

УДК 532.529.5

doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.411-425

ПОГРЕШНОСТЬ РАСЧЕТА ПАРАМЕТРОВ ДВУХФАЗНОЙ ТУРБУЛЕНТНОЙ СТРУИ ПРИ ИСПОЛЬЗОВАНИИ ОДНОЖИДКОСТНОЙ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ

Ю.В. Зуев

*Московский авиационный институт (национальный исследовательский
университет), г. Москва, 125993, Россия*

Аннотация

Статья посвящена определению условий, при которых для расчета двухфазной турбулентной неизотермической струи может применяться упрощенная односкоростная однотемпературная (одножидкостная) математическая модель, позволяющая определять среднемассовые скорости и температуры гетерогенной среды. Методом исследования является математическое моделирование с использованием разработанной математической модели неравновесной по скоростям и температурам двухфазной струи. Актуальность исследования определяется тем, что при решении многих прикладных задач в различных областях техники необходимо знать параметры двухфазных струйных течений, для определения которых желательно иметь простые математические модели. В результате расчетов, выполненных с помощью приведенной математической модели двухфазной турбулентной неравновесной струи, в критериальном виде получены зависимости, которые позволяют оценить максимальную погрешность расчета параметров двухфазного струйного течения при использовании одножидкостной модели.

Ключевые слова: двухфазная струя, газ, частицы, математическое моделирование, выбор математической модели, точность расчетов

Введение

Двухфазные турбулентные струйные течения используются при организации процесса смесеобразования в тепловых двигателях, прямооточных химических реакторах, установках нанесения различных покрытий, при тушении пожаров и т. д. Двухфазной струей является и струя, истекающая из сопла реактивного двигателя твердого топлива. Во всех случаях необходимо уметь рассчитывать параметры двухфазной струи с необходимой точностью и, желательно, с использованием простой математической модели. При выборе математической модели, адекватной решаемой задаче, можно пользоваться рекомендациями, приведенными в [1–5]. В статье [1] в качестве критерия, определяющего сложность модели, предлагается использовать объемную концентрацию частиц α_f . При величине этой концентрации, меньшей 10^{-6} , можно независимо рассчитывать параметры газа и частиц, при концентрации $10^{-6} - 10^{-3}$ уравнения математической модели двухфазного течения должны учитывать динамическое и тепловое взаимодействие фаз, а при объемной концентрации частиц, превышающей 10^{-3} , следует рассматривать и взаимодействие частиц при их столкновениях. Эти рекомендации по выбору математической модели двухфазных течений уточняются в статье [2], посвященной исследованию влияния межфазного конвективного теплообмена на параметры двухфазной турбулентной струи. В ней приводятся данные о том, что при объемной концентрации

частиц $\alpha_f < 10^{-5}$ межфазный конвективный теплообмен не оказывает влияния на изменение температур фаз, а при $\alpha_f < 10^{-4}$ – на изменение скоростей фаз и концентрации частиц в струе. При увеличении объемной концентрации частиц от 10^{-5} до 10^{-3} влияние межфазного теплообмена на изменение температур фаз в двухфазной струе возрастает, причем это влияние при $\alpha_f < 10^{-4}$ не зависит от диаметра частиц, а при $\alpha_f > 10^{-4}$ усиливается с увеличением их диаметра. Из этого следует, что при объемной концентрации частиц в двухфазной струе, меньшей 10^{-5} , уравнение энергии частиц может быть заменено равенством температуры частиц температуре газовой фазы.

В работе [3] при выборе математической модели двухфазного турбулентного течения рекомендуется использовать отношение времени динамической релаксации частиц к лагранжеву временному масштабу турбулентности Ω_u . Согласно [3] при $\Omega_u < 1$ для описания движения газа и частиц следует использовать метод Эйлера; при $\Omega_u > 1$ уравнения газовой фазы целесообразно записывать в переменных Эйлера, а уравнения частиц – в переменных Лагранжа, причем при $\Omega_u < 50$ для частиц нужно использовать стохастические модели (параметры частиц рассчитываются с учетом пульсаций газовой фазы), а при $\Omega_u > 50$ – детерминированные модели (при расчете параметров частиц пульсации газа не учитываются). В диапазоне $10^{-2} < \Omega_u < 1$ могут использоваться односкоростные (диффузионная и диффузионно-инерционная) и двускоростные модели.

В монографиях [4, 5] при оценке сложности выбираемых математических моделей двухфазных течений предлагается использовать числа Стокса, определяемые в осредненном, крупномасштабном и мелкомасштабном пульсационных движениях, и числа Рейнольдса для осредненного и пульсационного движений. В зависимости от порядка величины этих критериев подобия все гетерогенные турбулентные течения делятся на пять групп: равновесные, квазиравновесные, неравновесные течения, течения с крупными частицами и обтекание неподвижной «замороженной» частицы.

Следует отметить, что в работах [1–5] приводятся только порядки критериев, которые следует использовать при выборе математических моделей двухфазных течений, адекватных конкретным реальным течениям.

В нашей работе [6] получено значение числа Стокса, определенного по параметрам осредненного течения, при котором частицы можно считать пассивной примесью (под пассивной примесью понимаются частицы, влияние которых на параметры турбулентности газовой фазы не зависит от размера, а определяется только их объемной концентрацией). Если для расчета числа Стокса использовать формулу $Stk_0 = \rho_f D_f^2 u_0 / (36 \mu_0 R_0)$ (ρ_f и D_f – плотность и диаметр частиц; u_{m0} и μ_0 – скорость и динамический коэффициент вязкости газа на оси начального сечения струи радиусом R_0), то частицы становятся пассивной примесью при $Stk_0 < 0.14$. В соответствии с результатами исследований, содержащимися в [7], пассивной примесью становятся частицы, для которых число Стокса, определенное по приведенной выше формуле для этого критерия подобия, становится меньше 0.15, что хорошо согласуется с результатами работы [6].

В работе [8] показано, что число Стокса можно представить в виде произведения трех критериев подобия: числа Рейнольдса $Re = \rho D_f u / \mu$, относительного диаметра частиц $D_f^* = D_f / R_0$ и относительной плотности фаз $\rho^* = \rho_f / \rho$ (ρ и u – плотность и скорость газа соответственно). При $Stk > 0.14$ – 0.15 при одном и том же значении числа Стокса на изменение параметров фаз двухфазной струи сильное влияние оказывает критерий ρ^* и незначительное влияние – критерии Re и D_f^* (в большинстве случаев их влиянием можно пренебречь). При $Stk < 0.14$ – 0.15 частицы являются пассивной примесью, и в этом случае значение числа Стокса

однозначно определяет изменение параметров фаз в двухфазной струе независимо от значения критериев подобия Re , D_f^* и ρ^* .

