Известия вузов. Математика
2019, №12, с. 82–90

https://kpfu.ru/science/nauchnye-izdaniya/ivrm
e-mail: izvuz.matem@kpfu.ru

З.К. ФАЯЗОВА

ГРАНИЧНОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПРОЦЕССОМ ТЕПЛООБМЕНА В ПРОСТРАНСТВЕ

Аннотация. Рассматривается простейшая математическая модель следующей задачи. На части границы области $D \subset \mathbb{R}^2$ находится нагреватель, имеющий регулируемую температуру. Требуется найти такой режим работы нагревателя, чтобы средняя температура в некоторой подобласти области D принимала заданное значение. Доказано существование параметра управления при некоторых ограничениях на значение функции, определяемой интегральным ограничением.

Ключевые слова: параболическое уравнение, краевая задача, задача управления, параметр управления, интегральное уравнение Вольтерра первого рода, преобразование Лапласа.

УДК: 517.958

DOI: 10.26907/0021-3446-2019-12-82-90

Введение

Одной из актуальных задач математической физики является проблема моделирования процесса теплообмена, а также задача управления данным процессом. В реальной ситуации регулирование процесса теплообмена осуществляется большей частью контролируемым изменением потока тепла, входящего в рассматриваемую область с части ее границы. При этом наиболее распространенной является задача достижения средней температуры во всей области. Наряду с этим важное значение имеет задача управления граничным потоком с целью достижения средней температуры в какой-либо части рассматриваемой области или, в случае дельтаобразного распределения, в какой-либо фиксированной точке данной области. Управляющий параметр при этом оказывается многомерным и удовлетворяющим естественным ограничениям, связанным с мощностью управляемого потока.

В настоящей работе рассматривается следующая задача управления процессом теплообмена. На части границы области $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x| < \pi, |y| < \pi\}$ находится нагреватель, имеющий регулируемую температуру. Требуется найти такой режим работы нагревателя, чтобы средняя температура в некоторой подобласти области D принимала заданное значение.

Пусть функция $u(x, y, t)$ удовлетворяет уравнению

$$u_t = u_{xx} + u_{yy}, \quad (x, y, t) \in D_T = \{0 < t < T,\ |x| < \pi,\ |y| < \pi\}, \tag{1}$$

Поступила в редакцию 29.05.2018, после доработки 26.03.2019. Принята к публикации 27.03.2019.

начальному и граничным условиям

$$\begin{aligned} u|_{t=0} &= 0, \qquad -\pi \le x, y \le \pi; \\ u|_{x=\pi} &= 0, \quad 0 \le t \le T, \quad -\pi \le y \le \pi; \\ u|_{y=-\pi} &= 0, \quad 0 \le t \le T, \quad -\pi \le x \le \pi; \\ u|_{y=\pi} &= 0, \quad 0 \le t \le T, \quad -\pi \le x \le \pi; \\ u|_{x=-\pi} &= \mu(t)\Phi(y), \quad 0 \le t \le T, \quad -\pi \le y \le \pi; \\ & \quad \Phi(-\pi) = \Phi(\pi) = 0. \end{aligned} \tag{2}$$

Здесь $\Phi(y)$ — заданная функция (линейная плотность нагревателя или кондиционера), $\mu(t)$ — управляющий параметр, задающий амплитуду потока горячего или холодного воздуха.

Задача. Найти $\mu(t)$ из условия

$$\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0} u(x,y,t)dxdy = \theta(t). \tag{3}$$

Определение 1. Управление $\mu(t)$ называется допустимым, если μ — гладкая функция, удовлетворяющая условию

$$|\mu(t)| \le 1.$$

Задачи импульсного управления для некоторых систем с распределенными параметрами рассматривались в работах [1]–[4]. Проблема управления системами с распределенными параметрами, эволюция которых моделируется с помощью дифференциальных уравнений с частными производными, изложена в монографии [5].

