Р.Р. ШАГИДУЛЛИН

ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ МЯГКИХ ОБОЛОЧЕК

КАЗАНСКОЕ МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОБЩЕСТВО

2001

Оглавление

Введение 5

Глава 1. **Математическое моделирование деформированного состояния однородной изотропной мягкой оболочки** 12
§ 1. Уравнение равновесия мягкой оболочки 12
§ 2. Физические соотношения для мягких оболочек 20
§ 3. Гиперупругость мягкой оболочки 24
§ 4. Преобразования уравнений равновесия мягкой оболочки 30

Глава 2. **Исследование одномерных уравнений** 38
§ 1. Введение. Первые результаты, следующие из общей теории монотонных операторов. 38
§ 2. Теоремы существования при линейном физическом законе 43
§ 3. Теоремы существования при физическом законе, отличном от степенного с целым показателем 48
§ 4. Двухслойный итерационный процесс решения стационарной задачи теории мягких оболочек 60
§ 5. Асимптотический анализ уравнений равновесия упругой оболочки при стремлении изгибной жесткости к нулю 66
§ 6. Теорема существования для нелинейной нестационарной задачи теории мягких оболочек 90

Глава 3. **Двумерные задачи теории мягких оболочек** 97
§ 1. Исследование на основе теоремы о неявной функции 97
§ 2. Критерий монотонности тензора Пиолы для мягких оболочек 110
§ 3. Минимизация функционала полной энергии для мягкой оболочки . . . 125

Глава 4. **Моделирование аэрогидродинамических нагрузок при отрывном обтекании оболочки. Задачи взаимодействия** 158
§ 1. Стационарные задачи 158
§ 2. Моделирование нестационарных отрывных течений над оболочкой с использованием вихревой пелены 176
§ 3. Решение задач отрывного обтекания с помощью метода конечных элементов 207

Литература 220

ПРЕДИСЛОВИЕ

В книге исследуются вопросы математического моделирования изотропных однородных мягких оболочек. Излагаются теоремы разрешимости уравнений равновесия мягкой оболочки для широкого класса физических законов. Исследуется задача минимизации полной энергии.

Рассмотрено асимптотическое поведение решения задачи моментного состояния оболочки при стремлении изгибной жесткости к нулю. Предложены модели определения гидродинамических нагрузок на оболочку, когда она находится в потоке жидкости.

Изучена сходимость некоторых методов получения приближенного решения соответствующих задач.

Монография предназначена для специалистов в области теории оболочек, гидроупругости, дифференциальных уравнений с частными производными и приближенных методов их решения, а также для аспирантов и студентов старших курсов, обучающихся по специальностям прикладная математика и механика.

Книга издана при при целевой поддержке Академии Наук Республики Татарстан и Фонда НИОКР РТ по проекту № 05–01–07/2001(Ф05).

Написанию книги способствовала поддержка Российского фонда фундаментальных исследований (коды проектов: 98–01–00260, 01–01–00616).

Автор выражает искреннюю благодарность М.А. Ильгамову. Устойчивый интерес к теории мягких оболочек сформировался у автора в годы работы в возглавляемом М.А. Ильгамовым научном коллективе. Многие вопросы постановки задач теории мягких оболочек обсуждались с И.Г. Терегуловым. Автор искренне благодарен ему за доброжелательное отношение и поддержку. Автор благодарит своих коллег — участников семинара кафедры вычислительной математики Казанского государственного университета, руководимого А.Д. Ляшко, за полезное обсуждение результатов, представленных в этой книге.

Автор признателен заведующему кафедрой вычислительной математики КГУ М.М. Карчевскому за тяжелый труд по редактированию книги, полезные замечания и постоянное внимание к работе. Р.З. Даутов внимательно прочитал рукопись книги и сделал ряд ценных замечаний. Ему автор также выражает свою признательность.

Наконец, книга не была бы написана, если бы не терпение и мужество жены автора. Ей и посвящается книга.

ВВЕДЕНИЕ

Мягкие оболочки в классе тонких упругих оболочек выделяются неспособностью воспринимать сжимающие усилия и сопротивляться чистому изгибу. При анализе их напряженно-деформированного состояния пренебрегают изгибающими и крутящими моментами, а также перерезывающими усилиями.

Как мягкие оболочки в определенных условиях ведут себя ткани, эластичная пленка, стенки биологических объектов.

Обсуждая далее характеристические свойства мягких оболочек, отметим их большую деформативность; разнообразие форм, которые может принять оболочка при деформации. Ввиду больших деформаций и перемещений элементов оболочки задачи для мягких оболочек, как правило, геометрически нелинейны. Нелинейность вносят также ограничения в виде определенных неравенств. Основное из них: $\Theta(\lambda_1, \lambda_2) \geqslant 0$. Здесь $\Theta(\lambda_1, \lambda_2)$ — функция, выражающая физический закон связи главных касательных усилий $T_1,\ T_2$ с главными степенями удлинений $\lambda_1,\ \lambda_2$ элемента оболочки:

$$T_1 = \Theta(\lambda_1, \lambda_2), \quad T_2 = \Theta(\lambda_2, \lambda_1). \tag{1}$$

Легкость, компактность, транспортабельность, способность к большим и быстрым формоизменениям, прочность и высокая экономичность конструкций из мягких оболочек обеспечивают быстрое расширение области их применения. Следующие сферы человеческой деятельности дают примеры использования мягких оболочек.

1) Строительство: воздухоопорные сооружения, пневмоконструкции, водоналивные плотины, ветрозащитные устройства, конструкции из тонких эластомеров (скафандры, мягкие емкости), плавучие мосты.

2) Транспорт: парашюты, дирижабли, гибкие ограждения судов на воздушной подушке, элементы движителей колеблющегося типа.

3) Медицина: моделирование поведения оболочек сердца, желудка, кишечника; моделирование мембран клеток.

В многообразии задач, связанных с практическим использованием мягких оболочек, проявляется и многообразие применяемых материалов, а, следовательно, и физических законов (5), связывающих усилия и степени удлинения.

Переходя к краткому обзору развития теории мягких оболочек, отметим, что основы теории были заложены в работах отечественных ученых С.А. Алексеева [3], [5], [6], В.И. Усюкина [96] , В.Э. Магулы [66]–[68], А.С. Григорьева [30], [31], Б.И. Друзя [42], В.Л. Бидермана, Б.Л. Бухина, К.Ф. Черных и др. Ими была проделана большая работа по модификации уравнений с учетом класса решаемых задач (малые деформации при больших перемещениях; оболочки вращения под осесимметричной нагрузкой; возможность разделения общей системы уравнений и т. д.); по упрощению уравнений с целью их приближенного интегрирования (классическими методами: разделения переменных; методом характеристик и др.), по упрощению уравнений с учетом специфики рассматриваемой конкретной задачи и с учетом практической приемлемости решения уравнений после анализа и отбрасывания некоторых их членов; по выбору вариантов записи уравнений равновесия в зависимости от того, какие геометрические или механические характеристики деформированной оболочки определяются.

Способствовало развитию теории мягких оболочек дальнейшее развитие парашютостроения — необходимость спуска на парашютах космических аппаратов и боевой техники. Динамику и статику парашюта как мягкой оболочки изучали Х.А. Рахматуллин [80], [81], О.В. Рысев, В.И. Ладыгин. Этой теме посвящены докторские диссертации В.И. Усюкина, Б.В. Гулина, В.В Риделя и Р.Ш. Гимадиева. Из зарубежных исследователей этой темы отметим таких ученых, как S. Greenhalgh, Jr. H. C. Curtiss, B. Smith, C. James, Ross, H.D. Melzig, W.M. Mullins, D.T. Reinolds, B.W. Roberts, Y.W. Stevens, T.F. Johns.

Для постановки задачи расчета напряженно-деформированного состояния мягкой оболочки, взаимодействующей с окружающей средой, как задачи гидроаэроупругости существенными были работы М.А. Ильгамова [44]–[46].

Для выяснения структуры реологических соотношений в теории мяг-

ких оболочек важны работы К.Ф. Черных [100]–[102], И.Г. Терегулова [94], [95].

Появление ЭВМ большой мощности и развитие таких разделов вычислительной математики как теория разностных методов, метод конечных элементов позволили разработать и реализовать алгоритмы численного решения задач статики и динамики мягких оболочек сложной геометрии, оптимизационных задач, задач расчета ударных волн во взаимодействующих средах: оболочка–газ и т.д. В области численного эксперимента отметим следующих авторов: Б.В. Гулин, В.В. Ридель, Р.Ш. Гимадиев, А.Н. Гильманов, А.А. Аганин, В.Н. Кислоокий, В.К. Цыхановский, А.Т. Пономарев, И.В. Днепров, А.В. Радченко, О.В. Рысев, С.А. Логвиненко, Ю.В. Мосев. Примером численного решения сложной задачи в биомеханике является расчет Г.Р. Абдюшевой и Р.Н. Мифтаховым процесса деформации мягкой цилиндрической биооболочки под воздействием нагрузок, вызванных ионным током [140], [141]. Работы упомянутых авторов интересны обнаруженными фактами, постановкой новых проблем (см. [40], [41], [25]).

Теоретический анализ корректности выполнялся, в основном, для одномерных задач, когда мягкая оболочка представляется как цилиндрическая с бесконечно длинной образующей, нагрузка не меняется вдоль образующей и определяется течением жидкости над оболочкой. Начало положили работы Чизотти [126], Гарабедяна и Ройдена [131].

Новая серия теоретических исследований одномерных задач началась с работ Дугана [127], О.М. Киселева [50], Бассанини [121].

В последующих работах [51]–[54] в той или иной форме применяется техника вышеупомянутых авторов.

Можно отметить лишь небольшое число работ, посвященных вопросам разрешимости, единственности решений уравнений общего напряженно-деформированного состояния мягкой оболочки.

N. Zdzislaw в работах [146], [147] рассмотрел некоторые теоретические вопросы, связанные с изгибом мягкой цилиндрической оболочки и получил вариант неравенства Корна для мягких оболочек. Он ограничился при этом линейным физическим законом, связывающим усилия и деформации.

A.C. Pipkin [143] рассмотрел напряжение в ткани с непрерывно распределенными складками с позиции общей теории упругости.

Охарактеризуем кратко содержание книги.

Глава 1 начинается с вывода общеизвестных уравнений равновесия мягкой оболочки в рамках теории простых оболочек [7]. Далее проводим рассуждение, показывающее, что уравнения можно записать в форме уравнения равновесия трехмерной упругой среды. Это позволяет вводить определения и вести построения аналогично математической теории упругости, современный аппарат которой изложен в монографии Ф. Сьярле [92].

На основе этой аналогии:

1) вводится тензор Пиолы и с его помощью выписываются уравнения в недеформированной конфигурации;

2) выясняется структура физических соотношений для однородных изотропных мягких оболочек;

3) для мягкой оболочки в рамках теории простых оболочек определяется ("внутренним" образом) понятие гиперупругости (существование упругого потенциала) и получается критерий гиперупругости; в известных нам работах гиперупругость мягкой оболочки берется как следствие таковой для "трехмерного" материала оболочки, а потенциал получают из "трехмерного", полагая материал несжимаемым.

В конце главы получена новая форма уравнений равновесия мягкой оболочки, благодаря чему для их исследования удалось применить результаты теории монотонных операторов и теоремы о неявных функциях.

В главе 2 рассматривается бесконечно длинная цилиндрическая оболочка с касательным усилием $T(s)$ вдоль направляющей и степенью удлинения $\lambda(s)$. Параметр s представляет собой длину дуги образующей, отсчитываемой от фиксированной точки до рассматриваемой в недеформированном состоянии. Ставится первая краевая задача определения формы статического равновесия жестко закрепленной вдоль образующей оболочки, находящейся под действием массовых сил и нормально приложенной следящей нагрузки (простейшая модель взаимодействия со средой).

Проводится исследование разрешимости задачи в следующих случаях.

1) Когда показатель α в зависимости $T = \nu(\lambda-1)_+^\alpha$ больше единицы. Используется теория монотонных коэрцитивных операторов [145].

2) Для случая $\alpha = 1$, применены принадлежащие И.В. Скрыпнику [88] результаты теории нечетных операторов, удовлетворяющих S-условию.

3) Для случая $\alpha < 1$ и случая, когда зависимость $T(\alpha)$ отличается от степенной. Применена техника априорных оценок.

В этой главе изучается также итерационный метод решения уравнений статики мягких оболочек.

Далее в главе исследовано отношение решений уравнения безмоментного и моментного состояний первоначально круговой бесконечно длинной цилиндрической оболочки, когда изгибная жесткость D стремится к нулю. Исследованы возникающие в решении пограничные слои.

Глава заканчивается теоремой существования для нестационарной задачи. Метод исследования обусловил введение в уравнение равновесия слагаемых с искусственной вязкостью.

Глава 3 посвящена исследованию двумерных задач статики мягких оболочек. Применением теоремы о неявной функции доказано существование решения уравнения равновесия мягкой оболочки в окрестности предварительно напряженного двуосного состояния.

Получению условий на физические соотношения, при которых оператор уравнения равновесия монотонен в соответствующем пространстве, посвящен второй параграф главы.

В последнем параграфе третьей главы исследуется задача минимизации функционала I полной энергии однородной изотропной мягкой оболочки. Эта задача (как и постановка в виде вариационного неравенства) имеет преимущество перед дифференциальной в том, что прямо рассматривается на допустимом множестве деформаций, выделяемом ограничениями физического закона: $\Theta(\lambda_1, \lambda_2) \geqslant 0$.

На примере материалов Муни и Трилора исследуются свойства минмизирующей функционал полной энергии последовательности деформаций. На основе этого исследования определяется понятие обобщенного

решения и проводится релаксация задачи минимизации. Доказывается существование минимизирующего функционал элемента.

В главе 4 построены и исследовны математические модели для важного класса отрывных течений над оболочкой, когда рассматривается поток маловязкой несжимаемой жидкости в диапазоне чисел Рейнольдса: 10^4–10^6.

В первом параграфе исследуется плоское установившееся течение над бесконечно длинной цилиндрической оболочкой перпендикулярно к ее образующим. Для описания зонной схемы течения над плохообтекамым препятствием удачную математическую модель для расчётов гидродинамических характеристик потока предложили Г. Паркинсон, Т. Яндали [78]. В дальнейшем H.S. Bluston, R.W. Paulson [123], [124], M. Kiya, M. Arie [137], [138], P.W. Bearman, J.E. Fackrell [122], Гювен, Гател, Фарелл [37], Моди, Эль-Шарбини [72], Ю.И. Майоров [69] и др. показали, что для плохообтекаемых тел модель Паркинсона–Яндали дает хорошо согласующееся с экспериментом распределение давления по обтекаемому контуру, совместно с уравнениями пограничного слоя приложима для расчетов точек отрыва потока, допускает различные обобщения, в том числе, на пространственные течения, удобна для численной реализации.

Мы показываем, что модели струйного обтекания и модель Паркинсона-Яндали объединяются интегральным уравнением общей структуры, которая позволяет провести исследование разрешимости уравнений, определяющих систему: жидкость–цилиндрическая оболочка на основе метода Лере–Шаудера.

Во втором параграфе предлагается новый вариант математической модели нестационарного отрывного течения над оболочкой. Оторвавшийся пограничный слой моделируется вихревой пеленой. Принимается гипотеза К.П. Ильичева, С.Н. Постоловского [47]: точка отрыва движется со скоростью частицы жидкости, "зажатой" в точке отрыва контуром тела и сходящей вихревой пеленой. Обобщены на случай произвольного контура расчетные формулы модели отрывного обтекания Ильичева и Постоловского над круговым цилиндром. Дан анализ возникающих особенностей. Получено представление поля скоростей от рассматриваемых вихревых пелен интегральными операторами простой структуры.

Параграф заканчивается примером расчетов с учетом проведенного теоретического анализа отрывных течений над жестким круговым цилиндром и над жестким эллиптическим цилиндром при различных углах атаки, а также над мягкой круговой цилиндрической оболочкой. Во всех случаях точка отрыва "выходит" на устойчивый режим поведения.

В последнем параграфе предлагается моделировать действием распределенных вихреисточников процессы зарождения пристеночной завихренности, появление завихренности в основном потоке за счет отрыва пограничного слоя, диссипацию завихренности в следе и т.д. Формулируется соответствующая дифференциальная краевая задача, строится ее конечноэлементная аппроксимация, доказывается сходимость приближенного решения к точному.

В работе принята следующая система ссылок на теоремы и формулы: теорема 3.2.1 означает, например, теорему 1 параграфа 2 главы 3.

