

Министерство образования и науки Российской Федерации
Федеральное государственное автономное образовательное учреждение
высшего профессионального образования
"Казанский (Приволжский) федеральный университет"

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО
КАФЕДРА ГЕОМЕТРИИ

Направление: 010100.68 - математика

МАГИСТЕРСКАЯ ДИССЕРТАЦИЯ НА ТЕМУ

"Поверхности в геометрии Лобачевского"

Работа завершена:

" ____ " _____ 2015г. _____ (Н.С.Семенова)

Работа допущена к защите:

Научный руководитель

доктор физ.-мат. наук, доцент

" ____ " _____ 2015г. _____ (Е.Н.Сосов)

Заведующий кафедрой:

док. физ.-мат. наук, профессор

" ____ " _____ 2015г. _____ (В.В.Шурыгин)

Казань - 2015

Оглавление

1. Введение	2
2. Гауссова и эйлерова кривизна	3
3. Вывод уравнения нормальной деформации поверхности	9
4. Круговой конус	10
5. Круговой цилиндр	12
6. Параболоиды	13
6.1. Параболоид вращения	13
6.2. Гиперболический параболоид	14
7. Геликоид	15
8. Тор	16
9. Поверхности вращения	17
10. Нормальная деформация геликоида	19
11. Код программ в пакете Maxima	20
12. Заключение	23

1. Введение

Известны три классических геометрий постоянной кривизны. Это евклидова геометрия, геометрия Лобачевского и эллиптическая геометрия. В данной работе будем исследовать свойства поверхностей в модели Бельтрами-Клейна трехмерного пространства Лобачевского. Будут рассмотрены следующие поверхности: круговой конус, круговой цилиндр, параболоид вращения, гиперболический параболоид, геликоид, тор и эквидистантная поверхность прямой. Для этих поверхностей находятся гауссова и эйлерова кривизны и строится нормальная деформация. Кроме того, приводится вывод специальной нормальной деформации поверхности. Для вычисления гауссовой и эйлеровой кривизн и получения уравнения нормальной деформации поверхности используется СКМ *Maxima*. В пакете *Maxima* разработаны программы, с помощью которых вычислены кривизны, а также получен вывод уравнения нормальной деформации геликоида.

Таким образом, **целью работы** является исследование гауссовой, эйлеровой кривизн и нормальной деформации поверхности в модели Бельтрами-Клейна пространства Лобачевского.

Перечислим **задачи работы**:

1. Изучить и проанализировать учебно-методическую литературу по данной теме.
2. Получить формулу гауссовой и эйлеровой кривизны.
3. Получить уравнение нормальной деформации поверхности.
4. В пакете *Maxima* написать программный код для нахождения кривизн и уравнения нормальной деформации поверхности.
5. Построить изображения поверхностей в пакете *Maxima*, а также графики кривизн данных поверхностей и нормальную деформацию геликоида.

2. Гауссова и эйлерова кривизна

Рассмотрим поверхность в модели Бельтрами-Клейна геометрии Лобачевского в векторно-параметрической форме $r = r(u, v)$ и некоторую кривую на ней, заданную внутренними уравнениями в натуральной параметризации $u = u(l)$, $v = v(l)$. Известно, что риманову метрику пространства Лобачевского в модели Бельтрами-Клейна можно представить следующим образом:

$$dl^2 = k^2 \frac{((k^2 - r^2)dr^2 + (r, dr)^2)}{(k^2 - r^2)^2},$$

где $k > 0$ – является постоянной Лобачевского. Если использовать следующую формулу дифференциала $dr = r_u du + r_v dv$ метрика примет вид

$$dl^2 = \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \{ ((r, r_u)^2 + (k^2 - r^2)r_u^2) du^2 + 2((r, r_u)(r, r_v) + (k^2 - r^2)r_u r_v) dudv + ((r, r_v)^2 + (k^2 - r^2)r_v^2) dv^2 \}.$$

Введем обозначения

$$\begin{aligned} g_{11} = E &= \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \{ (r, r_u)^2 + (k^2 - r^2)r_u^2 \}, \\ g_{12} = g_{21} = F &= \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \{ (r, r_u)(r, r_v) + (k^2 - r^2)r_u r_v \}, \\ g_{22} = G &= \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \{ (r, r_v)^2 + (k^2 - r^2)r_v^2 \}. \end{aligned}$$

В менее подробной форме, метрический тензор, индуцированный на данной поверхности, имеет вид:

$$g_{ij} = g_{\alpha\beta} r_i^\alpha r_j^\beta, \quad i, j = 1, 2, \quad \alpha, \beta = \overline{1, 3}$$

где $r_i^\alpha = \frac{\partial r^\alpha}{\partial u^i}$ – частные производные, $g_{\alpha\beta}$ – метрический тензор пространства Лобачевского. Как известно Символы Кристоффеля, тензор Риччи, скалярная и гауссова кривизны вычисляются по формулам

$$\Gamma_{ij}^h = \frac{1}{2} g^{hk} (\partial_i g_{jk} + \partial_j g_{ik} - \partial_k g_{ij}), \quad R_{ij} = R_{kij}{}^k = 2 \{ \partial_{[k} \Gamma_{i]j}^k + \Gamma_{j[i}^s \Gamma_{k]s}^k \},$$

$$R = R_{ij} g^{ij}, \quad K_g = \frac{R}{2}.$$

Покажем, что эйлерова кривизна поверхности в модели Бельтрами-Клейна имеет вид:

$$K_e = K_g + \frac{1}{k^2}.$$

Будем следовать доказательству приведенному в [1]. По определению эйлерова кривизна равна

$$K_e = \kappa_1 \kappa_2.$$

Из уравнения $(EG - F^2)\kappa^2 - (EN - 2FM + GL)\kappa + (LN - M^2) = 0$ по свойству корней квадратного уравнения получим

$$K_e = \frac{LN - M^2}{EG - F^2} = \frac{LN - M^2}{H^2}, \quad \text{где } H^2 = EG - F^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

Найдем теперь коэффициенты второй квадратичной формы L, M, N . Для этого вычислим угол между спрямляющей плоскостью кривой и касательной плоскостью поверхности. Запишем уравнения этих плоскостей.

Согласно определению, спрямляющая плоскость проходит через точку кривой $r = r(u(l), v(l))$ и имеет направляющие векторы $\bar{P} - r, \bar{P}_1 - r$, где

$$\bar{P} = \frac{k^2}{(r, \dot{r}, \ddot{r})}[\dot{r}, \ddot{r}]$$

радиус-вектор полюса соприкасающейся плоскости $(R - r, \dot{r}, \ddot{r}) = 0$ и

$$\bar{P}_1 = r + \dot{r} \frac{k^2 - r^2}{(\dot{r}, r)}$$

радиус-вектор полюса нормальной плоскости $(\bar{P}_1, R) = k^2$. Используя уравнение плоскости, проходящей через три точки

$$(R - r, \bar{P} - r, \bar{P}_1 - r) = 0,$$

получим уравнение спрямляющей плоскости в виде:

$$(R - r, k^2[\dot{r}, \ddot{r}] - Tr, \dot{r}) = 0 \quad \text{или} \quad (R, \bar{N}_1) = D_1,$$

где

$$\begin{aligned} \bar{N}_1 &= [(k^2[\dot{r}, \ddot{r}] - Tr), \dot{r}] = k^2[[\dot{r}, \ddot{r}], \dot{r}] - T[r, \dot{r}], \\ D_1 &= (r, [(k^2[\dot{r}, \ddot{r}] - Tr), \dot{r}]) = k^2([\dot{r}, \ddot{r}], \dot{r}, r). \end{aligned}$$

