y-h)} + \alpha C_1 e^{i\gamma_{12}(y-h)} - \alpha D_1 e^{-i\gamma_{12}(y-h)} \end{aligned} \tag{11}$$

(здесь удобно ввести сдвиг на h по переменной y). При вещественных значениях $\gamma_{1j}(\alpha)$ в формулах (11) остаются оба слагаемых с экспонентами $e^{i\gamma_{1j}y}$ и $e^{-i\gamma_{1j}y}$ (эти слагаемые определяют уходящие на бесконечность и приходящие с бесконечности гармоники, но каждое из них ограничено на бесконечности). При комплексных значениях $\gamma_{1j}(\alpha)$ следует положить равными нулю коэффициенты в тех слагаемых с экспоненциальными выражениями, которые неограниченно возрастают на бесконечности.

В полосе

$$\begin{aligned} u_x(y) &= -\alpha A_2 e^{i\gamma_{21}y} + \alpha B_2 e^{-i\gamma_{21}y} + \gamma_{22} C_2 e^{i\gamma_{22}y} + \gamma_{22} D_2 e^{-i\gamma_{22}y}, \\ u_y(y) &= \gamma_{21} A_2 e^{i\gamma_{21}y} + \gamma_{21} B_2 e^{-i\gamma_{21}y} + \alpha C_2 e^{i\gamma_{22}y} - \alpha D_2 e^{-i\gamma_{22}y}. \end{aligned} \tag{12}$$

Из граничного условия на прямой $y = 0$ следует

$$-\alpha(A_2 - B_2) + \gamma_{22}(C_2 + D_2) = 0, \quad \gamma_{21}(A_2 + B_2) + \alpha(C_2 - D_2) = 0,$$

поэтому в (12) фактически содержится только две неизвестные постоянные.

4. Собственные волны полуоткрытого упругого волновода

Чтобы получить комплексные амплитуды собственных волн полуоткрытого волновода, нужно подобрать коэффициенты в формулах (11) и (12) так, чтобы были выполнены условия сопряжения (3). Вычислим значения напряжений и перемещений на границах частичных областей и получим, что условия сопряжения удобно представить в виде системы из 4-х линейных алгебраических уравнений относительно неизвестных $A_1 + B_1$, $A_1 - B_1$, $C_1 + D_1$, $C_1 - D_1$, $A_2 + B_2$ и $A_2 - B_2$.

Рассмотрим только те моды волновода, которые переносят энергию вправо, т. е. вдоль оси x, или (и) затухают в том же направлении. При этом параметр α должен принадлежать третьему квадранту комплексной плоскости вместе с его границами ($\operatorname{Re}\alpha \le 0$, $\operatorname{Im}\alpha \le 0$). Предположим, что свойства упругих сред таковы, что выполняются неравенства

$$k_{11} < k_{12} < k_{21} < k_{22}.$$

Если $\alpha \in (-k_{11}, 0)$ или принадлежит отрицательной полуоси мнимой оси, то числа $\gamma_{1j}(\alpha)$, $j = 1, 2$, вещественные (и отрицательные). В формулах (11) и следующих из них содержится четыре искомых коэффициента, а в формулах (12) и следующих из них — два. Тогда при любом таком α в решении системы уравнений вида (3) остается две произвольных постоянных и, следовательно, можно найти (с точностью до постоянного множителя) две линейно независимых собственных волны упругого волновода, относящихся к непрерывному спектру.

При $\alpha \in (-k_{12}, -k_{11})$ значения $\gamma_{12}(\alpha)$ остаются вещественными, а значения $\gamma_{11}(\alpha)$ — чисто мнимые с положительной мнимой частью. В этом случае в формулах, относящихся к области 1, полагаем $B_1 = 0$. В системе уравнений вида (3) остается пять неизвестных, одна из которых — произвольная постоянная в решении. Интервал $(-k_{12}, -k_{11})$ также относится к непрерывной части спектра исследуемой задачи, но здесь каждому значению α соответствует одна мода.