Глава 1

Математическое моделирование деформированного состояния однородной изотропной мягкой оболочки

§ 1. Уравнение равновесия мягкой оболочки

Будем исходить из представления мягкой оболочки (МО) двумерной сплошной средой, геометрически описываемой поверхностью в трёхмерном евклидовом пространстве E_3 (или как риманово пространство). Этот подход соответствует теории простых оболочек Жилина–Альтенбаха [7], а также математической модели упругой оболочки, предложенной Рейснером в [82, с. 55–69].

Цель этой главы — не выходя за рамки такого представления, дать необходимые определения и вывести различные формы равновесия мягкой оболочки.

Определяющими свойствами мягких оболочек, выделяющими их в классе всех упругих оболочек, является неспособность их воспринимать сжимающие усилия и сопротивляться чистому изгибу. Любое состояние их является безмоментным и характеризуется отсутствием перерезывающих усилий. Другая характерная черта мягких оболочек — большая деформативность, гибкость в формообразовании и независимость конечного деформированного состояния от первоначальной ненапряженной формы оболочки.

1. Вывод уравнений равновесия. Пусть S — поверхность в трёхмерном пространстве E_3, представляющая оболочку в деформированном состоянии. На S определена система криволинейных координат (α^1, α^2), являющихся также лагранжевыми координатами для материальных частиц. Недеформированному состоянию оболочки соответствует поверхность S_0. Пусть $r(\alpha^1, \alpha^2)$ — радиус-вектор для фиксированной частицы оболочки в недеформированном состоянии, $R(\alpha^1, \alpha^2)$ — радиус-вектор после деформации; $r_i = \partial r/\partial\alpha_i,\ R_i = \partial R/\partial\alpha_i,\ i = 1, 2$. Все

остальные обозначения и понятия из теории поверхностей и тензоров согласуются с таковыми из книги Лурье [64], являются общепринятыми и будут употребляться без пояснений. Напомним только соглашения: строчные буквы относятся, в основном, к недеформированному состоянию, соответствующие прописные буквы — к деформированному; точка между тензорами означает операцию их свертывания, отсутствие ее — операцию тензорного произведения; суммирование в выражении, содержащем повторяющиеся индексы, происходит по множеству {1,2,3}, суммирование по индексам 1,2 указывается явно. Индекс "0" над дифференциальным оператором указывает, что последний определяется в начальной, "недеформированной" криволинейной системе координат.

В рамках этих представлений сжато изложим вывод известных уравнений равновесия мягкой оболочки. Применяемая техника требует от S известной гладкости, которую мы, пока не уточняя, предполагаем. Пусть F^i — сила, действующая на линейный элемент поверхности S, нормальный к R^i, с той части оболочки, куда направлен R^i, и рассчитанная на единицу длины. Соответственно, определяется сила F_i. Определим на S систему функций

$$T_{ij}(\alpha^1,\alpha^2) = (F_i)_j \sqrt{G_{ii}} \quad , \quad T^{ij}(\alpha^1,\alpha^2) = \left(F^i\right)^j \sqrt{G^{ii}},$$

где $G_{ij} = R_i \cdot R_j$, $G^{ij} = R^i \cdot R^j$ — коэффициенты первой квадратичной формы. Ввиду отсутствия перерезывающих усилий $F^k, F_k,\ k = 1,2$, лежат в касательной к S плоскости.

Следуя физическому смыслу этих векторов, определяемых в каждой возможной координатной системе на S, легко показать, что матрица $T = \left(T^{ij}\right),\ i,j = 1,2$, представляет контравариантные компоненты тензора в двумерном римановом пространстве, определяемом поверхностью S. Величины T_{ij} суть ковариантные его составляющие. Характерной особенностью данного тензора — тензора усилий — является то, что он определяет плотность P_M сил, действующих на любой элемент dL оболочки по формуле: $P_M = M \cdot T$, M — единичная нормаль к dL в касательной к S плоскости и направлена в сторону той части оболочки, воздействие которой на L рассматривается.

Рассмотрим элемент оболочки, ограниченный координатными лини-

ями, проходящими через точки $O = (\alpha^1, \alpha^2)$ и $A = (\alpha^1 + d\alpha^1, \alpha^2 + d\alpha^2)$. Проекция сил взаимодействия выделенного элемента с оставшейся частью оболочки на касательную плоскость в точке A определяется параллельным переносом в римановом пространстве S (см. [113, с. 457]) и равна

$$\sum_{k=1}^{2} \left(\nabla_1 \left(F^1 \sqrt{G_{22}} \right)^k R_k + \nabla_2 \left(F^2 \sqrt{G_{11}} \right)^k R_k \right) d\alpha^1 d\alpha^2.$$

Преобразуем эту величину, воспользовавшись выражением ковариантных производных ∇_i через символы Кристоффеля Γ^k_{lj} и общеизвестными соотношениями

$$\frac{G_{\overline{k}\,\overline{k}}}{G} = G^{kk}, \; \frac{\partial}{\partial \alpha^k} \sqrt{G} \Big/ \sqrt{G} = \sum_{i=1}^{2} \Gamma^i_{ki}, \; \overline{k} = 3 - k,$$

где $G = G_{11}G_{22} - G_{12}^2$ — определитель первой квадратичной формы. Получим:

$$\sum_{k=1}^{2} \Big(\sum_{i=1}^{2} \frac{\partial}{\partial \alpha^i} T^{ik} + \sum_{l,j=1}^{2} T^{lj} \Gamma^k_{lj} \Big) R_k d\alpha^1 d\alpha^2 \sqrt{G} +$$

$$+ \sum_{i,k=1}^{2} T^{ik} \frac{\partial}{\partial \alpha^i} \sqrt{G} R_k d\alpha^1 d\alpha^2 = \sum_{i,k=1}^{2} \nabla_i T^{ik} \sqrt{G} R_k d\alpha^1 d\alpha^2. \qquad (1)$$

Пусть $\mathcal{F} = X^1 R_1 + X^2 R_2 + X^3 N$ — внешняя сила, действующая на единицу площади оболочки, где N — нормаль к S единичной длины. При отсутствии движения равенство (1) позволяет выписать первые два уравнения равновесия оболочки

$$\sum_{i=1}^{2} \nabla_i T^{ik}(\alpha^1, \alpha^2) + X^k(\alpha^1, \alpha^2) = 0 \; , \; i = 1, 2, \; (\alpha^1, \alpha^2) \in S. \qquad (2)$$

Проекция сил, действующих на рассматриваемый элемент через стороны $\alpha^1 = \text{const}$, на нормаль в точке A равняется внешнему дифференциалу при переносе вектора $F^1 \sqrt{G_{22}} d\alpha^2$ вдоль координатной линии α^1 и, следовательно, равна [113, с. 457]:

$$\sum_{i=1}^{2} B_{i1} \left(F^1 \right)^i \sqrt{G_{22}} d\alpha^1 d\alpha^2 N = \sqrt{G} \sum_{i=1}^{2} B_{i1} T^{1i} d\alpha^1 d\alpha^2 N.$$

Проектируя аналогично силы взаимодействия через стороны $\alpha^2 = \text{const}$, получаем с учетом отсутствия перерезывающих усилий третье уравнение равновесия:

$$\sum_{i,k=1}^{2} B_{ik}(\alpha^1, \alpha^2) T^{ki}(\alpha^1, \alpha^2) + X^3(\alpha^1, \alpha^2) = 0. \tag{3}$$

В вышеприведенных формулах B_{ik} — коэффициенты второй квадратичной формы поверхности S. Безмоментность напряженно-деформированного состояния мягкой оболочки приводит к симметричности тензора усилий T (соответствующие выкладки опускаем, как стандартные):

$$T^{ij} = T^{ji}\ ,\ i, j = 1, 2. \tag{4}$$

Итак, известные в литературе уравнения равновесия безмоментной оболочки в статике суть (2), (3), (4). Они должны быть дополнены физическими соотношениями между характеристиками напряженного и деформированного состояний.

2. Преобразование уравнений равновесия оболочки к форме уравнений равновесия трехмерного тела. Цель последующего преобразования — придать уравнениям (2), (3) форму уравнений равновесия трехмерной среды. Для этого вложим S_0 и S соответственно в области Ω_0 и Ω из евклидового пространства E_3. Рассмотрим некоторую координацию $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ точек Ω_0 и Ω такую, что при $\alpha^3 = 0$ получается соответствующая координатная сеть S_0 и S, а также выполняются условия:

$$\frac{\partial}{\partial \alpha^3} R(\alpha^1, \alpha^2, 0) = N, \quad \frac{\partial}{\partial \alpha^3} r(\alpha^1, \alpha^2, 0) = n, \tag{5}$$

где n — единичная нормаль к поверхности S_0. Такое вложение можно осуществить, например, при помощи S-координат в пространстве [20, с. 20]. Необходимо только принять, что поверхности S_0, S ограничены, достаточно гладкие и не имеют точек самоперсечения. Можно считать, что α^3 меняется в интервале $[0, h]$, где h — достаточно малое положительное число.

Будем считать, что координаты $(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$ фиксируют материальную частицу, в Ω_0, а указанная координация определяет некоторую де-

формацию Ω_0 в Ω. Наши соглашения (5) обеспечивают переход элемента нормального к S_0 без растяжений в нормальный отрезок к S.

Тензор усилий T будем рассматривать как трехмерный, полагая дополнительные его компоненты в точках S равными нулю:

$$T^{ij} = 0, \text{ если } i = 3 \text{ или } j = 3, \tag{6}$$

а вне S продолжим произвольным образом, сохраняя симметричность и считая его достаточно гладким. В каждой новой координации $\alpha^1_H, \alpha^2_H, \alpha^3_H$ области Ω согласно правилам преобразования тензоров получим:

$$T^{ij}_H = T^{km}\frac{\partial \alpha^i_H}{\partial \alpha^k}\frac{\partial \alpha^j_H}{\partial \alpha^m}, \quad i,j,k,m \in \{1,2,3\}\,. \tag{7}$$

Если $\alpha^3_H = 0$ на S, преобразование (7) при $\alpha^3_H = 0$ совпадает с преобразованием тензоров в римановом пространстве S в силу (6). Если $i = 3$ или $j = 3$, то $T^{ij}_H = 0$ на S, поскольку при $k, m \in \{1, 2\}$ либо $\partial\alpha^i_H/\partial\alpha^k$, либо $\partial\alpha^j_H/\partial\alpha^m$ равняется нулю. Следовательно, и в новых координатах T есть требуемое продолжение действительного тензора касательных усилий на S. Будем рассматривать T как тензор напряжений Коши для занимающей область Ω сплошной среды. Положим еще, что на частицы среды в Ω действует объемная сила Φ, которая в точках $\alpha^3 = 0$ совпадает с $\mathcal{F}$. На Φ и продолжение T наложим условие, совпадающее с основным условием равновесия сплошной среды Ω:

$$\operatorname{div} T(\alpha) + \Phi(\alpha) = 0\ ,\ \alpha = (\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3) \in \Omega. \tag{8}$$

Последнее уравнение (8) в точках поверхности S равносильно системе уравнений (2), (3), если принять дополнительно к уже имеющимся соглашениям о T и координации Ω следующее предположение на продолжение T:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^3}T^{31} = \frac{\partial}{\partial\alpha^3}T^{32} = \frac{\partial}{\partial\alpha^3}T^{33} = 0 \text{ при } \alpha_3 = 0. \tag{9}$$

Действительно,

$$\operatorname{div} T = \nabla_k T^{ki} R_i = \Big(\frac{\partial}{\partial\alpha^k}T^{ki} + T^{mi}\Gamma^k_{mk} + T^{km}\Gamma^i_{km}\Big)R_i.$$

Учитывая, что на поверхности S $(\alpha^3 = 0)$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha^3}T^{3i} = 0\,,\; T^{3i} = 0\,,\; \Gamma^3_{m3} = R^3 \cdot R_{m3} = 0\,,$$

получим для $i = 1, 2$

$$\nabla_k T^{ki} = \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial\alpha^k}T^{ki} + \sum_{m,k=1}^{2} \left(T^{mi}\Gamma^k_{mk} + T^{km}\Gamma^i_{km}\right) = \sum_{k=1}^{2} \nabla_k T^{ki}\,,$$

в последней сумме ковариантные производные берутся в двумерном пространстве поверхности S. Пусть $i = 3$. Поскольку $\Gamma^3_{km} = R^3 \cdot R_{km} = N \cdot R_{km} = B_{km}$, то

$$\nabla_k T^{k3} = \sum_{m,k=1}^{2} T^{km}\Gamma^3_{km} = \sum_{m,k=1}^{2} T^{km}B_{km}\,.$$

Главный итог вышеизложенных рассуждений — уравнения равновесия безмоментной оболочки можно представить в виде

$$\text{div } T(\alpha^1, \alpha^2, 0) + \mathcal{F}(\alpha^1, \alpha^2) = 0. \tag{10}$$

Подчеркнем, что дифференциальный оператор div берется в трехмерном пространстве по отношению к T, продолженному как трехмерный тензор в ближайшую окрестность S, и выполняются условия:

$$N \cdot T = \frac{\partial}{\partial N}(N \cdot T) = 0\,,\; \frac{\partial}{\partial\alpha^3}R = N\,,\text{ если } \alpha^3 = 0. \tag{11}$$

Имея равенство (10), мы можем перейти к записи условий равновесия оболочки в области недеформированного ее состояния традиционным в общей теории упругости путем.

3. Уравнения равновесия в отсчетной конфигурации. Деформацию S_0 в S будем характеризовать тензором вида $(r^1R_1 + r^2R_2)(\alpha^1, \alpha^2)$. Соответственно, деформацию Ω_0 в Ω определяет тензор $r^kR_k(\alpha)$, который, если рассматривать его как оператор, переводит базис (r_1, r_2, r_3) из E_3 в базис (R_1, R_2, R_3) и называется в книге А.И. Лурье [64] градиентом места — $\overset{\circ}{\nabla}R$. Разложим его в произведение ортогонального O и симметричного тензоров: $\overset{\circ}{\nabla}R = O \cdot V$. Нам понадобятся собственные числа $\lambda_i,\ i = 1, 2, 3$ правого тензора искажений $V(\alpha^1, \alpha^2, \alpha^3)$.

Нетрудно видеть, что одно из собственных чисел, скажем, $\lambda_3(\alpha^1, \alpha^2, 0)$, есть коэффициент растяжения элементарного отрезка, в недеформированном состоянии перпендикулярного к S_0, и в силу наших соглашений о координатах в Ω_0 и Ω имеем $\lambda_3(\alpha^1, \alpha^2, 0) = 1$.

Вводим в рассмотрение трехмерный тензор Пиолы P

$$P(\alpha) = \sqrt{G/g}\; r_S(\alpha) R^S(\alpha) \cdot T(\alpha), \quad \alpha \in \Omega. \tag{12}$$

Здесь $\sqrt{G/g}$ — якобиан преобразования: $r(\alpha) \to R(\alpha)$; при $\alpha^3 = 0$ он может интерпретироваться как отношение элементарных площадей на S_0 и S, занимаемых одними и теми же частицами до и после деформации. При помощи тензора Пиолы можно записать уравнение равновесия среды в координации недеформированного состояния (см., например, [92, с. 105–109]), вследствие чего уравнение равновесия безмоментной оболочки принимает вид

$$\overset{\circ}{\operatorname{div}} P(\alpha^1, \alpha^2, 0) + \rho_0(\alpha^1, \alpha^2, 0) \mathcal{F}_m(\alpha^1, \alpha^2) = 0, \ (\alpha^1, \alpha^2) \in S_0. \tag{13}$$

Здесь $\mathcal{F}_m$ — массовая плотность сил, действующих на деформированную оболочку S; $\rho_0(\alpha)$ — объемная плотность массы в Ω_0, при $\alpha^3 = 0$ она совпадает с реально существующим поверхностным распределением массы на S_0.

Дополнительные требования к тензору P в уравнении (13). Условие $T^{ij} = 0$, когда $\alpha^3 = 0$ и $\max(i, j) = 3$, эквивалентно условию

$$P^{3j}(\alpha) = 0 \quad \text{при } \alpha^3 = 0 \quad \text{и } j \in \{1, 2, 3\}. \tag{14}$$

Здесь P^{kl} — коэффициенты разложения P по базису $\{r_k r_l\}$, k, $l = 1, 2, 3$. Если выполняется (14), то требования $\partial T^{3j}/\partial \alpha^3 = 0$ и

$$\partial P^{3j}/\partial \alpha^3 = 0, \quad j \in \{1, 2, 3\}, \tag{15}$$

в точках поверхности S также равносильны.