Запишем уравнение касательной плоскости поверхности в виде:

$$(R, \bar{N}_2) = D_2, \quad \text{где } \bar{N}_2 = [r_u, r_v], \quad D_2 = (r, r_u, r_v).$$

Воспользуемся формулой для вычисления угла между плоскостями

$$\cos \theta = \frac{|(\bar{N}_1, \bar{N}_2) - \frac{D_1 D_2}{k^2}|}{\sqrt{\bar{N}_1^2 - \frac{D_1^2}{k^2}} \sqrt{\bar{N}_2^2 - \frac{D_2^2}{k^2}}}.$$

Произведем вычисления, применяя свойства векторного и смешанного произведения:

$$\begin{aligned} \left| (\bar{N}_1, \bar{N}_2) - \frac{D_1 D_2}{k^2} \right| &= \{k^2[[\dot{r}, \ddot{r}], \dot{r}] - T[r, \dot{r}]\}[r_u, r_v] - \frac{k^2([[\dot{r}, \ddot{r}], \dot{r}], r)(r, r_u, r_v)}{k^2} = \\ &= k^2 \dot{r}^2(\ddot{r}, r_u, r_v) - T[r, \dot{r}][r_u, r_v] - (r, (\ddot{r}(\dot{r}, \dot{r}) - \dot{r}(\dot{r}, \ddot{r}))) (r, r_u, r_v) = \\ &= k^2 \dot{r}^2(\ddot{r}, r_u, r_v) - (r, \dot{r}, \ddot{r})(r, \dot{r}, [r_u, r_v]) - \{\dot{r}^2(r, \ddot{r}) - (\dot{r}, \ddot{r})(r, \dot{r})\}(r, r_u, r_v) = \\ &= k^2 \dot{r}^2(\ddot{r}, r_u, r_v) - (r, r_u, r_v)\{(r, \dot{r})(\dot{r}, \ddot{r}) - \dot{r}^2(r, \ddot{r})\} - (\ddot{r}, r_u, r_v)\{r^2 \dot{r}^2 - (r, \dot{r})^2\} - \\ &\quad - \{\dot{r}^2(r, \ddot{r}) - (\dot{r}, \ddot{r})(r, \dot{r})\}(r, r_u, r_v) = (\ddot{r}, r_u, r_v)\{\dot{r}^2(k^2 - r^2) + (r, \dot{r})^2\} + \\ &\quad + (r, r_u, r_v)\{\dot{r}^2(r, \ddot{r}) - (r, \dot{r})(\dot{r}, \ddot{r})\} - (r, r_u r_v)\{\dot{r}^2(r, \ddot{r}) - (\dot{r}, \ddot{r})(r, \dot{r})\} = \\ &= (\ddot{r}, r_u, r_v)\{\dot{r}^2(k^2 - r^2) + (r, \dot{r})^2\}. \end{aligned}$$

Переходим к натуральной параметризации кривой (замене параметра) (подробно см.[1], с.75)

$$\dot{r}^2(k^2 - r^2) + (r, \dot{r})^2 = \frac{(k^2 - r^2)^2}{k^2},$$

получаем

$$\left| (\bar{N}_1, \bar{N}_2) - \frac{D_1 D_2}{k^2} \right| = \frac{(\ddot{r}, r_u, r_v)(k^2 - r^2)^2}{k^2}.$$

Перейдем к вычислению подкоренных выражений

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{N}_1^2 - \frac{D_1^2}{k^2}} &= \sqrt{\{k^2[[\dot{r}, \ddot{r}], \dot{r}] - T[r, \dot{r}]\}^2 - \frac{\{k^2([[\dot{r}, \ddot{r}], \dot{r}], r)\}^2}{k^2}} = \\ &= \sqrt{k^4[[\dot{r}, \ddot{r}], \dot{r}]^2 - 2k^2T[[\dot{r}, \ddot{r}], \dot{r}][r, \dot{r}] + T^2[r, \dot{r}]^2 - \frac{k^4(r, [k^2[\dot{r}, \ddot{r}] - T[r, \dot{r}]]^2}{k^2}} = \\ &= \sqrt{k^4[\dot{r}, \ddot{r}]^2 \dot{r}^2 - 2k^2T(r, \dot{r}, \ddot{r})\dot{r}^2 + T^2[r, \dot{r}]^2 - k^2\{[[\dot{r}, \ddot{r}], \dot{r}]^2 r^2 - [[[\dot{r}, \ddot{r}], \dot{r}], r]^2\}} = \\ &= \sqrt{k^4[\dot{r}, \ddot{r}]^2 \dot{r}^2 - 2k^2T^2 \dot{r}^2 + T^2[r, \dot{r}]^2 - k^2\{\dot{r}, \ddot{r}\}^2 \dot{r}^2 r^2 - (T\dot{r} - (r, \dot{r})[\dot{r}, \ddot{r}])^2\}} = \\ &= \sqrt{k^4[\dot{r}, \ddot{r}]^2 \dot{r}^2 - 2k^2T^2 \dot{r}^2 + T^2[r, \dot{r}]^2 - k^2\{[\dot{r}, \ddot{r}]^2[r, \dot{r}]^2 - T^2 \dot{r}^2\}} = \\ &= \sqrt{k^2[\dot{r}, \ddot{r}]^2(k^2 \dot{r}^2 - [r, \dot{r}]^2) - T^2(k^2 \dot{r}^2 - [r, \dot{r}]^2)} = \sqrt{(k^2 \dot{r}^2 - [r, \dot{r}]^2)(k^2[\dot{r}, \ddot{r}]^2 - T^2)} = \end{aligned}$$

$$= \sqrt{((k^2 - r^2)\dot{r}^2 + (r, \dot{r})^2)(k^2[\dot{r}, \ddot{r}]^2 - T^2)}.$$

На основании формул (см.[1], с.75, (37.5)) и (см.[1], с.80, (42.6))

$$((k^2 - r^2)\dot{r}^2 + (r, \dot{r})^2) = \frac{(k^2 - r^2)^2}{k^2}; \quad \sqrt{(k^2[\dot{r}, \ddot{r}]^2 - T^2)} = k_L \frac{(k^2 - r^2)^{3/2}}{k^2},$$

где k_L —кривизна пространственной кривой, находим

$$\begin{aligned} \sqrt{\bar{N}_1^2 - \frac{D_1^2}{k^2}} &= \frac{(k^2 - r^2)}{k} k_L \frac{(k^2 - r^2)^{3/2}}{k^2} = k_L \frac{(k^2 - r^2)^{5/2}}{k^3}. \\ \sqrt{\bar{N}_2^2 - \frac{D_2^2}{k^2}} &= \sqrt{[r_u, r_v]^2 - \frac{(r, r_u, r_v)^2}{k^2}} = \sqrt{\frac{k^2[r_u, r_v]^2 - (r, r_u, r_v)^2}{k^2}} = \\ &= \sqrt{\frac{H^2(k^2 - r^2)^3}{k^6}} = \frac{H(k^2 - r^2)^{3/2}}{k^3}. \end{aligned}$$

Где

$$k^2[r_u, r_v]^2 - (r, r_u, r_v)^2 = \frac{H^2(k^2 - r^2)^3}{k^4}, \quad \text{где } H^2 = g_{11}g_{22} - g_{12}^2.$$

(подробности см.[1], с.86). Известно, что вторая производная радиус-вектора точки кривой равна

$$\ddot{r} = r''_{ij} \frac{du^i}{dt} \frac{du^j}{dt} + r'_i \frac{d^2 u^i}{dt^2}.$$

