

УДК 519.85

Коннов И.В., доктор физико-математических наук, профессор, Институт вычислительной математики и информационных технологий ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет»

Кашина О.А, кандидат физико-математических наук, доцент, Институт вычислительной математики и информационных технологий ФГАОУ ВО «Казанский (Приволжский) федеральный университет».

ОТКРЫТАЯ ТРАНСПОРТНАЯ МОДЕЛЬ И ЕЁ ПРИЛОЖЕНИЯ: ЗАДАЧА РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПОТОКОВ В СЕТИ И В ЗАДАЧЕ ПРОИЗВОДСТВА-СБЫТА С УЧЁТОМ ТРАНСПОРТНЫХ РАСХОДОВ

Аннотация: В статье рассматривается одна модификация транспортной модели, широко известной среди экстремальных задач, – открытая транспортная задача с двусторонними ограничениями на переменные. Приводятся две интерпретации рассматриваемой модели: задача оптимального распределения потоков в сети с мобильными абонентами и задача оптимального планирования производства и сбыта однородного продукта с учётом транспортных затрат. Обуславливается актуальность разработки приближённых методов решения транспортной задачи, несмотря на наличие конечных алгоритмов – это большая размерность задачи, возмущения коэффициентов функций цели и ограничений, отсутствии гарантий существования допустимого решения, возможная нестационарность исходных данных, необходимость получения приемлемого по точности решения за ограниченное время. Для приближённого решения задачи предлагается подход, основанный на применении метода штрафных функций, приводятся результаты численных экспериментов, указываются направления дальнейших исследований.

Ключевые слова: оптимизация; транспортная задача; беспроводная сеть; мобильные абоненты; провайдер; соединение; поток; однопродуктовая задача производства-сбыта с учётом транспортных издержек; штрафная функция; квадратичный штраф; метод внешних штрафных функций; проекция; метод проекции градиента.

Работа выполнена при поддержке РФФИ, проект №16-01-00109а.

В математической теории экстремальных задач так называемая транспортная задача линейного программирования занимает особое место. Сформулированная французским математиком Г.Монжем ещё в 1781 г. [1], эта задача

была исследована лишь в конце 30-х – начале 40-х гг. XX века советским математиком Л.В.Канторовичем [2]. Первый точный метод решения транспортной задачи был разработан в 1940 г. [3] (работа была опубликована в 1949 г.). Подобные методы разрабатывались американским математиком Т.Купмансом [4]. В 1966 вышли в свет монографии [5], [6], содержащие систематическое изложение теории и методов линейного программирования, включая и решение транспортной задачи.

Несмотря на хорошо разработанную теорию и наличие конечных алгоритмов решения, исследование транспортной задачи, её приложений и модификаций сохраняет актуальность и сегодня. В частности, в настоящее время всё более востребованными становятся приближённые алгоритмы, позволяющие быстро решать задачи большой размерности с часто изменяющимися (и потому неточными) исходными данными. Существует целый ряд факторов, снижающих применимость точных методов решения транспортной задачи – в первую очередь, это – быстрый рост размерности решаемых задач, приводящий к накоплению ошибок вычислений и ухудшению обусловленности матрицы коэффициентов ограничений. Кроме того, в возникающих на практике задачах непустота допустимой области зачастую не может быть гарантирована. В этих случаях получить решение близкое к оптимальному (допустимому) можно только с помощью приближённых методов. Другим фактором, обуславливающим актуальность исследований в области разработки и применения методов приближённого решения транспортной задачи является расширение сферы применения транспортной модели – помимо традиционных областей, связанных с производством, реализацией и транспортировкой продукции, в неё входят, например, задачи оптимизации различных характеристик функционирования сетей, особенно, – беспроводных сетей с мобильными абонентами. Такие задачи отличает большая размерность и быстрое изменение характеристик сети (исходных данных задачи).

В данной статье рассматривается одна модификация транспортной модели – открытая транспортная задача с двусторонними ограничениями на пере-

менные – применительно к двум оптимизационным задачам: задаче распределения потоков в сети с мобильными абонентами и задаче планирования производства и сбыта однородного продукта с учётом транспортных расходов. Для приближённого решения задачи предлагается подход, основанный на применении метода внешних штрафных функций (например, [7, §7.1]), приводятся результаты численных экспериментов и делаются выводы относительно направлений дальнейших исследований.