Приведём простые выкладки, подтверждающие высказывания о тензоре P. Из определения тензора P непосредственно следует ($\alpha^3 = 0$):

$$P = \sqrt{\frac{S}{s}} r_k R_j T^{kj} = \sqrt{\frac{S}{s}} r_k r_l T^{kj} \left(R_j \cdot r^l\right);$$

$$P^{kl} = \sqrt{\frac{S}{s}}(R_j \cdot r^l)T^{kj}. \tag{16}$$

Формула (16) показывает, что, если $T^{3j} = 0,\ j = 1,2,3$, то и $P^{3l} = 0$ при $l = 1,2,3$. Заметим, что $P^{l3} = T^{lj}\left(R_j \cdot r^3\right)$ не обязательно равняется P^{3l}. Предположим обратное: пусть $P^{3l} = 0,\ l = 1,2,3$. Из (16) следует, что $T^{3j}\left(R_j \cdot r^l\right) = 0$ для всех $l = 1,2,3$, поэтому и для любого вектора a имеем $T^{3j}\left(R_j \cdot a\right) = 0$. Выбираем $a = R^i$, что и влечет равенство $T^{3i} = 0,\ i = 1,2,3$.

Пусть вдобавок к $T^{3j} = 0$ и $\partial T^{3j}/\partial\alpha^3 = 0$ при $j = 1,2,3$ и $\alpha_3 = 0$. Тогда имеем:

$$\partial P^{3l}/\partial\alpha^3 = \frac{\partial}{\partial\alpha^3}\left(\sqrt{G/g}\left(R_j \cdot r^l\right)T^{3j}\right) = \sqrt{\frac{S}{s}}\left(R_j \cdot r^l\right)\frac{\partial T^{3j}}{\partial\alpha^3} = 0,\ l = 1,2,3.$$

Обратно, если $P^{3l} = \partial P^{3l}/\partial\alpha^3 = 0$ при $l = 1,2,3,\ \alpha_3 = 0$, то, как уже доказано, $T^{3j} = 0$, а потому и $\left(R_j \cdot r^l\right)\partial T^{3j}/\partial\alpha^3 = 0$. Рассуждаем, как и выше, с произвольным вектором a, получаем $\partial T^{3j}/\partial\alpha^3 = 0,\ j = 1,2,3$.

Замечания.

1) На S равны нулю также компоненты $T_{k3} = T_{3k},\ k = 1,2,3$, ибо $T_{k3} = T^{ij}g_{ik}g_{j3}$, а $g_{j3} = R_j \cdot R_3 = R_j \cdot N = 0,\ j = 1,2$, и если $j = 3$, то $T^{ij} = 0$ при $\alpha^3 = 0$.

2) Условия (15) также сохраняются при преобразовании (7), если $\alpha^3_H = 0$ на S, и новая координатная $(\alpha^1_H, \alpha^2_H, \alpha^3_H)$ по-прежнему удовлетворяет условиям (5).

3) Можно смотреть на (13) просто как на форму записи уравнений равновесия мягкой оболочки, где в выражении дифференциального оператора div не определяемые по деформации оболочки величины $\partial P^{3j}/\partial\alpha^3$ и P^{3j} полагаются равными нулю.

Если рассматриваем (13) как уравнение равновесия описанной выше гипотетической среды, заключающей в себе поверхность S_0, то приходим к интересной неклассической задаче трехмерной упругости. Действительно, пусть Ω_{0h} — цилиндр высоты h с основаниями S_0 и S_h; S_0 — область в плоскости декартовых переменных x_1, x_2, которую занимает раскройная форма оболочки; S_6 — боковая поверхность Ω_{0h}, параллельная оси x_3; всюду n — единичная внешняя нормаль к $\partial\Omega_{0h}$. Для определённости пусть на ∂S_0 заданы перемещения $u(x_1, x_2);\ T = \mathcal{T}(\nabla_x R)$ — заданные для оболочки физические соотношения; x_1, x_2 играют роль лагранжевых координат частицы.

Требуется доказать, что при достаточно малом h существует продолжение функций $\rho_0 F_m(x)$ с S_0 на Ω_{0h}, для которого смешанная краевая задача теории упругости в Ω_{0h};

$$\mathrm{div} P(x) + \rho_0(x)\mathcal{F}_m(x) = 0,\ x \in \Omega_{0h},$$

$$n(x) \cdot P(x) = \frac{\partial}{\partial n}\left(n(x) \cdot P(x)\right) = 0,\ x \in S_0,$$

$$R(x) = u(x_1, x_2) + x,\ x = (x_1, x_2, x_3) \in S_б,$$

$$P(x) = \det \overset{\circ}{\nabla}\, R(x)(\overset{\circ}{\nabla}\, R(x))^{-T}\mathcal{T}(\overset{\circ}{\nabla}\, R(x)),$$

имеет решение $R(x)$, со свойством:

$$R_3(x) = N,\ \text{если } x \in S_0;\ R(x) \in [C^3(\Omega_{0h})]^3.$$

Преимущество этой постановки задачи перед уравнениями (2), (3) состоит в возможности привлекать аппарат, наработанный в нелинейной теории упругости трёхмерной среды. Легче в такой постановке выразить и дополнительные ограничения на решение задачи. Например, точки самопересечения у деформированной оболочки отсутствуют, если

$$\int\limits_{\Omega_{0h}} \det \nabla R(x) dx \le \mathrm{vol}\,\Omega_h \tag{1}$$

$$\int\limits_{\Omega_{0h}} \det \nabla R(x) dx \le \mathrm{vol}\,\Omega_h$$

для всех h, меньших некоторого числа.

§ 2. Физические соотношения для мягких оболочек

Исследования физических соотношений для мягких оболочек можно провести, также следуя общей теории упругости. В большинстве работ физические соотношения в случае изотропного материала мягкой оболочки берутся как скалярные уравнения, связывающие главные степени удлинения λ_k с главными усилиями $T_k,\ k = 1, 2:$

$$T_k = T_k(\lambda_1, \lambda_2). \tag{1}$$

Заметим, что физические соотношения в форме (1) не определяют тензор усилий T; для нахождения T необходимо знать деформированную форму $R(\alpha)$ оболочки, чтобы по ней можно было рассчитывать ориентацию главных осей деформации в рассматриваемой точке. Таким образом, T определяется как функция $R(\alpha)$.

Отношения (1) определяют главные усилия, как если бы деформация в точке α была локально-плоской: изгиб оболочки, её кривизна в точке α не влияют на значение T_k; важно только, что плоский элемент, касающийся поверхности S в точке α, подвергается растяжению в двух взаимно-перпендикулярных направлениях в λ_1 и λ_2 раз. Учитывая сказанное, начинаем исследование физических соотношений в рамках теории простых оболочек с постулирования, что математическим выражением неспособности мягкой оболочки сопротивляться изгибу является независимость инвариантов тензора усилий T от второй квадратичной формы поверхности S, и что в согласии с этим упругость оболочки равносильна существованию в точках S функционального отношения $T = \mathcal{T}(r^1 R_1 + r^2 R_2)$. Последнее можно рассматривать также как отношение между тензором усилий $T(\alpha)$ и градиентом места $\overset{\circ}{\nabla} R(\alpha) = r^1 R_1 + r^2 R_2 + nN$, ибо диада nN однозначно определяется векторами R_1, R_2 (r^1, r^2, n фиксированы).

Возьмем полярное разложение: $\overset{\circ}{\nabla} R(\alpha) = O(\alpha) \cdot V(\alpha)$, где O — ортогональный, а V — симметричный, положительно определенный операторы. Просто можно доказать важное для нас представление: $V = V_2 + NN$, где V_2 — оператор, относительно которого инвариантно касательное в точке α к S евклидово пространство $E_2(\alpha)$, $N \cdot V_2 = \theta$, $N = n \cdot O$. Мы вправе, как и в общей теории упругости, характеризовать изотропность оболочки выполнением равенства:

$$\mathcal{T}(O \cdot \overset{\circ}{\nabla} R) = \mathcal{T}(\overset{\circ}{\nabla} R) \quad \text{при любом фиксированном } \alpha = (\alpha^1, \alpha^2, 0), \quad (2)$$

где O — любое ортогональное преобразование векторов в E_3. Аналогично, независимость от системы отсчета тензора усилий характеризуется выполнением условия:

$$\mathcal{T}(\overset{\circ}{\nabla} R \cdot O) = O^T \cdot \mathcal{T}(\overset{\circ}{\nabla} R) \cdot O. \quad (3)$$

Конечно, здесь мы рассматриваем $T = \mathcal{T}(\overset{\circ}{\nabla} R)$ как трехмерный тензор через его диадное представление посредством трехмерных векторов:

$$T = \sum_{i,j=1}^{2} T^{ij} R_i R_j.$$

Далее следуют обычные рассуждения [64, с. 94] для получения следующих следствий из соотношений (2), (3):

$$\mathcal{T}(\overset{\circ}{\nabla} R) = \mathcal{T}(V),\ \mathcal{T}(O^T \cdot V \cdot O) = O^T \cdot \mathcal{T}(V) \cdot O \quad \forall \alpha \in S. \tag{4}$$

Здесь все тензоры трехмерные. Поскольку V только диадой NN отличается от V_2, и N однозначно определяется плоскостью $E_2(\alpha)$, мы можем рассматривать последнее равенство из (4) в двумерном пространстве $E_2(\alpha)$, где оно справедливо уже для любого ортогонального и любого симметричного положительно определенного двумерного тензора. Как следствие, тензорная функция $\mathcal{T}(V)$ является изотропной в E_2, и потому согласно общей теории [64, с. 460] допускает следующее представление в E_2:

$$\mathcal{T}(V) = \varphi_0 I + \varphi_1 V, \tag{5}$$

где I — единичный тензор, φ_0 и φ_1 функции от инвариантов V в E_2: $\varphi_i = \varphi_i(\lambda_1\lambda_2, \lambda_1 + \lambda_2),\ i = 1, 2$. При переходе от точки (α^1, α^2) к точке $(\widetilde{\alpha}^1, \widetilde{\alpha}^2)$ функции φ_i могут изменяться. Их сохранение равносильно однородности материала мягкой оболочки, что мы и предполагаем. При физической интерпретации λ_1 и λ_2 представляют главные удлинения линейных элементов S_0 при деформации. Введем в рассмотрение главные усилия T_1 и T_2 тензора T (собственные числа T в E_2). В литературе, посвященной мягким оболочкам [68], [83], область, где оба главных усилия строго больше нуля, называется областью двухосного состояния; область, где одно из них равно нулю, другое положительно — областью одноосного состояния. Наконец, область, в точках которой оба главных усилия равны нулю — зона ненапряженного состояния.

Зоны одноосного состояния играют особую роль как в теоретических исследованиях, так и в организации расчётов. Общепринято считать, что

в этой области в реальной оболочке может произойти потеря устойчивости из-за появления сжимающих усилий и переход в складчатое состояние с изломами. Ввиду существенной потери гладкости у поверхности, представляющей оболочку, нужны новые уравнения и физические соотношения. Однако физика явления недостаточно изучена, мало выяснены физические закономерности складкообразования. Поэтому принимают предположение [68, с. 47, 48], которого будем придерживаться и мы, что при замене мелкоскладчатого состояния сглаженной усредненной поверхностью, последняя определяется теми же уравнениями равновесия и физическими соотношениями, что и зона двухосного состояния. "Складки как бы размазываются по поверхности" [68, с. 47].

Естественно при этом ожидать, что в поперечном к складке направлении усилие при такой "осредненной" деформации будет нулевое, а степень удлинения λ может оказаться много меньше единицы. Полагают [68, с. 48–51], что в возникшей таким образом зоне одноосного состояния в соответствующем решении уравнений (1.2), (1.3), или (1.13) линии главного отличного от нуля усилия T_1 совпадают с направлениями складок, а значения T_1 и λ_1 дают реальные усилие и удлинение линейного элемента исходной оболочки, расположенного вдоль складки. Говоря кратко, λ_1, T_1, вычисленные на решении, дают в зоне одноосного состояния, величины, которые соответствуют действительным, определяют физические величины, "имеющие место быть".

Для нас важно следующие заключение Магулы [68, с. 49]: "для оболочек, удовлетворяющих критериям мягкости, расчеты на базе приведённых допущений дают приемлемые результаты".

Далее, в параграфе 3 главы 3, мы определим понятие обобщенного решения уравнений равновесия мягкой оболочки, согласующееся с вышеприведенной интерпретацией зоны одноосного состояния. Согласно изложенному примем, что общие физические соотношения (5) для изотропных мягких оболочек, в терминах главных усилий и моментов имеющие вид:

$$\begin{aligned} T_1(\lambda_1, \lambda_2) &= \varphi_0(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_1 \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2), \\ T_2(\lambda_1, \lambda_2) &= \varphi_0(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_2 \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2), \end{aligned} \tag{6}$$

выполняются всюду на оболочке; при этом:

1) функции φ_0, φ_1 заданы и непрерывны в некоторой области

$$\Omega \subseteq \{(\lambda_1 \geqslant 1 \ \& \ \lambda_2 > 0) \cup (\lambda_1 > 0 \ \& \ \lambda_2 \geqslant 1)\};$$

2) функции $\varphi_0 + \lambda_i \varphi_1$, $i = 1, 2$ неотрицательны;

3) если $\lambda_i > 1$ при $i = 1$ или $i = 2$, то соответствующее $T_i > 0$;

4) если $\lambda_1 \leqslant 1$ и $\lambda_2 \leqslant 1$, то $T_1 = T_2 = 0$.

§ 3. Гиперупругость мягкой оболочки

Рассмотрим работу δA сил, действующих на оболочку, при вариации деформации

$$\delta A = \int\limits_S \rho K \cdot \delta R ds + \int\limits_{\partial S} p \cdot \delta R dl,$$

K — плотность внешней массовой силы, p — линейная плотность силы, действующей по контуру оболочки. Тензор Пиолы позволяет выразить δA интегралами по недеформированной поверхности S_0:

$$\delta A = \int\limits_{S_0} \rho_0 K \cdot \delta R ds + \int\limits_{\partial S_0} m \cdot P \cdot \delta R dl.$$

Воспользуемся равенством $mdl = dr \times n$ и формулой Стокса для преобразования последнего интеграла:

$$\int\limits_{\partial S_0} (dr \times n) \cdot P \cdot \delta R = \int\limits_{\partial S_0} (n \times P) \cdot \delta R \cdot dr = \int\limits_{S_0} (n \times \overset{\circ}{\nabla}) \cdot ((n \times P) \cdot \delta R) ds =$$

$$= \int\limits_{S_0} (n \times r^s) \cdot (n_s \times P \cdot \delta R + n \times P_s \cdot \delta R + n \times P \cdot \delta R_s) ds.$$

Дальнейшие преобразования совершим при помощи простых равенств:

$$(n \times r^s) \cdot (n \times r_t) = r^s \cdot r_t, \ (n \times r^s) \cdot (n_s \times r_t) = C_1 \, r_{\overline{s}} \cdot (b_s^k r_k \times r_t) = C_2 r_{\overline{s}} \cdot (r_{\overline{t}} \times r_t) = 0,$$

C_1, C_2 — константы, $s, t \in \{1, 2\}$. Имеем:

$$\int\limits_{\partial S_0} m \cdot P \cdot \delta R dl =$$

$$= \int\limits_{S_0} \sum_{s=1}^{2} (n \times r^s) \cdot (n \times r_i r_j \cdot \delta R \overset{\circ}{\nabla}_s P^{ij} + n_s \times P \cdot \delta R + n \times P \cdot \delta R_s) ds =$$

$$= \int\limits_{S_0} \sum_{s=1}^{2} \left(r^s \cdot \frac{\partial P}{\partial \alpha^s} \cdot \delta R + r^s \cdot P \cdot \delta R_s \right) ds =$$

$$= \int\limits_{S_0} \sum_{s=1}^{2} \left(\left(r^s \cdot \frac{\partial P}{\partial \alpha^s} \right) \cdot \delta R + P \cdot\cdot \sum_{s=1}^{2} \delta R_s r^s \right) ds. \quad (1)$$

Принимая во внимание, что

$$n \cdot \frac{\partial P}{\partial \alpha^3}(\alpha^1, \alpha^2, 0) = \left(\frac{\partial P^{3j}}{\partial \alpha^3} + P^{kj} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{3}_{k3} + P^{3k} \overset{\circ}{\Gamma}{}^{j}_{k3} \right) r_j = 0,$$

а также уравнение равновесия (1.13), получим из (1)

$$\delta A = \int\limits_{S_0} \Big(\overset{\circ}{\text{div}}\, P \cdot \delta R + P \cdot\cdot \sum_{s=1}^{2} \delta R_s r^s \Big) ds + \int\limits_{S_0} \rho_0 K \cdot \delta R ds_0 =$$

$$= \int\limits_{S_0} P \cdot\cdot \sum_{s=1}^{2} \delta R_s r^s . ds$$

Для поверхностной плотности вариации работы имеем

$$\delta a = P \cdot\cdot \sum_{s=1}^{2} \delta R_s r^s, \quad (2)$$

то есть явную аналогию с общей теорией упругости.