Полученные результаты подставим в формулу для нахождения косинуса угла между спрямляющей и касательной плоскостью:

$$\cos \theta = \frac{1}{k_L} \frac{k^4 \{(r_{uu}, r_u, r_v)u'^2 + 2(r_{uv}, r_u, r_v)u'v' + (r_{vv}, r_u, r_v)v'^2\}}{(k^2 - r^2)^2 H}.$$

Откуда

$$L = \frac{k^4(r_{uu}, r_u, r_v)}{(k^2 - r^2)^2 H}, \quad M = \frac{k^4(r_{uv}, r_u, r_v)}{(k^2 - r^2)^2 H}, \quad N = \frac{k^4(r_{vv}, r_u, r_v)}{(k^2 - r^2)^2 H},$$

получим, что

$$K_e = \frac{k^8}{(k^2 - r^2)^4 H^4} \{(r_{uu}, r_u, r_v)(r_{vv}, r_u, r_v) - (r_{uv}, r_u, r_v)^2\}.$$

Раскроем скобки и получим:

$$K_e = \frac{k^8}{(k^2 - r^2)^4 H^4} \left[\begin{vmatrix} (r_{uu}, r_{vv}) & (r_{uu}, r_u) & (r_{uu}, r_v) \\ (r_u, r_{vv}) & r_u^2 & (r_u, r_v) \\ (r_v, r_{vv}) & (r_v, r_u) & r_v^2 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} r_{uv}^2 & (r_{uv}, r_u) & (r_{uv}, r_v) \\ (r_u, r_{uv}) & r_u^2 & (r_u, r_v) \\ (r_v, r_{uv}) & (r_v, r_u) & r_v^2 \end{vmatrix} \right].$$

Введем для сокращения записей обозначения:

$$r_u^2 = e, \quad (r_u, r_v) = f, \quad r_v^2 = g. \quad (1)$$

Формула примет вид:

$$K_e = \frac{k^8}{(k^2 - r^2)^4 H^4} \left[\begin{vmatrix} (r_{uu}, r_{vv}) - r_{uv}^2 & (r_{uu}, r_u) & (r_{uu}, r_v) \\ (r_u, r_{vv}) & e & f \\ (r_v, r_{vv}) & f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & (r_{uv}, r_u) & (r_{uv}, r_v) \\ (r_u, r_{uv}) & e & f \\ (r_v, r_{uv}) & f & g \end{vmatrix} \right].$$

Продифференцируем соотношения (1) по u и v

$$2(r_{uu}, r_u) = e_u, \quad 2(r_{uv}, r_u) = e_v, \quad 2(r_{vv}, r_v) = g_v, \quad 2(r_{vu}, r_v) = g_u,$$

$$(r_{uu}, r_v) + (r_u, r_{uv}) = f_u, \quad (r_u, r_{vv}) + (r_{uv}, r_v) = f_v.$$

Произведем вычисления

$$(r_{uu}, r_v) + (r_u, r_{uv}) - (r_u, r_{uv}) = f_u - \frac{1}{2}e_v, \quad (r_u, r_{vv}) + (r_{uv}, r_v) - (r_{vu}, r_v) = f_v - \frac{1}{2}g_u,$$

$$(r_{uu}, r_{vv}) - r_{uv}^2 = (r_{uu}, r_v)_v - (r_{uv}, r_v)_u = f_{uv} - \frac{1}{2}e_{vv} - \frac{1}{2}g_{uu}.$$

Полученные результаты подставим в формулу для эйлеровой кривизны

$$K_e = \frac{k^8}{(k^2 - r^2)^4 H^4} \left[\begin{vmatrix} f_{uv} - \frac{1}{2}e_{vv} - \frac{1}{2}g_{uu} & \frac{1}{2}e_u & f_u - \frac{1}{2}e_v \\ f'_v - \frac{1}{2}g_u & e & f \\ \frac{1}{2}g_v & f & g \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}e_v & \frac{1}{2}g_u \\ \frac{1}{2}e_v & e & f \\ \frac{1}{2}g_u & f & g \end{vmatrix} \right]. \quad (2)$$

Рассмотрим гауссову кривизну K_g , она определяется через коэффициенты первой квадратичной формы поверхности и их производных:

$$K_g = \frac{1}{H^4} \left[\begin{vmatrix} F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} & \frac{1}{2}E_u & F_u - \frac{1}{2}E_v \\ F_v - \frac{1}{2}G_u & E & F \\ \frac{1}{2}G_v & F & G \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 0 & \frac{1}{2}E_v & \frac{1}{2}G_u \\ \frac{1}{2}E_v & E & F \\ \frac{1}{2}G_u & F & G \end{vmatrix} \right]. \quad (3)$$

Сравним между собой величины K_e и K_g . Коэффициенты первой квадратичной формы можно выразить через величины e, f, g следующим образом:

$$E = \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \{(r, r_u)^2 + (k^2 - r^2)e\}, \quad F = \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \{(r, r_u)(r, r_v) + (k^2 - r^2)f\},$$

$$G = \frac{k^2}{(k^2 - r^2)^2} \{(r, r_v)^2 + (k^2 - r^2)g\}.$$

Найдем производные коэффициентов $E_u, F_u, G_u, E_v, F_v, G_v, E_{vv}, F_{uv}, G_{uu}$. Для облегчения вычислений поместим начало координат в рассматриваемую точку поверхности M , в которой вычисляются K_e и K_g . Тогда бельтрамиев вектор r точки M есть нулевой вектор, $r = 0$. Как нетрудно подсчитать, тогда в точке M будем иметь

$$E = e, \quad F = f, \quad G = g,$$

$$E_u = e_u, \quad F_u = f_u, \quad G_u = g_u, \quad E_v = e_v, \quad F_v = f_v, \quad G_v = g_v,$$

$$E_{vv} = \frac{1}{k^2}(2f^2 + 2eg + k^2 e_{vv}), \quad F_{uv} = \frac{1}{k^2}(3f^2 + eg + k^2 f_{uv}), \quad G_{uu} = \frac{1}{k^2}(2f^2 + 2eg + k^2 g_{uu}).$$

Подставим эти значения, вычисленные в точке M в формулу (2). Тогда получим, что множитель $\frac{k^8}{(k^2 - r^2)^4} = 1$. Заметим, что в формуле (3) можно сделать преобразование

$$F_{uv} - \frac{1}{2}E_{vv} - \frac{1}{2}G_{uu} = -\frac{1}{k^2}(eg - f^2) + f_{uv} - \frac{1}{2}e_{vv} - \frac{1}{2}g_{uu}.$$

Тогда получим следующее выражение для эйлеровой кривизны

$$K_e = K_g + \frac{1}{k^2}.$$

3. Вывод уравнения нормальной деформации поверхности

Пусть в модели Бельтрами-Клейна поверхность задана в векторной форме $\bar{r} = \bar{r}(u, v)$. Тогда уравнение касательной плоскости к поверхности имеет вид:

$$(\bar{N}, \bar{R} - \bar{r}) = 0,$$

где $\bar{N} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v]$ — нормальный вектор в точке поверхности по Евклиду.