Из вышеизложенного следует, что при выборе или разработке математической модели двухфазного турбулентного течения необходимо рассматривать, как минимум, следующие критерии подобия: объемную концентрацию частиц α_f , число Стокса Stk и относительную плотность фаз ρ^* . При этом отсутствует информация о том, при каких конкретных значениях этих критериев подобия для расчета двухфазных течений можно использовать упрощенные математические модели.

В связи с тем, что двухфазные турбулентные струйные течения широко распространены во многих областях техники, математическим моделированием этих течений на протяжении нескольких последних десятилетий занимались многие ученые как в СССР и России, так и за рубежом, что является свидетельством актуальности данной задачи. Поскольку для практики наибольший интерес представляют неравновесные двухфазные струи с начальной концентрацией частиц $\alpha_f = 10^{-4} - 10^{-3}$, большинство опубликованных работ посвящено именно таким струям. Из обзора этих публикаций видно, как с течением времени происходило совершенствование математических моделей двухфазных струй, сопровождавшееся их существенным усложнением. Это можно проследить по публикациям [1, 7, 9–11], в которых предлагаются модели двухфазных струй или приводятся результаты исследования протекающих в них процессов.

Во всех этих работах рассматриваются двухфазные струи, непрерывной фазой которых является газ, а дисперсной фазой – твердые или жидкие частицы (капли). В статьях [1, 9] приводятся математические модели двухфазной струи, в которых осредненные по пространству и времени уравнения фаз записаны в переменных Эйлера, а при расчете моментов корреляции пульсационных параметров фаз используются k - ϵ -модели турбулентности с учетом межфазного взаимодействия. В [10] описана математическая модель двухфазной струи, в которой осредненные уравнения движения газовой фазы записаны в переменных Эйлера, а уравнения движения частиц – в переменных Лагранжа. Для расчета параметров турбулентности газовой фазы используется k - ϵ -модель турбулентности. В работах [7, 11] приводятся результаты численного моделирования двухфазных турбулентных (изотермической и неизотермической) струй, истекающих в неподвижную газовую среду. Расчет параметров газовой фазы проводится прямым численным моделированием (DNS), расчет параметров частиц – методом Лагранжа. Программная реализация математических моделей [7, 11] требует по сравнению с моделями [1, 9, 10] больших вычислительных ресурсов (процессорного времени, оперативной памяти, памяти на жестком диске) и использования способов реализации параллельных вычислений. По этой причине в статье [7] делается попытка представить полученные результаты в виде алгебраических формул. Учитывая то, что двухфазные турбулентные струйные течения – течения, при моделировании которых необходимо использовать большое количество критериев подобия (геометрического, кинематического, динамического и теплового), вряд ли возможно получить критериальные зависимости, которые можно использовать в широком диапазоне изменения параметров течения. Поэтому при решении прикладных задач предпочтительнее использовать модели, аналогичные [1, 9, 10], в частности модели, описанные в настоящей статье.

Ниже приводится система уравнений, которую можно использовать для расчета параметров фаз двухфазной неравновесной по скоростям и температурам турбулентной струи при большой объемной концентрации частиц (порядка $10^{-4} - 10^{-3}$), и дается описание упрощенной одножидкостной (равновесной) математической модели этой струи. В качестве достоинств упрощенной модели можно отметить сле-

дующее: 1) она требует вычислительных ресурсов, примерно в два раза меньших по сравнению с неравновесной моделью струи и на несколько порядков меньших по сравнению с моделями [7, 11]; 2) в уравнениях упрощенной модели отсутствуют члены, учитывающие динамическое и тепловое межфазовое взаимодействие, и в связи с этим устраняются ошибки, связанные с учетом сил (сопротивления, Магнуса, Сафмена, присоединенной массы, Архимеда и др.) и механизмов обмена энергией.

Настоящая работа посвящена выявлению условий, при которых для расчета двухфазной турбулентной неизотермической струи может использоваться односкоростная и однотемпературная (одножидкостная) математическая модель этой струи, позволяющая с заданной точностью рассчитывать скорости и температуры фаз двухфазной струи. Это делается на основании анализа результатов расчетов, выполненных с помощью приведенной ниже математической модели неравновесного по скоростям и температурам двухфазного турбулентного неизотермического струйного течения.

1. Математическая модель двухфазной турбулентной струи

В работе [8] приводится разработанная нами математическая модель двухфазной турбулентной изотермической струи, непрерывной фазой которой является газ, а дисперсной фазой – монодисперсные частицы. Эта модель включает осредненные по пространству и времени уравнения баланса массы и количества движения фаз, которые дополняются уравнениями состояния фаз и уравнением, связывающим объемные концентрации газа и частиц. При описании движения обеих фаз используется метод Эйлера. Уравнения баланса массы и количества движения фаз получены из общих уравнений Навье – Стокса, записанных для мгновенных параметров течения, путем применения к этим уравнениям процедуры пространственного осреднения по методу Р.И. Нигматулина [12] и временного осреднения по методу О. Рейнольдса [13] с последующей оценкой порядка членов осредненных уравнений с учетом особенностей струйного пограничного слоя [13]. Поскольку турбулентные струйные течения являются автомодельными и подобными, для моментов корреляции пульсационных параметров фаз, входящих в осредненные уравнения, используются алгебраические выражения. При этом отпадает необходимость задавать граничные условия для параметров турбулентности, что значительно упрощает решение прикладных задач. Используя методику вывода уравнений для двухфазной турбулентной изотермической струи [8], были получены уравнения, которые можно использовать для расчета параметров двухфазной неизотермической струи. С учетом цели настоящего исследования эти уравнения записаны в предположении, что течение является стационарным, изобарическим (свободная струя), газовая фаза однокомпонентная, частицы имеют одинаковый размер во всей области течения (монодисперсные частицы). Так как объемная концентрация частиц при проведении практически всех расчетов не превышает $2 \cdot 10^{-3}$, то согласно [1] их столкновения не учитываются. В случае неизотермического струйного течения математическая модель этого течения включает: осредненные уравнения баланса массы, количества движения и энергии фаз, уравнения состояния фаз и уравнение, связывающее объемные концентрации фаз. Причем уравнения количества движения фаз, являющиеся векторными, записываются в проекции на оси координат. В цилиндрической системе координат для стационарного случая эти уравнения имеют следующий вид:

$$\frac{\partial}{\partial x} y \rho \alpha u + \frac{\partial}{\partial y} y (\rho \alpha v + \alpha \langle \rho' v' \rangle) = 0; \quad (1)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} y \alpha_f u_f + \frac{\partial}{\partial y} y (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) = 0; \quad (2)$$

$$\rho \alpha u \frac{\partial u}{\partial x} + (\rho \alpha v + \alpha \langle \rho' v' \rangle) \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho \alpha \langle u' v' \rangle - F_{cfx}; \quad (3)$$

$$\frac{\partial p}{\partial y} = 0; \quad (4)$$

$$\rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial u_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial u_f}{\partial y} = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle + F_{cfx}; \quad (5)$$