Пусть существует функционал э(Q), относительно которого предположим:

а) область изменения Q — множество невырожденных трехмерных тензоров;

б) значение э(Q) не изменится, если изменить $\widetilde{N}$, где $\widetilde{N}$ — вектор из представления Q в виде $r^1R_1 + r^2R_2 + n\widetilde{N}$ при произвольно выбранных $r^1,\ r^2$ в E_3 $(n \cdot r^1 = n \cdot r^2 = 0, n \cdot n = 1)$;

в) вариация э$(\overset{\circ}{\nabla}\ R(\alpha))$ в точках (α^1, α^2) поверхности S равна элементарной работе δa при вариации деформации элемента $\delta S_0(\alpha)$ оболочки, то есть, при изменении $R_1(\alpha)$ и $R_2(\alpha)$ (и постоянстве базиса $r^1(\alpha), r^2(\alpha), n$).

При наличии такого функционала оболочку называем гиперупругой. Согласно общим формулам тензорного исчисления δэ $= \text{э}_{\overset{\circ}{\nabla} R} \cdot\cdot(\delta\ \overset{\circ}{\nabla}\ R)^T$, отсюда согласно предположению в) и формуле (2)

$$\text{э}_{\overset{\circ}{\nabla} R} \cdot\cdot(\delta\ \overset{\circ}{\nabla}\ R)^T = P \cdot\cdot \sum_{s=1}^{2} \delta R_s r^s.$$

Это равенство распишем в базисе r^1, r^2, n:

$$(\text{э}_{\overset{\circ}{\nabla} R})^{ij} r_i r_j \cdot \delta R_s r^s = p^{ij} r_i r_j \cdot\cdot \sum_{s=1}^{2} \delta R_s r^s,$$

$$(\text{э}_{\overset{\circ}{\nabla} R})^{sj} r_j \cdot \delta R_s = \sum_{s=1}^{2} p^{sj} r_j \cdot \delta R_s.$$

Фиксируем q и k из множества $\{1, 2\}$ и положим: $\delta R_q = r^k t, \delta R_{\overline{q}} = 0$, где t — малое вещественное число. Получим

$$(\text{э}_{\overset{\circ}{\nabla} R})^{3j} r_j \cdot \delta R_3 + (\text{э}_{\overset{\circ}{\nabla} R})^{qk} t = p^{qk} t. \tag{3}$$

но $(\text{э}_{\overset{\circ}{\nabla} R})^{3j} = \partial\text{э}/\partial(\overset{\circ}{\nabla}\ R)^{3j} = 0$ согласно б), и потому из (3) следует, как и в общей теории упругости

$$\text{э}_{\overset{\circ}{\nabla} R}(\alpha^1, \alpha^2) = P(\alpha^1, \alpha^2, 0), \quad \alpha = (\alpha^1, \alpha^2) \in S_0.$$

Легко получить равенство

$$\text{э}(Q) = \text{э}(O \cdot Q),$$

где O — любое ортогональное преобразование пространства E_3. Поэтому для градиента места $\overset{\circ}{\nabla}\ R$, используя полярное разложение, имеем

$$\text{э}(\overset{\circ}{\nabla}\ R) = \text{э}(O^T \cdot O \cdot V) = \text{э}(V).$$

Представим V в виде:

$$V = \lambda_1 e_1 e_1 + \lambda_2 e_2 e_2 + N\ N = V_2 + N\ N,$$

и пусть снова O — любое ортогональное преобразование, $O \cdot N = \widetilde{N}$. Изотропность и индифферентность материала к жесткому движению дают равенства:

$$\text{э}(\overset{\circ}{\nabla}\ R) = \text{э}(O \cdot V \cdot O^T) = \text{э}(\lambda_1 \widetilde{e}_1 \widetilde{e}_1 + \lambda_2 \widetilde{e}_2 \widetilde{e}_2 + \widetilde{N}\widetilde{N}) =$$

$$= \text{э}(\lambda_1 e_1 e_1 + \lambda_2 e_2 e_2 + N\ N), \quad \widetilde{e}_k = O \cdot e_k, \quad k = 1, 2.$$

Последние равенства показывают, что по существу э является функцией двух вещественных переменных — собственных чисел оператора $V_2(\alpha)$ в $E_2(\alpha)$, то есть $\text{э} = \text{э}(\lambda_1, \lambda_2)$.

Можно рассматривать э и как функцию в двумерном касательном к S пространстве $E_2(\alpha)$ от тензора $(V_2)^2$. Поскольку в качестве аргумента, допускаются все симметричные двумерные тензоры, дальнейшие рассуждения можно проводить стандартным в общей теории упругости образом [64, с. 109].

Введём в рассмотрение величины $t_1 = \lambda_2 T_1,\ t_2 = \lambda_1 T_2$, называемые главными силами. Пусть MdL — ориентированный нормалью M элементарный отрезок на S в точке $(\alpha^1 \alpha^2)$; mdl — этот отрезок до деформации. Определим вектор t_M формулой

$$t_M = \frac{M \cdot T dL}{dl} = mP.$$

Выбирая в качестве M поочерёдно e_1, e_2 — единичные собственные векторы тензора V (в силу изотропии они являются и собственными векторами T), получаем:

$$t_{e_k} = T_k \frac{dL}{dl} e_k = \overset{\circ}{e}_k\ P,\ k = 1, 2. \tag{4}$$

Вектор $\overset{\circ}{e}_k$ связан с e_k условием:

$$e_k = \frac{\overset{\circ}{e}_k \cdot \overset{\circ}{\nabla}\ R}{\left| \overset{\circ}{e}_k\ \nabla R \right|};\ \overset{\circ}{e}_k = e_k \cdot O^T,\ \text{если}\ \ \overset{\circ}{\nabla}\ R = O \cdot V.$$

Из (4) следует, что $t_{e_k} = t_k e_k$, ибо $dL/dl = \lambda_{3-k}$, а тензор P представим в виде:

$$P = \sum_{i=1}^{2} t_i \overset{\circ}{e}_i \, e_i, \; T = \sum_{i=1}^{2} T_i e_i e_i.$$

Тензоры P, T рассматриваются как трехмерные. Итак, главные силы в представлении тензора P играют ту же роль, что и главные усилия в представлении T.

Пусть оболочка гиперупругая с потенциалом э(V_2^2). Выразим главные силы через э. Изотропная скалярная функция от симметричного положительно определенного тензора V_2^2 является функцией его инвариантов $I_1 = \lambda_1^2 + \lambda_2^2$, $I_2 = \lambda_1^2 \lambda_2^2$ (см. [64, с. 45]). Согласно правилу дифференцирования тензорных функций (все производные тензорных функций по сути производные Фреше), используя формулы (сравни с [64, с. 104])

$$\text{э} = \text{э}(\overset{\circ}{\nabla} R) = \text{э}(V_2^2), \; P = \text{э}_{\overset{\circ}{\nabla} R} = 2\text{э}_{V_2^2} \cdot \overset{\circ}{\nabla} R, \; P = \sqrt{G/g} \nabla r^T \cdot T,$$

получаем:

$$T(\alpha^1, \alpha^2) = 2\sqrt{\frac{ds}{dS}} V_2^2 \cdot \text{э}_{V_2^2} =$$

$$= 2\sqrt{\frac{1}{\lambda_1 \lambda_2}} (\lambda_1^2 e_1 e_1 + \lambda_2^2 e_2 e_2) \cdot \sum_{k=1}^{2} \frac{\partial \text{э}}{\partial I_k} \frac{\partial I_k}{\partial V_2^2}.$$

Простой подсчёт показывает, что

$$\frac{\partial I_1}{\partial V_2^2} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad \frac{\partial I_2}{\partial V_2^2} = \begin{pmatrix} \lambda_2^2 & 0 \\ 0 & \lambda_1^2 \end{pmatrix}$$

в базисе (e_1, e_2) собственных ортонормированных векторов тензора V_2. Представляя так же и T в этом базисе, из (4) получаем

$$t_1 = 2\lambda_1 \left(\frac{\partial \text{э}}{\partial I_1} + \lambda_2^2 \frac{\partial \text{э}}{\partial I_2} \right),$$

$$t_2 = 2\lambda_2 \left(\frac{\partial \text{э}}{\partial I_1} + \lambda_1^2 \frac{\partial \text{э}}{\partial I_2} \right).$$

Легко видеть, что правые части этих равенств совпадают с $\partial э/\partial\lambda_1$ и $\partial э/\partial\lambda_2$ соответственно. Итак, в случае гиперупругости мягкой оболочки

$$t_k = \frac{\partial э}{\partial \lambda_k},\ k = 1, 2, \tag{5}$$

а тензоры P и T допускают соответственно представления:

$$P = \sum_{i=1}^{2} \frac{\partial э}{\partial \lambda_i}\ \overset{\circ}{e}_i\ e_i, \quad T = \sum_{i=1}^{2} \frac{1}{\lambda_{3-i}} \frac{\partial э}{\partial \lambda_i} e_i e_i.$$

Из (5) следует, что необходимым и достаточным условием существования потенциала мягкой оболочки является условие:

$$\frac{\partial t_1}{\partial \lambda_2} = \frac{\partial t_2}{\partial \lambda_1}. \tag{6}$$

.

Возвращаясь к физическим соотношениям (2.6), получаем из (6), что гиперупругими являются в точности те мягкие оболочки, для которых справедливо равенство

$$\frac{\partial}{\partial \lambda_2}(\lambda_2\varphi_0 + \lambda_1\lambda_2\varphi_1) = \frac{\partial}{\partial \lambda_1}(\lambda_1\varphi_0 + \lambda_1\lambda_2\varphi_1).$$

Последнее, например, выполнено для материала Муни, когда

$$T_1 = C_1(\lambda_1^4\lambda_2^2 - 1)(1 + C_2\lambda_2^2)/\lambda_1^3\lambda_2^3,$$
$$T_2 = C_1(\lambda_2^4\lambda_1^2 - 1)(1 + C_2\lambda_1^2)/\lambda_1^3\lambda_2^3.$$

Область изменения (λ_1, λ_2) определяется неравенствами

$$\lambda_1^2\lambda_2 \geqslant 1, \quad \lambda_2^2\lambda_1 \geqslant 1. \tag{7}$$

В известной нам литературе [68], [83] гиперупругость мягкой оболочки принимается как следствие гиперупругости и несжимаемости трехмерной сплошной среды, каковой представляется материал оболочки. Подобное замечание относится и к выводу соосности тензоров усилий и деформации.

В случае гиперупругости оболочки и консервативности приложенных нагрузок возникает задача минимизации, функционала полной энергии

$$I(R(x)) = \int\limits_{S_0} э(V_2^2)ds + \psi(R(x)),$$

на множестве допустимых функций $R(x),\ x \in S_0$. Множество задаётся неравенствами типа (7), обеспечивающими выполнение условий, наложенных на равенство (2.6). В этом параграфе мы прояснили структуру функции э(V_2^2). Слагаемое $\psi(R(x))$ определяется известным образом потенциалами внешних к оболочке сил.

§ 4. Преобразования уравнений равновесия мягкой оболочки

1. Связь градиента деформации с первой квадратичной формой. Вернёмся к основному уравнению (1.13) равновесия мягкой оболочки, записанному для недеформированного состояния S_0:

$$\operatorname{div} P(x_1, x_2, 0) + f(x) = 0,\ x \in S_0. \tag{1}$$

Первоначальную недеформированную форму S_0 примем для простоты изложения плоской. Это предположение естественно для тканевых оболочек, раскройная которых форма всегда плоская, и согласуется с тем, что уравнения равновесия мягкой оболочки даются в терминах конечного напряженно-деформированного состояния. В общем случае для проведения нижеизложенных рассуждений необходимо будет требовать ортогональности линий координат α^1, α^2 на S_0, что несколько усложнит выписываемые формулы.

В качестве криволинейных координат α^1, α^2 на S_0 возьмём декартовы координаты x_1, x_2 фиксированной декартовой системы координат x_1, x_2, x_3 в пространстве. Для точек S_0 имеем $x_3 = 0$. В этих условиях $r_1 = r^1, r_2 = r^2, r_3 = r^3 = n$ — единичные орты соответственно осей $x_1,\ x_2,\ x_3$.

Две матрицы будут играть основную роль в дальнейших преобразованиях уравнения (1.13). Первая есть матрица

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1 & \partial_1\varphi_2 & \partial_1\varphi_3 \\ \partial_2\varphi_1 & \partial_2\varphi_2 & \partial_2\varphi_3 \end{pmatrix},$$

где $(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)) = R(x)$, которая получается из матрицы тензора

$$\sum_{\alpha=1}^{2} r_\alpha R_\alpha$$

в системе координат $x_1,\ x_2\ , x_3$ отбрасыванием последней строки.

Вторая матрица — матрица A коэффициентов первой квадратичной формы поверхности деформированной оболочки :

$$A = (G_{\alpha\beta})_{\alpha,\beta=1,2.};\ G_{\alpha\beta} = R_\alpha \cdot R_\beta,\ R_\alpha = \frac{\partial R}{\partial x_\alpha},\ \alpha,\beta = 1,2.$$

Пусть далее Λ_1, Λ_2 — собственные числа, а $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ — соответствующие ортонормированные собственные векторы матрицы A.

Выведем формулы, связывающие наши основные обсуждаемые в этой главе величины, рассматривая все тензоры как трёхмерные и придерживаясь определений тензорных операций, данных в [64, приложение]. Имеем:

$$\overset{\circ}{\nabla}\ R = r_k R_k = r_k r_m \frac{\partial \varphi_m}{\partial x_k}.$$

Поэтому матрица тензора $\overset{\circ}{\nabla}\ R$ в системе координат x есть

$$\overset{3}{\nabla}\ \varphi = \begin{bmatrix} \partial_1\varphi_1 & \partial_1\varphi_2 & \partial_1\varphi_3 \\ \partial_2\varphi_1 & \partial_2\varphi_2 & \partial_2\varphi_3 \\ N_1 & N_2 & N_3 \end{bmatrix} = [\nabla\varphi_1 \nabla\varphi_2 \nabla\varphi_3] = \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ R_3 \end{bmatrix} \qquad (2)$$

и отличается от $\nabla\varphi(\equiv\overset{2}{\nabla}\ \varphi)$ третьей строкой. Напомним, что $N = R_3$ — единичная внешняя нормаль к S в точке (x_1x_2). Используя ортонормированность векторов r_1, r_2, r_3, получаем:

$$(\overset{\circ}{\nabla}\ R)^{-1} = R^k r_k = R^{kj} r_j r_k,\ (\overset{\circ}{\nabla}\ R)^{-T} = r_k R^k = R^{kj} r_k r_j.$$

Представляющая тензор $(\overset{\circ}{\nabla}\ R)^{-1}$ матрица есть

$$(\overset{3}{\nabla}\ \varphi)^{-1} = \begin{bmatrix} (R^1)_{x_1} & (R^2)_{x_1} & N_1 \\ (R^1)_{x_2} & (R^2)_{x_2} & N_2 \\ (R^1)_{x_3} & (R^2)_{x_3} & N_3 \end{bmatrix} = \left[R^1\ R^2\ R^3\right].$$

Здесь $(R^j)_{x_k}$ — k-ая координата R^j в системе x; $R^1(x), R^2(x)$ — контравариантный базис в двумерном римановом пространстве, определяемом метрикой деформированной оболочки:

$$R^1 = (R_2 \times N)/G,\ R^2 = (N \times R_1)/G,\ G = G_{11}G_{22} - G_{12}^2.$$

Представим $|R_1 \times R_2|$ двумя способами. С одной стороны, непосредственно из определения векторного произведения " $\times$ " следует, что $|R_1 \times R_2| = \sqrt{G}$, с другой, — $|R_1 \times R_2| = \det \overset{3}{\nabla} \varphi$. Действительно:

$$\det \overset{3}{\nabla} \varphi = N_1 \begin{vmatrix} \partial_1\varphi_2 & \partial_1\varphi_3 \\ \partial_2\varphi_2 & \partial_2\varphi_3 \end{vmatrix} - N_2 \begin{vmatrix} \partial_1\varphi_1 & \partial_1\varphi_3 \\ \partial_2\varphi_1 & \partial_2\varphi_3 \end{vmatrix} + N_3 \begin{vmatrix} \partial_1\varphi_1 & \partial_1\varphi_2 \\ \partial_2\varphi_1 & \partial_2\varphi_2 \end{vmatrix} =$$

$$= \sum_{i=1}^{3} (R_1 \times R_2)_i^2 / |R_1 \times R_2| = |R_1 \times R_2|.$$

Следовательно, коэффициент $\sqrt{G/g}$ формулы (1.12) определяется равенством

$$\sqrt{G/g} = \det \overset{3}{\nabla} \varphi. \tag{3}$$

Снова рассмотрим полярное разложение: $\overset{\circ}{\nabla}\ R = O \cdot V(x)$. Напомним, что $\lambda_1(x),\ \lambda_2(x)$ — собственные числа тензора V, характеризующие экстремальные степени удлинения в точке $(x_1, x_2) \in S_0;\ \lambda_3 = 1$.

