

УДК 539.3

ЧИСЛЕННЫЙ РАСЧЕТ ОПТИМАЛЬНОЙ ФОРМЫ ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ ПРИ ПРОНИКАНИИ В ГРУНТОВЫЕ СРЕДЫ

Е.Ю. Линник

Аннотация

Разработан эффективный метод поиска оптимальной формы тела при проникании в грунтовые среды. Метод основан на аппроксимации искомой образующей тела вращения минимального сопротивления параметрическим полиномом Безье. Численные расчеты проведены в постановке механики сплошной среды при учете ударной сжимаемости и сопротивления сдвигу грунта в рамках модели грунтовой среды Григоряна. Получен диапазон изменения оптимальных форм с допустимой для практического применения погрешностью 5%.

Ключевые слова: проникание, грунтовая среда, модель Григоряна, сопротивление, полином Безье, численный расчет, безусловная оптимизация.

Введение

При решении задач проникания в плотные среды (металл, бетон) широко применяются модели локального взаимодействия [1]. Распространение этого подхода на мягкие грунтовые среды, как показано в работе [2], приводит к возникновению значительной погрешности при определении силы сопротивления внедрению в грунтовую среду по сравнению с двумерными численными расчетами. Следовательно, актуальной является разработка методов решения задачи поиска оптимальной формы с учетом свойств среды в двумерной осесимметричной постановке. В настоящей работе рассматривается прямой метод поиска формы тела, основанный на аппроксимации искомой геометрии выпуклой кривой, при этом требуется, чтобы сила сопротивления внедрению в грунтовую среду принимала минимальное значение. Ранее показано [3, 4], что в осесимметричной задаче «удачной» аппроксимацией формы образующей является параметрический полином в форме Безье, который позволяет качественно описывать геометрию искомой формы при сравнительно небольшом числе параметров. Возможности предложенного метода демонстрируются на примере решения задачи безусловной оптимизации формы осесимметричного жесткого тела при проникании в грунтовые среды при заданных длине и радиусе миделя поперечного сечения.

1. Постановка задачи проникания

Деформируемый в процессе проникания грунт описывается в рамках математической модели динамики грунтовой среды Григоряна [5]. Соотношения модели записываются в цилиндрической системе координат $r\theta z$ ($0z$ – ось симметрии) в виде системы дифференциальных уравнений, выражающих законы сохранения массы, импульса и максимальной плотности, достигнутой в процессе активного

нагружения грунта, а также уравнений теории пластического течения с условием пластичности Мизеса

$$\begin{aligned}
\frac{d\rho}{dt} + \rho(u_{r,r} + u_{z,z}) &= -\frac{\rho u_r}{r}, \\
\rho \frac{du_r}{dt} - \sigma_{rr,r} - \sigma_{rz,z} &= \frac{\sigma_{rr} - \sigma_{\theta\theta}}{r}, \\
\rho \frac{du_z}{dt} - \sigma_{rz,r} - \sigma_{zz,z} &= \frac{\sigma_{rz}}{r}, \\
\frac{d\rho^*}{dt} &= \frac{d\rho}{dt} H(\rho - \rho^*) H\left(\frac{d\rho}{dt}\right), \\
D_J s_{ij} + \lambda s_{ij} &= 2G e_{ij}, \quad i, j = r, z, \\
s_{ij} s^{ij} &\leq \frac{2}{3} \sigma_T^2,
\end{aligned} \tag{1}$$

где t – время; $\frac{d}{dt} = \frac{\partial}{\partial t} + u_r \frac{\partial}{\partial r} + u_z \frac{\partial}{\partial z}$ – полная производная по времени; ρ_0 , ρ и ρ^* – начальная, текущая и максимальная плотность, достигнутая в процессе нагружения; u_i , σ_{ij} , s_{ij} , e_{ij} – компоненты вектора скорости, тензора напряжений Коши и девиаторов тензоров напряжений и скоростей деформаций соответственно, $H(\xi) = \begin{cases} 0, & \xi < 0, \\ 1, & \xi \geq 0; \end{cases}$ D_J – производная Яуманна; G – модуль сдвига; σ_T – предел текучести; по повторяющимся индексам производится суммирование. Параметр λ равен нулю при упругом деформировании и $\lambda > 0$, если реализуется условие пластичности.