$$\begin{aligned} \rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial v_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + 2 \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial v_f}{\partial y} = & -\frac{\partial}{\partial x} \rho_f (\alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle + u_f \langle \alpha'_f v'_f \rangle) - \\ & - \frac{v_f}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \langle \alpha'_f v'_f \rangle - \frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y \rho_f \alpha_f \langle v'^2_f \rangle + F_{cfy}; \end{aligned} \quad (6)$$

$$\begin{aligned} \rho \alpha u \frac{\partial c_p T}{\partial x} + (\rho \alpha v + \alpha \langle \rho' v' \rangle) \frac{\partial c_p T}{\partial y} = \\ = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y c_p \rho \alpha \langle T' v' \rangle - \rho \alpha \langle u' v' \rangle \frac{\partial u}{\partial y} - F_{cfx} (u_f - u) - Q_{f,con}; \end{aligned} \quad (7)$$

$$\begin{aligned} \rho_f \alpha_f u_f \frac{\partial c_f T_f}{\partial x} + \rho_f (\alpha_f v_f + \langle \alpha'_f v'_f \rangle) \frac{\partial c_f T_f}{\partial y} = \\ = -\frac{1}{y} \frac{\partial}{\partial y} y c_f \rho_f \alpha_f \langle T'_f v'_f \rangle - \rho_f \alpha_f \langle u'_f v'_f \rangle \frac{\partial u_f}{\partial y} + Q_{f,con}; \end{aligned} \quad (8)$$

$$p = \rho R T, \rho_f = \text{const}; \quad (9)$$

$$\alpha + \alpha_f = 1. \quad (10)$$

В уравнениях (1)–(10): x и y – оси цилиндрической системы координат, x совпадает с осью струи; u и v – проекции вектора скорости на оси x и y ; ρ – физическая плотность; α – объемная концентрация; p – давление; T – температура; c_p – удельная теплоемкость газовой фазы при постоянном давлении; c_f – удельная теплоемкость материала частиц; R – удельная газовая постоянная газовой фазы; F_{cfx} и F_{cfy} – проекции на оси x и y силы сопротивления частиц; $Q_{f,con}$ – конвективный тепловой поток от частиц диаметром D_f к газу. Параметры частиц обозначены нижним индексом f , параметры газа индексов не имеют, штрихами сверху обозначены пульсации параметров фаз, угловыми скобками – их моменты корреляции.

Правые части уравнений количества движения фаз (3), (5) и (6) содержат силу аэродинамического сопротивления частиц, приходящуюся на единицу объема среды, для расчета которой используется формула [14]

$$\mathbf{F}_{cf} = 3\alpha_f C_{Df} \rho (\mathbf{W} - \mathbf{W}_f) |\mathbf{W} - \mathbf{W}_f| / (4D_f).$$

Здесь C_{Df} – коэффициент сопротивления частиц диаметром D_f , который определяется по формуле $C_{Df} = 24/\text{Re} + 4/\sqrt{\text{Re}} + 0.4$ [14].

В правых частях уравнений энергии фаз (7) и (8) находятся члены, описывающие обмен энергией между фазами за счет теплообмена: $Q_{f,con} = 6\alpha_f \lambda \text{Nu} (T_{wf} - T_f) / D_f^2$ [14]. В этом выражении для конвективного теплового потока, записанного для единицы объема среды: T_{wf} – температура газа на поверхности частицы диаметром D_f ; λ – коэффициент теплопроводности газовой фазы; Nu – число Нуссельта, для расчета которого используется формула $\text{Nu} = 2 + 0.459 \text{Re}^{0.55} \text{Pr}^{0.33}$ [14].

Система уравнений (1)–(10) решается при следующих граничных условиях:

$$\begin{aligned} x = 0: \quad & u = u(y), \quad u_f = u_f(y), \quad v_f = v_f(y), \quad \alpha_f = \alpha_f(y), \quad T = T(y), \quad T_f = T_f(y), \\ y = \infty: \quad & u = u_e, \quad u_f = u_{fe}, \quad v_f = 0, \quad \alpha_f = \alpha_{fe}, \quad T = T_e, \quad T_f = T_{fe}, \\ y = 0: \quad & v = 0, \quad v_f = 0, \quad \partial u / \partial y = 0, \quad \partial u_f / \partial y = 0, \quad \partial \alpha_f / \partial y = 0, \quad \partial T / \partial y = 0, \quad \partial T_f / \partial y = 0. \end{aligned}$$

Индексом e обозначены параметры фаз на границе струи.

Система осредненных уравнений, описывающих двухфазную струю, замыкается с помощью выражений для моментов корреляции пульсационных параметров фаз [2]:

$$\begin{aligned} \langle u'v' \rangle &= -K_u K_v l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}; \quad \langle u'_f v'_f \rangle = -K_{uf} K_{vf} l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial u}{\partial y}; \\ \langle v_f'^2 \rangle &= K_{vf}^2 l^2 \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2; \\ \langle \alpha'_f v'_f \rangle &= -\frac{K_v K_{vf}}{Sc_T} l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial \alpha_f}{\partial y}; \quad \langle \rho' v' \rangle = -\frac{\rho}{T} \frac{K_v^2}{Sc_T} l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial T}{\partial y}; \\ \langle T' v' \rangle &= -\frac{K_v^2}{Sc_T} l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial T}{\partial y}; \quad \langle T'_f v'_f \rangle = -\frac{K_v K_{vf}}{Sc_T} l^2 \left| \frac{\partial u}{\partial y} \right| \frac{\partial T_f}{\partial y}. \end{aligned} \quad (11)$$

В выражениях (11): $K_u = u'/u'_0$; $K_v = v'/v'_0$; $K_{uf} = u'_f/u'_0$; $K_{vf} = v'_f/v'_0$; u' , v' , u'_f и v'_f – пульсационные скорости фаз в двухфазном потоке; u'_0 и v'_0 – пульсационные скорости газовой фазы, определяемые по формулам для однофазной струи [15]; Sc_T – турбулентное число Шмидта (согласно [15] для круглой струи $Sc_T = 0.8$); l – путь перемешивания Прандтля, определяемый по формуле: $l = \sqrt{B}[\Delta u_{\max}/(\partial u/\partial y)_{\max}]$ [16] (B – константа, равная 0.013; Δu_{\max} и $(\partial u/\partial y)_{\max}$ – максимальные значения разности продольных скоростей и производной продольной скорости газа в рассматриваемом сечении струи). Пульсационные скорости фаз, входящие в выражения (11), определяются с помощью модели турбулентности, изложенной в [6].