В последние годы интерес к изучению систем с распределенными параметрами заметно возрос, в связи с чем следует отметить работы В.А. Ильина и Е.И. Моисеева, в которых подробно исследованы вопросы граничного управления различными системами, описываемыми волновым уравнением (см. [6], [7]). Из результатов, относящихся к проблеме управления процессами, описываемыми уравнениями параболического типа и, в частности, процессом теплообмена, можно отметить работу [8], в которой расмотрены задачи управления процессом теплообмена с точки зрения оптимальности времени (также работы [9]–[12]).

Обозначим для произвольного банахова пространства B и $T > 0$ символом $C([0,T] \to B)$ банахово пространство всех непрерывных отображений $u : [0,T] \to B$ с нормой

$$\|u\| \ = \ \max_{0\le t\le T} \|u(t)\|.$$

Далее, символом $\widetilde{W}_2^1(D)$ обозначим подпространство пространства Соболева $W_2^1(D)$, образованного функциями, след которых на ∂D равен нулю. Заметим, что ввиду замкнутости $\widetilde{W}_2^1(D)$ сумма ряда функций из $\widetilde{W}_2^1(D)$, сходящегося в метрике $W_2^1(D)$, также принадлежит $\widetilde{W}_2^1(D)$.

Определение 2. Под решением задачи (1)–(2) мы понимаем функцию $u(x,y,t)$, представимую в виде

$$u(x,y,t) \ = \ \mu(t)\Phi(y)\frac{\pi - x}{2\pi} \ - \ v(x,y,t),$$

где функция $v(x,y,t)$ является обобщенным решением из $C([0,T] \to \widetilde{W}_2^1(D))$ задачи:

$$v_t(x,y,t) - \Delta v(x,y,t) \ = \ \left[\mu'(t)\Phi(y) \ - \ \mu(t)\Phi''(y)\right] \frac{\pi - x}{2\pi}$$

с однородными начальными и краевыми условиями

$$v|_{t=0} \;=\; v|_{\partial D} \;=\; 0.$$

Заметим, что класс $C([0,T] \to \widetilde{W}_2^1(D))$ является подмножеством класса $W_2^{1,0}(D_T)$, рассмотренного в монографии [13] с целью опеределения решения задачи с однородными краевыми условиями (соответствующую теорему единственности см. в гл. III, теорема 3.2, с. 173–176). Тем самым, введенное выше обобщенное решение является обобщенным решением и в смысле монографии [13]. Однако, в отличие от решения из класса $W_2^{1,0}(D_T)$, которое гарантированно имеет след лишь для почти всех $t \in [0,T]$, решение из класса $C([0,T] \to \widetilde{W}_2^1(D))$ непрерывно зависит от $t \in [0,T]$ в метрике $L_2(D)$. Тем самым, корректно определено условие (3).

Лемма 1. *Пусть функции $\mu(t)$ и $\Phi(y)$ удовлетворяют условиям*
1) $\mu \in W_2^1(\mathbb{R})$, $\quad \mu(0) = 0$,
2) $\Phi \in W_2^2[-\pi,\pi]$ *и условию* $\Phi(-\pi) = \Phi(\pi)$.
Тогда решение задачи (1)–(2) *имеет вид*

$$u(x,y,t) \;= \int_0^t \mu(\tau) \sum_{n,m=1}^{\infty} \frac{n}{2\pi} e^{-(\frac{n^2+m^2}{4})(t-\tau)} \Phi_m \sin\frac{n(x+\pi)}{2} \sin\frac{m(y+\pi)}{2} d\tau,$$

где

$$\Phi_m = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \Phi(y) \sin\frac{m(y+\pi)}{2} dy,\;\; m = 1,2,3,\dots .$$

Доказательство. Решение задачи перепишем в виде

$$u(x,y,t) = \mu(t)\Phi(y)\frac{\pi - x}{2\pi} -$$

$$- \int_0^t \sum_{n,m=1}^{\infty} e^{-\lambda_{nm}(t-\tau)} (\mu'(\tau) + (m/2)^2\mu(\tau))\Phi_m \frac{2}{\pi n} \sin\frac{n(x+\pi)}{2} \sin\frac{m(y+\pi)}{2},$$

где $\lambda_{nm} = \frac{n^2+m^2}{4}$ $\quad n,m = 1,2,\dots$.