Приведение тензора $V(x)$ на касательную к поверхности $R(x)$ в точке x плоскость E_2 будем обозначать через $V_2(x)$. В пространстве $E_2(x)$, определяемом векторами $R_1(x), R_2(x)$ имеет место представление

$$V_2^2(x) = R_1(x)R_1(x) + R_2(x)R_2(x). \tag{4}$$

Если рассмотрим V_2^2 как трёхмерный тензор, считая в его представлении $R_1(x), R_2(x)$ трехмерными векторами в E_3 , то его след не изменится, поскольку третье собственное число равно нулю. Трёхмерное представление $V_2^2(x)$ в исходном ортонормированном базисе r_1, r_2, r_3 имеет вид

$$\sum_{i,j=1}^{3} (\partial_1\varphi_i\partial_1\varphi_j + \partial_2\varphi_i\partial_2\varphi_j) r_i r_j = \sum_{i,j=1}^{3} (\overset{2}{\nabla}\ \varphi_i \cdot \overset{2}{\nabla}\ \varphi_j) r_i r_j; \quad \overset{2}{\nabla} = (\partial_1, \partial_2).$$

Следовательно,

$$\|V_2\|^2 = \sum_{i=1}^{3} \left\| \overset{2}{\nabla}\ \varphi_i \right\|^2 = \sum_{i=1}^{2}\sum_{j=1}^{2} (\partial_j\varphi_i)^2 = \sum_{j=1}^{2}\sum_{i=1}^{2} (\partial_j\varphi_i)^2 = |R_1|^2 + |R_2|^2 . \tag{5}$$

Из формулы (4) получаем

$$V_2^2(x) = \sum_{i,j=1}^{2} G_{ij}(x) R^i(x) R_j(x). \tag{6}$$

Поскольку собственные числа тензора определяются матрицей его смешанных компонент, из (6) следует, что собственные числа матрицы первой квадратичной формы суть $\lambda_1^2(x), \lambda_2^2(x)$; λ_1, λ_2 — главные значения степени удлинения при деформации R(x), а сами элементы матрицы $A(x)$ суть смешанные компоненты тензора $V_2^2(x)$ в римановом пространстве поверхности S. Итак: $\lambda_1^2 = \Lambda_1, \lambda_2^2 = \Lambda_2$, где Λ_1, Λ_2 — собственные числа $A(x)$. Из (5), (6) следует, что

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = |R_1|^2 + |R_2|^2 = \left\|\sqrt{A}\right\|^2.$$

Пусть $a = (a_1, a_2)$ — собственный вектор матрицы A, отвечающий собственному числу $\Lambda : aA = \Lambda a$; тогда $g = \sum\limits_{k=1}^{2} a_k R_k$ есть собственный вектор V_2^2, ибо:

$$\sum_{k=1}^{2} a_k R_k \cdot \sum_{i,j=1}^{2} G_{ij} R^i R_j = \sum_{j=1}^{2} \Big(\sum_{k=1}^{2} a_k G_{kj} \Big) R_j = \Lambda \sum_{j=1}^{2} a_j R_j.$$

Аналогично, $e = \sum\limits_{k=1}^{2} a_k r_k$ есть собственный вектор для тензора

$$U^2 = \overset{\circ}{\nabla} R \cdot \overset{\circ}{\nabla} R^T = \sum_{i,j=1}^{2} g_{ij} r_i r_j + r_3 r_3.$$

Отвечающие $\widetilde{e}_1, \widetilde{e}_2$ ортонормированные собственные вектора V_2^2 обозначим через g_1, g_2; и соответствующие собственные вектора U^2 — через e_1, e_2. Векторы $e_i, g_i, i = 1, 2$, — это орты главных направлений деформации соответственно на S_0 и на S. Теперь мы можем выразить тензор ортогонального поворота O из полярного разложения $\overset{\circ}{\nabla} R$ в следующем виде:

$$O = \sum_{i=1}^{2} e_i g_i + nN. \tag{7}$$

2. Преобразование тензора касательных усилий $T(\alpha)$. В двумерном касательном пространстве E_2 тензор T выражается через соответствующий тензор растяжений V_2 следующим образом (2.5):

$$T = \varphi_0(\lambda_1, \lambda_2) I_2 + \varphi_1(\lambda_1, \lambda_2) V_2; \quad \text{или}$$

$$\begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} = \varphi_0(\lambda) \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} + \varphi_1(\lambda) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}, \tag{8}$$

$\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$; выбрана декартова система координат в E_2, определяемая главными направлениями g_1, g_2 деформации.

Для преобразования (8) дополним координатную систему в E_2 до пространственной, выбирая в качестве третьего направления нормаль N к деформированной поверхности. В этой системе рассмотрим все участвующие в формуле (8) тензоры как трёхмерные, соответственно трактуя как трехмерные векторы R_1, R_2 в представлении $\sum\limits_{i,j=1}^{2} A^{ij} R_i R_j$ этих тензоров. Так, T как трёхмерный тензор (с третьим главным напряжением равным нулю) представляется матрично в виде:

$$T = \begin{bmatrix} T_1 & 0 & 0 \\ 0 & T_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \varphi_0(\lambda) \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} + \varphi_1(\lambda) \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

Имеют место равенства:

$$T = \sum_{i,j=1}^{2} T^{ij} R_i R_j, \;\; I_2 = \sum_{i,j=1}^{2} G^{ij} R_i R_j = I - NN, \tag{9}$$

I — единичный тензор трёхмерного пространства, NN — диада, определяемая единичной нормалью N к деформированной поверхности; $V_2 = V - NN$. Пользуясь представлениями (9), из (8) получаем:

$$T(\lambda) = \varphi_0(\lambda)(I - NN) + \varphi_1(\lambda)(V - NN). \tag{10}$$

С целью избежать извлечения квадратного корня при вычислении $V = \left(\overset{\circ}{\nabla} R^T \cdot \overset{\circ}{\nabla} R\right)^{1/2}$ в выражении (10) прибегнем к теореме Гамильтона–Кэли, согласно которой

$$V_2^2 - (\mathrm{tr} V_2) V_2 + (\det V_2) I_2 = 0.$$

Получим следующие представление T:

$$T = \varphi_0 I_2 + (\varphi_1 / \operatorname{tr} V_2)(V_2^2 + \det V_2 I_2) = \varphi_2(\lambda) I_2 + \varphi_3(\lambda) V_2^2,$$

где

$$\varphi_2(\lambda) = \varphi_0(\lambda) + \frac{\lambda_1\lambda_2}{\lambda_1+\lambda_2}\varphi_1(\lambda),$$

$$\varphi_3(\lambda) = \frac{1}{\lambda_1+\lambda_2}\varphi_1(\lambda).$$

"Трёхмерное" представление V_2^2 получим, используя равенства :

$$N \cdot V = V \cdot N = N,\ N \cdot N = 1.$$

Имеем согласно последним:

$$V_2^2 = (V - NN)^2 = V^2 - NN \cdot V - V \cdot NN + NN \cdot NN = V^2 - NN.$$

Поэтому как пространственный тензор T представляется равенством:

$$T = \varphi_2(I - NN) + \varphi_3(V^2 - NN). \tag{11}$$

С учетом найденных формул (3), (2), (11) для $\sqrt{G/g},\ r_sR^s,\ T$ преобразуем выражение для тензора Пиолы (1.12), полагая $\varphi \equiv R$ и отождествляя тензор с его матричным представлением:

$$P(\varphi) = \det\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi^{-T} \cdot [\varphi_2(I - NN) + \varphi_3(\nabla\varphi^T \cdot \nabla\varphi - NN)] =$$

$$= \det\nabla\varphi \cdot \varphi_2(\nabla\varphi^{-T} - r_kR^k \cdot NN) + \det\nabla\varphi \cdot \varphi_3(\nabla\varphi - r_kR^k \cdot NN) =$$

$$= \psi_0(\lambda)\begin{bmatrix} R^1 \\ R^2 \\ N \end{bmatrix} + \psi_1(\lambda)\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ N \end{bmatrix} - (\psi_0(\lambda) + \psi_1(\lambda))\begin{bmatrix} \theta \\ \theta \\ N \end{bmatrix} =$$

$$= \psi_0(\lambda)\begin{bmatrix} R^1 \\ R^2 \\ \theta \end{bmatrix} + \psi_1\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ \theta \end{bmatrix}.$$

Здесь θ — нулевой вектор, $\psi_0(\lambda) = \lambda_1\lambda_2\varphi_2(\lambda);\ \psi_1(\lambda) = \lambda_1\lambda_2\varphi_3(\lambda)$. Итак, мы можем интерпретировать $P(\varphi)$ как следующую матричнозначную функцию:

$$P(\varphi) = \begin{pmatrix} p_{11} & p_{12} & p_{13} \\ p_{21} & p_{22} & p_{23} \end{pmatrix} = \psi_0(\lambda)\begin{bmatrix} R^1 \\ R^2 \end{bmatrix} + \psi_1(\lambda)\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix}. \tag{12}$$

Легко проверяется, что:

$$\begin{bmatrix} R^1 \\ R^2 \end{bmatrix} = A^{-1} \cdot \nabla\varphi. \tag{13}$$

Действительно, согласно формулам, полученным в пункте 1,

$$\begin{bmatrix} R^1 \\ R^2 \\ N \end{bmatrix} = \nabla\varphi^{-T} = (\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi^T)^{-1} \cdot \nabla\varphi = \left(\begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ N \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 & R_2 & N \end{bmatrix} \right)^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ N \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} G_{11} & G_{12} & 0 \\ G_{21} & G_{22} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \\ N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A^{-1} \cdot \begin{bmatrix} R_1 \\ R_2 \end{bmatrix} \\ N \end{bmatrix}.$$

Собственные числа A суть λ_1^2, λ_2^2. Снова привлекаем теорему Гамильтона-Кэли:

$$A^2 - (\lambda_1^2 + \lambda_2^2)A + \lambda_1^2\lambda_2^2 I_2 = 0.$$

С помощью неё находим A^{-1} :

$$A^{-1} = -\frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}A + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2}I_2.$$

Найденные выражения для матриц из (13) позволяют переписать равенство (12) в следующей форме:

$$P(\varphi) = \left[\psi_0 \left(-\frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2}A + \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2}I_2\right) + \psi_1 I_2\right] \cdot \nabla\varphi.$$

Окончательное выражение для $P(\varphi)$ получаем после подстановок значений ψ_0, ψ_1, A :

$$P(\varphi) = \beta_0(\lambda)\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi^T \cdot \nabla\varphi + \beta_1\nabla\varphi,$$

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1 & \partial_1\varphi_2 & \partial_1\varphi_3 \\ \partial_2\varphi_1 & \partial_2\varphi_2 & \partial_2\varphi_3 \end{pmatrix}, \tag{14}$$

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\frac{\theta(\lambda_1,\lambda_2)\lambda_2^2 - \theta(\lambda_2,\lambda_1)\lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}, \\ \beta_1 &= \frac{\theta(\lambda_1,\lambda_2)\lambda_2^2 - \theta(\lambda_2,\lambda_1)\lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2}\frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2} + \lambda_1\lambda_2\frac{\theta(\lambda_1,\lambda_2) - \theta(\lambda_2,\lambda_1)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}. \end{aligned} \tag{15}$$

Напомним, что $\theta(\lambda_1, \lambda_2)$ — функция, определяющая главные усилия:

$$T_1 = \theta(\lambda_1, \lambda_2), \quad T_2 \ = \ \theta(\lambda_2, \lambda_1).$$

Вернёмся к основному уравнению равновесия (1):

$$-r_k \frac{\partial}{\partial x_k} \cdot P^{mn} r_m r_n = -\frac{\partial}{\partial x_k} P^{kn}(x) r_n = f(x),$$

Учитывая, что $\partial P^{3j}/\partial x_3 = 0$, имеем:

$$-\sum_{k=1}^{2} \frac{\partial}{\partial x_k} P^{kn}(x) = f_n(x), \ n = 1, 2, 3.$$

Последнее равенство, если под P понимать 2×3 матрицу из (12), принимает вид:

$$-\mathrm{div}\left(\beta_0(\lambda(x))\nabla\varphi(x) \cdot \nabla\varphi(x)^T \cdot \nabla\varphi(x) + \beta_1(\lambda(x))\nabla\varphi(x)\right) = f(x), \ x \in S_0. \tag{16}$$

Дополним (16) краевым условием:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x), \ x \in \partial S_0. \tag{17}$$

Полностью задача нахождения деформации $\varphi(x)$ оболочки S_0 определяется условиями (16), (17) и физическими соотношениями $\theta(\lambda_1, \lambda_2)$; в уравнении (16) div — двумерный дифференциальный оператор.

Глава 2

Исследование одномерных уравнений

§ 1. Введение. Первые результаты, следующие из общей теории монотонных операторов.

1. Постановка задачи. Предметом рассмотрения этой главы будут уравнения бесконечно длинной цилиндрической мягкой оболочки, когда нагрузка не меняется вдоль образующей. Фиксируем прямоугольную декартову систему координат $x = (x_1, x_2)$ на плоскости поперечного сечения оболочки.

Уравнения статического состояния, когда кроме массовых сил присутствует нормальная следящая нагрузка, имеют вид:

$$(g(|x'(s)|^2)x'(s))' + P(s)x'(s) + f(s) = 0, \qquad s \in \Omega. \tag{1}$$

Здесь $x(s) = (x_1(s), x_2(s))$ – вектор координат частицы с дуговой координатой s, отсчитываемой по недеформированной направляющей. Полагаем, что полная длина направляющей равна 1: $\Omega = [0, 1]$. Штрихом обозначается производная по s, $|x'(s)|^2 = (x_1'(s))^2 + (x_2'(s))^2$. Функция g определяет физический закон, связывающий касательные усилия T вдоль направляющей со степенью удлинения λ элемента оболочки

$$T(s) = g(\lambda^2(s))\lambda(s), \qquad \lambda(s) = |x'(s)|.$$

Ее специфической особенностью является равенство $g(\lambda^2)\lambda = 0$ при $\lambda \leq 1$. Матричная функция $P(s)$ имеет вид:

$$P(s) = \begin{bmatrix} 0 & p(s) \\ -p(s) & 0 \end{bmatrix},$$

где $p(s)$ – плотность силы, действующей на деформированную поверхность оболочки по нормали к ней, так, что на участок ds действует сила, равная $p(s)\lambda(s)n(s)\,ds$. Считается, что единичная нормаль $n(s)$ направлена вправо при движении по контуру оболочки в положительном

направлении. В приложениях величина $p(s)$ чаще всего определяется задачей взаимодействия оболочки с газом или жидкостью. Кроме поверхностных сил на оболочку действуют массовые силы с плотностью $f(s) = (f_1(s), f_2(s))$; таким образом на участок длины ds действует сила $f(s)ds$ (принято, что плотность массы недеформированной оболочки входит в выражение для f).

