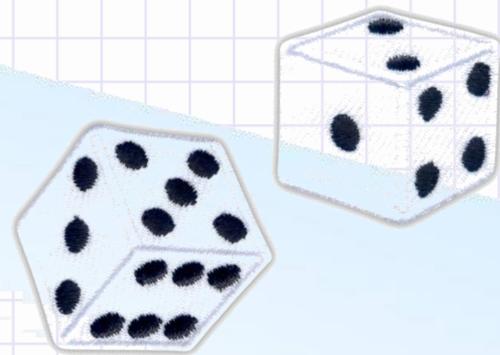


29.03.24 Международный Форум по математическому образованию  
IFME'24. Казань, 25 – 30 марта 2024 г., КФУ

# Практика и методика преподавания вероятности и статистики

И.Р. Высоцкий, ЦПМ, МЦНМО



## Цели курса

1. Формирование статистического и критического мышления для жизни в цифровом мире
2. Связь между школьной математикой и реальной жизнью
3. Формирование представления о законе больших чисел как о всеобщем законе природы, имеющем математическое выражение и обеспечивающим устойчивость изменчивых явлений вокруг нас

# 1. Формирование статистического и критического мышления

- Мы живем в мире изменчивых величин (случайных, неопределенных и т.п.)
- Часто изменчивая величина формируется из тенденции (главная, устойчивая часть) и случайных колебаний
- Тенденции формируются за счет постоянных или длительно действующих сильных факторов
- Случайные колебания формируются за счет большого числа малых случайных, обычно независимых факторов

# 1. Формирование статистического и критического мышления

В Москве больше половины школ показывают на ВПР в 7 классах результат ниже среднего. Это хорошо или плохо?

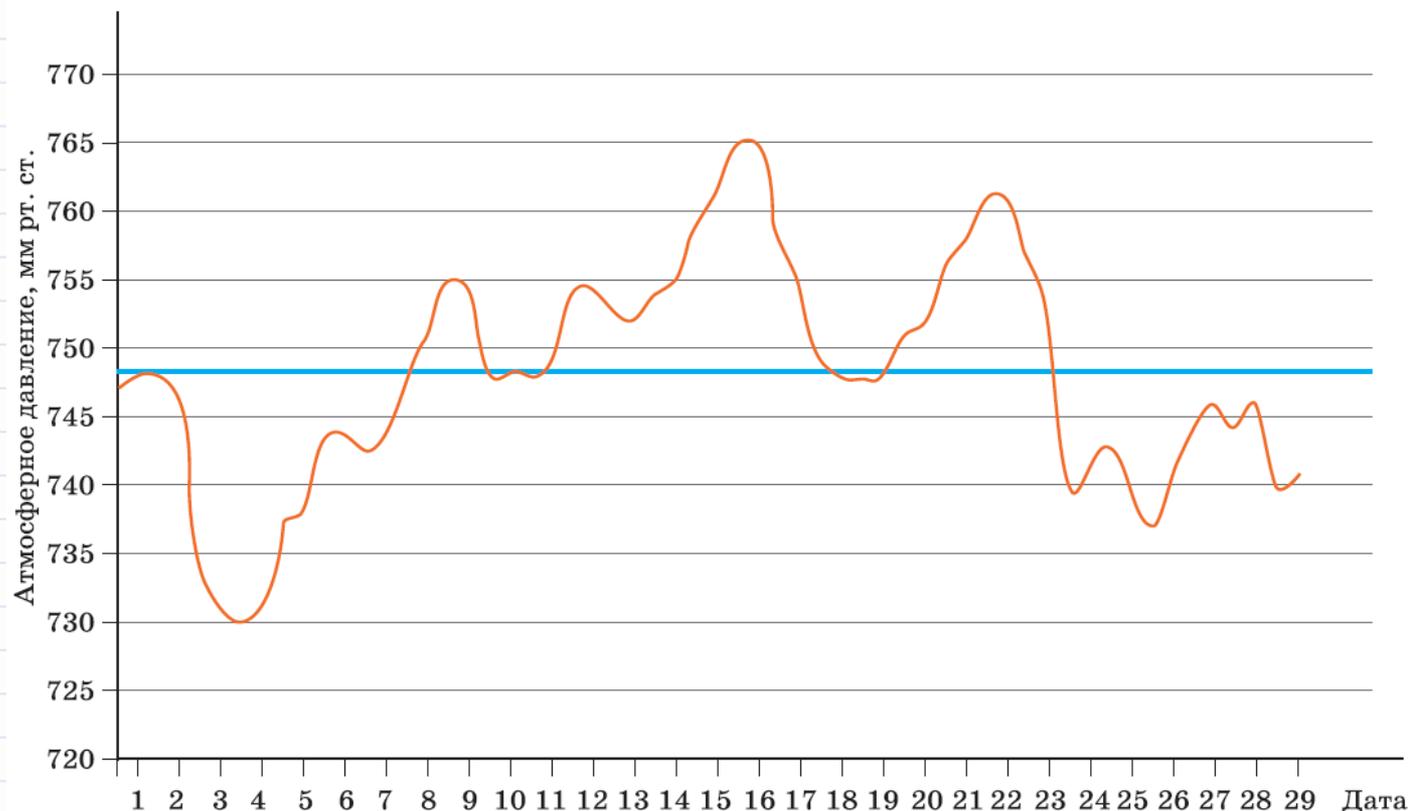
Правда ли дельфины сознательно и охотно спасают утопающих?

Правда ли, если тебе неправдоподобно долго не везет, то вот-вот повезет?

Что такое принцип практической невозможности?

# Точечная (постоянная) тенденция

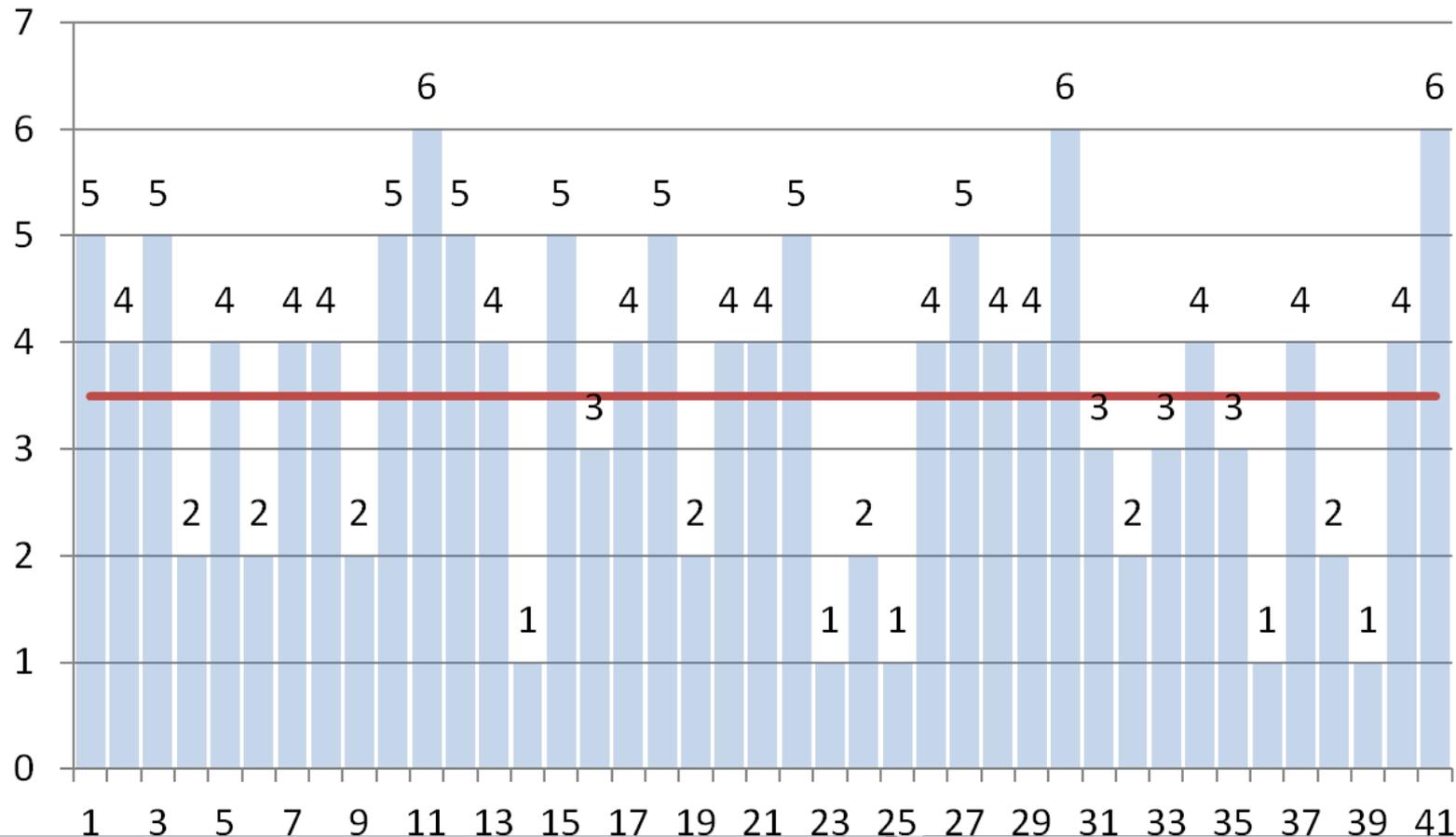
Диаграмма 17. Атмосферное давление в Ижевске. Февраль 2020 г.



