

УДК 532.546

## ОБЩЕЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ОБ ЭВОЛЮЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ПУЗЫРЯ В ЛОТКЕ ХЕЛЕ-ШОУ

*М.М. Алимов*

### Аннотация

В предположении, что поле течения вязкой жидкости в щелевом лотке определяется произвольными гидродинамическими особенностями на бесконечности и действием капиллярных сил на межфазной границе можно пренебречь, изучается процесс эволюции пузыря в однофазной постановке. Показано, что эллиптический пузырь эволюционирует, оставаясь эллипсом, тогда и только тогда, когда поле течения определяется произвольной комбинацией из источника, диполя и квадруполя на бесконечности. Построенное точное решение задачи общего вида содержит все известные частные случаи. Помимо этого выявлен и неизвестный ранее случай о сносе эллиптического пузыря неизменной формы однородным в бесконечности потоком, когда пузырь ориентирован несимметрично относительно потока.

**Ключевые слова:** задача Хеле-Шоу, однофазная идеализированная постановка, эллиптический пузырь.

---

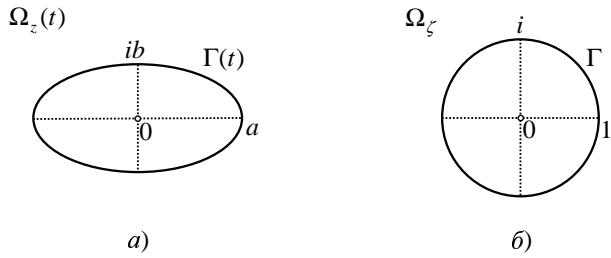
### Введение

Идеализированная задача Хеле-Шоу является математической моделью процесса эволюции границы раздела двух вязких жидкостей в щелевом лотке в случае пренебрежимо малых капиллярных сил [1]. Задача об эволюции пузыря в безграничном лотке представляет собой частный случай, при котором размеры лотка во всех направлениях в плане много больше размера пузыря. Динамика такого процесса полностью определяется начальной конфигурацией пузыря и заданными особенностями течения вязкой жидкости на бесконечности, где возможна комбинация особенностей различного типа [2, 3]. Для отдельных особенностей течения на бесконечности: источника [4], диполя [5], квадруполя [6] – имеются точные решения задачи об эволюции пузыря эллиптической формы. Цель настоящей работы – найти максимально общий вид особенностей течения в бесконечности, допускающий сохранение эллиптической формы пузыря.

### 1. Однофазная постановка задачи Хеле-Шоу

Течение вязкой жидкости в горизонтальном лотке Хеле-Шоу характеризуется законом Дарси  $\mathbf{v} = -\nabla p$ , который связывает скорость жидкости  $\mathbf{v}(x, y, t)$  и распределение давления  $p(x, y, t)$  в области  $\Omega_z(t)$  лотка, занятой жидкостью. С учетом несжимаемости жидкости задача Хеле-Шоу об эволюции границы раздела воздуха и жидкости в однофазной постановке формулируется в виде [1]

$$\Omega_z(t) : \Delta p = 0, \quad \Gamma(t) : p = 0, \quad -\frac{\partial p}{\partial n} = u_n, \quad (1)$$

Рис. 1. Вид физической плоскости  $z$  (а) и вспомогательной плоскости  $\zeta$  (б)

к которому необходимо еще добавить условия непроницаемости на заданных границах лотка, а также условие на бесконечности. Отметим, что на межфазной границе  $\Gamma(t)$  выполняются два условия. Первое условие, динамическое, означает, что давление в области, занятой воздухом однородно, а действием капиллярных сил на межфазной границе пренебрегается. Второе условие, кинематическое, означает, что межфазная граница материальна и нормальные составляющие скорости частиц жидкости, принадлежащих границе, определяют нормальную скорость движения самой границы  $u_n$ .

Выполнение уравнения Лапласа (1) делает целесообразным введение комплексной физической плоскости  $z = x + iy$  и комплексного потенциала течения жидкости  $W(z, t) = \varphi(x, y, t) + i\psi(x, y, t)$ , где  $\varphi(x, y, t) = -p(x, y, t)$  – потенциал течения, а  $\psi(x, y, t)$  – функция тока, гармонически сопряженная потенциальному  $\varphi(x, y, t)$  [2]. Тогда скорость течения жидкости можно вычислить по формуле

$$\Omega_z(t) : \mathbf{v}(x, y, t) = \nabla\varphi \Leftrightarrow V(\bar{z}, t) = \frac{\overline{\partial W}}{\partial z}, \quad (2)$$

где  $V(\bar{z}, t)$  – комплекснозначный аналог скорости  $\mathbf{v}(x, y, t)$ . Черта над объектом здесь и далее обозначает операцию комплексного сопряжения. Соответственно, условия на межфазной границе  $\Gamma(t)$  можно записать в виде

$$\Gamma(t) : \varphi = 0, \quad \frac{\partial\varphi}{\partial n} = u_n. \quad (3)$$

Отметим, что комплексный потенциал течения  $W(z, t)$  определяется с точностью до несущественной аддитивной функции времени. Поэтому нуль в правой части первого условия (3) может быть заменен на произвольную вещественную функцию времени [1, 5].

