

УДК 535.2

## ЧИСЛЕННОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ ФОТОННОГО ЭХА В ДВУХУРОВНЕВОЙ СРЕДЕ

*А.Д. Тиранов, К.Р. Каримуллин, В.В. Самарцев*

### Аннотация

В данной работе промоделирован процесс генерации сигнала фотонного эха в примесном кристалле (на примере рубина). Построена математическая модель взаимодействия электромагнитного излучения с системой двухуровневых атомов на основе уравнений Максвелла – Блоха, которые можно свести к системе дифференциальных уравнений в частных производных. Для численного решения полученной системы использовался метод прогноза и коррекции на основе модифицированного метода Эйлера. Разработана программа и рассчитан отклик двухуровневой системы (рубина) на воздействие двух последовательных импульсов.

**Ключевые слова:** фотонное эхо, уравнения Максвелла – Блоха, численное моделирование, самоиндуцированная прозрачность, рубин.

### Введение

Фотонное эхо [1] является когерентным оптическим откликом резонансной среды на воздействие двух и более разнесенных во времени лазерных импульсов, длительность которых меньше времен продольной  $T_1$  и поперечной  $T_2$  необратимой релаксации среды. На сегодняшний день фотонное эхо представляет интерес во многих областях научных исследований и техники. В спектроскопии фотонное эхо стало основой принципиально нового её направления – оптической эхоспектроскопии. Данный метод исследования представляет собой мощный инструмент для изучения переходных процессов в упорядоченных (кристаллы) и неупорядоченных (газы, стёкла, полимеры) средах [2]. Оптическая эхо-спектроскопия позволяет достаточно просто измерять времена необратимых и обратимых релаксаций, то есть определять неоднородную и однородную ширины спектральных линий, получать информацию о сверхтонких и суперсверхтонких взаимодействиях, а также о других характеристиках исследуемых сред. С точки зрения технических приложений представляет особый интерес тот факт, что некоторые резонансные среды, в частности кристаллы, допированные редкоземельными ионами, обладают уникально большими временами оптической фазовой «памяти». Это замечательное свойство примесных кристаллов лежит в основе функционирования оптических запоминающих устройств большой ёмкости и высокопроизводительных процессоров на основе фотонного эха [3].

Помимо непосредственного экспериментального изучения различных процессов, весьма эффективным методом исследования является их численное моделирование, то есть проведение вычислительных экспериментов. Особенно полезным это может оказаться в условиях, когда проведение «прямого» эксперимента затруднено или связано с большими затратами технических средств и времени. Моделирование позволяет проводить оптимизацию многопараметрических задач, связанных с нахождением эффективных значений параметров, характеризующих сложную

систему. Математические модели, описывающие взаимодействие оптического излучения с резонансной средой, строятся на основе нелинейных систем уравнений в частных производных. В частном случае они могут быть сведены к уравнениям гиперболического типа. Такая система может быть решена численными методами [4]. Для теоретического описания когерентных процессов обычно используются полуклассические уравнения Максвелла–Блоха. Самосогласованное решение указанных уравнений позволяет промоделировать когерентные переходные процессы в активированных кристаллах, в том числе описать явление фотонного эха.

### 1. Условия возбуждения когерентных откликов

Возбуждение в резонансной среде когерентных откликов требует выполнения ряда условий: 1) взаимодействие лазерных импульсов со средой должно носить когерентный и резонансный характер; 2) времена формирования откликов должны быть меньше времён необратимых релаксаций, то есть длительности импульсов и промежутки времени между ними должны удовлетворять неравенствам  $\Delta t < T_1$ ,  $\tau < T_2$ ; 3) должны выполняться условия пространственного синхронизма и определенные требования к поляризации возбуждающих импульсов в зависимости от типа резонансного перехода. Для корректной интерпретации оптических эхо-откликов весьма важно уменьшить дифракционные потери. Малость дифракционных потерь обеспечивается выполнением неравенства  $d < 2(\lambda l)^{1/2}$ , где  $d$  – диаметр лазерного пучка возбуждающих импульсов,  $\lambda$  – длина волны возбуждающего света,  $l$  – длина образца.

Для регистрации когерентных откликов определенные требования накладываются на чувствительность аппаратуры: она должна быть достаточно высокой, чтобы можно было не только фиксировать, но и исследовать оптические когерентные эхо-сигналы при изменении условий эксперимента. При рассмотрении взаимодействия световых импульсов с резонансной средой, под которой понимается система одинаковых атомов распределенных в некотором объеме (например, примесные атомы в узлах кристаллической решетки), расчёты основываются на следующих допущениях.