Покажем, что функция $v(x,y,t)$, представимая указанным рядом Фурье, принадлежит классу $C([0,T] \to \widetilde{W}_2^1(D))$. Для этого достаточно доказать, что градиент этой функции, взятый по $(x,y) \in D$, непрерывно зависит от $t \in [0,T]$ по норме пространства $L_2(D)$. Согласно равенству Парсеваля, норма этого градиента равна

$$\|\nabla v(\cdot,\cdot,t)\|^2_{L_2(D)} \;=\; \frac{4}{\pi} \sum_{m,n=1}^{\infty} \frac{|\Phi_m|^2}{n^2}\, \lambda_{nm} \cdot [\rho_{nm}(t)]^2,$$

где

$$\rho_{nm}(t) \;=\; \int\limits_0^t e^{-\lambda_{nm}(t-\tau)} [\mu'(\tau) + (m/2)^2\mu(\tau)]\, d\tau.$$

Из условия леммы и неравенства Коши–Буняковского следует, что выполняется равномерная по $t \geq 0$ оценка

$$\rho_{nm}(t) \;\leq\; \frac{C_1}{\sqrt{\lambda_{nm}}} \;+\; C_2\frac{m^2}{\lambda_{nm}} \;\leq\; C_3\frac{m}{\sqrt{\lambda_{nm}}}\;.$$

Значит,

$$\|\nabla v(\cdot,\cdot,t)\|^2_{L_2(D)} \;\leq\; C_3\frac{4}{\pi}\sum_{m,n=1}^{\infty}\frac{m^2|\Phi_m|^2}{n^2} \;=\; C_3\frac{2\pi}{3}\sum_{m=1}^{\infty}|\Phi_m|^2m^2 \;=\; C\|\Phi'\|^2_{L_2[-\pi,\pi]}.$$

Тот факт, что функция $v(x,y,t)$ является обобщенным решением в смысле интегрального тождества (3.5) монографии [13], следует непосредственно из равенства Парсеваля. □

Теорема. *Пусть функция $\Phi\in W_2^2[-\pi,\pi]$ не равна тождественно нулю и удовлетворяет условию $\Phi_m\geq 0$. Тогда существует постоянная $M>0$ такая, что для любой функции $\theta\in W_2^2(-\infty,\infty)$, удовлетворяющей условиям*

$$\|\theta\|_{W_2^2(\mathbb{R})} \;\leq\; M, \quad \theta(t)=0 \text{ при } t\leq 0,$$

найдется допустимое управление $\mu(t)$, обеспечивающее выполнение соотношения (3).

1. Доказательство основного результата

Используя условие для $\mu(t)$ имеем

$$\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0}u(x,y,t)dxdy=$$

$$=\int_0^t\mu(\tau)\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{e^{-\lambda_{nm}(t-\tau)}}{2\pi}n\Phi_m\int_{-\pi}^{0}\int_{-\pi}^{0}\sin\frac{n(x+\pi)}{2}\sin\frac{m(y+\pi)}{2}dxdyd\tau=$$

$$=16\int_0^t\frac{\mu(\tau)}{2\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty}e^{-\lambda_{nm}(t-\tau)}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{m}\Phi_m d\tau.$$

В силу (3)

$$\theta(t)=8\int_0^t\mu(\tau)\sum_{n,m=1}^{\infty}\Phi_m\frac{e^{-\lambda_{nm}(t-\tau)}}{\pi}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{m}d\tau.$$

Введем обозначение

$$K(t)=\frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\Phi_m e^{-\frac{m^2}{4}t}\frac{\sin^2\frac{m\pi}{4}}{m}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{n^2}{4}t}\sin^2\frac{n\pi}{4}.$$