Открытая транспортная задача с двусторонними ограничениями на переменные. Постановка задачи

Приведём формальную постановку открытой транспортной задачи с двусторонними ограничениями на переменные. Пусть заданы целые положительные числа m и n и для $i = 1, \dots, m; j = 1, \dots, n$ заданы вещественные значения $\alpha_{i,j} \geq 0, \beta_j \geq 0, \gamma_i \geq 0, c_{i,j}$. Искомые вещественные переменные, составляющие $m \times n$ -матрицу объёмов x , обозначим через $x_{i,j}$. Запишем задачу кратко в виде:

$$\min \rightarrow \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n c_{i,j} x_{i,j} \quad (1)$$

$$\sum_{i=1}^m x_{i,j} \geq \beta_j, \quad j = 1, \dots, n; \quad (2)$$

$$\sum_{j=1}^n x_{i,j} \leq \gamma_i, \quad i = 1, \dots, m; \quad (3)$$

$$0 \leq x_{i,j} \leq \alpha_{i,j}, \quad i = 1, \dots, m; \quad j = 1, \dots, n. \quad (4)$$

Рассмотрим теперь две возможные интерпретации задачи (1) – (4).

Интерпретация 1. Задача оптимального распределения сетевых потоков.

Рассматривается беспроводная сеть, включающая провайдеров сетевых услуг и мобильных абонентов, каждый из которых может выступать и как источник, и как приёмник сигнала. В рассматриваемый момент времени (или на малом временном интервале) между абонентами возникают соединения (происходит передача сигнала). Цель оптимизации функционирования сети – распределить сетевую нагрузку между провайдерами так, чтобы минимизировать

суммарные затраты на поддержку всех соединений при выполнении ограничений на величину потока.

Переменные и параметры задачи (1) – (4) в данной интерпретации будем понимать следующим образом: m – число провайдеров сетевых услуг; n – число соединений (возникших в данный момент времени или на заданном интервале); $x_{i,j}$ – искомая величина ресурса провайдера i , используемого для обеспечения соединения j (ниже для краткости будем говорить «поток (i, j) »); $\alpha_{i,j}$ – верхняя оценка для величины потока (i, j) ; β_j – нижняя граница для суммарной величины потока для соединения j ; γ_i – верхняя оценка ресурса провайдера i , используемого для обеспечения всех соединений; $c_{i,j}$ – затраты i -го провайдера, связанные с обеспечением потока (i, j) ; $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

Заметим, что в поддержке того или иного соединения j могут, вообще говоря, участвовать не все m провайдеров, а лишь те из них, номера которых составляют некоторое множество P_j согласно их областям покрытия территории. Тогда для всех $i \notin P_j$ определим $\alpha_{i,j} = 0$ и потому $x_{i,j} = 0$. Далее для упрощения записи будем исследовать простой случай, когда $P_j = \{1, \dots, m\}$ для всех $j \in \{1, \dots, n\}$.

Интерпретация 2. Задача оптимального планирования производства и сбыта однородного продукта с учётом транспортных расходов.

Рассматривается рынок однородного товара, включающий продавцов и покупателей. Объёмы продаж ограничены сверху, объёмы закупок – снизу. Продавцы устанавливают цены, по которым они готовы продать товар, покупатели назначают цены, по которым они готовы совершить покупку. Задача состоит в отыскании оптимального (относительно размера транспортных затрат) плана производства и реализации продукции.

Переменные и параметры задачи (1) – (4) в данной интерпретации будем понимать следующим образом: m – число поставщиков (продавцов) однородного продукта; n – число покупателей; $x_{i,j}$ – искомое количества товара, проданного поставщиком i покупателю j ; $\alpha_{i,j}$ – верхняя оценка для величины $x_{i,j}$ (да-

лее для краткости будем говорить «размер сделки (i, j) »); β_j – нижняя граница для общего размера закупки покупателя j ; γ_i – верхняя граница общего объема продаж поставщика i ; $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$.

Пусть заданы также величины: a_i – цена за единицу товара, назначаемая продавцом i ; b_j – цена за единицу товара, предлагаемая покупателем j ; $\tilde{c}_{i,j}$ – стоимость перевозки единицы продукта от продавца i покупателю j ; $i = 1, \dots, m$; $j = 1, \dots, n$. Положив $\tilde{x}_i \equiv \sum_{j=1}^n x_{i,j}$ и $y_j \equiv \sum_{i=1}^m x_{i,j}$ для всех i и j , соответственно, сформулируем критерий задачи:

$$\min \rightarrow \sum_{i=1}^m a_i \tilde{x}_i + \sum_{i=1}^m \sum_{j=1}^n \tilde{c}_{i,j} x_{i,j} - \sum_{j=1}^n b_j y_j. \quad (5)$$

Приводя подобные слагаемые в (5) и полагая $c_{i,j} \equiv \tilde{c}_{i,j} + a_i - b_j$ для всех значений индексов i и j , приводим критерий (5) к виду (4), а ограничения: $y_j \geq \beta_j$, $j = 1, \dots, n$; $x_i \leq \gamma_i$, $i = 1, \dots, m$, – к виду (2) и (3), соответственно.