Метод решения дифференциальных уравнений с частными производными системы (1)–(10) аналогичен методу, описанному в монографии [17]. В частности, аппроксимация уравнений (2), (3), (5)–(8) разностными уравнениями проводится с использованием неявной шеститочечной конечно-разностной схемы, имеющей второй порядок точности (схема Кранка–Николсона с весовым коэффициентом 1/2) и являющейся безусловно устойчивой [18]. Уравнение баланса массы газовой фазы (1) аппроксимируется по явной четырехточечной схеме. Точность расчетов контролируется по интегралу избыточного количества движения среды в целом, который должен оставаться постоянным по длине струи.

2. Валидация математической модели двухфазной турбулентной неизотермической струи

Сопоставление результатов расчетов, выполненных в [8] с использованием математической модели изотермической двухфазной струи, которая является упрощенным вариантом математической модели, приведенной в этой статье, с данными экспериментального исследования изотермической воздушной струи с примесью частиц корунда [19] показало удовлетворительное совпадение результатов расчетов и эксперимента.

В настоящей статье проводится сравнение расчетов по модели (1)–(11) с данными эксперимента [20], в котором исследовалась двухфазная неизотермическая

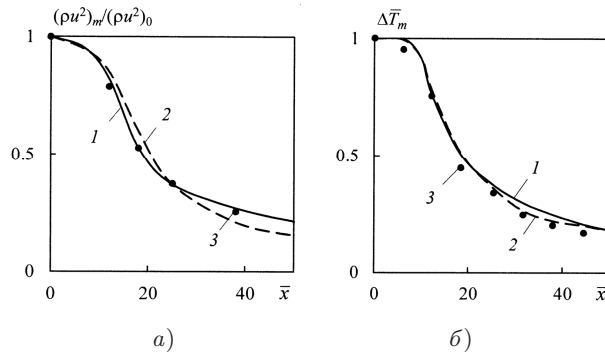


Рис. 1. Сравнение результатов расчетов по математической модели двухфазной струи с данными эксперимента [20] и результатами расчетов по математической модели Л.Б. Гавина и др. [17]; а – изменение вдоль оси струи импульса газа; б – изменение вдоль оси струи относительной избыточной температуры газа. 1 – наша модель; 2 – результаты расчетов [17]; 3 – эксперимент [20]

струя. Непрерывной фазой струи являлся воздух, а дисперсной фазой – частицы корунда размером 50 мкм. Струя истекала из длинной трубы диаметром 16 мм в неподвижный воздух с температурой 291 К. На срезе трубы средняя скорость воздуха была равна 63.5 м/с, а скорость частиц – 50 м/с. Максимальное значение температуры воздуха (928 К) наблюдалось у стенок трубы, а минимальное (687 К) – на оси потока. Средняя массовая расходная концентрация частиц в струе (отношение массовых расходов частиц и газа) на срезе трубы равнялась 1.52. В эксперименте измерялись импульс и температура газовой фазы вдоль оси струи. Результаты расчетов и эксперимента представлены в безразмерном виде на рис. 1. На рис. 1, а показано изменение вдоль оси струи импульса газовой фазы, а на рис. 1, б – изменение относительной избыточной температуры этой фазы.

Обезразмеривание импульса газовой фазы ρu^2 , соответствующего единице площади, проводилось относительно его значения на оси начального сечения струи, обезразмеривание расстояния x – относительно радиуса трубы: $\bar{x} = x/R_0$; относительная избыточная температура находилась по формуле $\Delta \bar{T}_m = (T_m - T_e) / (T_{m0} - T_e)$ (T_m, T_{m0}, T_e – температуры газа на оси струи, на оси струи в ее начальном сечении и во внешней среде соответственно). Экспериментальные данные [20] показаны точками. Результаты расчетов, выполненные с использованием уравнений (1)–(11), представлены кривыми 1. На этих графиках также приведены результаты расчетов, взятые из монографии [17], при проведении которых задавались граничные условия эксперимента [20] (кривые 2).

Из рис. 1 следует, что результаты расчетов параметров двухфазной неизотермической струи по математической модели (1)–(11) удовлетворительно согласуются с результатами расчетов, приведенными в [17], и данными эксперимента [20].

3. Результаты расчетов

Выше было отмечено, что цель настоящей работы заключается в том, чтобы выявить условия, при которых при расчете двухфазной неизотермической турбулентной струи можно использовать более простую одножидкостную математическую модель, обеспечивающую заданную точность расчетов параметров струи. В результате расчетов по этой модели получают значения среднемассовых скорости $\mathbf{W} = \sum \rho_i \alpha_i \mathbf{W}_i / \sum \rho_i \alpha_i$ и температуры $T = \sum \rho_i \alpha_i T_i / \sum \rho_i \alpha_i$ гетерогенной

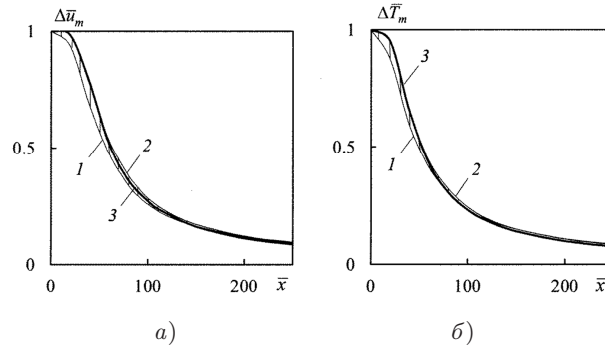


Рис. 2. Изменение вдоль оси двухфазной струи относительных избыточных скоростей и температур фаз и гетерогенной среды при использовании неравновесной и равновесной математических моделей струйного течения; *a* – скорости; *б* – температуры. 1 – параметры газовой фазы неравновесного течения; 2 – параметры частиц неравновесного течения; 3 – параметры гетерогенной среды равновесного течения

среды [12], отличающиеся от истинных скоростей \mathbf{W}_i и температур T_i фаз реального течения (i – номер фазы). Из приведенных формул следует, что значения среднемассовых параметров должны находиться между значениями соответствующих параметров фаз. Это подтверждается графиками, приведенными на рис. 2.