Ограничимся в дальнейшем случаем безграничного лотка (см. рис. 1, а). Тогда к условиям (3) надо добавить только условие для комплексного потенциала течения  $W(z, t)$  на бесконечности. В общем случае его можно сформулировать в виде линейной комбинации источника и полиполей [2, 3]

$$|z| \rightarrow \infty : W(z, t) \approx \frac{Q(t)}{2\pi} \ln z + \sum_{k=1}^K m_k(t) z^k. \quad (4)$$

Здесь  $Q(t)$  – вещественная функция времени, обозначающая суммарный расход жидкости, отбираемой ( $Q > 0$ ) или нагнетаемой ( $Q < 0$ ) на бесконечности;  $m_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, K$ , – комплекснозначные функции времени, обозначающие моменты полиполей на бесконечности.

Отметим, что обращение в бесконечность скорости течения жидкости  $\overline{\partial W/\partial z}$  при  $|z| \rightarrow \infty$  является следствием идеализации – предположения о безграничности

лотка. При переходе к реальному лотку большого, но конечного размера создать определенное течение Хеле-Шоу с потенциалом, отвечающим поведению (4), можно вполне конечными скоростями отбора или нагнетания жидкости по периферии лотка.

## 2. Уравнение Полубариновой-Галина для решений параметризованного вида

Основным инструментом анализа нестационарных краевых задач Хеле-Шоу в однофазной постановке является граничное эволюционное уравнение Полубариновой-Галина [7–9]. Для его получения целесообразно ввести вспомогательную плоскость комплексного переменного  $\zeta$ , в которой области  $\Omega_z(t)$  отвечает область  $\Omega_\zeta$  канонического вида – внешность единичного круга  $|\zeta| > 1$  (см. рис. 1, б). Эволюционирующей межфазной границе  $\Gamma(t)$  в каждый момент времени  $t$  отвечает окружность  $|\zeta| = 1$  в плоскости  $\zeta$ . Конформное отображение  $\Omega_\zeta \rightarrow \Omega_z(t)$  реализует аналитическая функция  $g(\zeta, t)$ ,

$$z = g(\zeta, t), \quad \frac{\partial g}{\partial \zeta} \neq 0, \infty, \quad \zeta \in \overline{\Omega}_\zeta, \quad (5)$$

которую можно нормировать следующим образом [10]

$$|\zeta| \rightarrow \infty : |g(\zeta, t)| \rightarrow \infty, \quad \arg \left( \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right) \rightarrow 0. \quad (6)$$

Известно, что краевая задача Хеле-Шоу (3), (4) сводится к граничному эволюционному уравнению Полубариновой-Галина общего вида [9, 11]

$$\zeta = e^{i\sigma} : \operatorname{Re} \left\{ \overline{\left( \frac{\partial g}{\partial t} \right)} \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right\} = \operatorname{Re} \left\{ \zeta \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right\}. \quad (7)$$

Уточним вид правой части в рассматриваемом нами случае. Поведение (4) на бесконечности функции  $W(z, t)$  позволяет оценить поведение на бесконечности функции  $W(\zeta, t)$ :

$$|\zeta| \rightarrow \infty : W(\zeta, t) \approx \frac{Q(t)}{2\pi} \ln \zeta + \sum_{j=1}^K C_j(t) \zeta^j, \quad (8)$$

где значения коэффициентов ряда  $C_k(t)$  определяются коэффициентами  $m_k(t)$ ,  $k = 1, \dots, K$  и поведением в бесконечности функции  $g(\zeta, t)$ . Тогда, учитывая условие  $\operatorname{Re} W = 0$  на границе круга  $\zeta = e^{i\sigma}$ , вытекающее из (3), можно полностью восстановить вид функции  $W(\zeta, t)$  [12]:

$$W(\zeta, t) = \frac{Q(t)}{2\pi} \ln \zeta + \sum_{j=1}^K [C_j(t) \zeta^j - \overline{C}_j(t) \zeta^{-j}] \quad (9)$$

и найти вид правой части уравнения Полубариновой-Галина (7)

$$\operatorname{Re} \left\{ \zeta \frac{\partial W}{\partial \zeta} \right\} = \zeta \frac{\partial W}{\partial \zeta} = \frac{Q(t)}{2\pi} + \sum_{j=1}^K j [C_j(t) \zeta^j + \overline{C}_j(t) \zeta^{-j}]. \quad (10)$$

В отличие от рассмотренного ранее случая единственной особенности на бесконечности – источника [13], когда правая часть уравнения (7) является заданной

константой  $Q(t)/(2\pi)$ , здесь правая часть выражается через коэффициенты  $C_k(t)$ , которые зависят от поведения искомой функции  $g(\zeta, t)$  в бесконечности.

Для конструктивного анализа задачи (7), (10) зададимся определенным параметрическим представлением функции  $g(\zeta, t)$ , более узким по сравнению с используемым в работе [13]:

$$g(\zeta, t) = \sum_{n=0}^N B_n(t) \zeta^{1-n}, \quad (11)$$

где  $B_0(t)$  – вещественная и положительно определенная функция времени ввиду нормировки (6), а  $B_n(t)$ ,  $n = 1, \dots, N$ , – комплекснозначные функции времени. Таким образом, эволюция межфазной границы определяется вектором неизвестных  $\{B_n(t), n = 0, \dots, N\}$  параметрического представления (11).