Тенденция – нормальное давление

Колебания вызваны краткосрочными атмосферными явлениями. Колебания не затухают, но и не расходятся

# Точечная тенденция (бросание кости)



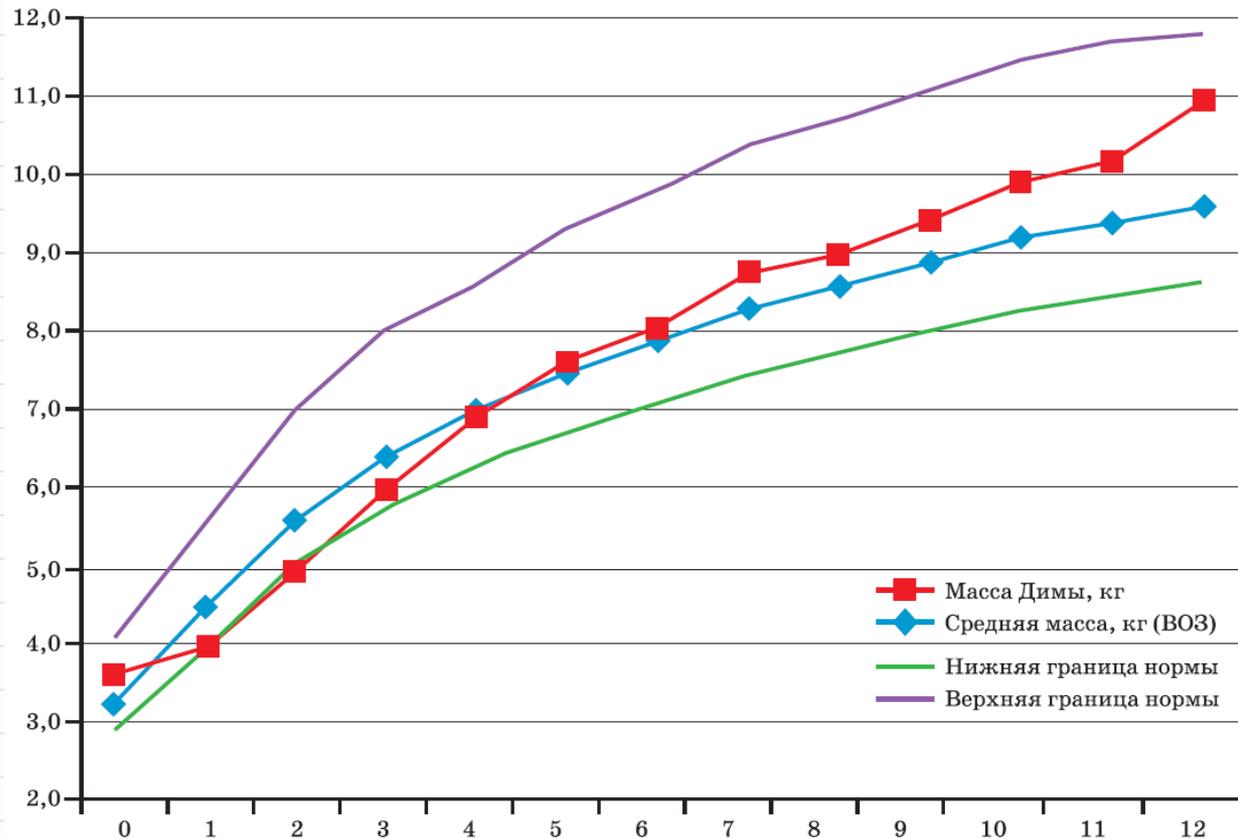
Тенденция – 3, 5. Почему?