При вещественном $\alpha < -k_{12}$ и при комплексном α из третьего квадранта комплексной плоскости $B_1 = 0$ и $D_1 = 0$. Тогда в системе из четырех уравнений остается четыре неизвестных коэффициента. Ненулевое решение существует тогда и только тогда, когда равен нулю определитель матрицы ее коэффициентов. Отсюда следует характеристическое уравнение для определения постоянных распространения. Как установлено, это уравнение может иметь только конечное число корней, принадлежащих интервалу вещественной оси $(-k_{22}, -k_{12})$. Множество таких значений α образует дискретный спектр в задаче на собственные значения. Таким образом, установлена

Теорема 1 (о структуре спектра)**.** *Движущиеся вправо собственные волны полуоткрытого упругого волновода существуют при значениях параметра α, принадлежащих отрицательной полуоси мнимой оси, интервалам $(-k_{11}, 0)$, $(-k_{12}, -k_{11})$ (непрерывный спектр) и конечном числе значений α из интервала $(-k_{22}, -k_{12})$ (дискретный спектр).*

Множество собственных значений α в случае упругого полуоткрытого волновода имеет в целом такую же структуру, что и в случае полуоткрытого диэлектрического волновода, это — “клюшка с шайбами” (см. [1]). Но, как и следовало ожидать, различных типов собственных волн больше.

Теорема 2 (об ортогональности мод)**.** *Собственные волны полуоткрытого упругого волновода образуют ортогональную систему волн относительно скалярного произведения* (9)*.*

Действительно, из формулы (8) следует, что скалярное произведение (9) равно нулю, если хотя бы одна из перемножаемых мод относится к дискретной части спектра. При вычислении интеграла в скалярном произведении волн непрерывного спектра предел нужно рассматривать в обобщенном смысле (в смысле теории распределений).

Случай, когда волны в волноводе движутся влево, рассматривается аналогично. Можно утверждать, что любая волна в рассматриваемой волноводной структуре представляет собой наложение мод (разлагается по собственным волнам).

Литература

[1] Плещинский И.Н., Плещинский Н.Б. *Интегральные уравнения задачи сопряжения полуоткрытых диэлектрических волноводов* // Изв. вузов. Математика. – 2007. – № 5. – С. 63–80.
[2] Бреховских Л.М. *Волны в слоистых средах.* – М.: Наука, 1973. – 343 с.
[3] Ewing W.M., Jardetzky W.S., Press F. *Elastic waves in layered media.* – McGraw-Hill Book Comp., 1957.
[4] Тумаков Д.Н. *Собственные колебания упругой полосы* // Препринт ПМФ-05-02. – Казань: Казан. матем. о-во, 2005. – 26 с.
[5] Тумаков Д.Н. *Собственные колебания двух сопряженных полос* // Препринт ПМФ-06-04. – Казань: Казан. матем. о-во, 2006. – 26 с.
[6] Плещинский Н.Б. *Отражение, преломление и дифракция двумерных упругих волн. Метод переопределенной задачи Коши* // Препринт ПМФ-04-01. – Казань: Казан. матем. о-во, 2004. – 34 с.

К.Н. Вдовина

ассистент, кафедра прикладной математики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18

Н.Б. Плещинский

профессор, кафедра прикладной математики,
Казанский государственный университет,
420008, г. Казань, ул. Кремлевская, д. 18,

`e-mail:` pnb@ksu.ru

Д.Н. Тумаков

старший научный сотрудник, отдел прикладной математической физики НИИММ им. Н.Г. Чеботарева, Казанский государственный университет, 420008, г. Казань, ул. Профессора Нужина, д. 1/37

K.N. Vdovina

Assistant, Chair of Applied Mathematics,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia

N.B. Pleshchinskii

Professor, Chair of Applied Mathematics,
Kazan State University,
18 Kremlyovskaya str., Kazan, 420008 Russia,

e-mail: pnb@ksu.ru

D.N. Tumakov

Senior Researcher, Department of Applied Mathematical Physics,
Chebotarev Institute of Mathematics and Mechanics,
Kazan State University,
1/37 Professor Nuzhin str., Kazan, 420008 Russia