На этом рисунке представлены результаты расчетов двухфазной струи, проведенных по неравновесной и равновесной математическим моделям двухфазной струи с одинаковыми граничными условиями. Математическая модель равновесной двухфазной струи представляет собой упрощенный вариант неравновесной модели (1)–(11). В этой модели вместо уравнений (5), (6) и (8) используются условия $u_f = u$, $v_f = v$ и $T_f = T$ соответственно; в остальных уравнениях производится замена скорости и температуры частиц на скорость и температуру газа; в правой части уравнения (3) отсутствует сила сопротивления F_{cfx} , а в правой части уравнения (7) – мощность этой силы $F_{cfx}(u_f - u)$ и тепловой поток $Q_{f,con}$. Пульсационные скорости газа и частиц считаются равными и рассчитываются по формуле Г.Н. Абрамовича [15]: $u' = u'_f = u'_0/(1 + \gamma)$ (γ – массовая концентрация частиц: $\gamma = \rho_f \alpha_f / (\rho \alpha)$; u'_0 – пульсационная скорость, определяемая по формуле для однофазной струи [15]). При проведении расчетов принималось: $D_f = 50 \cdot 10^{-6}$ м, $u_0 = u_{f0} = 300$ м/с, $T_0 = T_{f0} = 500$ К, $\alpha_{f0} = 3 \cdot 10^{-4}$, $c_f = 880$ Дж/(кг·К), $\rho_f = 2700$ кг/м³, $\mu = 1.79 \cdot 10^{-5}$ Н·с/м², $\lambda = 2.59 \cdot 10^{-2}$ Вт/(м·К), $c_p = 1005$ Дж/(кг·К), $p = 10^5$ Па, $u_e = u_{fe} = 0$ м/с, $T_e = T_{fe} = 288$ К, $R_0 = 0.2$ м (R_0 – радиус начального сечения струи; индексом “0” обозначены параметры фаз в начальном сечении струи, индексом e – параметры фаз на границе струи; значения удельной теплоемкости материала частиц, удельной теплоемкости, динамического коэффициента вязкости и теплопроводности газа, зависящие от температуры, приведены для температуры 288 К). Поперечные поля всех параметров струи в ее начальном сечении принимались равномерными. Формулы для определения относительных избыточных скоростей $\Delta \bar{u}_m$ и температур $\Delta \bar{T}_m$ фаз и гетерогенной среды аналогичны формуле для расчета относительной избыточной температуры газа, приведенной при описании рис. 1; безразмерная координата \bar{x} определяется в долях от радиуса начального сечения струи: $\bar{x} = x/R_0$.

Из рис. 2 видно, что кривые 3, соответствующие среднемассовым параметрам течения, находятся в пределах заштрихованных областей, расположенных между кривыми 1 и 2, изображающими изменение параметров газа и частиц вдоль оси

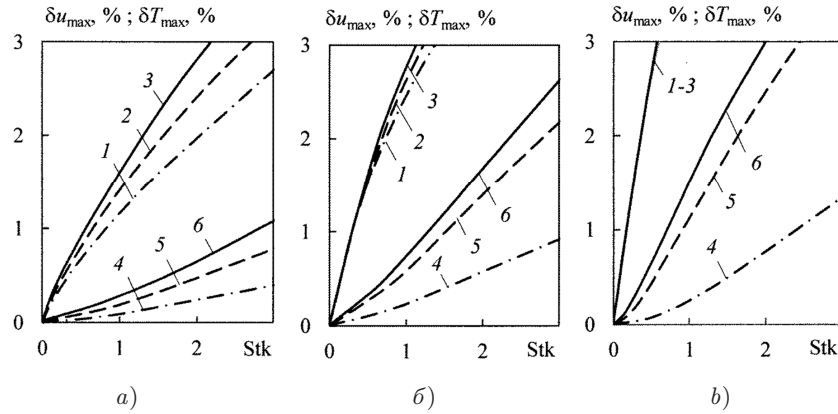


Рис. 3. Зависимости максимальных отклонений скорости и температуры частиц от скорости и температуры газа в двухфазной турбулентной струе от числа Стокса для трех значений температуры фаз и трех значений объемной концентрации частиц в начальном сечении струи; а - $\alpha_{f0} = 10^{-3}$, б - $3 \cdot 10^{-4}$, в - 10^{-4} . 1-3 - скорости, 4-6 - температуры. 1, 4 - $T_0 = T_{f0} = 500$ К; 2, 5 - 1000 К; 3, 6 - 1500 К

струи. В настоящей работе под погрешностью одножидкостной математической модели двухфазной струи понимается наибольшее отличие среднемассовых параметров гетерогенной среды от соответствующих параметров фаз реального течения при фиксированных значениях \bar{x} во всей области течения $0 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_{max}$: $\delta u_{ol} = \max(|u_i - u_{mm}|/u_i)$ и $\delta T_{ol} = \max(|T_i - T_{mm}|/T_i)$ (u_{mm} , T_{mm} , δu_{ol} , δT_{ol} - среднемассовые скорость, температура и погрешности их расчета при использовании одножидкостной модели; u_i , T_i - скорость и температура i -й фазы). Так как величины δu_{ol} и δT_{ol} не превышают максимальных значений различия параметров фаз в двухфазной струе $\delta u_{max} = \max(|u_f - u|/u_f)$ и $\delta T_{max} = \max(|T_f - T|/T_f)$ при $0 \leq \bar{x} \leq \bar{x}_{max}$, то за погрешность расчетов двухфазной струи при использовании одножидкостной математической модели принимаются δu_{max} и δT_{max} , которые можно определить с помощью неравновесной многожидкостной модели.

Как показано в [6, 7], в случае изотермической струи кинематическое равновесие фаз имеет место при числе Стокса, меньшем 0.14-0.15. При $Stk > 0.14-0.15$ на результаты расчетов начинают влиять размер, концентрация, плотность частиц и другие параметры течения. С увеличением числа Стокса это влияние усиливается. Для того чтобы выявить зависимость степени неравновесности фаз по скоростям и температурам в двухфазной неизотермической струе от граничных условий, с использованием математической модели (1)-(11) проведены расчеты этой струи, в которых варьировались размер частиц, температуры фаз и объемная концентрация частиц в начальном сечении струи. Эти параметры струи изменялись в диапазонах: $D_f = (5-100) \cdot 10^{-6}$ м, $T_0 = T_{f0} = (500-1500)$ К, $\alpha_{f0} = (0.1-2) \cdot 10^{-3}$. Значения остальных параметров струи были такими же, как и в расчетах, представленных на рис. 2. Результаты расчетов для трех значений объемной концентрации частиц и трех значений температур фаз в начальном сечении струи приведены на рис. 3.

Следует отметить, что максимальные значения δu и δT в струе соответствуют ее оси и находятся на различных расстояниях от начального сечения струи, зависящих от граничных условий. Согласно графикам рис. 3 при одном и том же значении числа Стокса увеличение исходной температуры фаз приводит к возрастанию различия в скоростях и температурах фаз. Из проведенных расчетов также следует, что изменение объемной концентрации частиц в начальном сечении струи от $2 \cdot 10^{-3}$

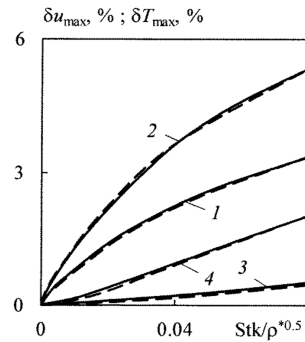


Рис. 4. Зависимость максимальных отклонений скорости и температуры частиц от скорости и температуры газа в двухфазной турбулентной струе от комплекса $Stk/\rho^{*0.5}$ для двух температур фаз и двух плотностей частиц при начальной объемной концентрации частиц $\alpha_{f0} = 10^{-3}$. 1, 2 – скорости; 3, 4 – температуры. 1, 3 – $T_0 = T_{f0} = 500$ К; 2, 4 – 1000 К. Сплошные кривые – $\rho_f = 2700$ кг/м³; пунктирные кривые – $\rho_f = 7800$ кг/м³

до 10^{-3} слабо влияет на результаты расчетов. При дальнейшем уменьшении этой концентрации наблюдается возрастание величин δu_{\max} и δT_{\max} , соответствующих фиксированным значениям числа Стокса. С уменьшением объемной концентрации частиц происходит сближение кривых $\delta u_{\max} = f(Stk)$, построенных для различных начальных температур фаз; при объемной концентрации частиц 10^{-4} в области небольших значений Stk эти кривые сливаются, то есть температура перестает влиять на величину скольжения фаз.