Получаем следующее интегральное уравнение Вольтерра первого рода

$$\int_0^t K(t-\tau)\mu(\tau)d\tau=\theta(t). \tag{4}$$

Положим

$$A(t) \;=\; \frac{8}{\pi}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m}{m}\,\sin^2\frac{m\pi}{4}\;e^{-\frac{m^2}{4}t}, \quad t\geq 0,$$

$$B(t) \;=\; \sum_{n=1}^{\infty}\sin^2\frac{n\pi}{4}\;e^{-\frac{n^2}{4}t}, \quad t>0,$$

тогда ядро

$$K(t) \;=\; A(t)B(t).$$

Из условия теоремы следует $A(t)>0$ при всех $t\geq 0$ и поэтому выполняются неравенства

$$A(0)\geq A(t)\geq A(1)>0, \quad 0\leq t\leq 1.$$

Для оценки $B(t)$ воспользуемся сооотношением

$$S(\lambda) \;\equiv\; \sum_{n=1}^{\infty} e^{-\lambda n^2} \;=\; \sum_{n=1}^{\infty} \int\limits_{n}^{n+1} e^{-\lambda [s]^2}\, ds \;=\; \int\limits_{1}^{\infty} e^{-\lambda [s]^2}\, ds,$$

где $[s]$ – целая часть числа s.

Преобразуем последний интеграл

$$S(\lambda) \;=\; \int\limits_{1}^{\infty} e^{-\lambda s^2} e^{\lambda (s^2 - [s]^2)} ds.$$

Поскольку $1 \;\le\; e^{\lambda (s^2-[s]^2)} \;=\; e^{\lambda (s-[s])(s+[s])} \;\le\; e^{2\lambda s}$, то

$$\int\limits_{1}^{\infty} e^{-\lambda s^2}\, ds \;\le\; S(\lambda) \;\le\; e \int\limits_{0}^{\infty} e^{-\lambda s^2}\, ds.$$

Поэтому при $0 < \lambda < 1$ выполняется двусторонняя оценка

$$\frac{c_1}{\sqrt{\lambda}} \;\le\; S(\lambda) \;\le\; \frac{c_2}{\sqrt{\lambda}}.$$

Отсюда для функции $B(t)$ справедлива оценка

$$\frac{c_1}{\sqrt{t}} \;\le\; B(t) \;\le\; \frac{c_2}{\sqrt{t}}, \quad 0 \le t \le 1$$

(возможно, с другими положительными постоянными c_1 и c_2).

Следовательно, ядро $K(t)$ удовлетворяет неравенствам

$$\frac{C_1}{\sqrt{t}} \;\le\; K(t) \;\le\; \frac{C_2}{\sqrt{t}}, \quad 0 \le t \le 1.$$

Применяя преобразование Лапласа

$$\widetilde{\mu}(p) \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} e^{-pt}\, \mu(t)\, dt$$

к последнему интегральному уравнению (4) и учитывая свойства преобразования свертки, получим

$$\widetilde{\theta}(p) = \int\limits_{0}^{\infty} e^{-pt} dt \int\limits_{0}^{t} K(t-s)\mu(s)\, ds \;=\; \int\limits_{0}^{\infty} \mu(s)\, ds \int\limits_{s}^{\infty} e^{-pt}\, K(t-s)\, dt \;=$$

$$=\; \int\limits_{0}^{\infty} \mu(s)\, ds \int\limits_{0}^{\infty} e^{-ps-pu}\, K(u)\, du \;=\; \widetilde{K}(p)\widetilde{\mu}(p).$$

Следовательно,

$$\widetilde{\mu}(p) = \frac{\widetilde{\theta}(p)}{\widetilde{K}(p)}. \tag{5}$$

Принимая во внимание равенство

$$\int_0^{\infty} e^{-t(\lambda_{nm}+p)} dt = \frac{1}{p+\lambda_{nm}},$$

для образа ядра интегрального уравнения имеем

$$\widetilde{K}(p)=\frac{8}{\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{(p+\lambda_{nm})m}\Phi_m.$$