Для уравнения (1) будем рассматривать первую краевую задачу, что соответсвует случаю, когда оболочка закреплена по краям. Несколько упрощает выкладки предположение, что оболочка замкнута. Таким образом, дополнительными к (1) являются условия:

$$x_1(0) = x_2(0) = x_1(1) = x_2(1) = 0. \tag{2}$$

2. Условия на физический закон. Подготовительные леммы. Будем вести исследования задачи (1), (2), полагая, что те или иные из перечисленных ниже свойств функции g имеют место:

1) $g(\lambda^2)\lambda$ непрерывна и обладает кусочно-непрерывной, ограниченной на ограниченных множествах изменения λ производной;

2) $(g(\lambda^2)\lambda)'_\lambda \geq 0$ для всех $\lambda \geq 1$;

3) $g(\lambda^2)\lambda = 0$ при $\lambda \leq 1$, $g(\lambda^2)\lambda > 0$ при $\lambda > 1$; существуют такие константы $D,\ \beta,\ c_1,$ что $g(\lambda^2)\lambda \leq c_1(\lambda-1)^\beta$ при $\lambda \geq D$, $\beta > 0$.

4) $g(\lambda^2)\lambda \geq c_0(\lambda-1)^\beta$ для всех $\lambda \geq 1$ с фиксированной константой $c_0 > 0$, $\beta > 0$;

5) $g(\lambda^2)\lambda = 0$ при $\lambda \leq 1,\ g(\lambda^2)\lambda > 0$ при $\lambda > 1$; существуют такие константы $D,\ \beta,$ что $g(\lambda^2)\lambda = (\lambda-1)^\beta$ при $\lambda \geq D$, $\beta > 1$.

Пусть V — банахово пространство $[\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)]^2,\ p = \beta + 1,\ V^*$ — сопряженное пространство.

Заметим, что можно провести аналогию между уравнением (1) и уравнением

$$-\operatorname{div}\,(g(|\nabla u|^2)\nabla u) = f(x), \qquad x \in \Omega, \tag{3}$$

описывающим поведение функции давления $u(x_1, x_2)$ в стационарной задаче фильтрации [48, с. 45]. Одинаковую роль играют вектор неизвестных $(\partial_1 u(x), \partial_2 u(x))$ в уравнении (3) и вектор $(x'_1(s), x'_2(s))$ в нашем уравнении (1). Как показано в работе [48, с. 47–50], теория монотонных

операторов и условия 1), 2), 3) для функции g позволяют исследовать разрешимость первой краевой задачи для (3). Нижеследующая лемма получена небольшими изменениями в определениях и доказательствах этой работы.

Лемма 1. *Пусть функция $g(\cdot)$ обладает свойствами 1), 2), 3). Тогда:*

a) форма $a(u,v) = \int\limits_\Omega g(|u'(s)|^2)\ (u'(s), v'(s))\ ds$ определяет при любом $u \in V$ линейный ограниченный функционал над V, следовательно, может быть записана в виде $a(u,v) =< Au, v >$, где A – нелинейный оператор, действующий из V в V^*; $a < \cdot, \cdot >$ – отношение двойственности между V и V^*;

b) оператор A монотонный, ограниченный и непрерывный.

Если у функции $g(\cdot)$ есть свойство 4), то:

c) оператор A коэрцитивен, то есть для некоторых положительных констант $c_2,\ c_3:\ \ < Au, u > \geqslant c_2 \|u\|_V^p - c_3$.

Доказательство. Для того, чтобы получить утверждение а), нужно оценить подынтегральное выражение $a(u,v)$ согласно 3), затем применить неравенство Гельдера с показателем p:

$$|a(u,v)| \leqslant \int\limits_\Omega g(|u'(s)|^2)\ |u'(s)|\ |v'(s)|\ ds \leqslant$$

$$\leqslant c \int\limits_\Omega |u'(s)|^{p-1}\ |v'(s)|\ ds \leqslant c\ \|u\|_V^{p/q}\ \|v\|_V. \tag{4}$$

Здесь c — независящая от u, v константа (возможно, меняющая свое значение при новых вхождениях); $1/p + 1/q = 1$. Из (4) следует, что при фиксированном u форма $a(u,v)$ является линейным непрерывным функционалом над V. Для доказательства монотонности используется интегральное представление разности $g(a^2)a - g(b^2)b$, где $a = (a_1, a_2),\ b = (b_1, b_2)$. Пусть $\xi(t) = ta + (1-t)b$. Тогда

$$g(a^2)a - g(b^2)b = g(\xi^2(1))\xi(1) - g(\xi^2(0))\xi(0) =$$

$$= \int_0^1 \frac{d}{dt} \left[g(\xi^2(t))\xi(t) \right] dt = \tag{5}$$

$$= \int_0^1 [2g'(\xi^2(t)) \ (\xi(t), a-b)\xi(t) + g(\xi^2(t)) \ (a-b)] \ dt.$$

Полагая в (5) $a = u(s), \ b = v(s),$ получаем:

$$< Au - Av, u - v >= \int_\Omega \int_0^1 [2g'(\xi^2(t)) \ (\xi(t), u(s) - v(s))^2 +$$

$$+ g(\xi^2(t)) \ (u(s) - v(s))^2] \ dsdt \geq 0.$$

Оператор A ограничен и непрерывен. Это следует из неравенства:

$$| < Au - Av, w > | \leqslant \|g(u'^2)u' - g(v'^2)v'\|_{L_q} \ \|w\|_V,$$

и из того факта, что $g(a^2(s))a_i(s)$, $i = 1, \ 2$, является оператором Немыцкого из $L_p \times L_p$ в L_q с соответствующими свойствами [60, с. 31, 35].

Наконец, пусть выполняется условие 4). Проводим следующие оценки, полагая $\Omega_1 = \{s : \ |u'(s) > 1\}$:

$$< Au, u > \geqslant c_0 \int_{\Omega_1} (|u'(s)| - 1)^p \ ds,$$

$$\|u(s)\|_V^p = \int_{\Omega \setminus \Omega_1} |u'(s)|^p \ ds + \int_{\Omega_1} |u'(s)|^p ds =$$

$$= \int_{\Omega \setminus \Omega_1} |u'(s)|^p ds + \int_{\Omega_1} (|u'(s)| - 1 + 1)^p \ ds \leqslant$$

$$\leqslant \text{mess}(\Omega \setminus \Omega_1) + 2^{p-1}[\int_{\Omega_1} (|u'(s) - 1)^p \ ds + \int_{\Omega_1} ds].$$

Из этих оценок следует заключение с) леммы, причем

$$c_2 = c_0/2^{p-1}, \ c_3 = c_0(1 + 2^{p-1})/2^{p-1}.$$

Лемма доказана.

Замечание 1. Пусть $g(a^2)$ — неубывающая функция: $|b| \geqslant |a| \;\Rightarrow\; g(b^2) \geqslant g(a^2)$. Средствами элементарной геометрии доказывается неравенство:

$$(g(a^2)\, a - g(b^2)\, b, a - b) > |g(a^2)\, a - g(b^2)\, b|\, |a - b|\, \sin\frac{\gamma}{2}, \tag{6}$$

если или $|a| > 1$, или $|b| > 1$; γ — угол между векторами $a,\ b,\ a \neq b$. Монотонность оператора A следует также из (6).

Второму слагаемому уравнения (1) поставим в соответствие линейный оператор L, определяемый формой

$$< Lu, v >= -\int\limits_{\Omega} (P(s)\, u'(s),\ v(s))\, ds \quad \forall u, v \in V. \tag{7}$$

Лемма 2. *Пусть функция p ограничена на отрезке $[0, 1]$. Тогда оператор L действует из V в V^* и вполне непрерывен.*

Доказательство. Согласно формуле (7)

$$| < Lu, v > | \leq \|P(s)\, u'(s)\|_{\mathbf{L}_p}\, \|v\|_{\mathbf{L}_q}, \tag{8}$$

то есть, мы можем рассматривать L, как линейное непрерывное отображение $j : V \;\rightarrow\; \mathbf{L}^*_{\mathrm{q}}$. Здесь мы ввели обозначение $\mathbf{L}_p = [L_p(\Omega)]^2$. Поскольку вложение $i : V$ в $\mathbf{L}_q$ вполне непрерывно [91, с. 118], сопряженное отображение $i^* : \mathbf{L}^*_{\mathrm{q}} \;\rightarrow\; \mathbf{V}^*$, также вполне непрерывно. Оператор L, как отображение V в V^* является суперпозицией $i^* \circ j$ непрерывного и вполне непрерывного отображений, поэтому вполне непрерывен.

3. Существование решения при степенном физическом законе с показателем $p > 2$. Обобщенным решением задачи (1), (2) назовем функцию $u \in V$ такую, что

$$\int\limits_{\Omega} [g(|u'|^2)\, (u', v') - (Pu', v)]\, ds = \int\limits_{\Omega} (f, v)\, ds \qquad \forall v \in V. \tag{9}$$

Вариационное равенство (9) равносильно операторному уравнению:

$$Au + Lu = f, \qquad f \in V^*, \tag{10}$$

где f — линейный функционал над V, определяемый правой частью (9).

Напомним, что оператор A, отображающий V в V^*, называется оператором типа M, если из $u_n \rightharpoonup u$, $Au_n \rightharpoonup f$ и $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} < Au_n, u_n > \leqslant < f, u >$ следует, что $Au = f$. Известно [145, с. 38], что уравнение $Au = f$ для ограниченного оператора A типа M разрешимо, если V — рефлексивное сепарабельное банахово пространство, и существует $\rho > 0$ со свойством:

$$< Av, v > > < f, v > \text{ для всех } v \in V, \text{таких, что } \|v\| > \rho. \tag{11}$$

Простым следствием этого результата и лемм 1, 2 является

Теорема 1. *Пусть функция g задачи (1) обладает свойствами 1)–4). Тогда уравнение (10) имеет решение, если $p > 2$.*

Доказательство. Сумма монотонного и вполне непрерывного операторов, легко видеть, есть M-оператор. Далее, неравенство (11) выполняется для достаточно большого ρ вследствие оценки, следующей из (8) и пункта c) леммы 1, для u таких, что $\|u\| > \rho$:

$$< (A + L)u, u > \geq c_2\|u\|_V^p - c_3 - c\|u\|_V^2, \tag{12_1}$$

$$\frac{< (A + L)u, u >}{\|u\|_V} \geq \|u\|_V \left[c_2\|u\|_V^{p-2} - c\right] - \frac{c_3}{\|u\|_V} > \|f\|_{V^*}. \tag{12_2}$$

Замечание 2. Отметим [145, с. 20], что оператор $A + L$ обладает более сильным чем M свойством псевдомонотонности.

§ 2. Теоремы существования при линейном физическом законе

1. Основная теорема. В доказательстве теоремы 1 условие $p > 2$ играет существенную роль. Под этот случай не попадает, например, наиболее распространенный в применениях линейный (в области $\lambda > 1$) закон:

$$g(\lambda^2)\lambda = \begin{cases} \nu(\lambda - 1), & \lambda > 1, \\ 0, & \lambda \leq 1. \end{cases} \tag{1}$$

Для упрощения изложения полагаем $\nu = 1$. Полученные в этом параграфе результаты могут быть распространены на функции $g(\lambda^2)$ с условием 5) при $\beta = 1$.

Имеет место основная

Теорема 1. *Уравнение (1.10) разрешимо в V, если -1 не является собственным числом оператора L.*

Таким образом, имеется аналогия с теоремой Фредгольма, утверждающей, что уравнение $u + Lu = f$ однозначно разрешимо при любой правой части, если соответствующее однородное уравнение $u+Lu = 0$ имеет только тривиальное решение.

Доказательство теоремы опирается на следующее

Предложение 1. *[88, с. 19]. Пусть A — ограниченный деминепрерывный нечетный оператор в гильбертовом пространстве V, удовлетворяющий S-условию (см. напр., [22, с. 81]): $u_n \to u$, если $u_n \rightharpoonup u$ и $< Au_n - Au, u_n - u > \to 0$. Если существуют $h \in V$, $R > 0$ такие, что $\|h\| < \|Au\|$ для любого $u \in S_R$, то уравнение $Au = h$ имеет решение в шаре B_R.*

Напомним, что

$$S_R = \{u : \ \|u\|_V = R\}, \ B_R = \{u : \ \|u\|_V < R, \}, \ V = [\overset{\circ}{W}{}_2^1]^2.$$

Введем в рассмотрение семейство операторов A_ε, определяемых формами

$$< A_\varepsilon u, v >= \int\limits_0^1 g_\varepsilon(|u'(s)|^2) \ (u'(s), v'(s)) \ ds,$$

где

$$g_\varepsilon(\lambda^2)\lambda = \begin{cases} \lambda - 1, & \lambda > 1 + \delta, \\ \varepsilon\lambda, & 0 \le \lambda \le 1 + \delta, \quad \delta = \varepsilon/(1-\varepsilon). \end{cases}$$

Операторы A_ε в отличие от оператора A удовлетворяют S-условию, так как являются сильно монотонными. Действительно, согласно (1.5) имеем

$$< A_\varepsilon u - A_\varepsilon v, u - v >= \int\limits_0^1 \int\limits_0^1 g_\varepsilon(|\omega_t'|^2) \ |u' - v'|^2 + 2g_\varepsilon'(|\omega_t'|^2) \ (\omega_t', u' - v')^2 \ dsdt.$$

Здесь $\omega_t = tu + (1-t)v$. Обозначим подынтегральное выражение через a. Возможны два случая. Первый — когда $g_\varepsilon'(|\omega_t'|^2) \geqslant 0$. В этом случае

$a \geqslant g_\varepsilon(|\omega_t'|^2)|u'-v'|^2$. Во втором случае $g_\varepsilon'(|\omega_t'|^2) < 0$, и оценка проводится следующим образом:

$$a \geq g_\varepsilon(|\omega_t'|^2)\ |u'-v'|^2 + 2g_\varepsilon'(|\omega_t'|^2)\ |\omega_t'|^2\ |u'-v'|^2 = (g_\varepsilon(|\omega_t'|^2)\ |\omega_t'|)_\lambda'\ |u'-v'|^2.$$

Оба случая приводят к неравенству, означающему сильную монотонность A_ε:

$$< A_\varepsilon u - A_\varepsilon v, u - v > \geq c \int_0^1 |u'-v'|^2\ ds, \quad c = \min\{\varepsilon, 1\}. \tag{2}$$

Поскольку оператор L вполне непрерывен, то S-условию удовлетворяют и операторы $A_\varepsilon + L$.

Покажем, что единичный оператор I равномерно по ε и $u \in V$ аппроксимирует операторы A_ε. Имеем

$$< (A_\varepsilon - I)u, v > = \int_0^1 (g_\varepsilon(|u'|^2) - 1)\ (u', v')\ ds =$$

$$= \int_E (-1/|u'|)\ (u', v')\ ds - \int_{CE} (u', v')/(1+\delta)\ ds, \tag{3}$$

где $E = \{s \in (0,1) :\ |u'(s)| > 1 + \delta\},\ CE = (0,1) \setminus E$. Из (3) имеем

$$| < (A_\varepsilon - I)u, v > | \leq \int_E |v'(s)|\ ds + \int_{CE} |v'(s)|\ ds \leq \|v\|.$$

Произвольность выбора v в последнем неравенстве позволяет оценить норму элемента $(A_\varepsilon - I)u$:

$$\|(A_\varepsilon - I)u\| \ \leq \ 1. \tag{4}$$

Рассмотрим уравнение

$$(A_\varepsilon + L)u = f. \tag{5}$$

Поскольку $(I+L)^{-1}$ существует по предположению, то возможно проведение следующих преобразований:

$$(A_\varepsilon - I)u + (I+L)u = f, \quad u = (I+L)^{-1}\ (f + (I - A_\varepsilon)u);$$

из последнего равенства и неравенства (4) вытекает:

$$\|u\| \;\le\; \|(I+L)^{-1}\|\,(\|f\|+1). \tag{6}$$

Выберем R так, чтобы $R > \|(I+L)^{-1}\|\,(\|f\|+1)$. Тогда из (6) следует, что все операторы A_ε удовлетворяют условию:

$$\text{если } \|u\| = R, \text{ то } \|(A_\varepsilon + L)u\| > \|f\|.$$

Помимо этого все операторы A_ε нечетны, деминепрерывны и ограничены (ограниченность, например, следует с очевидностью из (4)). Итак, все предположения предложения 1 выполнены, а поэтому каждое уравнение (17) имеет решение u_ε. Совокупность этих решений ограничена $\|u_\varepsilon\| \le R$. Так как ограниченное множество в гильбертовом пространстве слабо компактно, можно найти последовательность, слабо сходящуюся к некоторому элементу $u \in V$. Сохраним тот же индекс ε для элементов этой последовательности. Итак,

$$u_\varepsilon \rightharpoonup u \text{ в } V \quad \text{при } \varepsilon \to 0. \tag{7}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} |<(A+L)u_\varepsilon, u_\varepsilon - u>| \;\le\; & |<(A-A_\varepsilon)u_\varepsilon, u_\varepsilon - u>| + \\ & + |<f, u_\varepsilon - u>| + |<Lu_\varepsilon, u_\varepsilon - u>|. \end{aligned}$$

Второе и третье слагаемые в правой части стремятся к нулю при $\varepsilon \to 0$ вследствие (7) и полной непрерывности L. Для оценки первого слагаемого заметим, что

$$|<(A-A_\varepsilon)u_\varepsilon, v>| = \left|\int_0^1 ((g(|u_\varepsilon'|^2) - g_\varepsilon(|u_\varepsilon'|^2))\,u_\varepsilon',\; v')\,ds\right| \;\le\; \delta \int_0^1 |v'|\,ds,$$

а поэтому $\|(A-A_\varepsilon)u_\varepsilon\| \;\le\; \delta$. Следовательно,

$$<(A-A_\varepsilon)u_\varepsilon, u_\varepsilon - u> \;\le\; 2R\varepsilon/(1-\varepsilon).$$

Итак, наряду с (7) для оператора $A+L$ имеем

$$\lim_{\varepsilon\to 0} <(A+L)u_\varepsilon, u_\varepsilon - u> = 0. \tag{8}$$

Как мы уже отмечали, оператор A псевдомонотонный [145, с. 41], L вполне непрерывный, следовательно, $A + L$ – также псевдомонотонный оператор. Поэтому для него из (7), (8) вытекает, что $(A+L)u_\varepsilon \rightharpoonup (A+L)u$ при $\varepsilon \to 0$. Так как $\|(A + L)u_\varepsilon - f\| \leq \delta$ для всех $\varepsilon > 0$, то имеем равенство $(A + L)u = f$ и тем самым теорема, подобная одной из теорем Фредгольма, доказана.