Тогда радиус-вектор полюса $\bar{P}$ касательной плоскости можно вычислить по следующей формуле

$$\bar{P} = \frac{k^2 \bar{N}}{(\bar{N}, \bar{r})}.$$

Из вектора полюса вычитаем радиус-вектор точки поверхности

$$\bar{N}_1 = \bar{P} - \bar{r} = \frac{k^2 \bar{N}}{(\bar{N}, \bar{r})} - \bar{r} = \frac{k^2 \bar{N} - (\bar{N}, \bar{r}) \bar{r}}{(\bar{N}, \bar{r})}.$$

Отсюда получим нормальный вектор по Лобачевскому в текущей точке поверхности

$$\bar{N}_L = k^2 \bar{N} - (\bar{N}, \bar{r}) \bar{r}, \quad (\bar{N}, \bar{r}) \neq 0.$$

Введем условие нормированности:

$$g_{\alpha\beta} N_L^\alpha N_L^\beta \mu^2 = 1,$$

где $g_{\alpha\beta}$ — метрический тензор модели Бельтрами-Клейна.

Введем единичный нормальный вектор по Лобачевскому

$$\bar{n}_L = \mu \bar{N}_L.$$

Тогда уравнение специальной нормальной деформации поверхности можно записать в виде

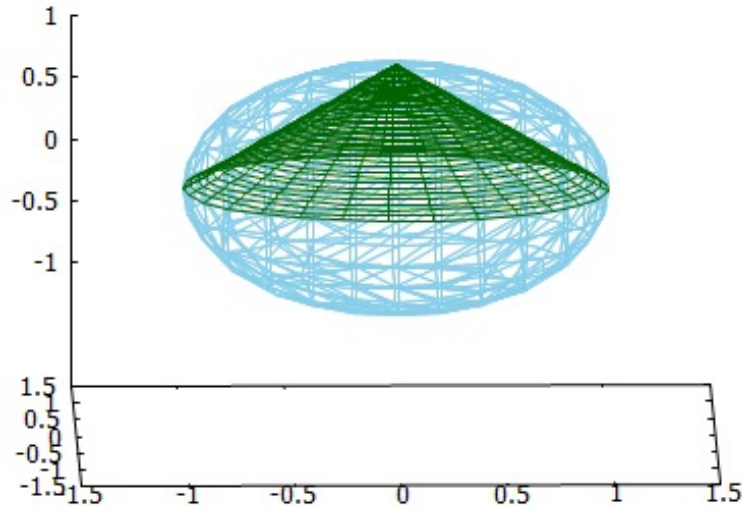
$$\bar{\xi} = \bar{r} + \lambda \bar{n}_L, \quad \text{где } \lambda = \text{const.}$$

В дальнейшем будем рассматривать поверхности в модели Бельтрами-Клейна с постоянной Лобачевского $k = 1$.

4. Круговой конус

Пусть меридианом поверхности вращения является прямая. Вращаем параллельные прямые в модели Бельтрами-Клейна вокруг оси Oz . Тогда векторно-параметрическое уравнение кругового конуса примет вид:

$$\bar{r} = u\bar{e}(v) + c(u+1)\bar{k}, \quad \text{где } -1 < u < 0, \quad 0 < v < 2\pi.$$



Рассмотрим конус при $c = 1$. Запишем матрицу метрического тензора, ограниченного на эту поверхность

$$(g_{\alpha\beta}) = \begin{bmatrix} \frac{u \cos^2(v) - 2u - 2}{u^3 + 8u^2 + 4u} & \frac{\cos(v) \sin(v)}{4u^2 + 8u + 4} & \frac{\cos(v)}{4u^2 + 4u} \\ \frac{\cos(v) \sin(v)}{4u^2 + 8u + 4} & \frac{u \sin^2(v) - 2u - 2}{u^3 + 8u^2 + 4u} & \frac{\sin(v)}{4u^2 + 4u} \\ \frac{\cos(v)}{4u^2 + 4u} & \frac{\sin(v)}{4u^2 + 4u} & \frac{-(u-1)}{4u^3 + 4u^2} \end{bmatrix}.$$

Находим матрицу метрического тензора, индуцированного римановой метрикой в пространстве Лобачевского на поверхности

$$(g_{ij}) = X^T(g_{\alpha\beta})X = \begin{bmatrix} \frac{1}{4u^2(u+1)^2} & 0 \\ 0 & \frac{-u}{2(u+1)} \end{bmatrix}, \quad \text{где } X = \begin{bmatrix} \cos v & -u \sin v \\ \sin v & u \cos v \\ 1 & 0 \end{bmatrix};$$

$$(g^{ij}) = \begin{bmatrix} 4u^2(u+1)^2 & 0 \\ 0 & \frac{2(u+1)}{-u} \end{bmatrix}.$$

Тогда символы Кристоффеля имеют вид:

$$\Gamma_{11}^1 = \frac{1}{2} (g^{11}(\partial_1 g_{11})) = \frac{1}{2} \left(4u^2(u+1)^2 \left(-\frac{8u(u+1)^2 + 8u^2(u+1)}{16u^4(u+1)^4} \right) \right) = -\frac{2u+1}{u(u+1)},$$

$$\Gamma_{22}^1 = \frac{1}{2} (g^{11}(-\partial_1 g_{22})) = \frac{1}{2} \left(4u^2(u+1)^2 \left(\frac{2(u+1) - 2u}{4(u+1)^2} \right) \right) = u^2,$$

$$\Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \frac{1}{2} (g^{22}(\partial_1 g_{22})) = \frac{1}{2} \left(\frac{2(u+1)}{-u} \left(\frac{-2(u+1) + 2u}{4(u+1)^2} \right) \right) = \frac{1}{2u(u+1)},$$

$$\Gamma_{12}^1 = \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{11}^2 = \Gamma_{22}^2 = 0.$$

Подсчитаем компоненты тензора Риччи

$$R_{11} = R_{111}^1 + R_{211}^2 = \{-\partial_1 \Gamma_{21}^2 + \Gamma_{11}^1 \Gamma_{21}^2 - \Gamma_{21}^2 \Gamma_{12}^2\} = \frac{2(u+1) + 2u}{4u^2(u+1)^2} + \frac{-2u-1}{2u^2(u+1)^2} - \frac{1}{4u^2(u+1)^2} = \frac{2(u+1) + 2u - 4u - 2 - 1}{4u^2(u+1)^2} = \frac{-1}{4u^2(u+1)^2},$$

$$R_{12} = R_{112}^1 + R_{212}^2 = 0,$$

$$R_{21} = R_{121}^1 + R_{221}^2 = 0,$$

$$R_{22} = R_{122}^1 + R_{222}^2 = \{\partial_1 \Gamma_{22}^1 + \Gamma_{22}^1 \Gamma_{11}^1 - \Gamma_{12}^2 \Gamma_{22}^1\} = 2u - \frac{u^2(2u+1)}{u(u+1)} - \frac{u^2}{2u(u+1)} = \frac{4u^2(u+1) - 2u^2(2u+1) - u^2}{2u(u+1)} = \frac{u}{2(u+1)}.$$

Тогда скалярная кривизна равна

$$R = R_{11}g^{11} + R_{12}g^{12} + R_{21}g^{21} + R_{22}g^{22} = \frac{-4u^2(u+1)^2}{4u^2(u+1)^2} + \frac{u}{2(u+1)} \frac{2(u+1)}{-u} = -2.$$

Получаем, что гауссова кривизна поверхности

$$K_g = \frac{R}{2} = \frac{-2}{2} = -1 < 0,$$

а эйлерова кривизна

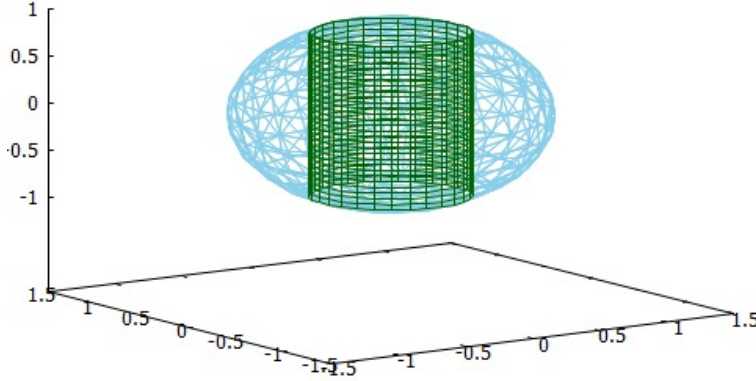
$$K_e = K_g + \frac{1}{1^2} = 0.$$

Таким образом, данная поверхность в пространстве Лобачевского, есть поверхность постоянной отрицательной гауссовой кривизны и постоянной нулевой эйлеровой кривизны.