1. Оптические центры не взаимодействуют между собой. Это означает, что мы можем рассматривать эволюцию каждого атома в отдельности, задавая его состояние одночастичной матрицей плотности.

2. Оптическое возбуждение является когерентным по всему объему образца.

3. Учитывается изменение формы импульса при прохождении через резонансную среду, то есть считается, что реакция среды на внешнее поле деформирует импульс. Предполагается, что  $\alpha L > 1$ , где  $\alpha = 4\pi^2\omega N T_2^* |\mu|^2 / \hbar v$  – коэффициент резонансного поглощения света (здесь  $N$  – концентрация резонансных частиц,  $v$  – фазовая скорость света в среде,  $\omega$  – частота оптического перехода,  $\mu$  – дипольный момент перехода,  $T_2^*$  – время обратимой поперечной релаксации).

4. Импульсы возбуждения представляют собой плоские волны, распространяющиеся в среде с постоянным показателем преломления.

5. Положение оптического центра (иона примеси) в пространстве и его частота в пределах неоднородно уширенной оптической линии не меняются со временем и являются статистически независимыми величинами. Поэтому резонансная среда характеризуется функцией распределения атомов по частоте оптического перехода и функцией распределения их по координатам.

6. Оптический центр представляет собой двухуровневую систему. Подобная идеализация справедлива, если рассматриваемые два уровня реальной системы имеют частоту перехода, совпадающую с частотой возбуждения (или близкую к ней),

а остальные уровни энергии расположены так, что частоты переходов между ними (либо между ними и одним из выбранных уровней) существенно отличаются от несущей частоты.

7. Взаимодействие электромагнитного поля с двухуровневым атомом рассматривается в электродипольном приближении, то есть оператор взаимодействия может быть представлен в виде  $V = -\vec{\mu}\vec{E}$ .

## 2. Модель взаимодействия электромагнитного поля с двухуровневой системой

Существуют различные методы описания взаимодействия лазерного излучения с веществом. В простейшем случае можно рассмотреть взаимодействие плоских электромагнитных волн с двухуровневой системой. При таком полуклассическом описании излучение представляется в виде классических световых волн, а вещество – в виде атомного коллектива, описываемого соответствующими волновыми функциями. Как и в классическом случае, будем считать, что возбуждающее электрическое дипольное излучение распространяется вдоль оси  $z$ . Для рассмотрения широкого класса эффектов достаточно использовать одномерное волновое уравнение вида

$$\left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{n^2}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} - \frac{4\pi\sigma}{c^2} \frac{\partial}{\partial t} \right) E(z, t) = \frac{4\pi}{c^2} \frac{\partial^2}{\partial t^2} P(z, t), \quad (1)$$

где  $E(z, t)$  – напряженность электрического поля,  $P(z, t)$  – поляризованность среды,  $\sigma$  – проводимость среды,  $c$  – скорость света,  $n$  – показатель преломления среды. Оптический импульс мы будем представлять в виде волнового пакета:

$$E(z, t) = E_0(z, t) \exp[-i(\omega_0 t - k_0 z) + \phi(t)], \quad (2)$$

где  $\omega_0$  и  $k_0$  – волновой вектор и частота волнового поля импульса соответственно,  $E_0(z, t)$  и  $\phi(t)$  – его амплитуда и фаза. При взаимодействии атомной системы с электромагнитным полем в общем случае точную волновую функцию определить невозможно, поэтому используется метод матрицы плотности  $\hat{\rho}$  [5]. Представив взаимодействие электромагнитного поля с двухуровневым атомом в электродипольном приближении и используя формализм матрицы плотности, можно получить систему уравнений [4]:

$$\begin{aligned} \frac{\partial E_0^\pm}{\partial z} + \frac{n}{c} \frac{\partial E_0^\pm}{\partial t} + \frac{c\chi}{2n} E_0^\pm &= \mp \frac{2\pi i \omega_0}{nc} P^\pm, \\ \frac{\partial R^\pm}{\partial t} &= \left( -\frac{1}{T_2} \pm i\Delta \right) R^\pm \pm \frac{2i\mu}{\hbar} E_0^\pm Z, \\ \frac{\partial Z}{\partial t} &= -\frac{1}{T_1} Z + \frac{i\mu}{\hbar} (E_0^- R^+ - E_0^+ R^-), \end{aligned} \quad (3)$$