Колебания случайные от 1 до 6 – как упал кубик

Колебания не затухают, но и не расходятся

# Возрастающая тенденция

Диаграмма 18. Масса мальчиков от рождения до года, кг

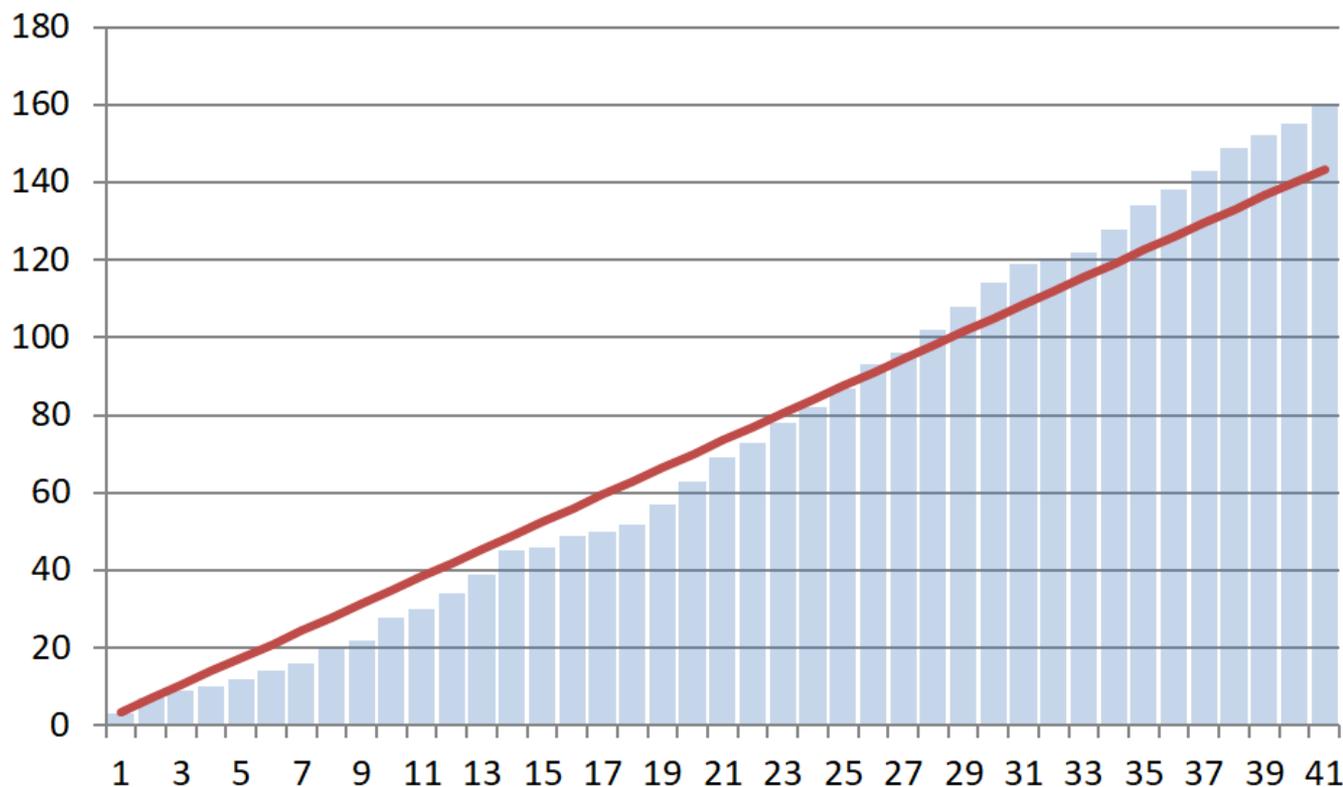


Тенденция – нормальное развитие

Колебания вызваны множеством биологических факторов

Колебания постепенно растут. График набора массы не стремится к тенденции

# Возрастающая тенденция (сумма очков, выпавших при бросании костей)



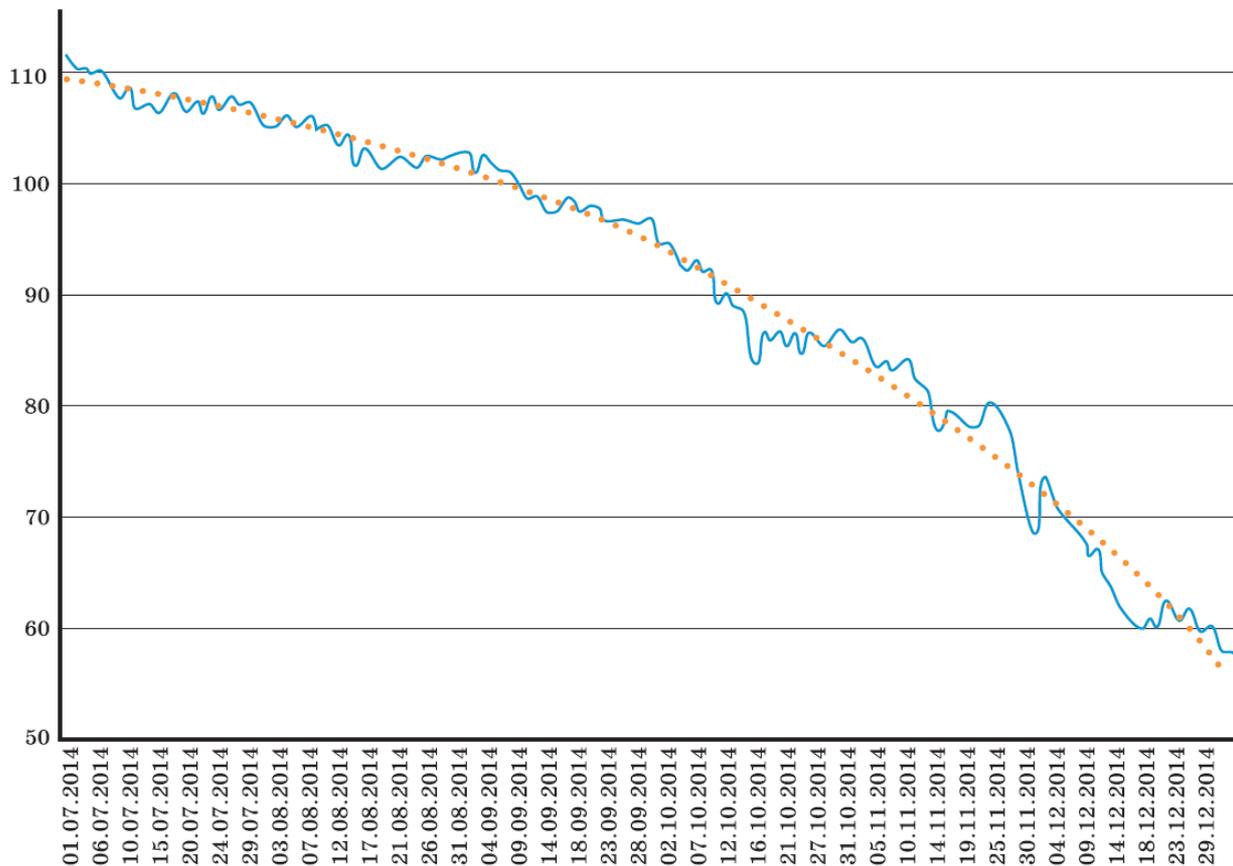
Тенденция –  $3,5n$ . Почему?

Колебания растут. Почему? Сумма выпавших очков не стремится к своей тенденции, колебания расходящиеся.

Почему?

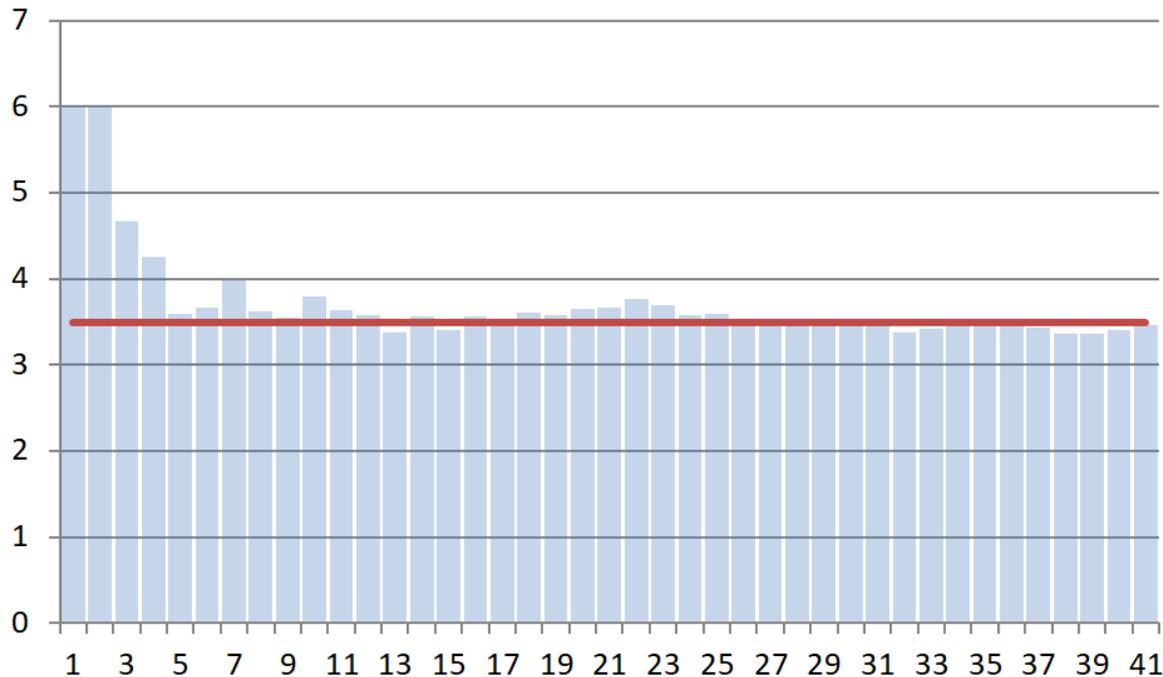
# Убывающая тенденция

Диаграмма 20. Цена барреля нефти во втором полугодии 2014 г.