5. Круговой цилиндр

Зададим круговой цилиндр векторно-параметрическим уравнением:

$$\bar{r} = a\bar{e}(u) + v\bar{k}, \quad \text{где } 0 < u < 2\pi, \quad |v| \leq \sqrt{1-a^2}.$$



Используем программу Махита для вычисления гауссовой и эйлеровой кривизн поверхности в пространстве Лобачевского.

Сначала вычислим матрицу метрического тензора

$$(g_{ij}) = \begin{bmatrix} \frac{a^2}{1-v^2-a^2} & 0 \\ 0 & \frac{-(a^2-1)}{(1-v^2-a^2)^2} \end{bmatrix}.$$

Затем вычислим символы Кристоффеля

$$\Gamma_{11}^1 = \Gamma_{21}^2 = \Gamma_{12}^2 = \Gamma_{22}^1 = 0,$$

$$\Gamma_{11}^2 = \frac{va^2}{a^2-1}, \quad \Gamma_{21}^1 = \Gamma_{12}^1 = \frac{v}{1-v^2-a^2}, \quad \Gamma_{22}^2 = \frac{2v}{1-v^2-a^2}$$

и компоненты тензора Риччи

$$R_{11} = \frac{-a^2}{1-v^2-a^2}, \quad R_{12} = R_{21} = 0, \quad R_{22} = \frac{a^2-1}{(1-v^2-a^2)^2}.$$

Тогда скалярная кривизна равна $R = -2$, а гауссова и эйлерова кривизна поверхности равны $K_g = -1 < 0$, $K_e = 0$. Следовательно круговой цилиндр является также поверхностью постоянной отрицательной гауссовой кривизны и постоянной нулевой эйлеровой кривизны.

6. Параболоиды

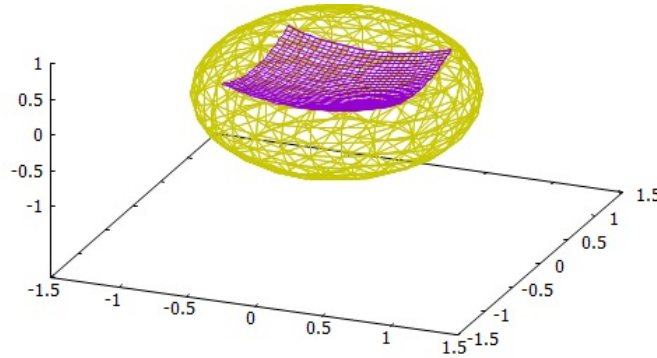
6.1. Параболоид вращения

Зададим параболоид вращения в виде:

$$z = a(x^2 + y^2), \quad U = \{(x, y) : x^2 + y^2 + a^2(x^2 + y^2)^2 < 1\}.$$

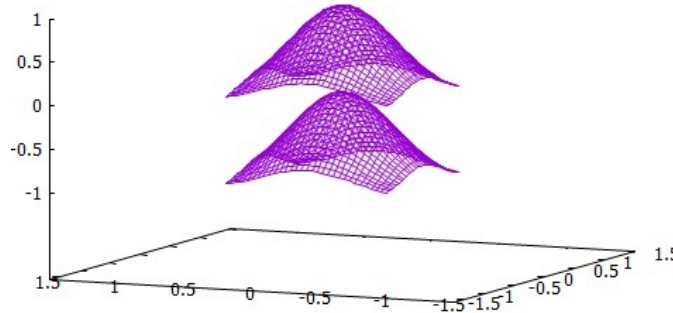
Рассмотрим следующую параметризацию этой поверхности

$$x = u, \quad y = v, \quad z = a(u^2 + v^2), \quad (u, v) \in U.$$



С помощью пакета Maxima построим графики гауссовой и эйлеровой кривизн, где $a = 0.5$

$$K_g = \frac{16(v^2 + u^2 - 2)(v^2 + u^2)(v^2 + u^2 + 2)}{((v^2 + u^2 - 2)^2 - 8)^2},$$
$$K_e = \frac{((v^2 + u^2 + 2)^2 - 8)^2}{((v^2 + u^2 - 2)^2 - 8)^2}.$$

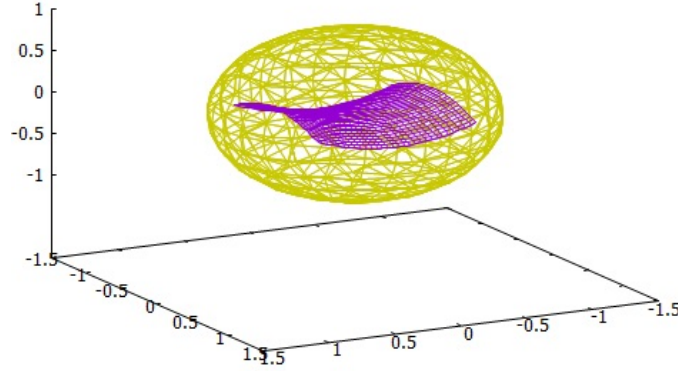


Таким образом, параболоид вращения имеет неположительную гауссову кривизну и неотрицательную эйлерову кривизну.

6.2. Гиперболический параболоид

Рассмотрим параметризацию гиперболического параболоида

$$x = u, \quad y = v, \quad z = a(u^2 - v^2), \quad (u, v) \in U = \{(x, y) : x^2 + y^2 + a^2(x^2 - y^2)^2 < 1\}.$$

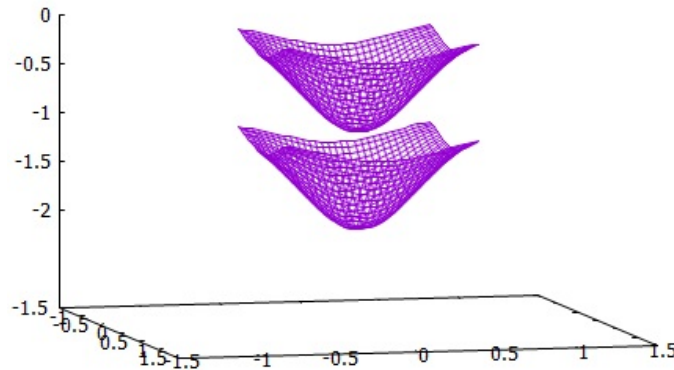


Пусть $a = 0.5$, тогда гауссова кривизна имеет следующий вид:

$$K_g = -\frac{2(v^8 + u^8) + (v^4 + u^4)(16 - 8u^2v^2) + 12v^4u + 96u^2v^2 + 32}{((v^2 - u^2)^2 - 4(v^2 + u^2 + 4))^2},$$

а эйлерова кривизна

$$K_e = -\frac{((v^2 - u^2)^2 + 4(v^2 + u^2 - 1))^2}{((v^2 - u^2)^2 - 4(v^2 + u^2 + 4))^2}.$$



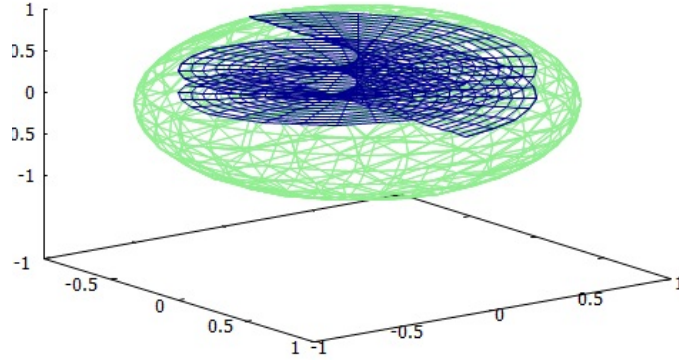
Данная поверхность имеет отрицательную как гауссову, так и эйлерову кривизну.