Решение задачи. Метод внешних штрафных функций

Как уже было сказано, несмотря на наличие точных методов решения задачи (1) – (4) ([5], [6], см. также [8, гл. 2], [9, §9]), в конкретных приложениях, в частности, в описанной постановке имеет смысл применять приближённые методы. Это особенно актуально для приведенных интерпретаций, поскольку мобильность абонентов (в первом варианте) и нестабильность рынка (во втором) на практике сводят на нет преимущества применения точных методов.

Будем решать задачу (1) – (4) методом внешних штрафных функций (ВШФ) (например, [7, §7.1]). Введём функции:

$$\Phi_1(x) \equiv \sum_{i=1}^m (\max\{\sum_{j=1}^n x_{i,j} - \gamma_i; 0\})^2. \quad (6)$$

$$\Phi_2(x) \equiv \sum_{j=1}^n (\max\{-\sum_{i=1}^m x_{i,j} + \beta_j; 0\})^2. \quad (7)$$

$$\Psi(x, \tau_1, \tau_2) \equiv cx + \tau_1 \Phi_1(x) + \tau_2 \Phi_2(x), \quad (8)$$

где τ_1 и τ_2 – положительные параметры. Обозначим

$$x^*(\tau_1, \tau_2) \equiv \operatorname{argmin}_{x \in A} \Psi(x, \tau_1, \tau_2), \quad (9)$$

где A – множество решений системы ограничений (4). Заметим, что существование точки (9) при любых τ_1, τ_2 обусловлено непрерывностью функции (8), а также замкнутостью и ограниченностью множества A . Построим итерационный процесс $\{x^k(\tau_1^k, \tau_2^k)\}$, где k – номер итерации метода ВШФ; $\{\tau_1^k\}, \{\tau_2^k\}$ – возрастающие числовые последовательности; точка $x^k(\tau_1^k, \tau_2^k)$ определяется формулой (9) при $\tau_1 = \tau_1^k, \tau_2 = \tau_2^k$. Ограниченность последовательности $\{x^k(\tau_1^k, \tau_2^k)\}$ (обусловленная ограниченностью множества A) обеспечивает существование её предельной точки x^* при $k \rightarrow \infty$. Точку x^* будем считать приближённым решением задачи (1) – (4).

Вычислительные аспекты

Остановимся на вычислительных аспектах применения метода ВШФ. Точку начального приближения x^0 и правила построения последовательностей $\{\tau_1^k\}, \{\tau_2^k\}$ зададим до начала работы метода. Положим $k=0$. Опишем k -ю итерацию метода ВШФ.

Согласно формуле (9) на каждом шаге k метода ВШФ решается задача

$$\min_{x \in A} \rightarrow \Psi(x, \tau_1^k, \tau_2^k). \quad (10)$$

Остановимся на методах поиска решения задачи (10) при фиксированных значениях k, τ_1^k, τ_2^k . Поскольку параметры τ_1 и τ_2 положительны, функции, заданные формулами (6) – (8) – квадратичные выпуклые. Решение задачи (10) может быть найдено любым из методов условной минимизации выпуклой функции (например, [7, гл.5]), однако ввиду простоты множества A имеет смысл применить один из специальных методов, например, метод проекции градиента (МПГ) (например, [7, §6.1.2], [9, §3.1]).

Целесообразность выбора МПГ обусловлена возможностью вычислить проекцию $\pi_A(x)$ точки x на множество A по явной формуле:

$$\pi_A(x)_{i,j} = \begin{cases} x_{i,j}, & \text{если } 0 \leq x_{i,j} \leq \alpha_{i,j}, \\ 0, & \text{если } x_{i,j} < 0, \\ \alpha_{i,j}, & \text{если } x_{i,j} > \alpha_{i,j}. \end{cases} \quad (11)$$

Кроме того, как нетрудно показать, в данном случае полный шаг из точки x в направлении антиградиента также можно вычислить явно. Для удобства дальнейших выкладок для каждого фиксированного x введём в рассмотрение множества

$$I(x) \equiv \{i: i \in \{1, \dots, m\}; \sum_{j=1}^n x_{i,j} > \gamma_i\}, \quad (12)$$

$$J(x) \equiv \{j: j \in \{1, \dots, n\}; \sum_{i=1}^m x_{i,j} < \beta_j\}. \quad (13)$$

Вычислим частные производные функции (8) в точке x относительно всех переменных $x_{i,j}$. Зафиксируем значения индексов $i^* \in \{1, \dots, m\}$, $j^* \in \{1, \dots, n\}$.