Замыкается система дифференциальных уравнений (1) конечными соотношениями, определяющими давление p и условие пластичности грунтовой среды

$$\begin{aligned}
p &= f_1(\rho, \rho^*) H(\rho^* - \rho) H(\rho_0 - \rho), \quad f_1(\theta) = \frac{\rho_0 A^2 \theta}{(1 - \lambda \theta)^2}, \quad \theta = 1 - \frac{\rho_0}{\rho}, \\
\sigma_T &= f_2(p), \quad f_2(p) = \sigma_0 + \frac{kp}{1 + kp/(\sigma_M - \sigma_0)}.
\end{aligned} \tag{2}$$

Система уравнений (1), (2) динамики грунтовой среды дополняется начальными и краевыми условиями. На головной части ударника, контактирующей с грунтовой средой, принимается условие «непроницаемости» по нормали со «скольжением по касательной с сухим трением» в соответствии со смешанной моделью трения, на свободных поверхностях грунта и ударника нормальные и касательные напряжения задаются равными нулю. В начальный момент времени напряжения и скорость частиц грунта равны нулю. Внешние границы расчетной области грунта считаются жесткими. Ударник также считается жестким,двигающимся с постоянной скоростью, равной скорости удара.

Численная реализация соотношений (1), (2) осуществляется в рамках методики, основанной на модифицированной схеме Годунова и реализованной в пакете прикладных программ НИИМ ННГУ «Динамика-2» [6].

2. Постановка задачи оптимизации

Рассматривается задача поиска образующей тела вращения заданной длины L и радиуса миделя поперечного сечения R в осесимметричной постановке, для которого сила сопротивления внедрению в грунтовую среду принимает минимальное значение.

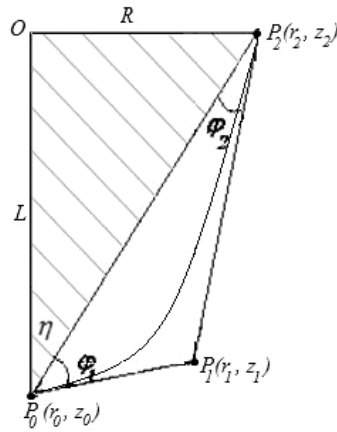


Рис. 1. Форма тела вращения

Поиск образующей тела вращения осуществляется в классе выпуклых кривых, ограниченных характеристической ломаной $P_0P_1P_2$ [7], проходящей через точки P_0 и P_2 (см. рис. 1). В качестве функции, определяющей форму образующей тела, используется полином Безье второго порядка:

$$r(s) = (1 - s)^2 r_0 + 2s(1 - s)r_1 + s^2 r_2, \quad s \in [0, 1], \quad (3)$$

$$z(s) = (1 - s)^2 z_0 + 2s(1 - s)z_1 + s^2 z_2,$$

где $r_i, z_i, i = 0, 1, 2$, являются координатами контрольных точек характеристической ломаной. В силу заданных ограничений на геометрию искомого оптимального тела сила сопротивления внедрения зависит от двух параметров φ_1, φ_2 , которые представляют наклон сторон характеристической ломаной $P_0P_1P_2$ полиномов Безье.

Далее ставится следующая задача оптимизации:

$$F(\varphi_1, \varphi_2) \rightarrow \min, \quad \varphi_1 \in [0, \pi/2 - \eta], \quad \varphi_2 \in [\pi/2, \eta], \quad (4)$$

где $F(\varphi_1, \varphi_2)$ – целевая функция, соответствующая величине силы сопротивления внедрению и определяемая в численных расчетах (1), (2) с использованием пакета прикладных программ «Динамика-2».

Для эффективного решения поставленной задачи (4) целевая функция (величина силы сопротивления внедрению в грунтовую среду на квазистационарной стадии внедрения после погружения головной части ударника) представляется в виде биквадратичной зависимости от двух параметров:

$$L_2(\varphi_1, \varphi_2) = c_0 + c_1 \varphi_1 + c_2 \varphi_2 + c_3 \varphi_1 \varphi_2 + c_4 \varphi_1^2 + c_5 \varphi_2^2 + c_6 \varphi_1^2 \varphi_2 + c_7 \varphi_1 \varphi_2^2 + c_8 \varphi_1^2 \varphi_2^2. \quad (5)$$

Численные расчеты проводятся в соответствии с оптимальным планом полного факторного эксперимента типа 3^2 [8] – трехуровневого ортогонального плана с 9 точками. Для удобства представления искомые параметры $\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2$ принадлежат $[-1, 1]$ и на каждом уровне принимают кодированные значения в виде набора чисел $\{-1, 0, 1\}$. Коэффициенты $c_i, i = 0, \dots, 8$, полинома (5) определяются интерполированием численных значений функции в области изменения параметров методом наименьших квадратов.