где  $\chi = 4\pi\sigma/c^2$ ,  $Z = (\rho_{aa} - \rho_{bb})/2$  – инверсия населенностей,  $R^+ = \rho_{ab} \exp[i(\omega t - kz)]$ ,  $R^- = \rho_{ba} \exp[i(\omega t - kz)]$ ,  $P^\pm = \mu N \int d(\Delta) G(\Delta) R^\pm$  – поляризованность среды с учетом неоднородного уширения,  $E_0^\pm$  – амплитуда волны, распространяющейся вдоль и против оси  $z$ ,  $\Delta = \omega - \omega_0$  – расстройка,  $N$  – число атомов в единице объема,  $G(\Delta)$  – функция распределения параметра расстройки.

Для удобства численного моделирования приведем систему (3) к безразмерному виду, а также введем запаздывающее время  $T = t - nz/c$ . Перейти к безразмерным переменным можно путём следующей замены:

$$\Omega = \frac{\mu}{\hbar} \sqrt{2\pi N \hbar \omega_0}, \quad E_0^\pm = \pm \frac{i\hbar}{n\mu} \Omega A^\pm, \quad \xi = \frac{z\Omega}{c}, \quad \tau = \frac{T}{n} \Omega.$$

Величина  $\Omega$  является константой взаимодействия атомной системы с электромагнитным полем и имеет смысл частоты Раби для максимально возможного поля. В результате преобразований получим систему уравнений:

$$\begin{aligned}\frac{\partial A^\pm}{\partial \xi} + \chi' A^\pm &= \int G(\Delta) R^\pm(\Delta) d\Delta, \\ \frac{\partial R^\pm}{\partial \tau} &= (-g_2 \pm i\Delta') R^\pm + 2A^\pm Z, \\ \frac{\partial Z}{\partial \tau} &= -g_1 Z - (A^- R^+ + A^+ R^-),\end{aligned}\tag{4}$$

где  $\chi' = c\chi/\Omega$ ,  $g_1 = n/T_1\Omega$ ,  $g_2 = n/T_2\Omega$ ,  $\Delta' = \Delta/\Omega$ .

### 3. Алгоритм численного решения уравнений Максвелла – Блоха

Для решения системы уравнений (4) использовался модифицированный метод Эйлера [6] на основе метода конечных разностей (или метода сеток). Суть данного метода состоит в следующем. Непрерывная область определения заменяется дискретным множеством точек (узлов), которое называется сеткой или решёткой (рис. 1). Вместо функций непрерывного аргумента рассматриваются функции дискретного аргумента, определённые в узлах сетки и называемые сеточными функциями. При этом все производные, входящие в уравнения (4) и граничные условия, заменяются разностными производными, а значения функций  $E_0^\pm(\xi, \tau)$ ,  $R^\pm(\xi, \tau, \Delta)$ ,  $Z(\xi, \tau, \Delta)$  вычисляются в узлах сетки. Таким образом, краевая задача для дифференциального уравнения заменяется системой линейных или нелинейных алгебраических уравнений (сеточных или разностных уравнений). Подобные системы уравнений или разностные схемы затем решаются относительно неизвестной сеточной функции.

Пусть шаги разбиения по длине и времени равны  $dt = dt_\xi = dt_\tau$ , тогда непрерывные переменные  $\xi = s dt$ ,  $t = j dt$ ,  $\tau = (j - s) dt$  и начальные условия будут задаваться при  $j = 0$ , то есть при  $\tau = -\xi$ , а граничные условия для поля – при  $s = 0$ . Процедура вычисления будет заключаться в определении функций по известным начальным и граничным условиям.

Используя линейную аппроксимацию по шагу интегрирования временной и пространственной производных, можно преобразовать систему уравнений (4) к системе рекуррентных соотношений. Тогда вычислительная процедура будет заключаться в многократном применении этих соотношений. На первом шаге итерации  $j = 0$  вычисляется поле в точке  $(s + 1, -s)$ , инверсия и поляризация – в точке  $(s, 1 - s)$  по известным значениям этих величин в начальный момент времени  $(s, -s)$ , где  $s$  пробегает значения от 0 до  $N_L$  ( $L = N_L dt$  – длина образца). Для повышения точности интегрирования использовалась квадратичная аппроксимация по шагу интегрирования и метод прогноза и коррекции [6], который основывается на определении сеточных функций на втором слое по времени или длине и в многократном уточнении этих вычисленных значений.