Тогда

$$\frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_{i^*,j^*}} = \begin{cases} 0, & \text{если } i^* \notin I(x) \\ 2(\sum_{j=1}^n x_{i^*,j} - \gamma_{i^*}), & \text{иначе} \end{cases}, \quad (14)$$

$$\frac{\partial \Phi_2(x)}{\partial x_{i^*,j^*}} = \begin{cases} 0, & \text{если } j^* \notin J(x) \\ 2(\sum_{i=1}^m x_{i,j^*} - \beta_{j^*}), & \text{иначе} \end{cases}, \quad (15)$$

а значит,

$$\frac{\partial \Psi(x, \tau_1, \tau_2)}{\partial x_{i^*,j^*}} = c_{i^*,j^*} + \tau_1 \frac{\partial \Phi_1(x)}{\partial x_{i^*,j^*}} + \tau_2 \frac{\partial \Phi_2(x)}{\partial x_{i^*,j^*}}. \quad (16)$$

Для краткости обозначим частные производные функции (8), вычисленные (по формуле (16)) в точке x относительно переменных $x_{i,j}$ как $g_{i,j}$; обозначим $m \times n$ -матрицу, составленную из элементов $g_{i,j}$, через g . Запишем компоненты точки $x(\lambda)$, лежащей на луче, проходящем через точку x , направляющим вектором которого является антиградиент функции Ψ , вычисленный в точке x :

$$x_{i,j}(\lambda) = x_{i,j} - \lambda g_{i,j}, \quad (17)$$

здесь λ – скалярный вещественный шаг. Существуют разные способы выбора шага при реализации МПГ, например, шаг может быть постоянным [7, с.161] или найденным из условия неточного линейного поиска (например, [7, с.162]). В первом случае для обеспечения сходимости метода необходимо, чтобы постоянный шаг удовлетворял условию, содержащую неизвестное, вообще гово-

ря, значение константы Липшица для целевой функции задачи. Будем использовать конечный метод отыскания шага, описанный в [9, с.65].

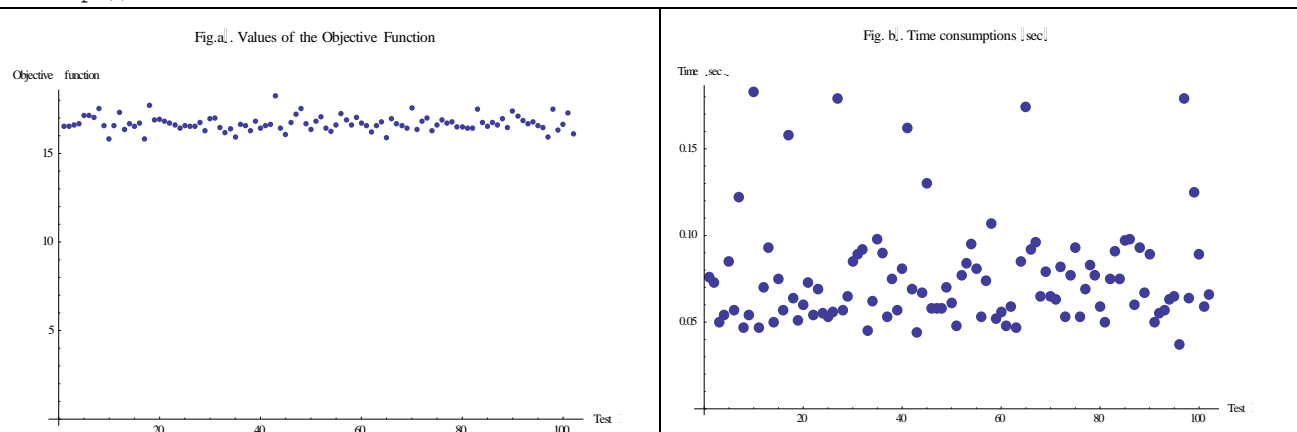
Численные эксперименты

Для проведения расчётов использовался пакет аналитических вычислений Wolfram Research Mathematica 9.0.1.0; процессор Intel® Core™ i5-430M (4M Cache, 2.26 GHz).