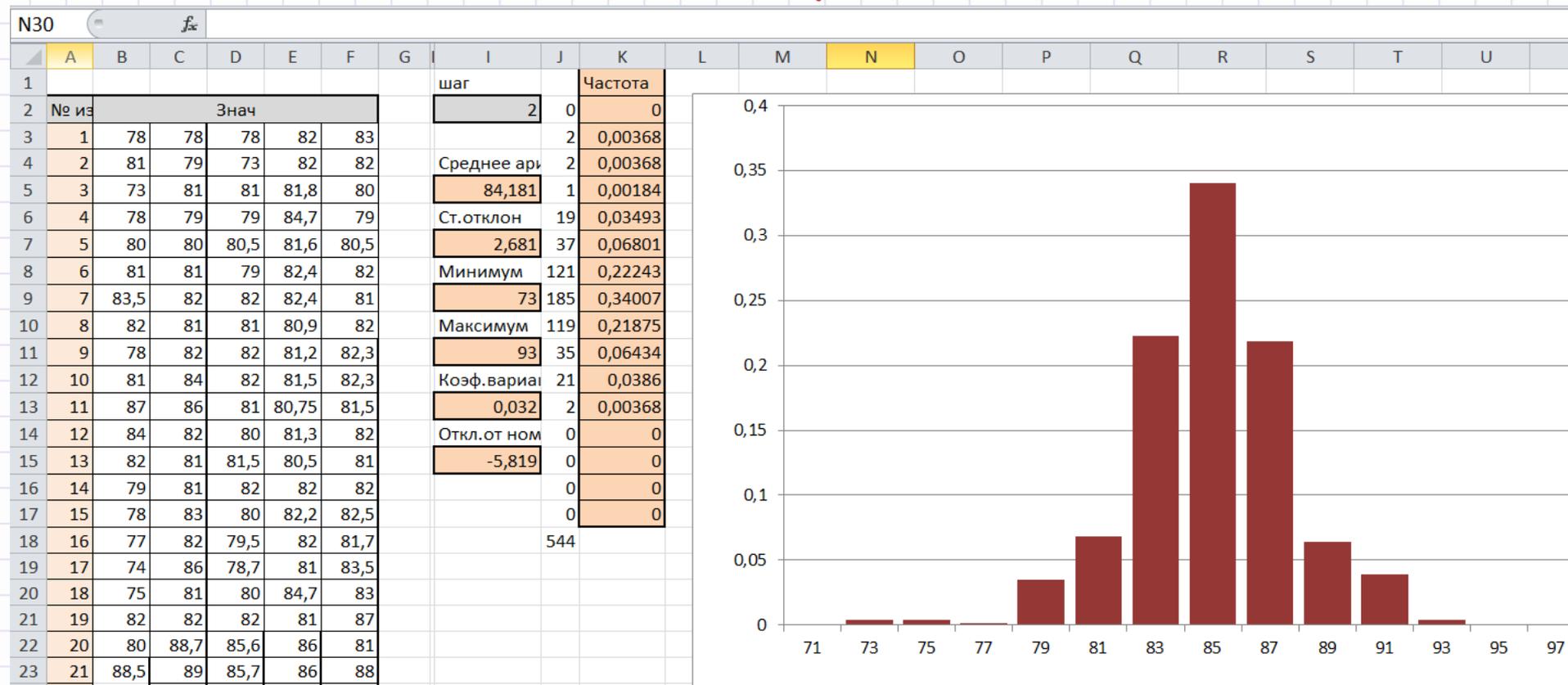
В экономике (и не только) часто тенденцию можно определить только после опыта. Почему?

## Сходимость величины к тенденции (среднее число очков при бросании кости)



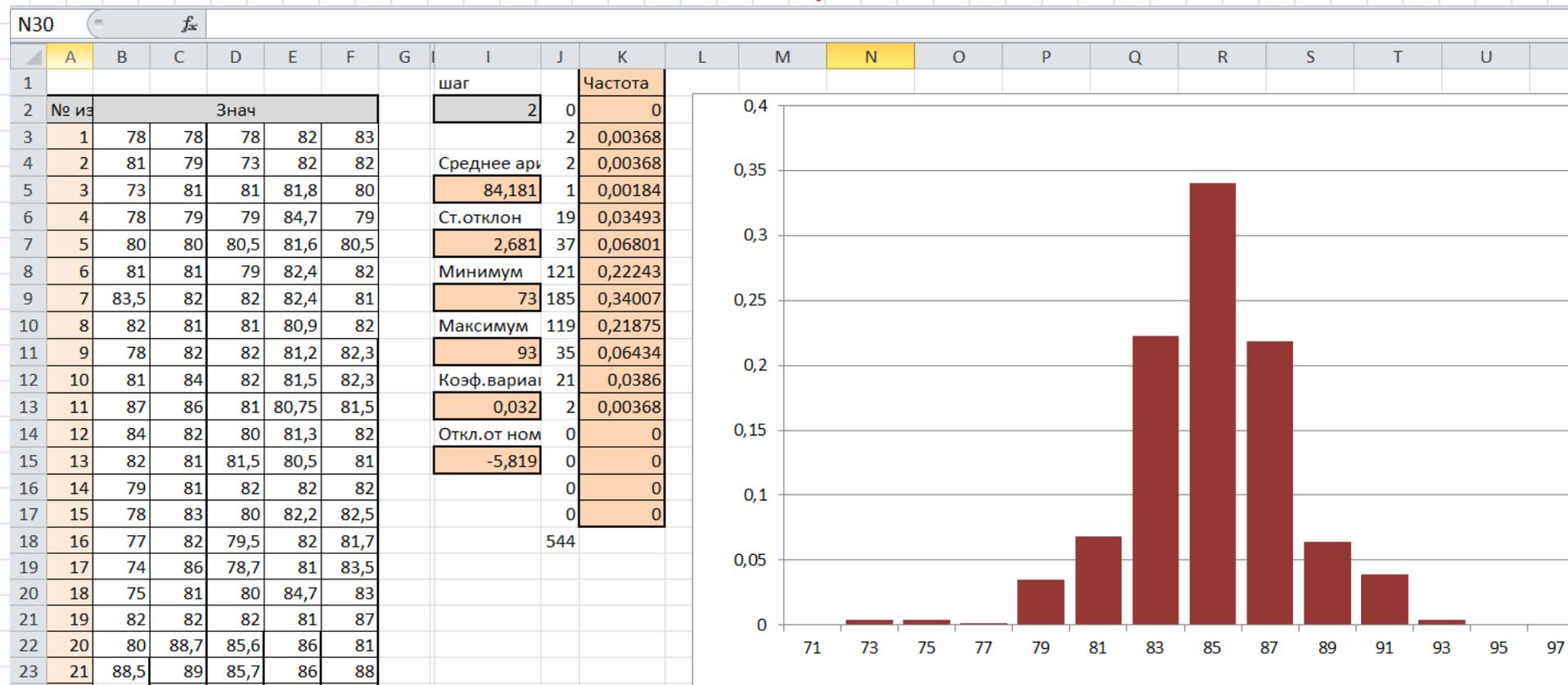
Иногда опыт можно устроить так, что тенденция становится хорошо видна. Например, при усреднении. Вопрос – как долго нужно проводить опыты, чтобы надежно увидеть, куда стремится величина?