Из рис. 3 следует, что максимальные значения δu существенно превосходят максимальные значения δT . Поэтому при использовании упрощенной математической модели двухфазной струи достаточно оценить только погрешность расчета скорости среды; погрешность расчета температуры среды будет значительно меньше.

В двухфазной струе при одном и том же значении числа Стокса, как показано в [8], на параметры двухфазной струи сильное влияние оказывает отношение плотностей частиц и газа $\rho^* = \rho_f/\rho_0$ (ρ_f – плотность частиц; ρ_0 – плотность газа в начальном сечении струи). Поэтому при представлении результатов расчетов в критериальном виде необходимо использовать комплекс, являющийся комбинацией числа Стокса и отношения плотностей фаз. Для определения этого комплекса были проведены расчеты двухфазной струи для двух начальных температур фаз 500 и 1000 К при $\rho_f = 7800$ кг/м³, $\alpha_{f0} = 10^{-3}$ и значениях других параметров фаз, приведенных при описании рис. 2. Результаты этих расчетов сравниваются на рис. 4 с результатами расчетов струи при $\rho_f = 2700$ кг/м³, $\alpha_{f0} = 10^{-3}$, представленными в виде графиков на рис. 3, а.

В качестве аргумента зависимостей, изображенных на этом рисунке, выбран комплекс $Stk/\rho^{*0.5}$. Из рис. 4 следует, что при использовании в качестве аргумента этого комплекса зависимости $\delta u_{\max} = f(Stk/\rho^{*0.5})$ и $\delta T_{\max} = f(Stk/\rho^{*0.5})$, построенные для различных плотностей частиц, при одинаковых начальных температурах фаз и объемных концентрациях частиц совпадают между собой.

Обработка результатов расчетов параметров двухфазной струи, приведенных на рис. 3, с учетом отмеченных особенностей зависимости $\delta u_{\max} = f(Stk/\rho^{*0.5})$ (рис. 4), позволила получить графики $Stk/\rho^{*0.5} = f(\alpha_{f0})$ при $\delta u_{\max} = 3\%$, представленные на рис. 5. Графики этого рисунка позволяют оценить возможность использования одножидкостной математической модели для расчета параметров неизотермической двухфазной турбулентной струи с априори заданной точностью (в данном случае с точностью 3%). Подобные графики можно построить для других значений δu_{\max} .

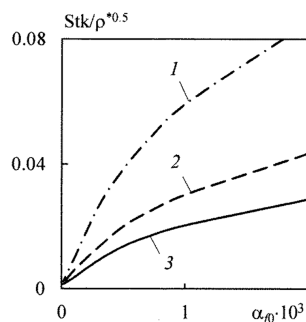


Рис. 5. Зависимость величины комплекса $Stk/\rho^{*0.5}$ от начальной объемной концентрации частиц α_{f0} для трех температур фаз в начальном сечении струи при $\delta u_{\max} = 3\%$. 1 – $T_0 = T_{f0} = 500$ К; 2 – 1000 К; 3 – 1500 К

Заключение

В результате расчетов, проведенных с использованием неравновесной по скоростям и температурам математической модели двухфазной неизотермической турбулентной струи при различных граничных условиях и одной плотности частиц, получены зависимости максимальной степени неравновесности фаз по скорости δu_{\max} и температуре δT_{\max} от числа Стокса при различных начальных значениях объемной концентрации частиц и температур фаз. Согласно этим расчетам изменение объемной концентрации частиц в начальном сечении струи от $2 \cdot 10^{-3}$ до 10^{-3} слабо влияет на результаты расчетов. При дальнейшем уменьшении этой концентрации наблюдается возрастание величин δu_{\max} и δT_{\max} , соответствующих фиксированным значениям числа Стокса. С уменьшением объемной концентрации частиц происходит сближение зависимостей $\delta u_{\max} = f(Stk)$, соответствующих различным начальным температурам фаз; при объемной концентрации частиц порядка 10^{-4} в области небольших значений Stk эти зависимости совпадают, то есть температура перестает влиять на величину скольжения фаз. Показано также, что максимальные значения δu существенно превосходят максимальные значения δT . Поэтому при использовании упрощенной математической модели двухфазной струи достаточно оценить только погрешность расчета скорости среды; погрешность расчета температуры среды будет значительно меньше.

При исследовании двухфазных струй с частицами различной плотности в качестве критерия подобия, определяющего инерционность частиц, необходимо вместо числа Стокса использовать комплекс $Stk/\rho^{*0.5}$. При этом зависимости $\delta u_{\max} = f(Stk/\rho^{*0.5})$ и $\delta T_{\max} = f(Stk/\rho^{*0.5})$, построенные для различных плотностей частиц при постоянных начальных температурах фаз, совпадают между собой.

На основе результатов расчетов параметров двухфазной струи получена зависимость $Stk/\rho^{*0.5} = f(\alpha_{f0}, T_0)$ для максимальной степени неравновесности фаз по скорости, равной априори заданной величине.

Результаты проведенного исследования неравновесной по скоростям и температурам двухфазной турбулентной струи позволяют получить информацию о максимальной погрешности расчета параметров этой струи с заданными граничными условиями при использовании одножидкостной модели. Эта информация дает возможность принять правильное решение при выборе упрощенной математической модели для расчета параметров конкретного двухфазного струйного течения.