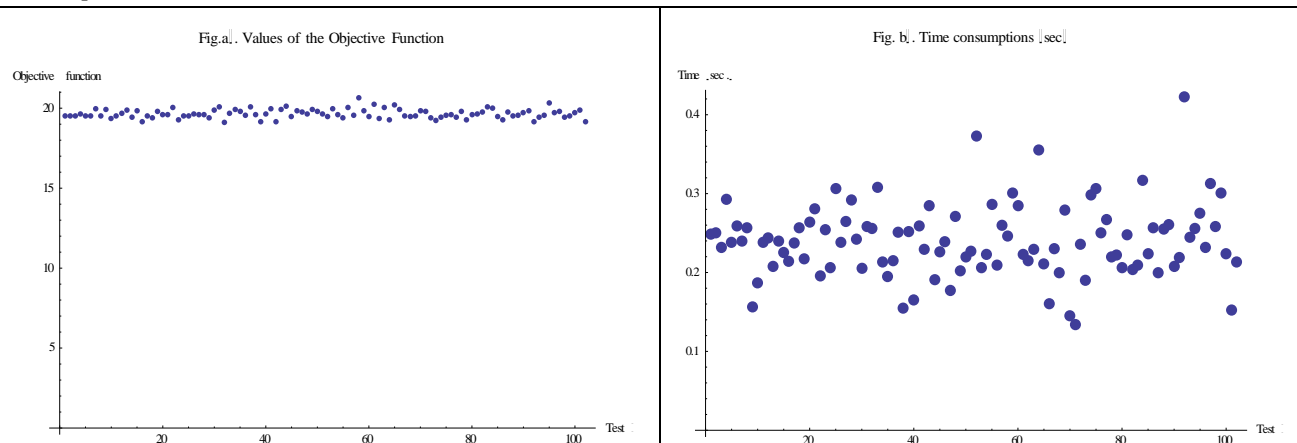
Были проведены три серии тестовых испытаний. Цель проведения первой серии тестов состояла в экспериментальном исследовании чувствительности вычисленной аппроксимации (к оптимальному значению целевой функции) и чувствительности трудоёмкости задачи к выбору задачи (1) – (4). Для этого при каждом фиксированном значении размерностей задачи проводилась группа из K экспериментов, различающихся только выбором точки начального приближения задачи. Число экспериментов K в каждой группе составляло 102 (в качестве начальной точки выбиралось начало координат, вершина множества A с максимальными координатами и 100 случайных точек). Для каждой группы из K экспериментов отслеживалось поведение следующих параметров: а) $\frac{F_{max}-F_{min}}{\bar{F}}$, где F_{max} , F_{min} и \bar{F} , соответственно, – есть максимальное, минимальное и среднее из вычисленных K значений целевой функции задачи (1) – (4) (приблизёно найденных оптимальных значений); б) время решения задачи. Для наглядности были построены графики исследуемых величин. Абсциссы точек на графиках соответствуют порядковому номеру испытания, а ординаты – значениям отслеживаемых параметров. Результаты первой серии экспериментов приведены в Таблице 1.

Результаты численных экспериментов: зависимость вычисленного значения целевой функции (левый столбец) и времени вычисления (правый столбец) от номера испытания (точки начального приближения)

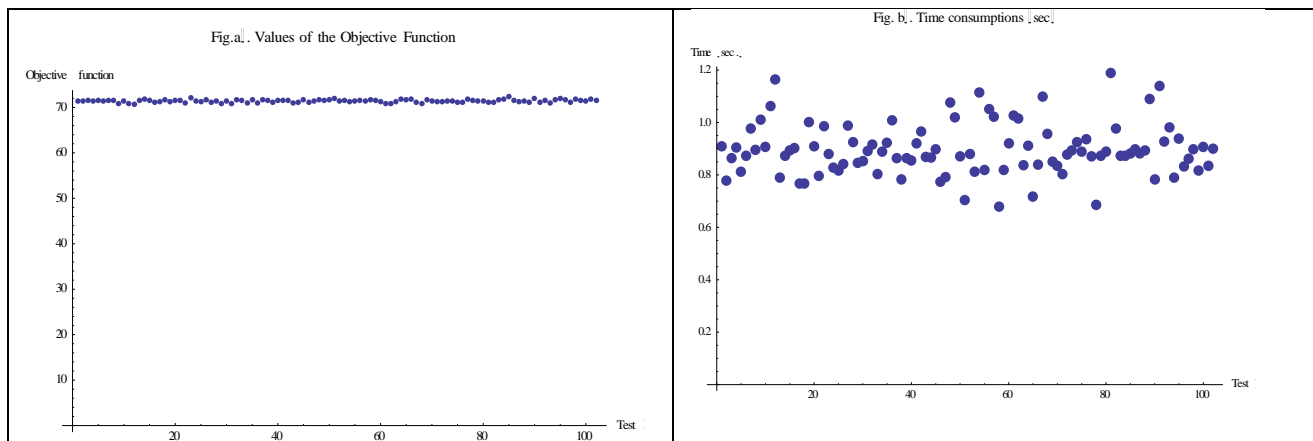
Группа испытаний №1: $m = 3$; $n = 6$; число проб (случайных начальных точек) = 102
 Среднее значение целевой функции = 16.6949
 Максимальное значение ошибки (%) = 14.611
 Время вычислений (сек.) :
 - минимальное = 0.0370022
 - максимальное = 0.1830105
 - среднее = 0.0758965