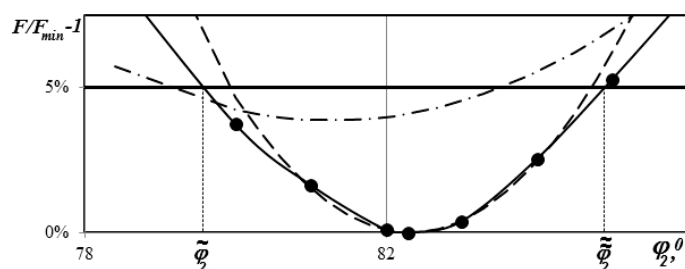


Рис. 2. Зависимость силы сопротивления внедрению от параметров образующей

Таким образом, задача (4) поиска образующей тела вращения минимального сопротивления сводится к решению следующей задачи безусловной оптимизации для полинома (5):

$$L_2(\tilde{\varphi}_1, \tilde{\varphi}_2) \rightarrow \min, \quad \tilde{\varphi}_1 \in [-1, 1], \quad \tilde{\varphi}_2 \in [-1, 1]. \quad (6)$$

3. Результаты численных расчетов

Расчеты проводились при следующих значениях параметров. Параметры ударной адиабаты: $A = 455$ м/с, $\lambda = 2.3$, $\rho_0 = 1720$ кг/м³, $\sigma_0 = 0.01$ МПа, $\sigma_M = 275$ Мпа, $\mu = 0.6$ – соответствуют сухой песчаной смеси естественного состава, получены ранее в обращенных экспериментах в скоростном диапазоне 50–350 м/с [9]. Тело вращения имеет размеры $R = 1$ см, $L/R = \sqrt{5}$ и проникает с постоянной начальной скоростью $v_0 = 400$ м/с.

На начальном этапе в качестве диапазона изменения наклонов сторон характеристической ломаной полиномов Безье берется область $[0^\circ, 55^\circ] \times [90^\circ, 75^\circ]$, которая считается первым приближением (приближением I). В данной области сила сопротивления внедрению минимальна при $\varphi_1^I = 13.6^\circ$, $\varphi_2^I = 81.4^\circ$ и принимает значение $L_2(\varphi_1^I, \varphi_2^I) = 38$ кН. Контрольный расчет для первого приближения дает значение $F(\varphi_1^I, \varphi_2^I) = 37.8$ кН.

Для уточнения решения задачи оптимизации (6) центр плана переносится в точку $(\varphi_1^I, \varphi_2^I)$, соответствующую найденным величинам варьируемых параметров. В полученной области $[0^\circ, 30^\circ] \times [84^\circ, 81^\circ]$, которая является вторым приближением (приближением II), аналогично проводится ряд численных расчетов в соответствии с оптимальным планом полного факторного эксперимента типа 3^2 . В результате определена величина силы сопротивления внедрению при $\varphi_1^{II} = 0^\circ$, $\varphi_2^{II} = 82.3^\circ$, равная $F(\varphi_1^{II}, \varphi_2^{II}) = 36.6$ кН. Таким образом, уточнение области дает уменьшение минимального значения силы сопротивления на 3% при существенном изменении параметров φ_1 , φ_2 .

Оценка достоверности приближений (5) проводится следующим образом. При фиксированном значении первого параметра $\varphi_1 = 0^\circ$ проведена серия прямых численных расчетов с изменением второй характеристики φ_2 . На рис. 2 показаны зависимости силы сопротивления внедрению от параметра φ_2 , отнесенные к минимальным значениям силы для каждого приближения. Штрих-пунктирной линией обозначена кривая, соответствующая первому приближению, а штриховой – второму приближению. Сплошной линией отмечены результаты численных расчетов, которые хорошо аппроксимируются полиномом второй степени в области минимума.

Как видно из рис. 2, минимум функции достигается при $\varphi_2 = 82.3^\circ$, при этом второе приближение дает близкие результаты по отношению к численным расчетам.