### 3. Конструктивный анализ уравнения Полубариновой-Галина

Для построения решений уравнения (7) используется как метод моментов [6, 14], так и метод функции Шварца [9, 15]. Воспользуемся последним методом, с оговоркой, что саму функцию Шварца вводить не будем, а ограничимся только введением оператора  $P$ , действие которого сводится к операции сопряжения по параметрам функции и замене ее аргумента  $\zeta$  на  $\zeta^{-1}$  [9, 11]:

$$\zeta = e^{i\sigma} : \overline{g(\zeta, t)} = P[g(\zeta, t)]. \quad (12)$$

В результате уравнение Полубариновой-Галина (7) с учетом (10) можно представить в виде

$$P \left[ \frac{\partial g}{\partial t} \right] \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} + P \left\{ P \left[ \frac{\partial g}{\partial t} \right] \zeta \frac{\partial g}{\partial \zeta} \right\} = \frac{Q(t)}{\pi} + 2 \sum_{j=1}^K j [C_j(t) \zeta^j + \overline{C}_j(t) \zeta^{-j}], \quad (13)$$

где  $\zeta = e^{i\sigma}$ . Далее используем основную идею метода функции Шварца – распространим действие этого уравнения с границы  $\Gamma$ :  $|\zeta| = 1$  в плоскости  $\zeta$  на всю плоскость. Учитывая параметрическое представление (11), получим эволюционное уравнение для вектора неизвестных  $\{B_n(t), n = 0, \dots, N\}$

$$\begin{aligned} \left( \sum_{n=0}^N \dot{\overline{B}}_n \zeta^n \right) \sum_{n=0}^N (1-n) B_n \zeta^{-n} + \left( \sum_{n=0}^N \dot{B}_n \zeta^{-n} \right) \sum_{n=0}^N (1-n) \overline{B}_n \zeta^n = \\ = \frac{Q}{\pi} + 2 \sum_{j=1}^K j [C_j \zeta^j + \overline{C}_j \zeta^{-j}], \end{aligned} \quad (14)$$

где точки над переменными обозначают производные по времени. Поскольку в правой части уравнения стоит не константа, а полином по степеням  $\zeta$ , непосредственно использовать теорему Лиувилля аналогично работам [11, 13] нельзя. Целесообразнее использовать простые соображения симметрии уравнения (14) по положительным и отрицательным степеням  $\zeta$ .

Приравняем сомножители при одинаковых степенях  $\zeta$  слева и справа, в результате чего получим систему обыкновенных дифференциальных уравнений относительно вектора неизвестных  $\{B_n(t), n = 0, \dots, N\}$ . На первый взгляд представляется, что полученная система будет переопределена, поскольку число неизвестных равно  $N+1$ , а число уравнений составляет  $2N+1$ . На самом деле независимых уравнений в системе будет равно  $N+1$  по числу, скажем, неотрицательных степеней  $\zeta$ , а оставшиеся  $N$  будут выполняться автоматически в силу инвариантности

уравнения Полубариновой-Галина относительно преобразования  $P$  [11]. Необходимым условием существования такого решения, очевидно, является неравенство  $K \leq N$ .

Заметим, что полученное таким образом математическое решение задачи может оказаться нефизичным, поскольку сингулярности отображающей функции  $g(\zeta, t)$ , а точнее, нули производной  $\partial g / \partial \zeta$ , могут попасть в замыкание области  $\Omega_\zeta$ , в результате чего область  $\Omega(t)$  окажется неоднолистной. Однако в начальный момент времени  $t = 0$  всегда есть возможность подобрать значения параметров  $\{B_n(0), n = 0, \dots, N\}$  так, чтобы нули производной  $\partial g / \partial \zeta$  лежали вне замыкания области  $\Omega_\zeta$ . Далее они будут оставаться вне этого замыкания либо всегда, либо по непрерывности еще некоторое время до момента  $t_*$  раз渲ала классического решения задачи, когда один из нулей производной  $\partial g / \partial \zeta$  коснется границы  $\zeta = e^{i\sigma}$  [16]. В этот момент на межфазной границе  $\Gamma(t)$  образуется заострение, в котором скорость течения обращается в бесконечность, аналогично решению для кардиоиды [7].

Предложенный метод эффективен для любого конечного  $N$ , однако объем выкладок быстро растет с ростом  $N$ . Далее более подробно проанализируем достаточно простой и содержательный случай  $N = 2$ .

#### 4. Общее решение уравнения (14) в случае $N = 2$

Под *общим* решением задачи понимается решение, полученное при максимально произвольном виде особенности на бесконечности, в данном случае при  $K = 2$ , и произвольном виде функций, отвечающих моментам  $Q(t)$ ,  $m_1(t)$ ,  $m_2(t)$  соответствующих полиполей. Заметим, что после установления этого факта нельзя получить общее решение как суперпозицию частных решений [4–6], поскольку задача Хеле-Шоу нелинейна в силу наличия нестационарной свободной границы. Воспользуемся методикой разд. 3.