Литература

1. *Elghobashi S.* Particle-laden turbulent flows: Direct simulation and closure models // *Appl. Sci. Res.* – 1991. – V. 48, No 3–4. – P. 301–314. – doi: 10.1007/BF02008202.
2. *Зуев Ю.В., Лепешинский И.А.* Влияние межфазного конвективного теплообмена на параметры двухфазной турбулентной струи // *Матем. моделирование.* – 2013. – Т. 25, № 5. – С. 44–54.
3. *Зайчик Л.И., Першуков В.А.* Проблемы моделирования газодисперсных турбулентных течений с горением или фазовыми переходами // *Изв. РАН. Сер. МЖГ.* – 1996. – № 5. – С. 3–19.
4. *Вараксин А.Ю.* Турбулентные течения газа с твердыми частицами. – М.: Физматлит, 2003. – 192 с.
5. *Вараксин А.Ю.* Столкновения в потоках газа с твердыми частицами. – М.: Физматлит, 2008. – 312 с.
6. *Зуев Ю.В., Лепешинский И.А., Решетников В.А., Истомин Е.А.* Выбор критериев и определение их значений для оценки характера взаимодействия фаз в двухфазных турбулентных струях // *Вестн. МГТУ им. Н.Э. Баумана. Сер. «Машиностроение».* – 2012. – № 1. – С. 42–54.
7. *Picano F., Sardina G., Gualtieri P., Casciola C.M.* Anomalous memory effects on transport of inertial particles in turbulent jets // *Phys. Fluids* – 2010. – V. 22, No 5. – Art. 031005PHF, P. 1–4. – doi: 10.1063/1.3432439.
8. *Зуев Ю.В.* Об использовании критерия Стокса при математическом моделировании двухфазных струйных течений // *Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки.* – 2019. – Т. 161, кн. 3. – С. 341–354. – doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.341-354.
9. *Gavin L.B., Naumov V.A., Shor V.V.* Numerical investigation of a gas jet with heavy particles on the basis of a two-parameter model of turbulence // *J. Appl. Mech. Tech. Phys.* – 1984. – V. 25, No 1. – P. 56–61. – doi: 10.1007/BF00916866.
10. *Mostafa A.A., Mongia H.C., McDonell V.G., Samuelsen G.S.* Evolution of particle-laden jet flows – A theoretical and experimental study // *AIAA J.* – 1989. – V. 27, No 2. – P. 167–183. – doi: 10.2514/3.10079.
11. *Barba F.D., Picano F.* Clustering and entrainment effects on the evaporation of dilute droplets in a turbulent jet // *Phys. Rev. Fluids.* – 2018. – V. 3, No 3. – Art. 034304, P. 1–25. – doi: 10.1103/PhysRevFluids.3.034304.
12. *Низматуллин Р.И.* Динамика многофазных сред: в 2 ч. – М.: Наука, 1987. – Ч. 1. – 464 с.
13. *Хинце И.О.* Турбулентность, ее механизм и теория. – М.: Физматгиз, 1963. – 680 с.
14. *Стернин Л.Е., Шрайбер А.А.* Многофазные течения газа с частицами. – М.: Машиностроение, 1994. – 320 с.
15. Теория турбулентных струй / Г.Н. Абрамович, Т.А. Гиршович, С.Ю. Крашенинников, А.Н. Секундов, И.П. Смирнова; Под ред. Г.Н. Абрамовича. – М.: Наука, 1984. – 716 с.
16. *Крашенинников С.Ю.* К расчету осесимметричных закрученных и незакрученных турбулентных струй // *Изв. АН СССР. Сер. МЖГ.* – 1972. – № 3. – С. 71–80.
17. *Шрайбер А.А., Гавин Л.Б., Наумов В.А., Яценко В.П.* Турбулентные течения газозвеси. – Киев: Наукова думка, 1987. – 240 с.
18. *Самарский А.А.* Теория разностных схем. – М.: Наука, 1989. – 616 с.

19. *Картушинский А.И., Фришман Ф.А.* О миграционном переносе в двухфазной струе // Струйные течения жидкостей и газов: Тез. Всесоюз. науч. конф.: в 3 ч. – Новополюк: Новополюцкий политехн. ин-т. – 1982. – Ч. 3. – С. 22–28.
20. *Гавин Л.Б., Мутьги А.С., Шор В.В.* Численное и экспериментальное исследование неизотермической турбулентной струи с тяжелой примесью // Инж.-физ. журн. – 1986. – № 5. – С. 736–742.

Поступила в редакцию
31.08.2020

Зуев Юрий Владимирович, доктор технических наук, профессор кафедры «Теория воздушно-реактивных двигателей»

Московский авиационный институт (национальный исследовательский университет)
Волоколамское шоссе, д. 4, г. Москва, 125993, Россия
E-mail: yuri_zuev@bk.ru

ISSN 2541-7746 (Print)
ISSN 2500-2198 (Online)

UCHENYE ZAPISKI KAZANSKOGO UNIVERSITETA.
SERIYA FIZIKO-MATEMATICHESKIE NAUKI
(Proceedings of Kazan University. Physics and Mathematics Series)

2020, vol. 162, no. 4, pp. 411–425

doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.411-425

Miscalculation of Two-Phase Turbulent Jet Parameters While Using One-Liquid Mathematical Model

Yu. V. Zuev

Moscow Aviation Institute (National Research University), Moscow, 125993 Russia
E-mail: yuri.zuev@bk.ru

Received August 31, 2020

Abstract

Conditions for applying a simplified single-speed and one-temperature (one-liquid) mathematical model, which makes it possible to determine the mean mass speeds and temperatures of the heterogeneous mixture, to calculate the two-phase turbulent non-isothermal jet were defined. Numerical modeling with use of the developed multi-liquid mathematical model of the two-phase jet, in which the speed and temperature of particles differ from the speed and temperature of the gas phase, was carried out. The problem under consideration is extremely important, because two-phase jet parameters are needed to solve numerous applied tasks in various technical areas. These parameters can be accurately determined with the help of simple mathematical models. Based on the resulting calculations carried out with the developed multi-liquid mathematical model of the two-phase turbulent jet, criterial dependences for assessing the maximum error of the calculation of two-phase jet flow parameters while using the one-liquid model were obtained.

Keywords: two-phase jet, gas, particles, mathematical modeling, choice of mathematical model, accuracy of calculations

Figure Captions

Fig. 1. Comparison of the results of calculations performed with the use of the mathematical model of the two-phase jet with the data from experiments in [20] and the results obtained with the mathematical model developed by L.B. Gavin et al. in [17]; a – gas pulse changes along the jet axis; b – changes in the relative excess gas temperature along the jet axis. 1 – our model; 2 – calculations in [17]; 3 – experiment in [20].

Fig. 2. Changes of the relative excess speeds and temperatures of the phases and the heterogeneous medium along the two-phase jet axis upon the use of the non-equilibrium and equilibrium mathematical models of jet flow; a – speed values; b – temperature values. 1 – parameters of the gas phase of the non-equilibrium flow; 2 – parameters of particles in the non-equilibrium flow; 3 – parameters of the heterogeneous medium of the equilibrium flow.

Fig. 3. Dependences of the maximum deviations of the speed and temperature of particles on the speed and temperature of gas in the two-phase turbulent jet on the Stokes number for three values of the phase temperature and three values of the volume concentration of particles in the initial cross section of the jet; a – $\alpha_{f0} = 10^{-3}$, b – $3 \cdot 10^{-4}$, c – 10^{-4} . 1–3 – speed values, 4–6 – temperature values. 1, 4 – $T_0 = T_{f0} = 500$ K; 2, 5 – 1000 K; 3, 6 – 1500 K.