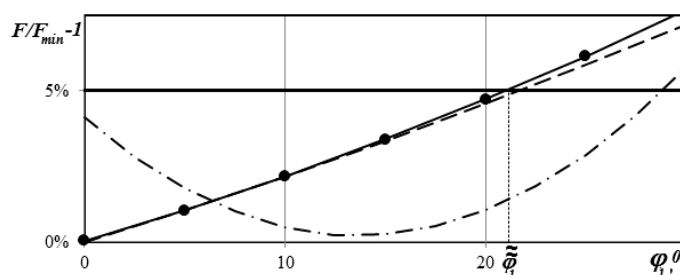


Рис. 3. Зависимость силы сопротивления внедрению от параметров образующей

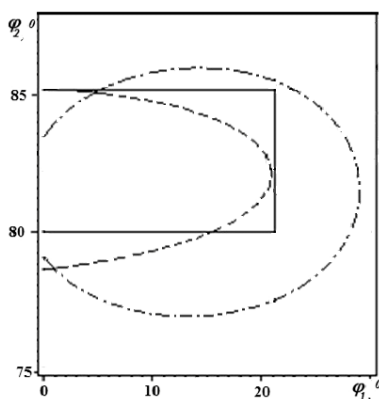


Рис. 4. Область изменения параметров

Аналогичные исследования проводятся далее при фиксированном значении второго параметра $\varphi_2 = \varphi_2^{II} = 82.3^\circ$. Зависимость силы сопротивления внедрению от параметра φ_1 показаны на рис. 3. В этом случае второе приближение, отмеченное штриховой линией, также дает близкие к численным результаты, которые аппроксимируются прямой, выходящей из нуля.

Таким образом, минимум силы сопротивления внедрению в грунтовую среду при проникании ударника с постоянной скоростью в сухую песчаную смесь естественного состава в рамках грунтовой среды Григоряна достигается при $\varphi_1 = 0^\circ$, $\varphi_2 = 82.3^\circ$.

Отметим, что на практике значения силы сопротивления определяются с некоторой погрешностью, обусловленной погрешностями эксперимента и/или численного расчета, разбросом физико-механических свойств грунта и другими факторами. С учетом данной погрешности оптимальное значение силы может достигаться и при других значениях параметров, определяющих форму образующей тела вращения минимального сопротивления внедрению в грунтовую среду.

На рис. 4 показаны области допустимого изменения параметров образующей (3), которые приводят к отличиям силы сопротивления внедрения от минимального значения $L_2(\varphi_1^{II}, \varphi_2^{II})$ не более чем на 5%. Сплошная линия на рис. 4 соответствует результатам численных расчетов, штрих-пунктирная линия определена в рамках приближения I, штриховая линия – в рамках приближения II.

На рис. 5 сплошной линией показана форма оптимального тела, определенная в численных расчетах. Штрих-пунктирной и штриховой линиями отмечены образующие, соответствующие граничным значениям области допустимого изменения параметров образующей (сплошная линия на рис. 4). Видно, что оптимальные тела в полученном диапазоне имеют затушенную форму.

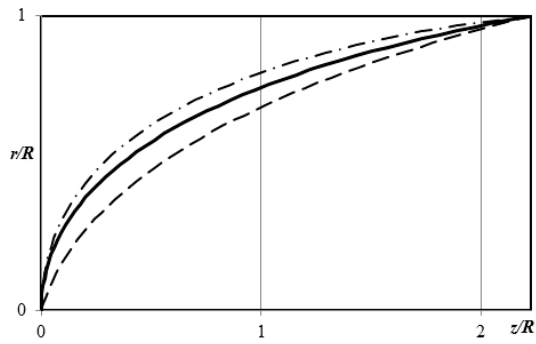


Рис. 5. Формы тел вращения минимального сопротивления

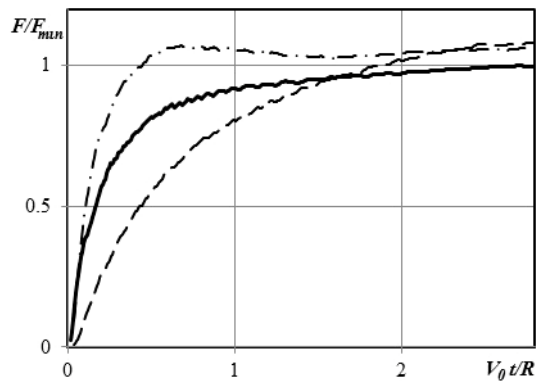


Рис. 6. Зависимость силы сопротивления внедрению от глубины проникания

Для рассчитанных форм получены соответствующие распределения силы сопротивления внедрению в грунтовую среду от глубины проникания. На рис. 6 сила сопротивления внедрению в грунтовую среду для оптимального тела обозначена сплошной линией, при этом графики сил, соответствующих крайним положениям форм, лежат выше оптимальной на участке, когда достигается квазистационарная стадия внедрения. Различия в силах на квазистационарной стадии внедрения не превосходят 5%.