### 4. Результаты вычислительного эксперимента

На основе рассмотренной модели в пакете Matlab были созданы программы, позволяющие численно моделировать эффекты когерентного взаимодействия лазерных импульсов с двухуровневой резонансной средой. Для демонстрации возможностей численного моделирования явления фотонного эха на основе разработанных программ был проведен расчет когерентного отклика среды при последова-

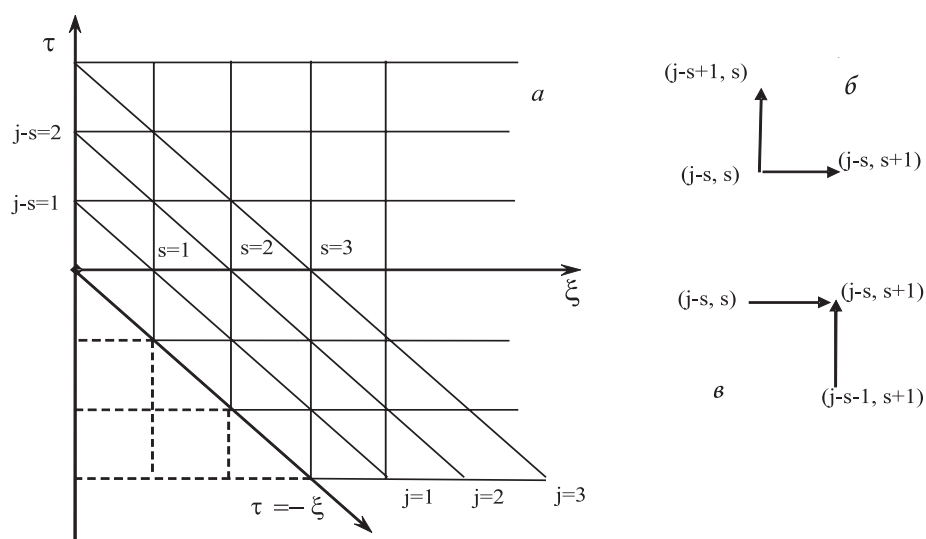


Рис. 1. а) Сеточная схема для системы уравнений Максвелла – Блоха, б) диаграмма сетки для метода Эйлера, в) диаграмма сетки для коррекции

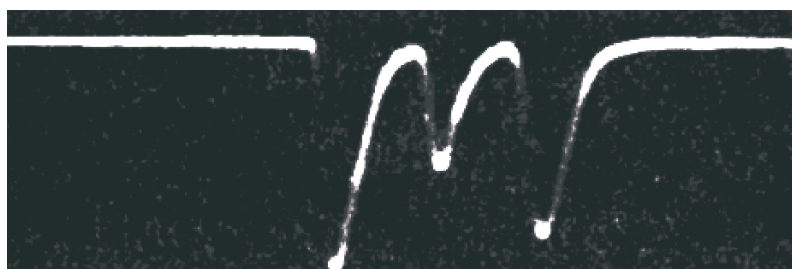


Рис. 2. Осциллограмма сигнала фотонного эха в рубине [1]. Время возрастает вправо. Первые два импульса возбуждают систему. Третий импульс справа является сигналом первичного фотонного эха. Импульсы ослаблены оптическим затвором

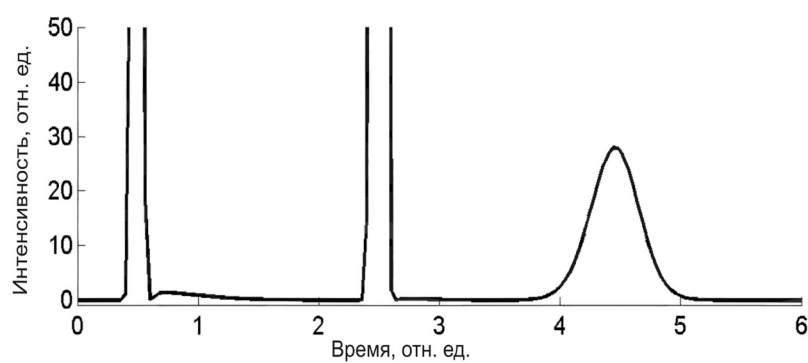


Рис. 3. Результаты моделирования явления первичного фотонного эха при  $L = 1 \text{ c}\Omega^{-1}$ ,  $1/T_2^* = 0.7 \Omega$ ,  $g_1 = g_2 = 0.004 \Omega$

тельном её возбуждении  $\pi/2$ - и  $\pi$ -импульсами. Интервал разбиения  $dt$  был оценен экспериментально. С этой целью было промоделировано явление самоиндуцированной прозрачности [7], то есть распространение  $2\pi$ -импульса в поглощающей среде. С использованием метода прогноза-коррекции было проведено сравнение точного и численного решений уравнений (4) при входном импульсе, имеющем вид гауссиана. Как показывает расчёт, устойчивость решения по исправленному методу Эйлера с применением метода прогноза-коррекции достигается при шаге разбиения  $dt = 0.01$ .