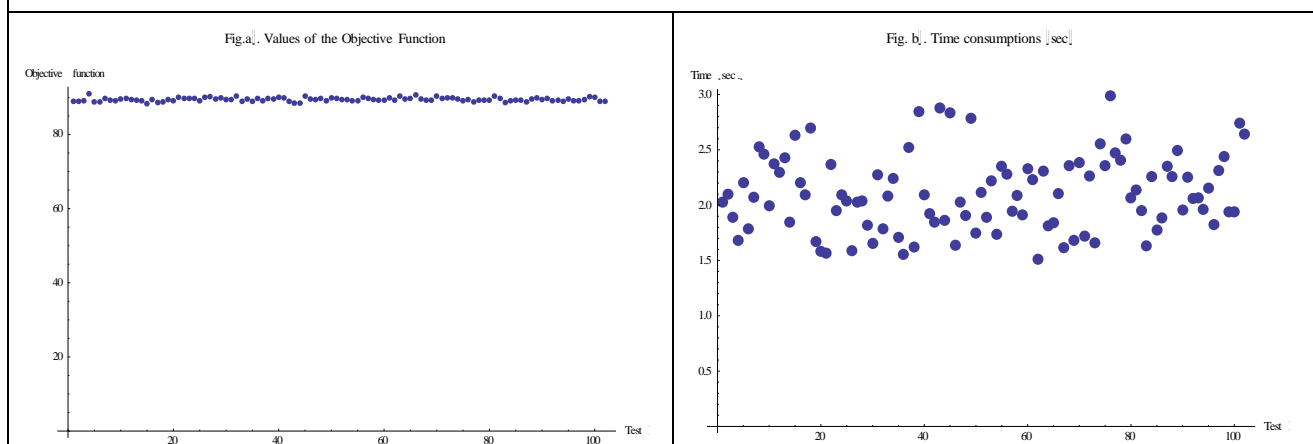
Группа испытаний №2: $m = 3$; $n = 12$; число проб (случайных начальных точек) = 102
 Среднее значение целевой функции = 19.6506
 Максимальное значение ошибки (%) = 7.69387
 Время вычислений (сек.) :
 - минимальное = 0.1340077
 - максимальное = 0.4230241
 - среднее = 0.2396510



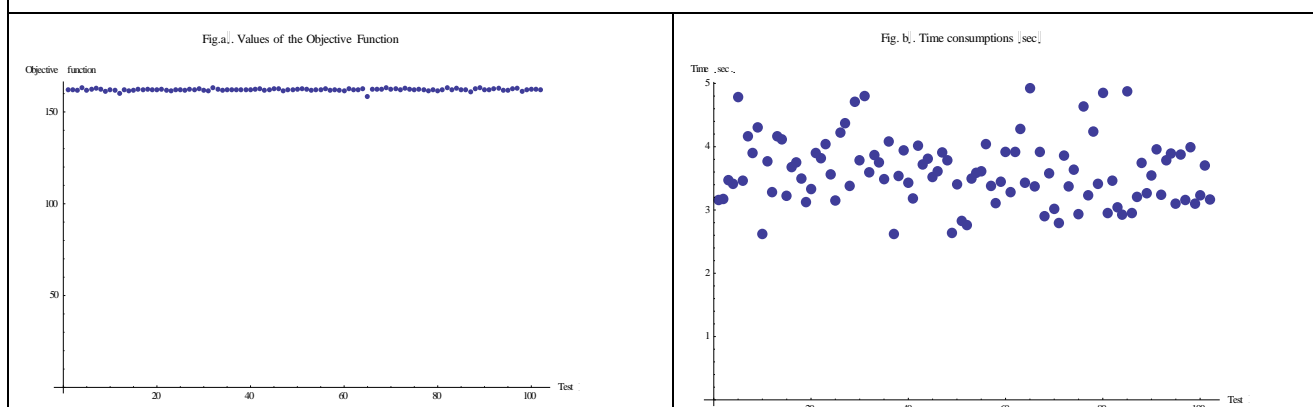
Группа испытаний №3: $m = 3$; $n = 30$; число проб (случайных начальных точек) = 102
 Среднее значение целевой функции = 71.4129
 Максимальное значение ошибки (%) = 2.29083
 Время вычислений (сек.) :
 - минимальное = 0.6780388
 - максимальное = 1.1900680
 - среднее = 0.8960513



Группа испытаний №4: $m = 6$; $n = 30$; число проб (случайных начальных точек) = 102
 Среднее значение целевой функции = 89.4687
 Максимальное значение ошибки (%) = 3.06084
 Время вычислений (сек.) :
 - минимальное = 1.5130866
 - максимальное = 2.9891709
 - среднее = 2.1051890