Для  $N = 2$  отображающая функция  $z = g(\zeta, t)$  представляется в виде

$$g(\zeta, t) = B_0(t)\zeta + B_1(t) + \frac{B_2(t)}{\zeta}, \quad (15)$$

где  $B_0(t)$  – вещественная и положительно определенная, а  $B_1(t)$ ,  $B_2(t)$  – вообще говоря, комплекснозначные функции времени. Какими бы ни были эти функции, в плоскости  $z$  контур  $\Gamma(t)$ , отвечающий окружности  $\zeta = e^{i\sigma}$ , всегда будет оставаться эллипсом. Чтобы убедиться в этом, введем обозначение

$$\beta(t) = \frac{1}{2} \arg B_2(t) \quad (16)$$

и, выбрав  $\sigma \in [0, 2\pi]$  в качестве параметра, найдем параметрическое уравнение контура  $\Gamma(t)$ :

$$\begin{aligned} \forall t \quad \Gamma(t) : \quad & X(\sigma) + iY(\sigma) = B_1(t) + \\ & + e^{i\beta(t)} \{ [B_0(t) + |B_2(t)|] \cos [\sigma - \beta(t)] + i [B_0(t) - |B_2(t)|] \sin [\sigma - \beta(t)] \}. \end{aligned} \quad (17)$$

Очевидно, что это – уравнение эллипса, геометрический центр которого лежит в точке  $Z_C(t) = B_1(t)$ , большая полуось величины  $a(t) = B_0(t) + |B_2(t)| > 0$  составляет с осью  $x$  угол  $\beta(t) \in [-\pi/2, \pi/2]$ , а величина малой полуоси равна  $b(t) = B_0(t) - |B_2(t)|$ . При этом условие

$$|B_2(t)| < B_0(t) \quad (18)$$

фактически является условием однолистности области  $\Omega(t)$ , обеспечивающим отсутствие нулей производной  $\partial g/\partial\zeta$  в замыкании области  $\Omega_\zeta$ . Можно также найти выражение для эксцентриситета эллипса

$$\varepsilon(t) = \sqrt{1 - \frac{b^2(t)}{a^2(t)}} = 2 \left( \left| \frac{B_0(t)}{B_2(t)} \right|^{1/2} + \left| \frac{B_2(t)}{B_0(t)} \right|^{1/2} \right)^{-1}. \quad (19)$$

Без потери общности можно принять  $B_1(0) = 0$  и  $\arg B_2(0) = 2\beta(0) = 0$ . Это означает, что геометрический центр эллипса и ориентация его большой полуоси в начальный момент времени выбираются за начало системы координат  $x$ ,  $y$  и направление оси  $x$  соответственно.

Согласно формуле (4) поведение течения в бесконечности определяется комбинацией из источника мощности  $Q(t)$ , диполя и квадрополя, ориентацию и интенсивность которых определяют моменты  $m_1(t)$  и  $m_2(t)$ :

$$|z| \rightarrow \infty : W(z, t) \approx \frac{Q(t)}{2\pi} \ln z + m_1(t)z + m_2(t)z^2. \quad (20)$$

Подставляя сюда формулу (15), легко найдем вид коэффициентов  $C_k(t)$ :

$$C_1(t) = [m_1(t) + 2m_2(t)B_1(t)]B_0(t), \quad C_2(t) = m_2(t)B_0^2(t), \quad (21)$$

определяющих поведение функции  $W(\zeta, t)$  в бесконечности (см. формулу (8)) и вид самой функции (см. формулу (9)).

В результате уравнение Полубариновой-Галина (14) примет вид

$$\begin{aligned} \left( \dot{B}_0 + \dot{\overline{B}}_1\zeta + \dot{\overline{B}}_2\zeta^2 \right) \left[ B_0 - \frac{B_2}{\zeta^2} \right] + \left( \dot{B}_0 + \frac{\dot{B}_1}{\zeta} + \frac{\dot{B}_2}{\zeta^2} \right) \left[ B_0 - \overline{B}_2\zeta^2 \right] = \\ = \frac{Q}{\pi} + 2 \left[ C_1\zeta + \frac{\overline{C}_1}{\zeta} \right] + 4 \left[ C_2\zeta^2 + \frac{\overline{C}_2}{\zeta^2} \right]. \end{aligned} \quad (22)$$

Выписывая коэффициенты при одинаковых неотрицательных степенях  $\zeta$  в левой и правой частях уравнения (22) и приравнивая их, получим систему трех обыкновенных дифференциальных уравнений

$$\begin{aligned} \dot{\overline{B}}_2(t)B_0(t) - \dot{B}_0(t)\overline{B}_2(t) &= 4C_2(t), & \dot{\overline{B}}_1(t)B_0(t) - \dot{B}_1(t)\overline{B}_2(t) &= 2C_1(t), \\ 2\dot{B}_0(t)B_0(t) - \dot{\overline{B}}_2(t)B_2(t) - \dot{B}_2(t)\overline{B}_2(t) &= Q(t)/\pi. \end{aligned}$$