2. Нелинейная альтернатива для оператора теории мягких оболочек. В теории неподвижных точек существует целый раздел — нелинейная альтернатива, — посвященный обобщению альтернативы Фредгольма для линейных уравнений с вполне непрерывными операторами. Нижеследующая теорема является вариантом известных теорем [128, с. 61, 70, 71, 98]. Ее доказательство основано на том, что монотонность оператора A и полная непрерывность оператора L обеспечивают условия применимости традиционной в этой области нелинейного функционального анализа техники.

Теорема 2. *Пусть D — монотонный радиально непрерывный оператор в гильбертовом пространстве V, L — вполне непрерывный оператор. Пусть на сфере S_R оператор $-D - L$ не имеет инвариантных направлений, то есть $(-D - L)u \neq \lambda u$, если $u \in S_R$ и $\lambda > 0$. Тогда уравнение $(D + L)u = 0$ имеет решение внутри S_R.*

Доказательство проводится по известной схеме [128]. Каждой точке замкнутого шара B_R поставим в соответствие множество

$$\Phi(u) = \{v \in V : < Du + Lv, u - v > \geq 0, \quad \|u - v\| \leq 2R\}.$$

Покажем, что отображение $\Phi(u) : B_R \to 2^H$ удовлетворяет условиям Кнастера-Куратовского-Мазуркевича [128, с. 73]. Пусть $v = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i u_i$, где $\sum\limits_{i=1}^{n} a_i = 1$, $a_j \geq 0$, $u_j \in B_R$, $j = 1, 2, \ldots, n$. Надо показать, что $v \in \Phi(u_i)$ при некотором $i = 1, 2, \ldots, n$. Пусть это не так. Ввиду монотонности оператора D неравенство $< Du_i + Lv, u_i - v > < 0$ влечет неравенство

$$< Dv + Lv, u_i - v > < 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n.$$

Взяв выпуклую комбинацию с коэффициентами a_i от обеих частей этого неравенства, получим

$$0 =< Dv + Lv, v - v >= \sum_{i=1}^{n} a_i \ < Dv + Lv, u_i - v > < \ 0.$$

Противоречивость последнего соотношения показывает, что $v \in \Phi(u_i)$ для некоторого $i \in \{1, 2, \ldots, n\}$. Надо учесть, что для всех i справедливо неравенство $\|u_i - v\| \ \leq \ \operatorname{diam} \operatorname{co}\{u_1, u_2, \ldots, u_n\} \ \leq \ 2R$.

Далее, в силу полной непрерывности оператора L множества $\Phi(u_i), \ i \ = \ 1, \ldots, n$, замкнуты в слабой топологии V. Ввиду всех этих свойств отображения $\Phi(u)$ для него справедлива теорема Ку Фана [128, с. 73], и поэтому существует такая точка $\omega_R \in B_R$, что

$$< Dv + L\omega_R, v - \omega_R > \geq \ 0 \quad \forall v \in B_R. \tag{9}$$

Дальнейшие рассуждения стандартные: фиксируем u и подставляем в (9) $v = tu + (1-t)\omega_R = \omega_R + t(u - \omega_R) \in B_R, \quad t \in (0,1), \ \omega_R \in B_R$:

$$< D(\omega_R + t(u - \omega_R)) + L\omega_R, \omega_R + t(u - \omega_R) - \omega_R >=$$

$$=< D(\omega_R + t(u - \omega_R)) + L\omega_R, t(u - \omega_R) > \geq \ 0.$$

Сократив на $t > 0$ и перейдя к пределу при $t \to 0$, получим

$$< D\omega_R + L\omega_R, u - \omega_R > \geq \ 0 \ \forall u \in B_R.$$

Это неравенство показывает, что если ω_R — внутренняя точка B_R, то $D\omega_R + L\omega_R = 0$ и ω_R является, таким образом, искомым решением. Если же внутри B_R нет решения интересующего нас уравнения, то ω_R есть граничная точка. В этом случае векторы $D\omega_R + L\omega_R$ и ω_R имеют противоположные направления, что означает существование числа $\lambda > 0$, для которого $D\omega_R + L\omega_R = -\lambda\omega_R$. Итак, условия теоремы нарушаются, и, следовательно, случай $\|\omega_R\| = R$ невозможен. Теорема доказана.

Для уравнения (1.10) имеем $D(\cdot) = A_0(\cdot) - f$.

§ 3. Теоремы существования при физическом законе, отличном от степенного с целым показателем

1. О регулярности решения уравнений равновесия мягкой оболочки. Основным инструментом исследования будут априорные

оценки для регулярных решений задачи (1.1), (1.2). Всюду далее полагаем функции $f(s)$ и $p(s)$ непрерывными.

Лемма 1. *Существует такая постоянная c, что для функции $g(\lambda^2)\lambda$, удовлетворяющей условиям 1), 2), 5), имеет место неравенство*

$$[g(\lambda^2)\lambda - g(\mu^2)\mu]/(\lambda-\mu) \leqslant c(1+\lambda+\mu)^{\beta-1}\ \forall\lambda,\mu>0,\ \lambda\neq\mu. \quad (1)$$

Доказательство. На конечном интервале $[1, D]$ изменения чисел λ, μ неравенство (1) выполняется при подходящем выборе константы c ввиду ограниченности производной функции $g(\lambda^2)\lambda$ (свойство (1)). Если $\lambda > \mu$ и $\lambda, \mu \in [D-\delta, \infty]$, где δ фиксированное положительное число, то

$$\frac{g(\lambda^2)\lambda - g(\mu^2)\mu}{\lambda-\mu} = \frac{(\lambda-1)^{p-1} - (\mu-1)^{p-1}}{\lambda-\mu} = \\ = (p-1)(\theta-1)^{p-2} \leq (p-1)\lambda^{p-2},\ \mu<\theta<\lambda.$$

Рассматривая оставшиеся случаи, примем, что $\lambda > D,\ \lambda-\mu \geq \delta$, тогда

$$\frac{g(\lambda^2)\lambda - g(\mu^2)\mu}{\lambda-\mu} = \frac{(\lambda-1)^{\beta} - g(\mu^2)\mu}{\lambda-\mu} = \frac{(\lambda-1)^{\beta} - (\mu-1)^{\beta}}{\lambda-\mu} + \\ + \frac{(\mu-1)^{\beta} - g(\mu^2)\mu}{\lambda-\mu} \leq (p-1)\lambda^{p-2} + \overline{c},$$

где $\overline{c} = \max\limits_{\mu\in[0,D]} |(\mu-1)^{\beta} - g(\mu^2)\mu\,|/\delta$.

Из полученных оценок лемма следует с очевидностью.

Неравенство (1) при близких условиях на функцию g содержится в [48].

Из леммы 1 следует неравенство подчинения [118] (см. также [48, с.51]):

$$\sum_{i=1}^{2}(g(\xi^2)\xi_i - g(\eta^2)\eta_i)^2 \leqslant c_1\left[\sum_{i=1}^{2}(g(\xi^2)\xi_i - g(\eta^2)\eta_i)(\xi_i-\eta_i)\right]\times \\ \times(1+|\xi|^p+|\eta|^p)^{1-2/s},$$

где $\xi = (\xi_1, \xi_2),\ \eta = (\eta_1, \eta_2),\ p = \beta + 1,\ s = max(p, 2), c_1 = \text{const} > 0$. При этом предполагается, что функция g удовлетворяет условиям:

$$c_0(\xi - 1)^{p-1} \leqslant g(\xi^2)\xi \leqslant c_1(\xi - 1)^{p-1} \quad \text{при } \xi \geqslant 1, p > 1.$$

Неравенство подчинения имеет важные приложения. Прежде всего, рассуждениями, подобными тем, которые проведены в работе [48, с. 53], устанавливается, что функция $T(s) = g((u'(s))^2)u'(s)$ для задачи (1.1) при условиях $p(s) = 0,\ \beta > 1$ определяется единственным образом. Поэтому однозначно определяются множество $K_u = \{s : |u'(s)| > 1\}$ и функция $u'(s)$ на K_u.

Если в условиях задачи (1.1) имеет место противоположная ситуация: $p(s) \neq 0,\ f(s) = 0$, то задача может иметь бесконечно много решений. Так, при $p(s) = p_0 > 0,\ f = 0,\ g(\lambda^2)\lambda = (\lambda - 1)_+^2$ функция $\lambda(s)$, вычисляемая по решению, является константой λ_0:

$$\lambda_0 = 1 + \frac{p_0}{4\pi j} + \sqrt{\frac{p_0}{2\pi j}\left(1 + \frac{p_0}{8\pi j}\right)},\ j = 1, 2\ldots.$$

При этом контур оболочки представляет из себя окружность, проходимую j раз при изменении s от 0 до 1.

Также из неравенства подчинения можно, следуя [118], установить, что решение $u(s)$ уравнения (1.9) почти всюду имеет необходимые производные в обычном смысле и почти всюду в Ω удовлетворяет уравнению (1.1). Именно в этом смысле будем понимать регулярность решения.

Необходимую регулярность решения задачи (1.1), (1.2) можно установить также, если при $u \in W_2^1(\Omega)$ интерпретировать (1.1) как уравнение в пространстве распределений и затем, пользуясь простейшими теоремами теории обобщенных функций [145, с. 5], преобразовать его в эквивалентное уравнение:

$$g(\lambda^2(s))u'_s = -\int_0^s (f(\xi) + P(\xi)\, u'_\xi)\, d\xi + c. \tag{2}$$

Из (2) вытекает непрерывность функции $T(s) = g(|u'|^2)|u'(s)|$ и существование производной $T'(s)$ в каждой точке, где $\lambda(s) = |u'(s)| > 1$.

Предполагается здесь и далее, что $g(\lambda^2)\lambda$ — непрерывная и при $\lambda > 1$ строго монотонная функция.

Для любой непрерывной функции $\psi(s)$ на интервале $[0,1]$ будем обозначать ее колебание через $\omega_\psi = \psi_M - \psi_m$, где

$$\psi_M = \max_{0\leqslant s\leqslant 1} \psi(s),\ \psi_m = \min_{0\leqslant s\leqslant 1} \psi(s).$$

Всюду далее индексы M и m будут соответствовать максимуму и соответственно минимуму функции.

2. Основные оценочные леммы. В лемме 2 будем предполагать, что для $g(\lambda^2)\lambda$ выполнены условия 1), 2).

Лемма 2. *Для всех решений $x_1(s)$, $x_2(s)$ системы (1.1) , (1.2) колебание соответствующей функции $T(s)$ ограничено одной и той же константой c_1, определяемой только функцией $f(s)$.*

Доказательство. Рассматривая (1.1) как систему скалярных уравнений, умножим первое уравнение (1.1) на $g(\lambda^2(s))x_1'(s)$, второе — на $g(\lambda^2(s))x_2'(s)$ и сложим полученные соотношения. Получим

$$|(T^2(s))_s'| = 2|(f_1x_1' + f_2x_2')g(\lambda^2(s))| \leqslant 2|f(s)|T(s).$$

Если $T(s) > 0$, то отсюда следует

$$|T'(s)| \leqslant |f(s)|. \tag{3}$$

Итак, относительно $T(s)$ можем утверждать, что это неотрицательная непрерывная функция на замкнутом промежутке $[0,1]$, в каждой точке s, где она строго положительна, у нее существует производная (см. (2)), удовлетворяющая неравенству (3). Несложные рассуждения показывают, что эти условия влекут оценку $\omega_T \leqslant \max\limits_{0\leqslant s\leqslant 1} |f(s)| = c_1$.

Лемма 3. *Пусть решение $x_1(s)$, $x_2(s)$ системы (1.1), (1.2) таково, что для положительного числа c_2, значение которого определяется только функцией $p(s)$,*

$$g(\lambda^2(s)) \geqslant c_2 \tag{4}$$

для всех $s \in [0,1]$. Тогда существует константа c_3, зависящая только от функций $p(s)$, $f(s)$ (но не от g) такая, что в некоторой точке $s \in [0,1]$ имеем $\lambda(s) \leqslant c_3$.

Доказательство. Для упрощения записей обозначим $g(\lambda^2(s))$ через $\varphi(s)$. Из первого уравнения системы (1.1) получим

$$\int\limits_\Omega (\varphi x_1')' x_1\,ds + \int\limits_\Omega p x_2' x_1\,ds = -\int\limits_\Omega f_1 x_1\,ds.$$

Интегрирование по частям с использованием краевых условий (1.2) в первом интеграле этого равенства приводит к соотношению

$$\int\limits_\Omega \varphi (x_1')^2\,ds = \int\limits_\Omega p x_2' x_1\,ds + \int\limits_\Omega f_1 x_1\,ds.$$

Аналогично из второго уравнения (1) получим

$$\int\limits_\Omega \varphi (x_2')^2\,ds = -\int\limits_\Omega p x_1' x_2\,ds + \int\limits_\Omega f_2 x_2\,ds.$$

Сложив последние равенства, приходим к основной "рабочей" формуле

$$\int\limits_\Omega \varphi(s)((x_1'(s))^2 + (x_2'(s))^2)\,ds = \int\limits_\Omega (p(x_2' x_1 - x_1' x_2) + (f, x))\,ds. \qquad (5)$$

Из (4) и (5), используя неравенства Коши–Буняковского и Юнга, получаем

$$c_2 \int\limits_\Omega ((x_1')^2 + (x_2')^2)\,ds \leqslant 0.5\Big(|p|_M \int\limits_\Omega ((x_1')^2 + (x_2')^2)\,ds + \\ + (1 + |p|_M)\int\limits_\Omega (x_1^2 + x_2^2)\,ds + \int\limits_\Omega (f_1^2 + f_2^2)\,ds\Big). \qquad (6)$$

Пусть γ — константа из неравенства

$$\gamma \int\limits_\Omega (x_1^2 + x_2^2)\,ds \leqslant \int_\Omega ((x_1')^2 + (x_2')^2)\,ds, \qquad (7)$$

которое имеет место в силу однородности краевых условий (1.2) и непрерывного вложения $[\overset{\circ}{W}{}_2^1(\Omega)]^2$ в $[L_2(\Omega)]^2$.

Из (6) и (7) следует, что

$$\big[(c_2 - \frac{1}{2}|p|_M)\gamma - \frac{1}{2}|p|_M - \frac{1}{2}\big] \int_\Omega (x_1^2 + x_2^2)\,ds \leqslant \frac{1}{2}\int_\Omega (f_1^2 + f_2^2)\,ds,$$

и, если выберем c_2 так, что

$$q = (c_2 - \frac{1}{2}|p|_M)\gamma - \frac{1}{2}|p|_M - \frac{1}{2} > 0,$$

то приходим к оценке

$$\int\limits_\Omega (x_1^2 + x_2^2)\, ds \leqslant \frac{1}{2q} \int\limits_\Omega (f_1^2 + f_2^2)\, ds. \tag{8}$$

Из неравенств (6), (8) следует, что $\int\limits_\Omega \lambda^2(s) ds \leqslant q_1$, где q_1 — априорно вычисляемая постоянная, значение которой определяется максимальным значением $|p|_M$ модуля $p(s)$, константой γ и интегралом $\int\limits_\Omega f^2 ds$. Следовательно, в некоторой точке $\lambda(s) \leqslant q_1^{1/2} = c_3$.