# Практическая работа – измерение шнурков



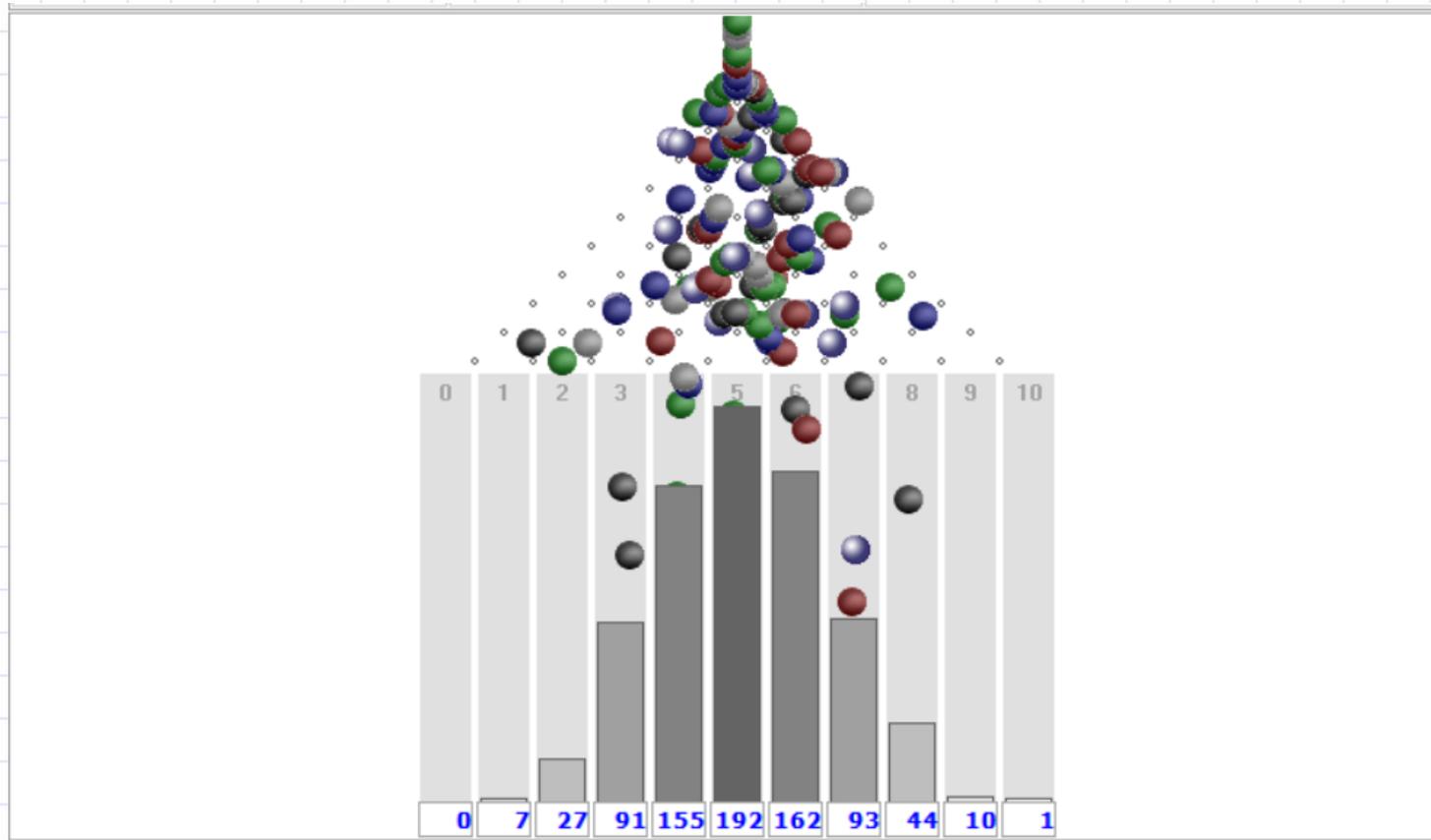
Мы видим две тенденции – средняя длина шнурка и шляпообразная огибающая диаграммы частот. Почему они такие?

# Практическая работа – измерение шнурков



За счет каких факторов формируется рассеивание при измерении шнурков?

# Доска Гальтона. 5000 горошин



Фигура возникающая в ячейках доски Гальтона похожа на диаграмму частот длин шнурков. Это случайность? Почему так мало абсолютно «везучих» и «невезучих» горошин?

# Наблюдение за частотами



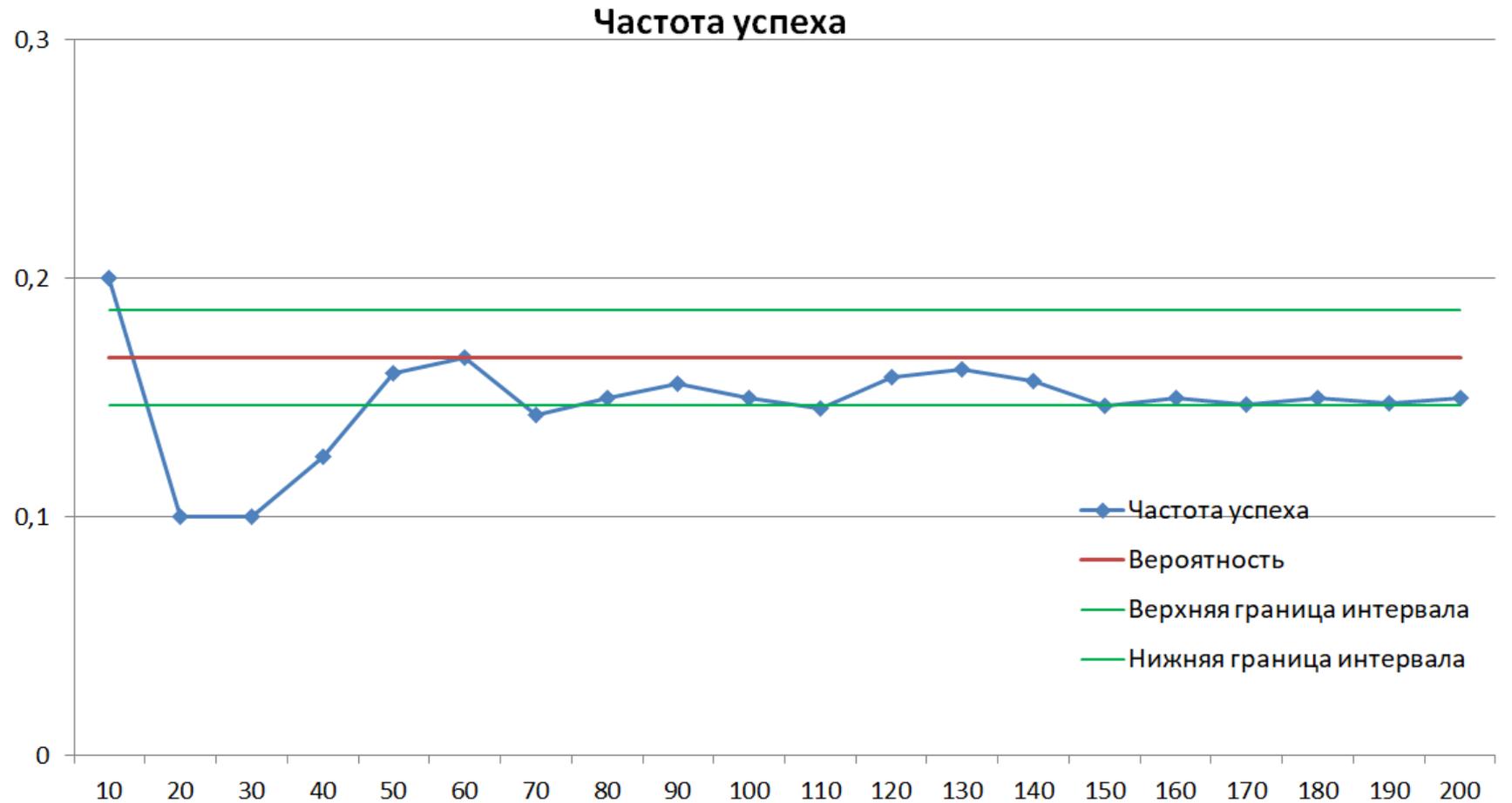
## Работа 2. Наблюдение за частотами. Сходимость частоты к вероятности

и	$p =$	10	Серий	20	Отклонение частоты успеха	0,0167
успеха	$p =$	0,167	Общ.число	200	Попала ли частота	
отклонение	$e =$	0,02	Число орлов	30	в разрешенный интервал?	ДА
вала	$U =$	0,04	Частота орла	0,1500		

9	Номер серии	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
10	Всего испытаний	30	40	50	60	70	80	90	100	110	120	130	140	150	160	170	180	190	200
11	Успехов в серии	1	2	3	2	0	2	2	1	1	3	2	1	0	2	1	2	1	2
12	Всего успехов	3	5	8	10	10	12	14	15	16	19	21	22	22	24	25	27	28	30
13	Частота успеха	0,1	0,125	0,16	0,167	0,143	0,15	0,156	0,15	0,145	0,158	0,162	0,157	0,147	0,15	0,147	0,15	0,147	0,15
14	Отклонение	0,067	0,042	0,007	0	0,024	0,017	0,011	0,017	0,021	0,008	0,005	0,01	0,02	0,017	0,02	0,017	0,019	0,017
15	Близка ли частота	НЕТ	НЕТ	ДА	ДА	НЕТ	ДА	ДА	ДА	НЕТ	ДА								

Наблюдение за частотой события «на игральной кости выпало 6 очков». Как быстро частота становится близкой к  $1/6$ ? Что такое «близко»? Кто это решает?