Заключение

В работе исследован метод поиска оптимальных форм тел вращения минимального сопротивления внедрению в грунтовую среду в осесимметричной постановке в рамках модели грунтовой среды Григоряна, основанный на аппроксимации образующей тела выпуклой кривой. В результате получен класс затупленных форм тел вращения минимального сопротивления с допустимой для практического применения погрешностью, составляющей 5% от величины силы сопротивления внедрению в грунтовую среду на квазистационарной стадии внедрения.

Автор выражает благодарность И.Б. Бадриеву за внимание к работе и В.Л. Котову за постановку задачи и обсуждение результатов.

Работа выполнена в рамках Программы по государственной поддержке ведущих научных школ РФ (НШ-593.2014.8) и РФФИ (проекты № 13-08-00531_а, 14-01-31113-мол_а).

Summary

E. Yu. Linnik. Numerical Calculation of the Optimum Shape of a Body of Revolution at Its Penetration into Soil Media.

An efficient method for finding the optimum shape of a body penetrating into soil media has been developed. The method is based on an approximation of the required generator of a body of revolution with minimum penetration resistance by a parametric Bezier polynomial. The numerical calculations have been carried out in the formulation of continuum mechanics, taking into account shock compressibility and soil shear strength within Grigoryan's model of a soil medium. The range of the optimum shapes with a permissible (for practical application) error of 5% has been obtained.

Keywords: penetration, soil medium, Grigoryan's model, resistance, Bezier polynomial, numerical calculation, unconstrained optimization.

Литература

1. *Баженов В.Г., Котов В.Л., Линник Е.Ю.* О моделях расчета форм осесимметричных тел минимального сопротивления при движении в грунтовых средах // Докл. РАН. – 2012. – Т. 449, № 2. – С. 156–159.
2. *Котов В.Л., Баландин Вл.В., Линник Е.Ю., Баландин Вл.Вл.* О применимости модели локального взаимодействия для определения сил сопротивления внедрению сферы в нелинейно-сжимаемый грунт // Вычисл. механика сплошных сред. – 2012. – Т. 5, № 4. – С. 435–442.
3. *Линник Е.Ю.* Численное моделирование удара и проникания в мягкие грунтовые среды оптимальных тел вращения // Труды Матем. центра имени Н. И. Лобачевского. – Казань: Казан. матем. о-во, 2013. – Т. 47: Материалы XII Всерос. молод. шк.-конф. «Лобачевские чтения – 2013». – С. 103–105.
4. *Крайко А.А., Пьянков К.С.* Эффективные прямые методы в задачах построения оптимальных аэродинамических форм // Журн. вычисл. матем. и матем. физики. – 2010. – Т. 50, № 9. – С. 1624–1631.
5. *Григорян С.С.* Об основных представлениях динамики грунтов // Прикл. матем и механика. – 1960. – Т. 24, № 6. – С. 1057–1072.
6. *Баженов В.Г., Зефирова С.В., Кочетков А.В., Крылов С.В., Фельдгун В.Р.* Пакет программ «Динамика-2» для решения плоских и осесимметричных нелинейных задач нестационарного взаимодействия конструкций со сжимаемыми средами // Матем. моделирование. – 2000. – Т. 12, № 6. – С. 67–72.
7. *Фокс А., Пратт М.* Вычислительная геометрия. Применение в проектировании и на производстве / Пер. с англ. – М.: Мир, 1982. – 304 с.
8. *Трухин Б.В., Черников А.А.* Математические методы планирования и обработка эксперимента: учеб. пособие. – Н. Новгород, 1990. – 95 с.
9. *Котов В.Л., Баландин Вл.В., Линник Е.Ю., Баландин Вл.Вл.* Применение модели локального взаимодействия для определения силы сопротивления внедрению ударников в песчаный грунт // Прикл. механика и техн. физика. – 2013. – Т. 54, № 4. – С. 114–125.

Поступила в редакцию
19.11.13

Линник Елена Юрьевна – аспирант кафедры численного моделирования физико-механических процессов, Нижегородский государственный университет им. Н.И. Лобачевского, г. Нижний Новгород, Россия.

E-mail: ElenkaLinnik@gmail.com