Подставляя $p=a+i\xi$ ($\mathrm{Re}p=a$, $a>0$), видим, что

$$\widetilde{K}(a+i\xi)=\frac{8}{\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Phi_m\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{(a+i\xi+\lambda_{nm})m}=$$

$$=\frac{8}{\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Phi_m\frac{(a+\lambda_{nm})\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{(a+\lambda_{nm})^2+\xi^2}\frac{1}{m}-\frac{8\xi i}{\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty}\Phi_m\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{(a+\lambda_{nm})^2+\xi^2}\frac{1}{m}.$$

Очевидно, неравенство для любых $n,m,a>o$ и ξ

$$(a+\lambda_{nm})^2+\xi^2\leq[1+(a+\lambda_{nm})^2](1+\xi^2),$$

откуда

$$\frac{1}{(a+\lambda_{nm})^2+\xi^2}\geq\frac{1}{[1+(a+\lambda_{nm})^2](1+\xi^2)}.$$

Поэтому

$$|\mathrm{Im}\widetilde{K}(a+i\xi)|=\frac{8|\xi|}{\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{(a+\lambda_{nm})^2+\xi^2}\frac{\Phi_m}{m}\geq\frac{8|\xi|}{\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{(1+(a+\lambda_{nm})^2)}\frac{\Phi_m}{m(1+\xi^2)}\geq$$

$$\geq\frac{8|\xi|}{\pi(1+2a^2)(1+\xi^2)}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m}{m}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{(1+2\lambda_{nm}^2)}=C_{1a}\frac{|\xi|}{(1+\xi^2)},$$

где

$$C_{1a}=\frac{1}{\pi(1+2a^2)}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m}{m}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{(1+2\lambda_{nm}^2)}.$$

Нетрудно доказать, что последний ряд сходится. Выше указанным способом можно доказать верность неравенств

$$|\mathrm{Re}\widetilde{K}(a+i\xi)|=\frac{8}{\pi}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m}{m}\frac{(a+\lambda_{nm})\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{(a+\lambda_{nm})^2+\xi^2}\geq$$

$$\geq\frac{8}{\pi(1+\xi^2)}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m}{m}\frac{(a+\lambda_{nm})\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{(a+\lambda_{nm})^2+\xi^2}\geq$$

$$\geq\frac{8(a+0,5)}{\pi(1+\xi^2)(1+2a^2)}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m}{m}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{1+2\lambda_{nm}^2}=C_{2a}\frac{1}{1+\xi^2},$$

где

$$C_{2a}=\frac{8(a+0,5)}{(1+2a^2)}\sum_{n,m=1}^{\infty}\frac{\Phi_m}{m}\frac{\sin^2\frac{n\pi}{4}\sin^2\frac{m\pi}{4}}{1+2\lambda_{nm}^2},$$

и ряд сходится. Суммируя полученные неравенства, имеем

$$|\widetilde{K}(a+i\xi)|^2=|\mathrm{Re}\widetilde{K_0}(a+i\xi)|^2+|\mathrm{Im}\widetilde{K_0}(a+i\xi)|^2\geq$$

$$\geq\left(C_{2a}\frac{1}{1+\xi^2}\right)^2+\left(C_{1a}\frac{|\xi|}{m(1+\xi^2)}\right)^2\geq\min(C_{1a}^2,C_{2a}^2)\frac{1}{1+\xi^2}$$

или

$$|\widetilde{K}(a+i\xi)| \geq C_a \frac{1}{(1+\xi^2)^{1/2}}, \quad \xi \in R, \quad C_a = \min(C_{1a}, C_{2a}).$$

Из этой оценки и равенства (5) следует, что гладкость функции μ может уменьшится по сравнению с гладкостью функции θ не более чем на единицу, т. е. если $\theta \in W_2^2(\mathbb{R})$, то $\mu \in W_2^1(\mathbb{R})$.