# Наблюдение за частотами



**Может, стоит сделать зеленый коридор шире?**

# Наблюдение за частотами

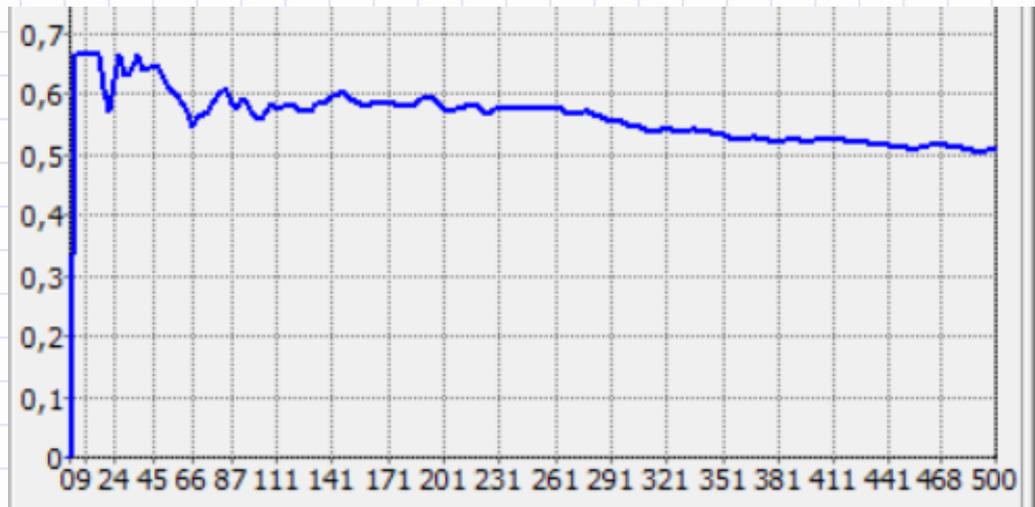
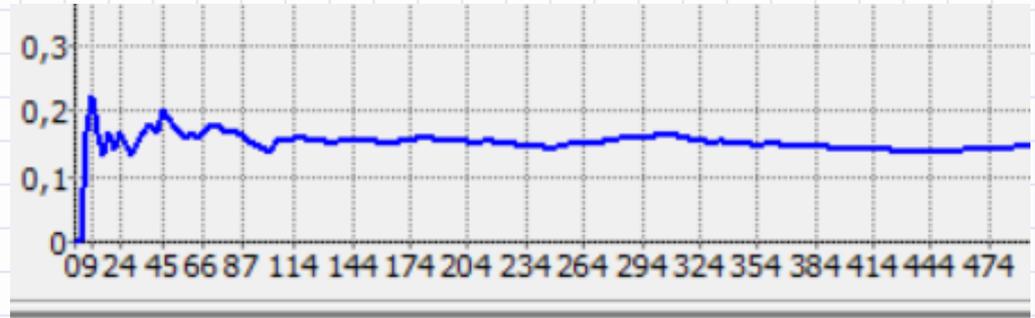
Бросаем игральный кубик много раз и следим за частотами событий

«6 очков» и «больше 3 очков»

Как быстро первый график стабилизируется вблизи вероятности  $1/6$ ?

Как быстро второй график стабилизируется вблизи вероятности  $1/2$ ?

Какой стабилизируется быстрее? Почему?



## Первичность статистики

- Наблюдая изменчивые величины, угадывая их тенденции, пытаюсь понять, какие факторы формируют рассеивание, мы встречаем закономерности
- Возникают вопросы о природе средних, о том, можно ли понять, как устроены тенденции, в каких случаях они схожи, как могут вести себя колебания
- Ответы на эти вопросы дает теория вероятностей. Она вторична. Первично наблюдение

## *Первичность статистики*

- Попытка преподавать вероятность без обсуждения природы многих изменчивых величин сродни попытке преподавать геометрию слепым
- Теория вероятностей дает математическую базу описанию изменчивости, подобно тому как геометрия дает математическую основу любому профессиональному рисунку от живописи до чертежей

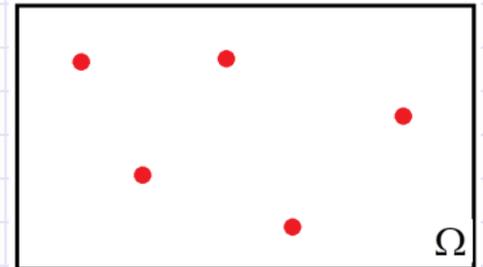
# Начала вероятности

- Нельзя начинать с комбинаторики
- Нельзя начинать с «классического определения»
- Важно:
  - Почему при регистрации на сайтах просят вводить пароль дважды?
  - Зачем в алгоритме Луна (защита банковских карт) нужно умножать цифры на нечетных местах в номере банковской карты?
  - Как относиться к маловероятным и практически достоверным событиям?

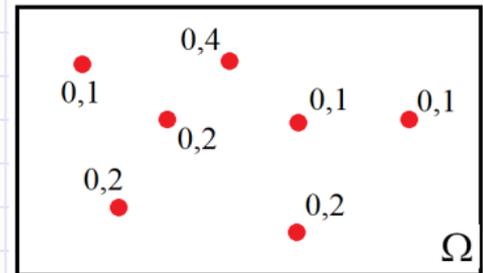
# Начала вероятности

## Первые важные задачи

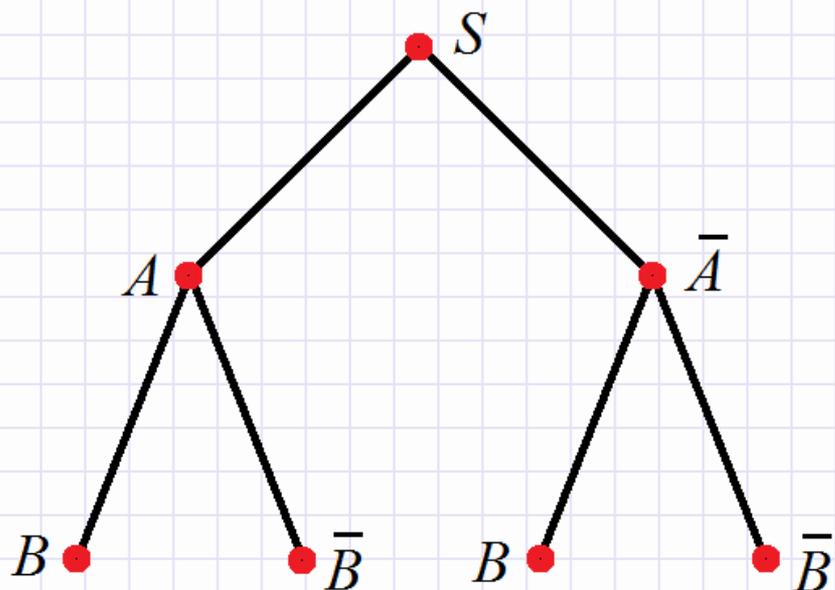
4. На рисунке справа изображен случайный опыт  $\Omega$ ; элементарные события показаны точками. Можно ли утверждать, что вероятность каждого из них равна  $1/5$ ?