После подстановки вместо  $C_k(t)$  выражений (21) и элементарных преобразований система приводится к такому виду:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \left[ \frac{\overline{B}_2(t)}{B_0(t)} \right] &= 4m_2(t), & \frac{d}{dt} \left[ B_0^2(t) - |B_2^2(t)| \right] &= \frac{Q(t)}{\pi}, \\ \frac{d}{dt} \left[ \overline{B}_1(t) - \frac{B_1(t)\overline{B}_2(t)}{B_0(t)} \right] &= 2m_1(t). \end{aligned}$$

Очевидно, все уравнения этой системы пригодны к прямому интегрированию, в результате которого найдем искомые функции  $B_k(t)$ :

$$B_0(t) = \sqrt{\frac{F_0(t)}{1 - |F_2(t)|^2}}, \quad B_1(t) = \frac{F_1(t)\overline{F}_2(t) + \overline{F}_1(t)}{1 - |F_2(t)|^2}, \quad \frac{B_2(t)}{B_0(t)} = \overline{F}_2(t). \quad (23)$$

Здесь были использованы обозначения

$$\begin{aligned} F_0(t) &= \frac{1}{\pi} \int_0^t Q(t) dt + B_0^2(0) - B_2^2(0), \\ F_1(t) &= 2 \int_0^t m_1(t) dt, \quad F_2(t) = 4 \int_0^t m_2(t) dt + \frac{B_2(0)}{B_0(0)}, \end{aligned} \tag{24}$$

причем  $F_0(t)$ , очевидно, всегда вещественно, а  $F_1(t)$ ,  $F_2(t)$ , вообще говоря, комплекснозначны.

Отметим следующие важные свойства найденного общего решения (15), (20), (23), (24) однофазной задачи Хеле-Шоу в случае  $N = 2$ .

1. Изменение площади эллипса определяется только законом изменения мощности  $Q(t)$  источника (стока) на бесконечности

$$\pi a(t)b(t) - \pi a(0)b(0) = \int_0^t Q(t) dt, \tag{25}$$

что согласуется с соображениями материального баланса.

2. Момент  $m_1(t)$  диполя на бесконечности в физической плоскости оказывает влияние только на положение геометрического центра эллипса  $Z_C(t) = B_1(t)$ .

3. Изменение ориентации главных осей эллипса (см. формулу (15)) и его эксцентриситета (см. формулу (16)) определяется только моментом  $m_2(t)$  квадруполя на бесконечности в физической плоскости.

4. При фиксированной мощности момента  $m_2(t)$  решение задачи существует только для конечных времен  $t \in [0, t_*]$ , как и в случае наличия отдельного квадруполя в бесконечности [6]. Действительно, из третьей формулы (19) следует, что величина  $|F_2(t)|$  достигает значения 1 за конечное время, которое обозначается как  $t_*$ . В этот момент эксцентриситет эллипса достигает значения 1, что соответствует пределу  $a(t) \rightarrow \infty$ ,  $b(t) \rightarrow 0$ . Если момент  $m_1(t)$  при этом отличен от нуля, то  $|B_1(t)| \rightarrow \infty$ , то есть геометрический центр эллипса также уходит на бесконечность.

## 5. Анализ решения в частных случаях

Рассмотрим простейшие частные случаи найденного общего решения для  $N = 2$ , отличающиеся типом особенности на бесконечности.

**5.1. Источник.** На бесконечности в физической плоскости задается только источник интенсивности  $Q(t)$ , то есть  $m_1(t) = m_2(t) = 0$ . Решение полностью соответствует решению [4]: эллиптический пузырь растет самоподобно, то есть без изменения эксцентриситета и положения геометрического центра.

**5.2. Диполь постоянной мощности.** На бесконечности в физической плоскости задается только диполь, момент которого фиксирован, то есть  $m_1(t) = m_1^o$ ,  $Q(t) = m_2(t) = 0$ . Тогда из всех  $F_k(t)$  только  $F_1(t)$  будет линейной функцией времени, остальные будут вещественными константами

$$F_1(t) = 2m_1^o t, \quad F_0 = B_0^2(0) - B_2^2(0), \quad F_2 = B_2(0)/B_0(0).$$

Соответственно, из всех  $B_k(t)$  линейной функцией времени будет только  $B_1(t) = Ut$ , остальные будут совпадать со своими начальными значениями. Чрез  $U$  обозначена скорость поступательного движения пузыря

$$U = 2B_0(0) \frac{m_1^o B_2(0) + \bar{m}_1^o B_0(0)}{B_0^2(0) - B_2^2(0)}. \quad (26)$$

Далее, используя формулы (21), найдем коэффициенты  $C_k(t)$ :

$$C_1 = m_1^o B_0(0), \quad C_2 = 0.$$

В результате восстанавливается вид комплексного потенциала

$$W(\zeta) = B_0(0) \left( m_1^o \zeta - \frac{\bar{m}_1^o}{\zeta} \right) \quad (27)$$

и отображающей функции  $z = g(\zeta, t)$

$$g(\zeta, t) = B_0(0)\zeta + \frac{B_2(0)}{\zeta} + Ut, \quad (28)$$

что позволяет восстановить поле течения в физической плоскости. Решение, очевидно, стационарно, поскольку вся эволюция эллипса сводится к поступательному движению с неизменной скоростью  $U$  без какого-либо изменения формы. При этом можно выделить два характерных случая в зависимости от того, совпадают ли направления скорости потока на бесконечности  $|z| \rightarrow \infty$ :  $\overline{(dW/dz)} \rightarrow \bar{m}_1^o$  и одной из главных осей эллипса. Если они совпадают, то согласно формуле (26) направление поступательного движения эллипса  $U$  также будет совпадать с направлением этой главной оси, а величина  $|U|$  будет связана с отношением полуосей эллипса формулой  $a/b = |U/m_1^o| - 1$ . Этот случай полностью соответствует решению [5].