Предположим, что образ заданной функции $\theta(t)$ удовлетворяет условию

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{\theta}(i\xi)| \sqrt{1+\xi^2}\, d\xi \;<\; +\infty.$$

Тогда предельным переходом при $a \to 0$ из (6) можно получить равенство

$$\mu(t) \;=\; \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{\widetilde{\theta}(i\xi)}{\widetilde{K}(i\xi)}\, e^{i\xi t}\, d\xi. \tag{6}$$

Далее понадобится следующая

Лемма 2. *Пусть $\theta \in W_2^2(-\infty, +\infty)$, $\theta(t) = 0$ при $t \leq 0$. Тогда для образа функции $\theta(t)$ верно неравенство*

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{\theta}(i\xi)| \sqrt{1+\xi^2}\, d\xi \;<\; +\infty.$$

Доказательство. Используя интегрирование по частям, запишем

$$\widetilde{\theta}(a+i\xi) \;=\; \int\limits_0^{\infty} e^{-(a+i\xi)t}\, \theta(t)\, dt \;=\; \frac{e^{-(a+i\xi)t}}{-a-i\xi} \theta(t) \Bigg|_{t=0}^{t=\infty} \;+\; \frac{1}{a+i\xi} \int\limits_0^{\infty} e^{-(a+i\xi)t} \theta'(t)\, dt.$$

Из равенства

$$(a+i\xi)\widetilde{\theta}(a+i\xi) \;=\; \int\limits_0^{\infty} e^{-(a+i\xi)t} \theta'(t)\, dt$$

при $a \to 0$ имеем

$$i\xi\, \widetilde{\theta}(i\xi) \;=\; \int\limits_0^{\infty} e^{-i\xi t} \theta'(t)\, dt.$$

Аналогично

$$(i\xi)^2\, \widetilde{\theta}(i\xi) \;=\; \int\limits_0^{\infty} e^{-i\xi t} \theta''(t)\, dt.$$

Следовательно,

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\theta}(i\xi)|^2\, (1+\xi^2)^2\, d\xi \;\leq\; C \|\theta\|^2_{W_2^2(\mathbb{R}_+)}.$$

Тогда

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{\theta}(i\xi)| \sqrt{1+\xi^2}\, d\xi \;=\; \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widetilde{\theta}(i\xi)|\, (1+\xi^2)}{\sqrt{1+\xi^2}}\, d\xi \;\leq$$

$$\leq \left(\int\limits_{-\infty}^{\infty} |\widetilde{\theta}(i\xi)|^2 \, (1+\xi^2)^2 \, d\xi\right)^{1/2} \left(\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\xi}{1+\xi^2}\right)^{1/2} \leq C_1 \|\theta\|^2_{W_2^2(\mathbb{R}_+)}.$$

□

Согласно вышеизложенному

$$|\mu(t)| \leq \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} \frac{|\widetilde{\theta}(i\xi)|}{|\widetilde{K}(i\xi)|} \, d\xi \leq \frac{1}{2\pi C_0} \int\limits_{-\infty}^{+\infty} |\widetilde{\theta}(i\xi)| \sqrt{1+\xi^2} \, d\xi \, .$$

Поэтому

$$|\mu(t)| \leq \frac{1}{2\pi C_0} C_1 \|\theta\|^2_{W_2^2(\mathbb{R}_+)} \leq \frac{C_1}{2\pi C_0} M = 1 \qquad \text{при } M = \frac{2\pi C_0}{C_1}.$$

Остается проверить выполнение условия $\mu(0) = 0$. Для этого перепишем равенство (4) следующим образом:

$$\int\limits_0^t K(s)\mu(t-s) \, ds = \theta(t).$$

Продифференцировав это равенство, получим

$$K(t)\mu(0) + \int\limits_0^t K(s)\mu'(t-s) \, ds = \theta'(t).$$

Устремим в этом соотношении $t \to 0$. Тогда, учитывая условия, наложенные на функции θ, и принимая во внимание неограниченность функции $K(t)$ в окрестности нуля, получим требуемое равенство $\mu(0) = 0$.