На рис. 2 приведена осциллограмма первичного фотонного эха в рубине, впервые полученная в работе [1]. Результаты расчета эхо-отклика двухуровневой системы на воздействие двух последовательных ( $\pi/2$  и  $\pi$ ) импульсов приведены на рис. 3. В качестве модельной резонансной среды был выбран рубин, параметры которого:  $n = 1.76$ ,  $\mu = 5 \cdot 10^{-21}$  CGSE,  $N = 10^{17}$  см $^{-3}$ ,  $T^* = 100$  пс,  $\Omega^{-1} = 70$  пс.

### Заключение

Математическая модель, описывающая взаимодействие лазерных импульсов с двухуровневой резонансной средой на основе уравнений Максвелла – Блоха, позволяет построить алгоритм для проведения численных расчетов. Разработанная при помощи этой модели программа адекватно описывает когерентные переходные процессы и позволяет проводить широкий круг вычислительных экспериментов.

Работа выполнена в рамках программ Президиума РАН «Квантовая физика конденсированных сред», ОФН РАН «Фундаментальная оптическая спектроскопия и её приложения» и «Фундаментальные основы акустической диагностики искусственных и природных сред», а также поддержана грантом Президента РФ для поддержки ведущих научных школ (НШ-2965.2008.2) и Российским фондом фундаментальных исследований (проекты № 08-02-00032а, 08-02-90001-Бел-а).

### Summary

*A.D. Tiranov, K.R. Karimullin, V.V. Samartsev.* Numerical Modelling of a Photon Echo in Two-Level Systems.

Simulation of photon echo-signal generation in impurity samples (ruby type) was carried out. The mathematical model of interaction of electromagnetic radiation with a system of two-level atoms based on Maxwell–Bloch equations has been constructed. For numerical solution of the received system the method of forecast and correction on the basis of modified Euler's method was used. The program realizing the computing experiment has been developed and calculation of the two-pulse photon echo in two-level system (ruby) has been carried out.

**Key words:** photon echo, Maxwell–Bloch equations, numerical modelling, self-induced transparency, ruby.

### Литература

1. *Kurnit N.A., Abella I.D., Hartmann S.R.* Observation of a photon echo // Phys. Rev. Lett. – 1964. – V. 13, No 19. – P. 567–568.
2. *Маныкин Э.А., Самарцев В.В.* Оптическая эхо-спектроскопия. – М.: Наука, 1984. – 270 с.
3. *Калачев А.А., Самарцев В.В.* Когерентные явления в оптике. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2003. – 281 с.
4. *Маликов Р.Ф.* Математическое моделирование кооперативных когерентных эффектов в оптике. – М.: Физматлит, 2008. – 192 с.

5. *Fano U.* Description of states in quantum mechanics by density matrix and operator techniques // *Rev. Mod. Phys.* – 1957. – V. 29, No 1. – P. 74–93.
6. *Самарский А.А. Гулин А.В.* Численные методы. – М.: Наука, 1989. – 240 с.
7. *McCall S.L., Hahn E.L.* Self-induced transparency // *Phys. Rev.* – 1969. – V. 183, No 2. – P. 457–485.

Поступила в редакцию  
02.02.09

---

**Тиранов Алексей Дмитриевич** – студент кафедры оптики и нанофотоники Казанского государственного университета.

E-mail: *ktiranov@gmail.com*

**Каримуллин Камиль Равкатович** – аспирант кафедры оптики и нанофотоники Казанского государственного университета, младший научный сотрудник лаборатории нелинейной оптики Казанского физико-технического института имени Е.К. Завойского КазНЦ РАН.

E-mail: *qamil@inbox.ru*

**Самарцев Виталий Владимирович** – доктор физико-математических наук, профессор, заведующий лабораторией нелинейной оптики Казанского физико-технического института имени Е.К. Завойского КазНЦ РАН.

E-mail: *samartsev@kfti.knc.ru*