5. На рисунке справа изображен случайный опыт  $\Omega$ ; элементарные события показаны точками и около каждого подписана его вероятность. Нет ли ошибки?



# Решение задач с помощью дерева



## Шаблон задачи типовой

$S$  – начало случайного опыта (событие, включающее весь опыт).

$A$  и  $B$  – события (во времени, лог. последовательности или *просто, как захотелось*)

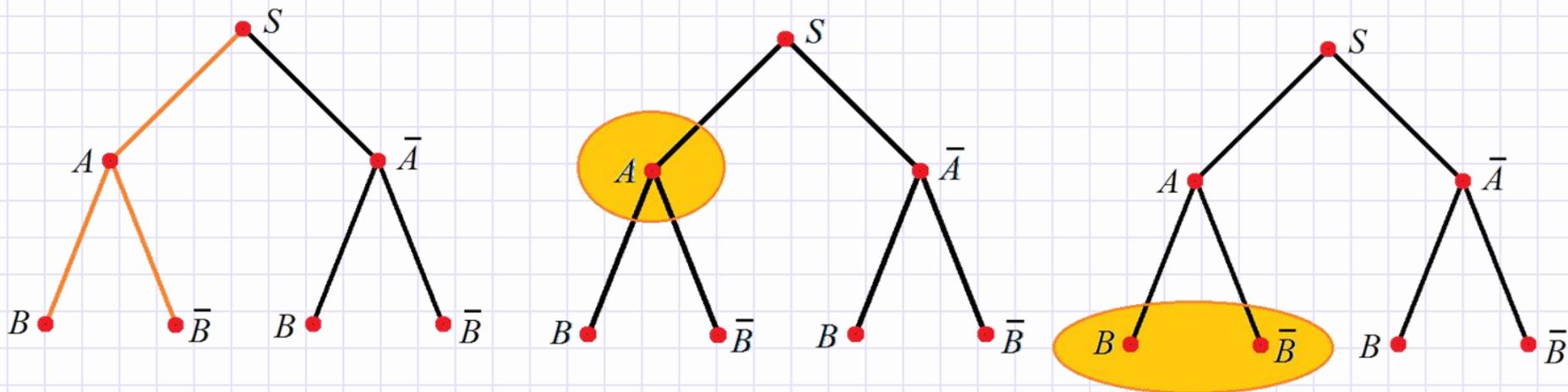
## Элементарные события

Элементарные события изображаются цепями от  $S$  к конечным вершинам дерева  $SAB, SAB\bar{B}, S\bar{A}B$  и  $S\bar{A}\bar{B}$

# Решение задач с помощью дерева

## События

Изображаются фигурами, объединяющими концевые вершины или промежуточными вершинами.

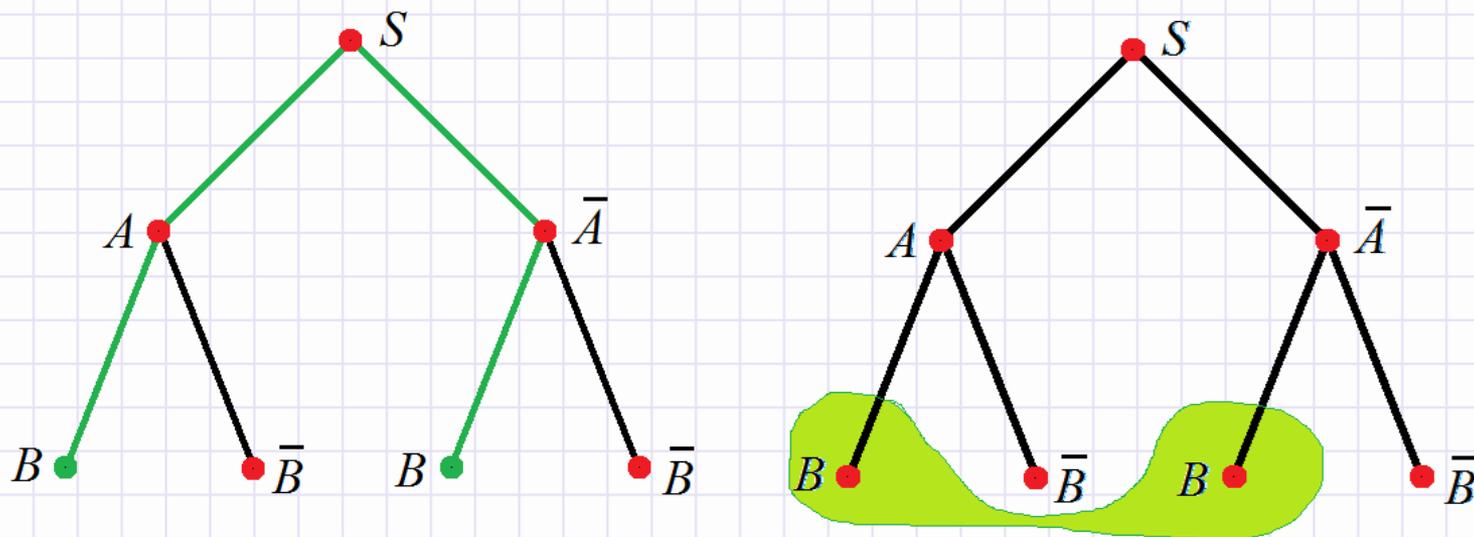


Три способа изобразить событие  $A$  в нарисованном дереве.

# Решение задач с помощью дерева

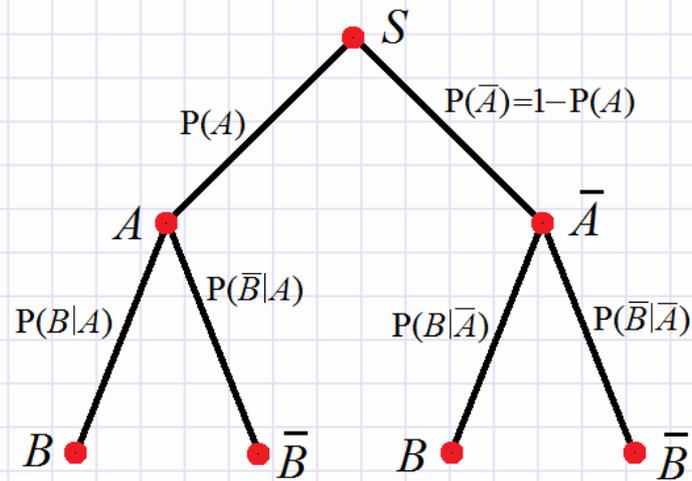
## События

Изображаются фигурами, объединяющими концевые вершины или промежуточными вершинами.



Как изобразить событие  $B$  в этом дереве.