Fig. 4. Dependences of the maximum deviations of the speed and temperature of particles on the speed and temperature of gas in the two-phase turbulent jet on the complex $\text{Stk}/\rho^{*0.5}$ for two phase temperatures and two particle densities at the initial volume concentration of particles $\alpha_{f0} = 10^{-3}$. 1, 2 – speed values; 3, 4 – temperature values. 1, 3 – $T_0 = T_{f0} = 500$ K; 2, 4 – 1000 K. Solid curve – $\rho_f = 2700$ kg/m³; broken curve – $\rho_f = 7800$ kg/m³.

Fig. 5. Dependence of the value of the $\text{Stk}/\rho^{*0.5}$ complex on the initial volume concentration of particles α_{f0} for three phase temperatures in the initial cross section of the jet at $\delta u_{\max} = 3\%$. 1 – $T_0 = T_{f0} = 500$ K; 2 – 1000 K; 3 – 1500 K.

References

1. Elghobashi S. Particle-laden turbulent flows: Direct simulation and closure models. *Appl. Sci. Res.*, 1991, vol. 48, nos. 3–4, pp. 301–314. doi: 10.1007/BF02008202.
2. Zuev Yu.V., Lepeshinskii I.A. Influence of interphase convective heat exchange on parameters of a two-phase turbulent jet. *Mat. Model.*, 2013, vol. 25, no. 5, pp. 44–54. (In Russian)
3. Zaichik L.I., Pershukov V.A. Problems of modeling gas-particle turbulent flows with combustion and phase transitions. Review. *Fluid. Dyn.*, vol. 31, no. 5, pp. 635–646. doi: 10.1007/BF02078213.
4. Varaksin A.Yu. *Turbulentnye techeniya gaza s tverdymi chastitsami* [Turbulent Flows of Gas with Solid Particles]. Moscow, Fizmatlit, 2003. 192 p. (In Russian)
5. Varaksin A.Yu. *Stolknoveniya v potokakh gaza s tverdymi chastitsami* [Collisions in Gas Flows with Solid Particles]. Moscow, Fizmatlit, 2008. 312 p. (In Russian)
6. Zuev Yu. V., Lepeshinskii I.A., Reshetnikov V.A., Istomin E.A. Selection of criteria and determination of their values for estimating the phase interaction behavior in two-phase turbulent jets. *Vestn. MGTU im. N.E. Baumana. Ser. "Mashinostr."*, 2012, no. 1, pp. 42–54. (In Russian)
7. Picano F., Sardina G., Gualtieri P., Casciola C.M. Anomalous memory effects on transport of inertial particles in turbulent jets. *Phys. Fluids*, 2010, vol. 22, no. 5, art. 031005PHF, pp. 1–4. doi: 10.1063/1.3432439.
8. Zuev Yu.V. About the use of the Stokes number for mathematical modeling of two-phase jet flows. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2019, vol. 161, no. 3, pp. 341–354. doi: 10.26907/2541-7746.2019.3.341-354. (In Russian)

9. Gavin L.B., Naumov V.A., Shor V.V. Numerical investigation of a gas jet with heavy particles on the basis of a two-parameter model of turbulence. *J. Appl. Mech. Tech. Phys.*, 1984, vol. 25, no. 1, pp. 56–61. doi: 10.1007/BF00916866.
10. Mostafa A.A., Mongia H.C., McDonell V.G., Samuelsen G.S. Evolution of particle-laden jet flows – A theoretical and experimental study. *AIAA J.*, 1989, vol. 27, no. 2, pp. 167–183. doi: 10.2514/3.10079.
11. Barba F.D., Picano F. Clustering and entrainment effects on the evaporation of dilute droplets in a turbulent jet. *Phys. Rev. Fluids*, 2018, vol. 3, no. 3, art. 034304, pp. 1–25. doi: 10.1103/PhysRevFluids.3.034304.
12. Nigmatulin R.I. *Dinamika mnogofaznykh sred* [Dynamics of Multiphase Media]. Pt. 1. Moscow, Nauka, 1987. 464 p. (In Russian)
13. Hintze I.O. *Turbulentnost', ee mekhanizm i teoriya* [Turbulence, Its Mechanism and Theory]. Moscow, Fizmatgiz, 1963. 680 p. (In Russian)
14. Sternin L.E., Schreiber A.A. *Monofaznye techeniya gaza s chastitsami* [Multi-Phase Gas Flows with Particles]. Moscow, Mashinostroenie, 1994. 320 p. (In Russian)
15. Abramovich G.N., Girshovich T.A., Krashennnikov S.Yu., Sekundov A.N., Smirnova I.P. *Teoriya turbulentnykh strui* [Theory of Turbulent Jets]. Abramovich G.N. (Ed.). Moscow, Nauka, 1984. 716 p. (In Russian)
16. Krashennnikov S.Yu. Calculation of axisymmetric swirling and non-swirling turbulent jets. *Izv. Akad. Nauk SSSR. Ser. MZhG*, 1972, no. 3, pp. 71–80. (In Russian)
17. Schreiber A.A., Gavin L.B., Naumov V.A., Yatsenko V.P. *Turbulentnye techeniya gazovzvesi* [Turbulent Flows of a Gas Suspension]. Kiev, Naukova Dumka, 1987. 240 p. (In Russian)
18. Samarskii A.A. *Teoriya raznostnykh skhem* [Theory of Difference Schemes]. Moscow, Nauka, 1989. 616 p. (In Russian)
19. Kartushinskii A.I., Frishman F.A. On migration transport in a two-phase jet. *Struinye techeniya zhidkostei i gazov: Tez. Vsesoyuz. nauch. konf.* [Jet Flows of Liquids and Gases: Proc. All-Union Sci. Conf.]. Pt. 3. Novopolotsk, Novopolotskii Politekh. Inst., 1982, pp. 22–28. (In Russian)
20. Gavin L.B., Mul'gi A.S., Shor V.V. Numerical and experimental study of a non-isothermal turbulent jet with a heavy impurity. *J. Eng. Phys.*, 1986, vol. 50, no. 5, pp. 505–511. doi: 10.1007/BF00870703.

Для цитирования: Зувев Ю.В. Погрешность расчета параметров двухфазной турбулентной струи при использовании одножидкостной математической модели // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2020. – Т. 162, кн. 4. – С. 411–425. – doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.411-425.

For citation: Zuev Yu.V. Miscalculation of two-phase turbulent jet parameters while using one-liquid mathematical model. *Uchenye Zapiski Kazanskogo Universiteta. Seriya Fiziko-Matematicheskie Nauki*, 2020, vol. 162, no. 4, pp. 411–425. doi: 10.26907/2541-7746.2020.4.411-425. (In Russian)