7. Геликоид

Зададим геликоид со следующим векторно-параметрическим уравнением

$$\bar{r} = u\bar{e}(v) + bv\bar{k}, \quad \text{где } |u| < \sqrt{1 - b^2v^2}, \quad 0 < v < 2\pi.$$

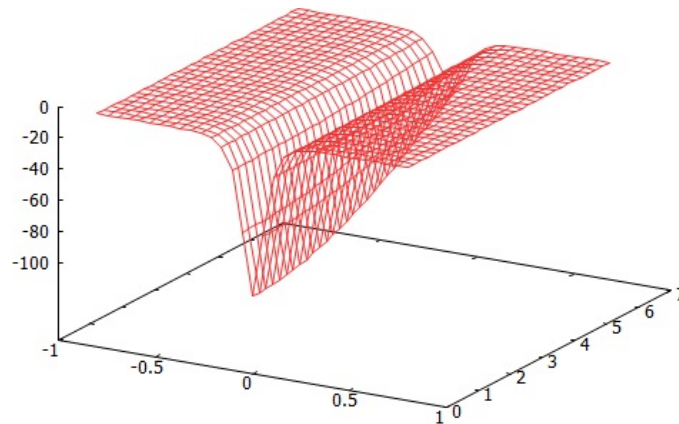
Положим $b = 0.1$, тогда носитель этой функции имеет вид



$$K_g = -\frac{(100u^4 + 1)(v^4 - 200v^2 + 10100)}{100(u^2v^2 - 100u^2 - 1)^2},$$

$$K_e = -\frac{(v^2 + 100u^2 - 100)^2}{100(u^2v^2 - 100u^2 - 1)^2}.$$

Построим график эйлеровой кривизны с помощью пакета `math`

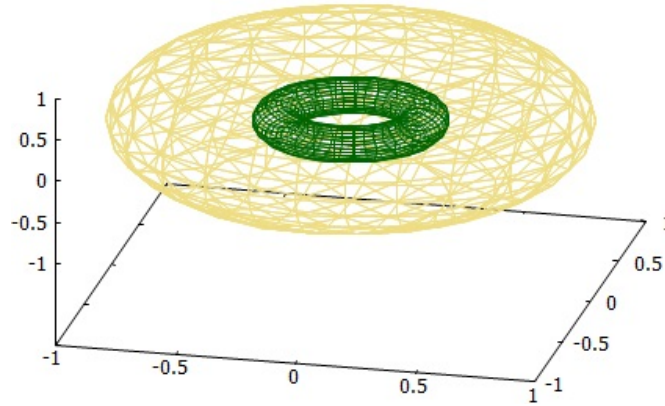


8. Тор

Зададим тор в модели Бельтрами-Клейна со следующим уравнением:

$$\bar{r} = (b + a \cos(u))\bar{e}(v) + a_1 \sin(u)\bar{k}, \quad \text{где} \quad (b + a \cos(u))^2 + a_1^2 \sin^2 u < 1; \quad 0 < v < 2\pi.$$

С помощью пакета Maxima вычислим гауссову (где $a = 0.1$; $a_1 = 0.2$; $b = 0.3$)

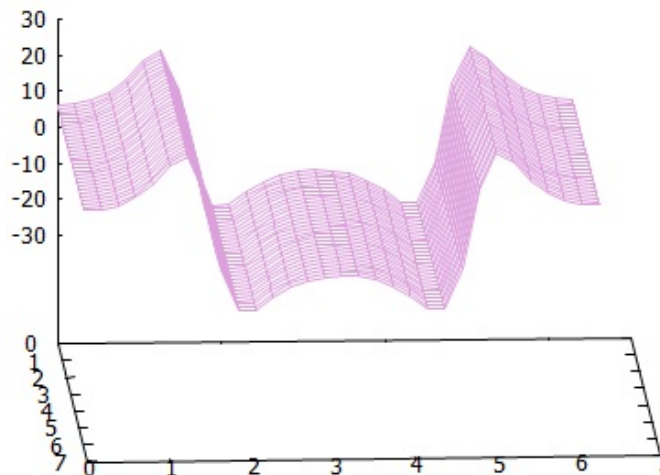


$$K_g = -\frac{3(3\cos(v)^5 + 13\cos(v)^4 - 186\cos(v)^3 + 3762\cos(v)^2 - 29769\cos(v) + 1089)}{(\cos(v) - 3)^2(\cos(v) + 3)(3\cos(v) + 11)^2}$$

и эйлерову кривизны

$$K_e = \frac{400(\cos(v) - 15)^2 \cos(v)}{(\cos(v) - 3)^2(\cos(v) + 3)(3\cos(v) + 11)^2}.$$

Построим график эйлеровой кривизны тора



9. Поверхности вращения

Рассмотрим поверхность, уравнение которой имеет вид:

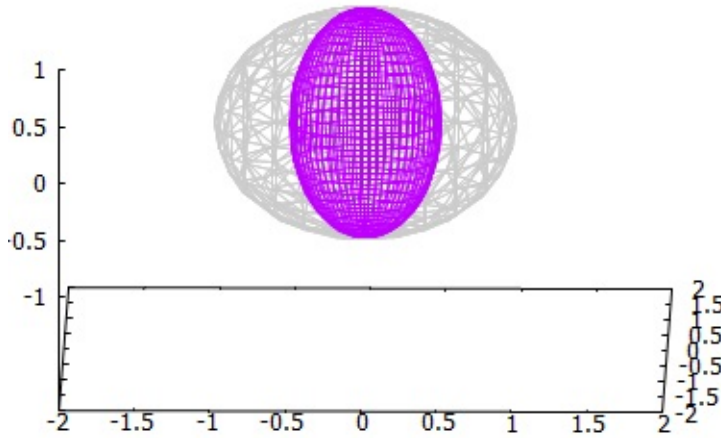
$$\bar{r} = b \cos v \bar{e}(u) + c \sin v \bar{k}. \quad (4)$$

Гауссова и эйлерова кривизна данной поверхности равна

$$K_g = \frac{(c-1)(c+1)(\sin^2 v (c^2 - b^2) - c(b^2 - 1))(\sin^2 v (c^2 - b^2) + c(b^2 - 1))}{(\sin^2 v (c^2 - b^2) + c^2(b^2 - 1))^2},$$

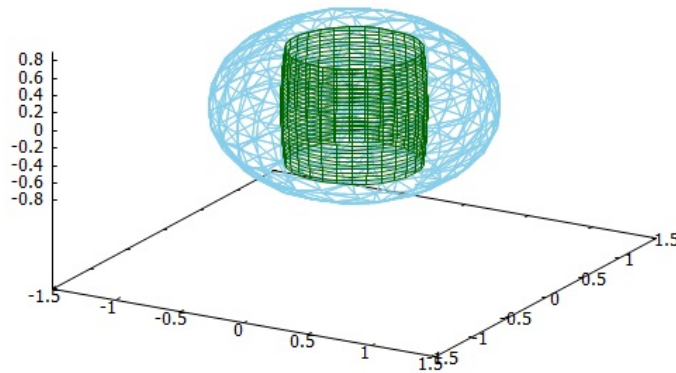
$$K_e = \frac{c((b^2 - c^2) + \sin^2 v (c^2 - b^2) + c^2 - 1)^2}{(\sin^2 v (c^2 - b^2) + c^2(b^2 - 1))^2}.$$

Эквидистантная поверхность прямой есть поверхность при $c = 1$. Эта поверх-



ность имеет постоянную нулевую гауссову кривизну $K_g = 0$ и постоянную положительную эйлерову кривизну $K_e = 1$.