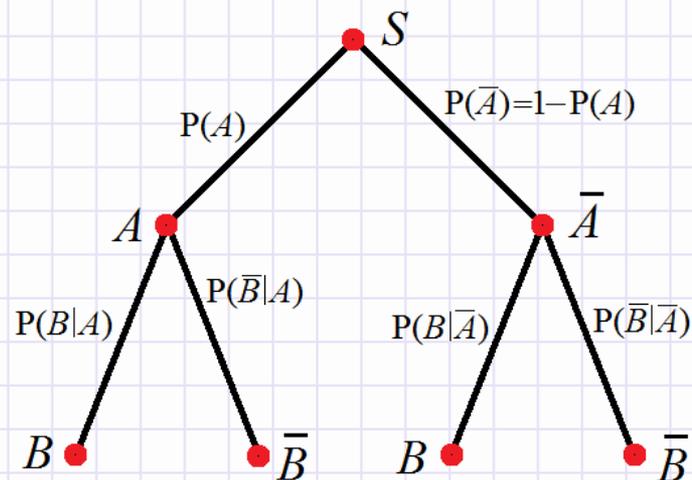
# Решение задач с помощью дерева



**Все ребра нужно оснастить вероятностями**

1. Сумма вероятностей в одной вершине равна 1.
2. Вероятности – *условные*

# Решение задач с помощью дерева



**Все ребра следует оснастить вероятностями**

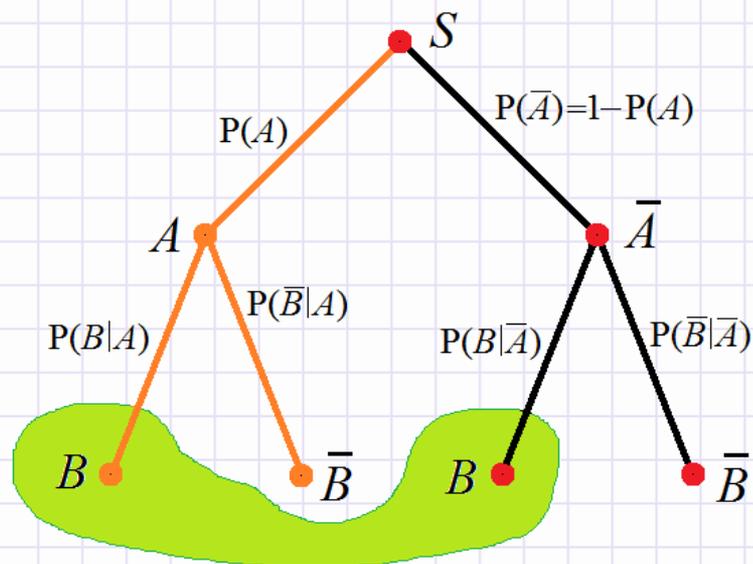
1. Сумма вероятностей в одной вершине равна 1.
2. Вероятности – *условные*

3. Если какая-то вероятность неизвестна, обозначьте ее буквой  $x$ .  
Если буква  $x$  занята, примените букву  $y$ .

4. *Вдоль цепочек умножай,  
результаты складывай!*

Правило умножения и формула полной вероятности

# Решение задач с помощью дерева



**Вероятность одной цепочки**

$$P(A \cap B) = P(SAB) = P(A) \cdot P(B|A)$$

**Вероятность события  $B$**

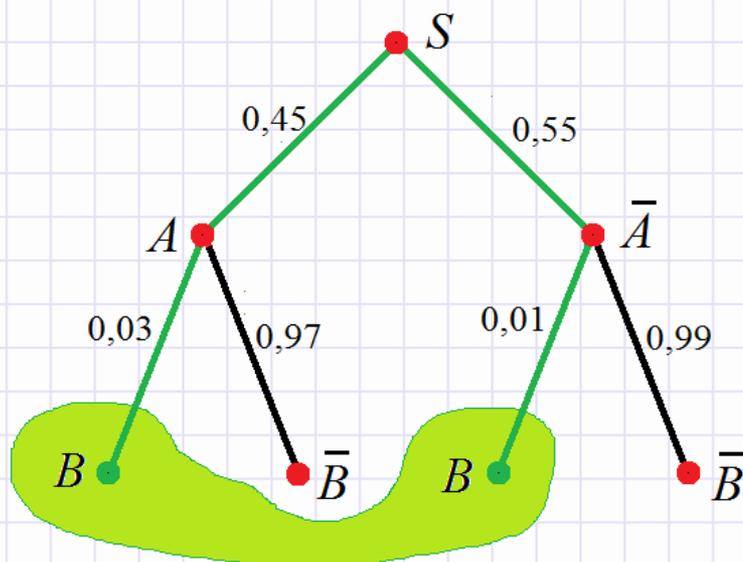
$$P(B) = P(SAB) + P(S\bar{A}B) \quad \text{– сумма вероятностей цепей (формула полной вероятности)}$$

**Условная вероятность события  $A$  при условии  $B$**

$$P(A|B) = \frac{P(SAB)}{P(SAB) + P(S\bar{A}B)} \quad \text{– доля цепи } SAB \text{ в сумме цепей, ведущих к } B$$

## Решение задач с помощью дерева

Две фабрики выпускают одинаковые стёкла для автомобильных фар. Первая фабрика выпускает 45% этих стёкол, вторая — 55%. Первая фабрика выпускает 3% бракованных стёкол, а вторая — 1%. Найдите вероятность того, что купленное в магазине случайное стекло окажется бракованным.



$A = \{\text{Первая фабрика}\}$

$B = \{\text{Брак}\}$

$$P(B) = P(SAB) + P(S\bar{A}B) = 0,45 \cdot 0,03 + 0,55 \cdot 0,01 = 0,0135 + 0,0055 = 0,019.$$

## Место комбинаторики

- **Вспомогательный инструмент.** Нужен тогда, когда множества элементарных исходов становятся обширными
- **Можно ли обойтись без комбинаторики? Да.** Но тогда не сумеем показать, как работает закон больших чисел. Закон больших чисел нельзя наблюдать на малых числах
- **Поэтому комбинаторика появляется в 9 классе и только в необходимом объеме**

### 3. Закон больших чисел

- Фундаментальный закон природы. Он имеет математическое выражение. ЗБЧ обеспечивает устойчивость многих изменчивых величин в нашем мире
- Без него многие физические законы не имели бы смысла, поскольку физические величины бессистемно удалялись бы от своих тенденций, описанных формулами
- Понимание сути ЗБЧ – такой же элемент культуры, как понимание смысла закона всемирного тяготения или причины смены времен года

# Наш сайт

Яндекс Вероятность в школе | x

ptlab.mccme.ru Вероятность в школе | Методическая консультация



МЦМО В ШКОЛЕ

• В РАЗДЕЛЕ "НАСЕЛЕНИЕ ГОРОДОВ РОССИИ" ДОБАВЛЕНА ТАБЛИЦА НА ТЕМУ "ГОР

НОВОСТИ КALENDARЬ УЧ.ПРОГРАММЫ КОНТРОЛЬНЫЕ ЕГЭ и ОГЭ ЗАНЯТИЯ ОЛИМПИАДА ПУБЛИКАЦИИ ЭЛ.РЕСУРСЫ ИНФОРМАЦИЯ

**Здравствуйте, Иван Ростиславович**

**Чтобы написать сообщение или просмотреть обсуждения и ответы на вопросы, перейдите в раздел [Консультации](#)**

**02.10.2023 Определены даты проведения олимпиад**

---

Московская Олимпиада по вероятности и статистике пройдет в два тура

1. Отборочный дистанционный тур с 15 по 21 ноября 2023 года.
2. Основной очный тур пройдет 27 января 2024 г. Место проведения уточняется.

[Подробнее](#)

700m

## КОНСУЛЬТАЦИИ

VYSOTSKY

- Адреса
- ▷ Консультации
- Моя анкета
- Непрочитанные сообщения
- ▷ Создание материала
- ▷ Управлять
- Выйти
- Редактирование задач дня
- Редактирование бегущей строки

# Некоторые мысли про школьную математику и вероятность в частности

Написал – прочти. Прочитал – пойми, что хотел сказать. Понял – вот и напиши, что понял, а всю вот эту ерунду сотри

Сложная и туманная наука у нас есть. Нам теперь нужен простой и ясный школьный предмет

Мы пишем учебники для простых людей. Потому писать нужно простым языком  
Проф. Ю.Н. Тюрин



Наиболее вредоносным элементом в школе является хороший педагог, который плохо знает свой предмет.

Проф. Тох Тин Лам  
(NIE, Сингапур)



Многие наши учебники математики написаны для буддистов, которые знали математику в прошлой жизни. Просто немножко забыли

Учитель математики! Если в твоём классе случайно оказался будущий математик, помни – это не твоя вина.

Благодарю за внимание

<https://ptlab.mccme.ru>  
[prob-in-school@yandex.ru](mailto:prob-in-school@yandex.ru)