Вместе с тем возможен и другой случай, когда направление скорости потока на бесконечности не совпадает ни с одной из главных осей эллипса, то есть  $\operatorname{Re} m_1^o \neq 0$ ,  $\operatorname{Im} m_1^o \neq 0$ . Тогда с учетом формулы (26) направление комплекснозначного вектора  $U$  поступательного движения эллипса будет промежуточным между направлением скорости потока на бесконечности и направлением главной оси. В качестве иллюстрации к такому случаю возьмем

$$B_0(0) = 1, \quad B_2(0) = 0.5, \quad m_1^o = e^{-i\pi/4}, \quad (29)$$

так что эллиптический пузырь характеризуется полуосами  $a = 1.5$ ,  $b = 0.5$ , а набегающий поток на бесконечности составляет угол  $\pi/4$  с осью  $x$ . Используя формулы (26)–(28), найдем скорость поступательного движения пузыря

$$U = \frac{3+i}{0.75\sqrt{2}}, \quad |U| = \frac{\sqrt{5}}{0.75} \approx 2.98$$

и потенциал  $W(z, t)$  течения жидкости

$$W(\zeta) = e^{-i\pi/4} \left( \zeta - \frac{i}{\zeta} \right), \quad z - Ut = \zeta + \frac{1}{2\zeta}.$$

Линии тока течения Хеле-Шоу, отвечающего заданным условиям (29), приведены на рис. 2.

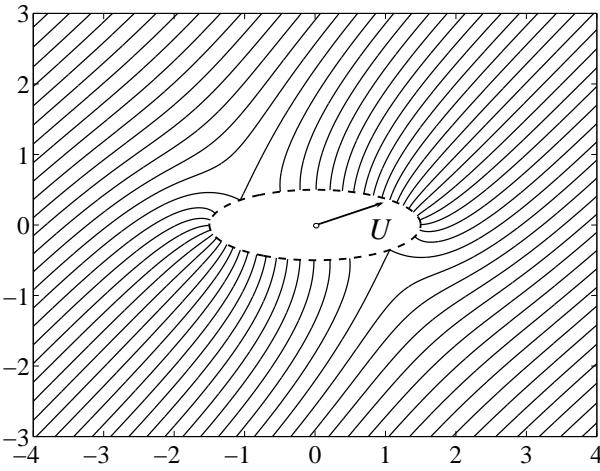


Рис. 2. Линии тока вокруг эллиптического пузыря, несимметрично ориентированного относительно потока на бесконечности

**5.3. Квадруполь постоянной мощности.** На бесконечности в физической плоскости задается только квадруполь, момент которого – фиксированная комплексная константа, то есть  $m_2(t) = m_2^o$ ,  $Q(t) = m_1(t) = 0$ . Анализ такого частного случая имеет смысл, поскольку в [6] был рассмотрен только очень узкий случай, когда момент квадруполя – вещественная константа.

Используя формулы (23), (24), найдем вид всех  $F_k(t)$  и  $B_k$ :

$$F_0 = B_0^2(0) - B_2^2(0), \quad F_1 = 0, \quad F_2(t) = 4m_2^o t + \frac{B_2(0)}{B_0(0)}, \quad (30)$$

$$B_0(t) = \sqrt{\frac{B_0^2(0) - B_2^2(0)}{1 - |F_2^2(t)|}}, \quad B_1 = 0, \quad B_2(t) = \overline{F}_2(t)B_0(t). \quad (31)$$

Далее, используя формулы (21), найдем коэффициенты  $C_k(t)$ :

$$C_1 = 0, \quad C_2(t) = m_2^o B_0^2(t).$$

В результате восстанавливается вид комплексного потенциала  $W(\zeta, t)$  и отображающей функции  $z = g(\zeta, t)$ :

$$W(\zeta, t) = m_2^o B_0^2(t) \zeta^2 - \frac{\overline{m}_2^o \overline{B}_0^2(t)}{\zeta^2}, \quad g(\zeta, t) = B_0(t)\zeta + \frac{B_2(t)}{\zeta}. \quad (32)$$

В частности, легко установить, как эволюционируют полуоси эллипса

$$a(t) = [1 + |F_2(t)|] \sqrt{\frac{F_0}{1 - |F_2^2(t)|}}, \quad b(t) = [1 - |F_2(t)|] \sqrt{\frac{F_0}{1 - |F_2^2(t)|}}.$$

Первое очевидное следствие – геометрический центр пузыря всегда будет неподвижен, поскольку  $U = B'_1(t) = 0$ . Далее, площадь эллиптического пузыря в соответствии со свойством 1 остается неизменной. В то же время полуоси эллипса меняются по величине, причем с разной скоростью. Выписывая формулы для эксцентриситета  $\varepsilon(t)$  и угла  $\beta(t)$ :

$$\varepsilon(t) = \frac{2}{|F_2(t)|^{-1/2} + |F_2(t)|^{1/2}}, \quad \beta(t) = -0.5 \arg F_2(t),$$