Группа испытаний №5: $m = 6$; $n = 50$; число проб (случайных начальных точек) = 102
 Среднее значение целевой функции = 162.135
 Максимальное значение ошибки (%) = 3.01693
 Время вычислений (сек.) :
 - минимальное = 2.6181498
 - максимальное = 4.9252817
 - среднее = 3.6081083



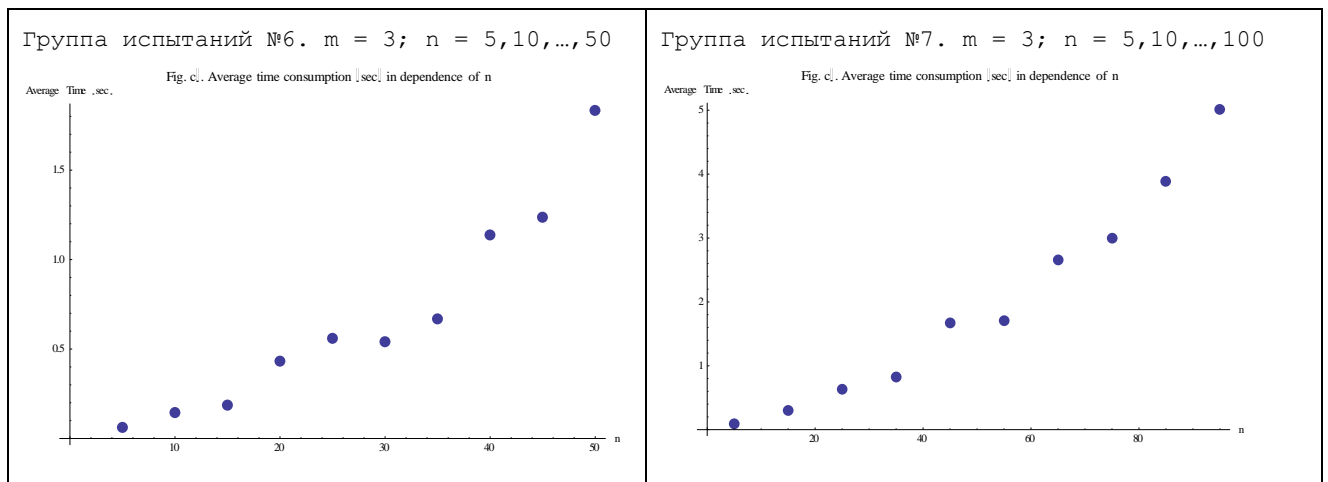
Цель проведения второй серии тестов состояла в экспериментальном исследовании зависимости среднего времени решения задачи от размерностей m и n (изменяемых поочередно или одновременно). В качестве начальной точки во

всех тестах второй серии выбиралось начало координат (т.е. недопустимая точка). Для наглядности были построены графики исследуемых величин. Абсциссы точек на графиках соответствуют значению изменяемого параметра (m или n), а ординаты – времени, затраченному на решению задачи при соответствующем значении указанного параметра.

Результаты второй серии экспериментов приведены в Таблице 2.

Таблица 2.

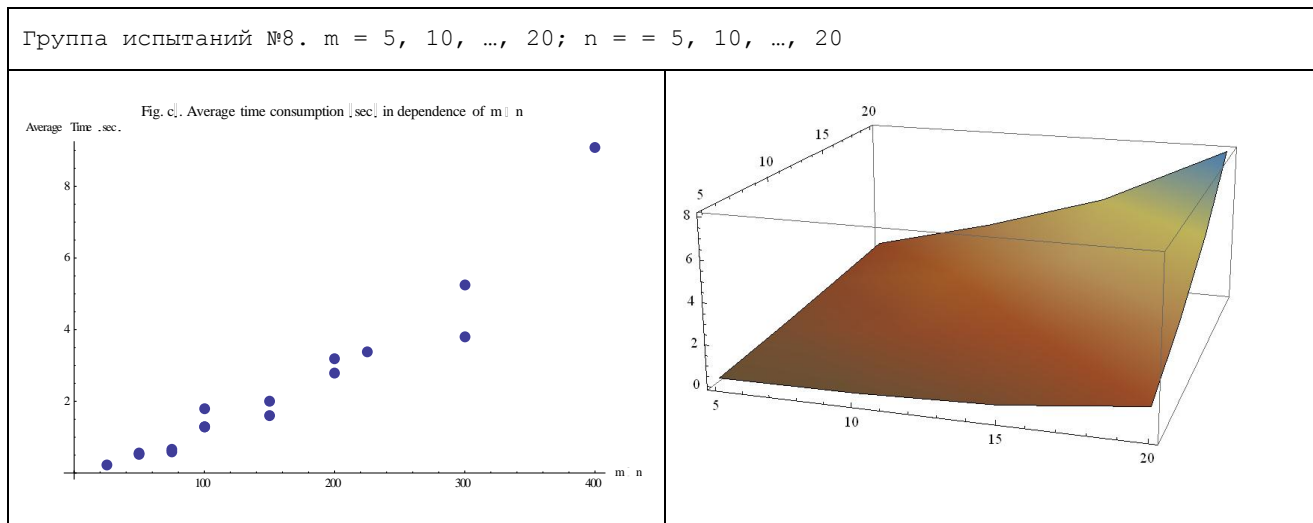
Зависимость среднего времени решения задачи от параметра m
(при фиксированном n)