Теорема доказана.

Автор приносит благодарность академику Ш.А. Алимову за внимание, проявленное к данной работе.

Автор благодарен рецензенту за конструктивные замечания, которые способствовали улучшению изложения результатов статьи.

Литература

[1] White L.W. *Point control: approximations of parabolic problems and pseudo parabolic problems,* Appl. Anal. **12** (4), 251–263 (1981).

[2] Ляшко С.И. *О разрешимости псевдо-параболических уравнений*, Изв. вузов. Матем., №9, 71–72 (1985).

[3] Ляшко С.И., Маньковский А.А. *Оптимальное импульсное управление системой с распределенными параметрами гиперболического типа*, ДАН УССР, №4, 69–71 (1983).

[4] Ляшко С.И., Маньковский А.А. *Одновременная оптимизация моментов и интенсивностей импульсов в задачах управления для параболических уравнений,* Кибернетика **87** (3), 81–82 (1983).

[5] Fursikov A.V. *Optimal control of distributed systems,* Theory and Appl., Translations of Math. Monograpfs, **187** (Amer. Math. Soc., Providence, 2000).

[6] Ильин В.А. *Граничное управление процессом колебаний на одном конце при закрепленном втором конце в терминах обобщенного решения волнового уравнения с конечной энергией*, Дифференц. уравнения **36** (12), 1670–1686 (2000).

[7] Ильин В.А., Моисеев Е.И. *Оптимизация граничных управлений колебаниями струны*, УМН **60** (6), 89–114 (2005).

[8] Albeverio S., Alimov Sh. *On a time-optimal control problem associated with the heat exchange process*, Appl. Math. and Optim. **57** (1), 58–68 (2008).

[9] Barbu V. *The time-optimal control problem for parabolic variational inequalities,* App. Math. Optim. **11** (1), 1–22 (1984).

[10] Barbu V., Răşcanu A., Tessitore G. *Carleman estimates and controllability of linear stochastic heat equations,* Appl. Math. Optim. **47** (2), 97–120 (2003).

[11] Fattorini H.O. *Time-optimal control of solutions of operational differential equations,* SIAM J. Control Ser. A 2, 54–59 (1964).

[12] Fattorini H.O. *Time and norm optimal control for linear parabolic equations: nessesary and suffisient conditions,* Control and Estimation of Distributed Parameter Systems. Internat. Ser. of Numerical Math., Birkhäuser, Basel, **143**, 151–168 (2002).

[13] Ладыженская О.А., Солонников В.А., Уральцева Н.Н. *Линейные и квазилинейные уравнения параболического типа* (Наука, М., 1967).

Зарина Кудратиллоевна Фаязова

Ташкентский государственный технический университет им. И. Каримова,
ул. Университетская, д. 2а, г. Ташкент, 100174, Узбекистан,

e-mail: z.fayazova@yahoo.com

Z.K. Fayazova

Boundary control of the heat transfer process in the space

Abstract. We consider the simplest mathematical model of the following problem. On the part of the border of region $D \subset \mathbb{R}^2$ there is a heater having an adjustable temperature. It is required to find such a mode of operation of the heater so that the average temperature in a certain subregion of region D takes the specified value. The existence of the control parameter proved under certain restrictions on the values of the function defined by the integral constraint.

Keywords: parabolic equation, boundary value problem, control problem, control parameter, first kind Volterra integral equation, Laplace transform.

Zarina Kudratilloevna Fayazova

Tashkent State Technical University named after I. Karimov,
2a Universitetskaya str., Tashkent, 100174 Uzbekistan,

e-mail: z.fayazova@yahoo.com