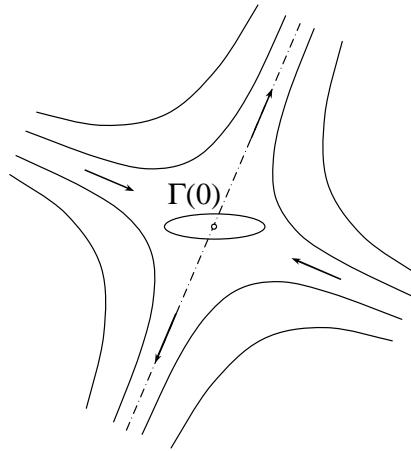


Рис. 3. Ориентация момента квадруполя на бесконечности относительно эллипса  $\Gamma(0)$

видим, что изменение со временем  $|F_2(t)|$  приводит к изменению эксцентриситета эллипса, а изменение  $\arg F_2(t)$  – к изменению ориентации главных осей эллипса. Из третьей формулы (24) следует, что  $\arg F_2(t) \rightarrow \arg m_2^o$  при  $t \rightarrow \infty$ . Поэтому главные оси, изначально ориентированные вдоль координатных осей, со временем эволюционируют, так что  $\beta(t) \rightarrow \beta_\infty = -0.5 \arg m_2^o$ . Однако в соответствии со свойством 4 решение задачи существует только до конечного момента времени  $t_*$ , когда  $|F_2(t_*)|$  обращается в 1. Поэтому предельная величина угла  $\beta(t)$  составляет не  $\beta_\infty$ , а  $\beta_* = -0.5 \arg F_2(t_*)$ .

В качестве иллюстрации случая квадруполя на бесконечности возьмем

$$B_0(0) = 1, \quad B_2(0) = 0.5, \quad m_2^o = \sqrt{2} e^{-i(3\pi/4)}, \quad (33)$$

так что в начальный момент времени эллиптический пузырь характеризуется полуосами  $a = 1.5$ ,  $b = 0.5$ , а общая схема течения соответствует рис. 3. Непосредственно из формул (30) получим

$$F_0 = 0.75, \quad F_1 = 0, \quad F_2(t) = 0.5 - 4t(1+i),$$

откуда, в частности, следует

$$\forall t > 0 : |F_2(t)|^2 = (32t^2 - 4t + 0.25) > 0.$$

Тогда из формул (31) найдем

$$B_0(t) = \sqrt{\frac{0.75}{0.75 + 4t - 32t^2}}, \quad B_1 = 0, \quad B_2(t) = B_0(t) [0.5 + 4t(i-1)],$$

и далее легко определяются большие полуоси эллипса и угол наклона его большей полуоси к оси  $x$

$$a(t) = [1 + |F_2(t)|] B_0(t), \quad b(t) = [1 - |F_2(t)|] B_0(t), \quad \beta(t) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{1-8t}{8t} \right).$$

Наконец, полагая величину  $|F_2(t)|$  равной 1, найдем предельное время  $t_* = (1 + \sqrt{7})/16 \approx 0.228$  и величину предельного угла

$$\beta_*(t_*) = \frac{\pi}{4} - \frac{1}{2} \operatorname{arctg} \left( \frac{0.5 - 4t_*}{4t_*} \right) \approx 0.997.$$

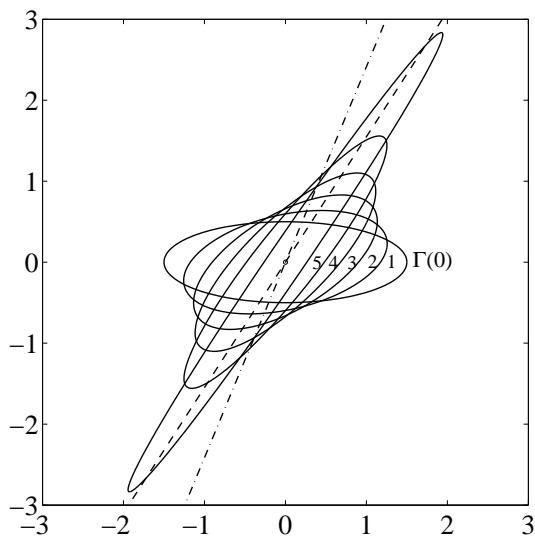


Рис. 4. Эволюция эллиптического пузыря, отвечающая заданным условиям (33), с шагом по времени  $\Delta t = 0.041$

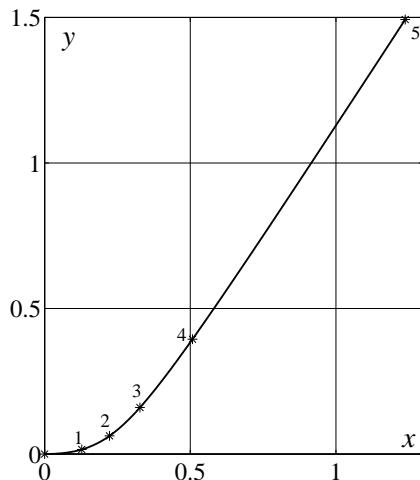


Рис. 5. Траектория центра эллипса в плоскости  $z$  для частного случая, рассмотренного в п. 5.4

На рис. 4 представлена эволюция эллиптического пузыря, отвечающая заданным условиям (33), с шагом по времени  $\Delta t = 0.041$  и последним расчетным временем  $t = 0.205$  (номер шага указан справа от соответствующей кривой). Штрих-пунктирная линия показывает направление  $\beta(0)$ , определяющее ориентацию квадруполя на бесконечности. Штриховая линия показывает предельное направление  $\beta_*$ .