Как видно из результатов экспериментов, приведённых в Таблице 2, при фиксированном значении параметра m время работы метода обнаруживает близкую к линейной зависимость от значений параметра n . Экспериментально был подтверждён аналогичный характер зависимости затрат времени от значений параметра m при фиксированном n .

В третьей серии испытаний параметры m и n изменялись одновременно. В Таблице 3 приведены графики отражающие зависимость времени решения задачи от величины произведения mn (левый рисунок) и от обоих параметров, одновременно изменяющихся в диапазоне $[0, 20]$.

Поведение времени решения задачи
при одновременном изменении параметров m и n



Выводы

Как показывают полученные результаты, описанный подход применим для решения задачи (1) – (4) при приемлемой размерности задачи. Вычисленное приближённое значения оптимума целевой функции слабо чувствительно к выбору точки начального приближения, однако время решения задачи с разными начальными точками может отличаться в несколько раз. Экспериментально показано, что тенденция возрастания времени решения задачи относительно параметров m и n , изменяющихся по отдельности, близка к линейной, при одновременном изменении параметров эта зависимость носит более сложный характер и нуждается в дальнейшем исследовании.

Литература

1. Monge G. Mémoire sur la théorie des déblais et de remblais. Histoire de l'Académie Royale des Sciences de Paris, avec les Mémoires de Mathématique et de Physique pour la même année, pages 666 – 704, 1781.
2. Канторович Л.В. О перемещении масс // ДАН СССР. – 1942. - Т. 37. - № 7 – 8. - С. 227 – 229.

3. Канторович Л.В., Гавурин М.К. Применение математических методов в вопросах анализа грузопотоков // Проблемы повышения эффективности работы транспорта: сборник статей. – М.: Изд-во АН СССР, 1949. - С. 110 – 138.
4. Koopmans, T.C. Optimum Utilization of the Transportation System. // *Econometrica* (Suppl.). – 1949. - №17. - Pp.136 – 146.
5. Юдин Д.Б., Гольштейн Е.Г. Задачи и методы линейного программирования. - М: Советское радио, 1961. – 494 с.
6. Гольштейн Е.Г., Юдин Д.Б. Новые направления в линейном программировании. - М.: Советское радио, 1966. – 524 с.
7. Коннов И.В. Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2013. – 508 с.
8. Акулич И.Л. Математическое программирование в примерах и задачах. – М.: Высшая школа, 1986. – 319 с.
9. Кашина О.А., Кораблёв А.И. Методы оптимизации. Часть II. Численные методы решения экстремальных задач. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2011. – 144 с.

Konnov, I.V., Doctor of Sciences (Mathematics u Physics), Associate Professor of Institute of Computer Mathematics u Information Technologies, Kazan Federal University

Kashina, O.A, Candidate of Sciences (Mathematics u Physics), Associate Professor of Institute of Computer Mathematics u Information Technologies, Kazan Federal University

THE OPEN TRANSPORTATION PROBLEM AND ITS APPLICATIONS IN OPTIMIZATION OF THE NETWORK FLOW DISTRIBUTION AND PRODUCTION AND SALES TAKING INTO ACCOUNT TRANSPORTATION COSTS

Abstract: In this paper we study one modification of the transportation problem which is well known in the mathematical theory of extremum problems, namely, the open transportation problem with bilateral restrictions on variables. We consider two interpretations of the mentioned model. The first one is connected with the optimal flow distribution in wireless networks. The second interpretation consists in the optimal planning of production and sales of some commodity, taking into account transportation costs. We prove the relevance of the development of approximate solution methods for the stated problem, despite the existence of finite algorithms. Among the

main reasons for this we mention the high dimensionality of the problem, perturbations of coefficients of the objective function and constraints, the possible emptiness of the feasible solution set, variability of initial data, and time limitations for obtaining an acceptably accurate solution. We propose an approach to the problem solution based on the use of the penalty function method, describe results of numerical tests, and discuss the directions of future research.

Keywords: optimization; transportation problem; wireless network; mobile nodes; provider; connection; flow; one-commodity production-sales problem; transportation costs; penalty function; quadratic penalty; penalty function method; projection; gradient projection method.