Положим в уравнение (4) $b = 0, 1$ и $c > 1$, тогда получим поверхность - круговой цилиндр с эквидистантными образующими:

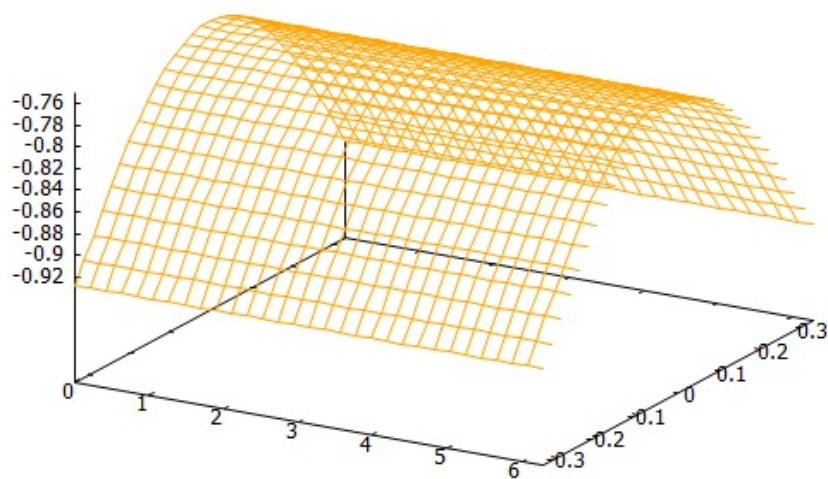


Кривизны данной поверхности имеют вид:

$$K_g = \frac{3(133 \sin^2 v - 66)(133 \sin^2 v + 66)}{(133 \cos^2 v - 1)^2},$$

$$K_e = \frac{4(133 \cos^2 v - 100)^2}{(133 \cos^2 v - 1)^2}.$$

Построим график эйлеровой кривизны поверхности с помощью пакета `maxima`:



10. Нормальная деформация геликоида

Рассмотрим геликоид с векторно-параметрическим уравнением:

$$\bar{r} = u\bar{e}(v) + bv\bar{k}.$$

Вычислим нормальный вектор по Евклиду

$$\bar{r}_u = \bar{e}(v), \quad \bar{r}_v = u\bar{g}(v) + b\bar{k},$$

$$\bar{N} = [\bar{r}_u, \bar{r}_v] = u\bar{k} - b\bar{g}(v); \quad (\bar{N}, \bar{r}) = bvu.$$

Полученные результаты подставим в формулу для нормального вектора в пространстве Лобачевского

$$\bar{N}_L = u\bar{k} - b\bar{g}(v) - bvu(u\bar{e}(v) + bv\bar{k}) = -bvu^2\bar{e}(v) - b\bar{g}(v) + \bar{k}u(1 - b^2v^2).$$

Используем условие нормированности:

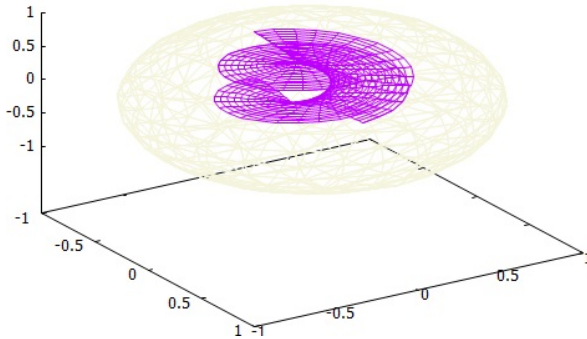
$$1 = \frac{b^2v^2u^2 - u^2 - b^2}{b^2v^2u^2 - u^2 - b^2}\mu^2 \quad \Rightarrow \quad \mu = \sqrt{\frac{b^2v^2 + u^2 - 1}{b^2v^2u^2 - u^2 - b^2}}.$$

Тогда единичный нормальный вектор по Лобачевскому:

$$\bar{n}_L = \sqrt{\frac{b^2v^2 + u^2 - 1}{b^2v^2u^2 - u^2 - b^2}}(-bvu^2\bar{e}(v) - b\bar{g}(v) + \bar{k}u(1 - b^2v^2)).$$

Следовательно уравнение специальной нормальной деформации геликоида примет вид

$$\bar{\xi} = u\bar{e}(v) + bv\bar{k} + \sqrt{\frac{b^2v^2 + u^2 - 1}{b^2v^2u^2 - u^2 - b^2}}(-bvu^2\lambda\bar{e}(v) - b\lambda\bar{g}(v) + \bar{k}u\lambda(1 - b^2v^2)), \quad \lambda = const.$$