**5.4. Совокупность квадруполя и диполя постоянной мощности.** Пусть в добавок к условиям (33) на бесконечности в физической плоскости помимо квадруполя задан и диполь постоянной интенсивности  $m_1^o = 1$ . Тогда отличие от случая, рассмотренного в п. 5.3, касается только величин  $F_1(t)$  и  $B_1(t)$ .

В соответствии с формулами (23), (24) найдем

$$F_1(t) = 2t, \quad B_1(t) = 2t \frac{1 + \overline{F}_2(t)}{1 - |F_2(t)|^2}.$$

Следовательно, эволюция формы эллипса будет той же самой, что и в п. 5.3, но помимо этого геометрический центр эллипса не останется в начале координат, а будет перемещаться. В частности, если форма эллипса меняется в соответствии с рис. 4, то его центр описывает в плоскости  $z$  кривую, представленную на рис. 5, где звездочками с номером шага по времени отмечено положение центра на этот момент времени.

Работа выполнена при поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 08-01-00548а).

### Summary

*M.M. Alimov. General Solution of the One-Phase Hele-Shaw Problem for Elliptic Bubble.*

In the general case of several multipole we study one-phase Hele-Shaw flow with a moving boundary when surface tension effect is negligible. We find the explicit solution with nonstationary elliptic shape of the bubble for case when Hele-Shaw flow is produced by any combination of sink, dipole and quadropole at infinity. This general solution includes all known particular cases. In the particular case of a dipole at infinity we find new explicit solution with stationary elliptic shape of the bubble that is not symmetrical with respect to the flow.

**Key words:** one-phase Hele-Shaw problem, elliptic bubble.

### Литература

1. *Saffman P.G., Taylor G.I.* The penetration of a fluid into a porous medium or Hele-Shaw cell containing a more viscous liquid // Proc. Roy. Soc. London. Ser. A. – 1958. – V. 245, No 1242. – P. 312–329.
2. *Lamb H.* Hydrodynamics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1932 = Ламб Г. Гидродинамика. – М.: Гостехиздат, 1947. – 928 с.
3. *Batchelor G.K.* An Introduction to Fluid Dynamics. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 1970 = Бэтчелор Дж. Введение в динамику жидкости. – М.: Мир, 1973. – 760 с.
4. *Howison S.D.* Bubble growth in porous media and Hele-Shaw cells // Proc. Roy. Soc. Edinburgh. Ser. A. – 1986. – V. 102, No 1-2. – P. 141–148.
5. *Taylor G.I., Saffman P.G.* A note on the motion of bubbles in a Hele-Shaw cell and porous medium // Quart. J. Mech. Appl. Math. – 1959. – V. 12. – P. 265–279.
6. *Entov V.M., Etingof P.I., Kleinbock D.Ya.* Hele-Shaw flows with a free boundary produced by multipoles // Europ. J. Appl. Math. – 1993. – V. 4, No 2. – P. 97–120.
7. *Полубаринова-Кочина П.Я.* К вопросу о перемещении контура нефтеносности // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 47, № 4. – С. 254–257.
8. *Галин Л.А.* Неустановившаяся фильтрация со свободной границей // Докл. АН СССР. – 1945. – Т. 47, № 4. – С. 250–253.
9. *Howison S.D.* Complex variable methods in Hele-Shaw moving boundary problems // Europ. J. Appl. Math. – 1992. – V. 3, No 3. – P. 209–224.
10. *Лаврентьев М.А., Шабат Б.В.* Методы теории функции комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 736 с.

11. Алимов М.М. Общее решение задачи Хеле-Шоу для течений в канале // ПММ. – 2006. – Т. 70, Вып. 3. – С. 384–399.
12. Birkhoff G., Zarantonello E. Jets, wakes and cavities. – N. Y.: Acad. Press, 1957 = Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. – М.: Мир, 1964. – 466 с.
13. Алимов М.М. Рост пузыря в ячейке Хеле-Шоу // Изв. РАН. МЖГ. – 2007. – № 2. – С. 133–147.
14. Richardson S. Hele-Shaw flows with a free boundary produced by injection of fluid into a narrow channel // J. Fluid Mech. – 1972. – V. 56. – P. 609–618.
15. Davis P.J. The Schwarz Function and its Applications. – Washington: Math. Assoc. of America, 1974. – 228 p.
16. Howison S.D. Fingering in Hele-Shaw cells // J. Fluid Mech. – 1986. – V. 167. – P. 439–453.

Поступила в редакцию  
25.12.09

---

**Алимов Марс Мясумович** – кандидат физико-математических наук, ведущий научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: Mars.Alimov@ksu.ru