11. Код программ в пакете Maxima

Программный код для нахождения гауссовой и эйлеровой кривизны поверхностей.

```
load(draw)$
load(ctensor)$
load(itensor)$
X$ Y$ Z$
wxdraw3d(parametric_surface(X,Y,Z,u,u(min),u(max),v,v(min),v(max)));

/*компоненты метрического тензора*/
G11:trigsimp(ev((1-y^2-z^2)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X,y=Y,z=Z))$
G12:trigsimp(ev((x*y)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X,y=Y,z=Z))$
G22:trigsimp(ev((1-x^2-z^2)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X,y=Y,z=Z))$
G32:trigsimp(ev((z*y)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X,y=Y,z=Z))$
G33:trigsimp(ev((1-x^2-y^2)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X,y=Y,z=Z))$
G13:trigsimp(ev((x*z)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X,y=Y,z=Z))$
A:matrix([G11,G12,G13],[G12,G22,G32],[G13,G32,G33])$
B:matrix([diff(X,u),diff(X,v)],[diff(Y,u),diff(Y,v)],
[diff(Z,u),diff(Z,v)])$
C:transpose(B)$
lg:trigsimp(C.A.B)$ /*метрический тензор, индуцированный на поверхно-
сти*/
ls:trigsimp((C.A.B)^( -1))$
components(g([i,j],[ ]),lg)$
components(g([ ],[k,s]),ls)$
P_11:g([1,1],[ ])$ P11:g([ ],[1,1])$
P_12:g([1,2],[ ])$ P12:g([ ],[1,2])$
P_21:g([2,1],[ ])$ P21:g([ ],[2,1])$
P_22:g([2,2],[ ])$ P22:g([ ],[2,2])$

/*символы Кристоффеля*/
gamma1[1,1]:trigsimp((P11*(diff(P_11,u)+diff(P_11,u)-diff(P_11,u))+
P12*(diff(P_12,u)+diff(P_12,u)-diff(P_11,v)))/2)$
gamma1[1,2]:trigsimp((P11*(diff(P_21,u)+diff(P_11,v)-diff(P_12,u))+
P12*(diff(P_22,u)+diff(P_12,v)-diff(P_12,v)))/2)$
gamma1[2,1]:trigsimp((P11*(diff(P_11,v)+diff(P_21,u)-diff(P_21,u))+
P12*(diff(P_12,v)+diff(P_22,u)-diff(P_21,v)))/2)$
gamma1[2,2]:trigsimp((P11*(diff(P_21,v)+diff(P_21,v)-diff(P_22,u))+
```

```

P12*(diff(P_22,v)+diff(P_22,v)-diff(P_22,v)))/2)$

gamma2[1,1]:trigsimp((P21*(diff(P_11,u)+diff(P_11,u)-diff(P_11,u))+
P22*(diff(P_12,u)+diff(P_12,u)-diff(P_11,v)))/2)$
gamma2[1,2]:trigsimp((P21*(diff(P_21,u)+diff(P_11,v)-diff(P_12,u))+
P22*(diff(P_22,u)+diff(P_12,v)-diff(P_12,v)))/2)$
gamma2[2,1]:trigsimp((P21*(diff(P_11,v)+diff(P_21,u)-diff(P_21,u))+
P22*(diff(P_12,v)+diff(P_22,u)-diff(P_21,v)))/2)$
gamma2[2,2]:trigsimp((P21*(diff(P_21,v)+diff(P_21,v)-diff(P_22,u))+
P22*(diff(P_22,v)+diff(P_22,v)-diff(P_22,v)))/2)$
D:matrix([gamma1[1,1],gamma1[1,2]],[gamma1[2,1],gamma1[2,2]])$
D1:matrix([gamma2[1,1],gamma2[1,2]],[gamma2[2,1],gamma2[2,2]])$
components(w([i,j],[ ]),D)$ components(q([i,j],[ ]),D1)$
G111:w([1,1],[ ])$ G211:q([1,1],[ ])$
G112:w([1,2],[ ])$ G212:q([1,2],[ ])$
G121:w([2,1],[ ])$ G221:q([2,1],[ ])$
G122:w([2,2],[ ])$ G222:q([2,2],[ ])$

/*компоненты тензора Риччи*/
R11:trigsimp((diff(G111,u)-diff(G111,u)+G111*G111+G211*G112-G111*G111-
G211*G112)+ (diff(G211,v)-diff(G221,u)+G111*G221+G211*G222-G121*G211-
G221*G212))$
R12:trigsimp((diff(G112,u)-diff(G112,u)+G112*G111+G212*G112-G112*G111-
G212*G112)+ (diff(G212,v)-diff(G222,u)+G112*G221+G212*G222-G122*G211-
G222*G212))$
R21:trigsimp((diff(G121,u)-diff(G111,v)+G121*G111+G221*G112-G111*G121-
G211*G122)+ (diff(G221,v)-diff(G221,v)+G121*G221+G221*G222-G121*G221-
G221*G222))$
R22:trigsimp((diff(G122,u)-diff(G112,v)+G122*G111+G222*G112-G112*G121-
G212*G122)+ (diff(G222,v)-diff(G222,v)+G122*G221+G222*G222-G122*G221-
G222*G222))$

/*скалярная кривизна*/
R:factor(trigsimp(R11*P11+R12*P12+R21*P21+R22*P22))$
K1:factor(trigsimp(R/2)); /*гауссова кривизна*/
K:factor(trigsimp(K1+1)); /*эйлерова кривизна*/
wxdraw3d(explicit(K,u,u(min),u(max),v,v(min),v(max)));
kill(all);

```

Программный код для нахождения уравнение нормальной деформация поверхности

```

load(draw)$
load(ctensor)$
X$ Y$ Z$

/*нормальный вектор по Евклиду*/
Nx:trigsimp(determinant(matrix([diff(Y,u),diff(Z,u)],
[diff(Y,v),diff(Z,v)]))))$
Ny:-trigsimp(determinant(matrix([diff(X,u),diff(Z,u)],
[diff(X,v),diff(Z,v)]))))$
Nz:trigsimp(determinant(matrix([diff(X,u),diff(Y,u)],
[diff(X,v),diff(Y,v)]))))$
rN:trigsimp(Nx*X+Ny*Y+Nz*Z)$
/*нормальный вектор по Лобачевскому в точке поверхности*/
Nlx:trigsimp(Nx-rN*X)$ Nly:trigsimp(Ny-rN*Y)$ Nlz:trigsimp(Nz-rN*Z)$

G11:trigsimp(ev((1-y^2-z^2)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X ,y=Y,z=Z))$
G12:trigsimp(ev((x*y)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X,y=Y,z=Z))$
G22:trigsimp(ev((1-x^2-z^2)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X,y=Y,z=Z))$
G32:trigsimp(ev((z*y)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X,y=Y,z=Z))$
G33:trigsimp(ev((1-x^2-y^2)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X,y=Y,z=Z))$
G13:trigsimp(ev((x*z)/(1-x^2-y^2-z^2)^2,x=X,y=Y,z=Z))$
A:trigsimp(G11*Nlx*Nlx+2*G12*Nlx*Nly+G22*Nly*Nly+2*G13*Nlx*Nlz+
2*G32*Nly*Nlz+G33*Nlz*Nlz)$
M:1/(sqrt(A));
nlx:Nlx*M$ nly:Nly*M$ nlz:Nlz*M$ p$
/*нормальная деформация поверхности*/
tx:X+p*nlx;ty:Y+p*nly;tz:Z+p*nlz;
draw3d(parametric_surface(tx,ty,tz,u,u(min),u(max),v,v(min),v(max)));

```

12. Заключение

В ходе выполнения работы были выведены формулы гауссовой и эйлеровой кривизн поверхности в модели Бельтрами-Клейна. Были рассмотрены такие поверхности, как круговой цилиндр, круговой конус, эквидистантная поверхность прямой, у этих поверхностей кривизны постоянны. Также были построены графики кривизн эллиптического и гиперболического параболоидов, геликоида и тора в пакете Mathematica.

Кроме того, в работе было получено уравнение специальной нормальной деформации геликоида.

Литература

- [1] *Трайнин Я. Л.* Аналитическая геометрия в пространстве Лобачевского: Учеб. пособие. - Новосибирск, 1974. - 285 с.
- [2] *Розенфельд Б. А.* Неевклидовы пространства. - М.: Знание, 1969. - 648 с.
- [3] *Сосов Е. Н.* Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности. Часть 1: Учебно-методическое пособие. - Казань: Казанский федеральный университет, 2012. - 38 с.
- [4] *Сосов Е. Н.* Геометрия Лобачевского и ее применение в специальной теории относительности. Часть 2: Учебно-методическое пособие. - Казань: Казанский федеральный университет, 2012. - 32 с.
- [5] *Ефимов Н. В.* Высшая геометрия. - М.: Издательство "Наука", 1971. - 576 с.
- [6] *Каган В. Ф.* Основания геометрии. Часть первая: Геометрия Лобачевского и ее предистория, 1949.- 492 с.
- [7] *Норден А. П.* Элементарное введение в геометрию Лобачевского. -М.: Гостехиздат, 1953. - 248 с.
- [8] *Постников М. М.* Лекции по геометрии. Семестр II. Линейная алгебра и дифференциальная геометрия — М.: Наука, 1979.
- [9] *Александров А. Д.* Геометрия: Учебник. - 2-е изд.-БХВ-Петербург: Учебная литература для вузов, 2010.-624 с.
- [10] *Погорелов А. В.* Дифференциальная геометрия. - М.: Издательство "Наука", 1974. - 176 с.