Лемма 4 (о трех функциях). *Пусть выполняются условия: функции $T(\sigma)$, $K(\sigma)$, $N(\sigma)$ определены, непрерывны на интервале $[a, b]$ и связаны соотношением $T(\sigma)K(\sigma) = N(\sigma)$; функция $T(\sigma)$ непрерывно дифференцируема всюду и положительна; положительные константы D_1, D_2, D_3 таковы, что*

$$0 < N(\sigma) \leqslant D_1, \ \int\limits_a^b K(\sigma)\, d\sigma \leqslant D_2, \ \omega_T[a, b] \leqslant D_3.$$

Пусть далее функция $\lambda(\sigma)$ определяется равенством

$$\lambda(\sigma) = [T(\sigma)]^{1/\alpha} + 1,$$

где $0 < \alpha < 1$, и переменная s как решение уравнения $ds/d\sigma = \lambda^{-1}(\sigma)$ меняется в интервале $[0, d]$, когда σ пробегает $[a, b]$. Тогда существует такая константа c_4 (вычисляемая по D_1, D_2, D_3, α), что справедлива импликация: если всюду на $[a, b]$ имеет место неравенство $\lambda(\sigma) \geqslant c_4$, то на $[a, b]$ найдется точка σ_0, для которой

$$D_2(T(\sigma_0)+D_3)+(T(\sigma_0)+D_3)^{1/\alpha-1} \geqslant \frac{1}{2} \int\limits_0^d N(\sigma(s))\, ds\, [(T(\sigma_0))^{1/\alpha}+1]. \tag{9}$$

Доказательство. Используем неравенство Грюсса для средних значений [142, с. 70]

$$\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b g(x)\psi(x)\,dx - \frac{1}{(b-a)^2}\int_a^b g(x)\,dx\int_a^b \psi(x)\,dx\right| \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{4}(g_M - g_m)(\psi_M - \psi_m),$$

где $g(x)$, $\psi(x)$ — непрерывные функции на интервале $[a,b]$, а $g_M - g_m$, $\psi_M - \psi_m$ — их колебания. Получаем из условий леммы

$$\frac{1}{l^2}\int_a^b T(\sigma)\,d\sigma\int_a^b K(\sigma)\,d\sigma + \frac{1}{4}\omega_T\omega_K \geqslant \frac{1}{l}\int_a^b N\,d\sigma = \\ = \frac{1}{l}\int_a^b \frac{N}{\lambda}\cdot\lambda\,d\sigma \geq \frac{1}{l^2}\int_a^b \frac{N}{\lambda}\,d\sigma\int_a^b \lambda\,d\sigma - \frac{1}{4}\omega_{N/\lambda}\omega_\lambda. \quad (10)$$

Здесь $l = a - b$. Будем предполагать, что $\lambda(\sigma) \geqslant c_4$, где c_4 определим ниже. Оценим отдельные слагаемые в неравенстве (10):

$$\omega_T \leqslant D_3;$$

$$\omega_K = \omega_{N/T} \leqslant \omega_N/T_m + \omega_{1/T}N_M \leqslant \\ \leqslant N_M/T_m + (1/T_m - 1/T_M)N_M \leqslant D_1/T_m + D_1D_3/(T_mT_M); \quad (11)$$

$$\omega_T\omega_K \leqslant D_3D_1/T_m + D_1D_3^2/(T_mT_M) = \varepsilon_1;$$

$$\omega_\lambda = T_M^{1/\alpha} - T_m^{1/\alpha} = \frac{1}{\alpha}D_3T_1^{1/\alpha-1},$$

где $T_1 = T(\sigma_1)$, $\sigma_1 \in [a,b]$;

$$\omega_{N/\lambda} \leqslant (N/\lambda)_M \leqslant N_M/\lambda_m, \quad \omega_\lambda\omega_{N/\lambda} \leqslant \frac{1}{\alpha}D_3D_1T_M^{1/\alpha-1}/\lambda_m = \varepsilon_2.$$

Пусть T_2 и λ_3, λ_4 — значения функций T и λ соответственно в точках σ_2 и σ_3, σ_4 таких, что выполняются равенства

$$\int_a^b T(\sigma)\,d\sigma = T_2l, \quad \int_a^b \lambda(\sigma)\,d\sigma = \lambda_3l, \quad l = \int_0^d \lambda\,ds = \lambda_4d.$$

С помощью оценок (11) получаем из (10)

$$D_2T_2 \geqslant \int\limits_0^d N(\sigma(s))\,ds\,\lambda_3 - \frac{d}{4}\varepsilon_1\lambda_4 - \frac{d}{4}\varepsilon_2\lambda_4. \tag{12}$$

Дальнейшее преобразование (12) состоит в приведении значений функций T и λ к значениям этих функций в одной точке σ_3. Выберем теперь c_4 так, чтобы выполнялись условия

$$(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d/4 \leq \frac{1}{2}\int\limits_0^d N(\sigma(s))\,ds \text{ и} \quad D_3((\varepsilon_1+\varepsilon_2)d/4\alpha \leq 1$$

Это возможно, поскольку

$$T_M^{1/\alpha-1}/\lambda_m \leq [(T_m+D_3)/(\lambda_m-1)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}]^{\frac{1}{\alpha}-1} \leqslant$$
$$\leqslant [((\lambda_m-1)^\alpha+D_3)/(\lambda_m-1)^{\frac{\alpha}{1-\alpha}}]^{\frac{1}{\alpha}-1} \to 0, \quad \lambda_m \to \infty.$$

В силу (12) имеем:

$$D_2T_2 \geqslant \lambda_3\left[\int\limits_0^d N(\sigma(s))\,ds - \varepsilon_1 d/4 - \varepsilon_2 d/4\right] + \frac{1}{4}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)d(\lambda_3-\lambda_4) \geqslant$$
$$\geqslant \frac{\lambda_3}{2}\int\limits_0^d N(\sigma(s))\,ds - \frac{d}{4}(\varepsilon_1+\varepsilon_2)\omega_\lambda \geqslant \frac{\lambda_3}{2}\int\limits_0^d N(\sigma(s))\,ds - T_M^{1/\alpha-1}. \tag{13}$$

Продолжая преобразование формулы (13) по намеченному пути, с использованием оценок $T_2 \leqslant T(\sigma_3)+D_3$ и $T_M \leqslant T(\sigma_3)+D_3$ получаем требуемое неравенство (9), в котором $\sigma_0=\sigma_3$.

Следствие 1. *При выполнении условий леммы 4 и условия*

$$N(\sigma) \geqslant h > 0$$

справедлива оценка $T(\sigma_0) \leqslant c_5(d,h)$. *Константа* c_5 *зависит от* D_1, D_2, D_3, α, d, h, *и выбирается так, чтобы выполнялось неравенство (9) с заменой* N *на* $h/2$.

3. Нестепенная зависимость. Доказательство теоремы существования проведем для функции усилия $T = T(\lambda)$ при условиях 1), 2) п. 2 §1 и условии

$$\lim_{\lambda\to\infty} T(\lambda)/\lambda = \infty. \tag{14}$$

Выберем константу $c > 1$ таким образом, чтобы выполнялись неравенства

$$(T(\lambda) - c_1)/\lambda \geqslant c_2 \quad \forall\lambda \geqslant c, \tag{15}$$

$$T(c_3) + c_1 < T(\lambda) \quad \forall\lambda \geqslant c, \tag{16}$$

где c_1, c_2, c_3 — константы, фигурирующие в леммах 2, 3. Построим функцию $g(\lambda^2)\lambda$, полагая

$$g(\lambda^2)\lambda = \begin{cases} T(\lambda), & \text{если } 0 \leqslant \lambda \leqslant c, \\ \overline{g}(\lambda^2)\lambda, & \text{если } \lambda \geqslant c. \end{cases} \tag{17}$$

При этом $\overline{g}$ строим так, чтобы выполнялись условия 1)–4) п.2 §1 с $\beta > 1$. В силу свойств a)–c) соответствующего функции g оператора A и теоремы 1.1 задача (1.1), (1.2) с физическим соотношением (17) имеет регулярное решение $x(s)$. Рассмотрим следующую альтернативу для полученного решения: либо для всех $s \in [0,1]$ $g(\lambda^2(s)) \geqslant c_2$, либо существует точка $s_0 \in [0,1]$ такая, что $g(\lambda^2(s_0)) < c_2$.

Если реализуется первый случай, то для некоторого s по лемме 3 имеем $\lambda(s) \leqslant c_3$, поэтому $T(\lambda(s)) \leqslant T(c_3)$; тогда вследствие (16) для всех s выполняется неравенство $\lambda(s) \leqslant c$. Поэтому решение $x(s)$ подчиняется физическому закону, определяемому функцией $T(\lambda)$.

Пусть реализуется вторая возможность альтернативы. Тогда в силу леммы 2 для любого s имеем $T(\lambda(s)) \leqslant T(\lambda(s_0)) + c_1$. Пусть $\lambda(s) \geqslant c$ для некоторого s. В силу (15) выполняется неравенство $(T(\lambda(s)) - c_1)/\lambda(s) \geqslant c_2$, его можно усилить, используя предыдущую оценку $T(\lambda(s))$:

$$(T(\lambda(s_0)) + c_1 - c_1)/\lambda(s_0) \geqslant c_2.$$

Полученное противоречие показывает, что $\lambda(s) \leqslant c$ для всех $s \in [0,1]$, и потому решение $x(s)$ опять оказывается целиком в зоне действия закона, определяемого функцией $T(\lambda)$. Таким образом, доказана

Теорема 1. *Задача* (1.1), (1.2) *имеет решение, принадлежащее пространству* $[\overset{\circ}{W}{}^1_p(\Omega)]^2$, $p > 2$, *если* $f(s)$ *и* $p(s)$ — *непрерывные функции, а* $g(\lambda^2)\lambda$ *удовлетворяет условиям 1), 2) §1 и условию (14).*

Замечание 1. Изложенное выше доказательство почти полностью сохраняется даже при более слабом условии $\lim\limits_{\lambda\to\infty} T(\lambda)/\lambda \geqslant c$, где c — определенная константа, которую можно вычислить по f, p. При этом необходимо, чтобы условия 1), 2) выполнялись.

4. Степенная зависимость с показателем, меньшим единицы. Рассматривается физическое соотношение

$$T(\lambda) = [(\lambda - 1)^\alpha]_+, \quad \lambda \in (0, \infty),\ 0 < \alpha < 1. \tag{18}$$

Замечание 2. Требование ограниченности производной функции $g(\lambda^2)\lambda$ на ограниченных множествах используется только в доказательстве леммы 1 и необходимо для обоснования неравенства подчинения. Результаты пункта 2 справедливы и без этого предположения.

Теорема 2. *Пусть* $f(s)$, $p(s)$ — *непрерывные функции,* $p(s) \geqslant r > 0$ *для всех* $s \in [0, 1]$. *Тогда все физически приемлемые, то есть не имеющие точек самопересечения, решения задачи (1.1), (1.2), (18) ограничены по норме пространства* $W^1_\infty(\Omega)$ *постоянной, явно вычисляемой по исходным данным.*

Доказательство. Выберем константу c таким образом, что при $\lambda \geqslant c$ имеет место неравенство $|f(s)|/\lambda \leqslant r/2$ для всех s. Если рассматриваемое решение $(x_1(s), x_2(s))$ в некоторой точке s_0 имеет значением $\lambda(s_0)$, меньшее c, то все значения функции $T(s) = (\lambda(s) - 1)^\alpha_+$ меньше, чем $(c - 1)^\alpha + c_1$. Если же $\lambda(x(s)) \geqslant c$ для всех s, то применяем лемму 4, где полагаем, что $D_1 = p_M + |f|_M$, $D_2 = 3\pi$, $D_3 = c_1$, $d = 1$ и, что $k(s)$ равна кривизне кривой, определяемой решением, а $N(s)$ определяется формулой (20). Получаем согласно (9), что в некоторой точке s_0 значение $T(s_0)$ меньше априорно по D_1, D_2, D_3, α вычисляемой константы. Итак, во всех случаях значения $T(s)$ ограничены. Отсюда следует справедливость утверждения теоремы, поскольку $\lambda^2(s) = |x'(s)|^2$.

Интересно исследовать применимость метода доказательства теоремы 1 к получению результатов о существовании решения задачи (1.1), (1.2) при физическом законе (18).

Как и в теореме 2, полагаем $p(s) \geqslant r > 0$ и выбираем константу c, исходя из условий

$$c > 1, \;\; c > c_3 + 1, \;\; ((\lambda - 1)^\beta - c_1)/\lambda \geqslant c_2 \quad \text{для всех } \lambda \geqslant c,$$

$$T_\delta(\lambda) > \max\{T_\delta(c_3) + c_1,\; T_\delta(c_4) + c_1,\; c_5(d,h) + c_1\} \quad \text{для всех } \lambda \geqslant c - 1, \tag{19}$$

$$|f(s)|/\lambda \leqslant h/2 \quad \text{для } \lambda \geqslant c/2 \text{ и всех } s \in [0,1],\; c > c_4 + 1.$$

Здесь $c_1,\; c_2,\; c_3,\; c_4,\; c_5(d,h)$ — константы из лемм 2, 3, 4; в лемме 4 и следствии берем фиксированное $0 < d < 1$, $h = \dfrac{2}{3}r$, $D_1 = p_M + \dfrac{1}{3}r$, $D_2 = 4\pi$, $D_3 = c_1$.

Построим функцию $g_c(\lambda^2)\lambda$, полагая

$$g_c(\lambda^2)\lambda = \begin{cases} T(\lambda), & 0 \leqslant \lambda \leqslant c - 1, \\ (\lambda - 1)^\beta, & c \leqslant \lambda < \infty. \end{cases}$$

На интервал $\Delta = [c-1, c]$ функция $g_c(\lambda^2)\lambda$ продолжается таким образом, что выполняются условия 1), 2), 4), 5) §1.

Решение соответствующей задачи обозначим через $u_c(s)$. Рассуждая так же, как в доказательстве теоремы 1, убеждаемся, что значения, соответствующие решению функции $\lambda_c(s)$, лежат в интервале $(0, c)$. Рассмотрим измеримое множество $A_c = \{s : |u_c'(s)| \in \Delta\}$. Интерес в связи с вопросами существования представляет следующая

Теорема 3. *Если функции $u_c(s)$ определяют физически допустимые решения, и если $\operatorname{mess} A_c \leqslant 1 - d$, для всех достаточно больших c, то для этих c имеем $\operatorname{mess} A_c = 0$.*

Доказательство Фиксируем c таким образом, что соответствующее множество $B = \Omega \setminus A_c$ имеет $\operatorname{mess}(B) > d$, где d — наперед заданное число из условий (19).

Если бы множество B (открытое) содержало интервал длины, не меньшей d, мы применили бы к этому интервалу лемму 4, где $T(s)$, $N(s)$, $K(s)$ имеют соответствующий решению физический смысл, то есть

$$N(s) = p(s) + (f(s),\; (u_2'(s),\; -u_1'(s)))/\lambda^2(s), \quad T(s) = (\lambda(s) - 1)^\alpha. \tag{20}$$

Функция $K(s)$ — кривизна контура оболочки. Легко проверить, что константы D_1, D_2, D_3 можно выбрать, как указано выше, и поэтому согласно лемме 4 на этом интервале существовала бы точка s_0, для которой либо $T(s_0) \leqslant c_5(d,h)$, либо $\lambda(s_0) \leqslant c_4$. Соответствующее решение $u_c(s)$ для всех s подчинялось бы закону (18) в силу выбора (19) константы c.

В случае отсутствия интервала длины d в множестве B выбираем точки $s_1, s_2 \in B$ такие, что $s_1 - s_2 \geqslant d$. Полагаем $T_H(s) = T(s)$ при $s \in \overline{B} \cap [s_1, s_2]$, и $T_H(s) = (T(\gamma_1)(\gamma_2 - s) + T(\gamma_2)(s - \gamma_1))/(\gamma_2 - \gamma_1)$ для каждого составляющего открытое множество $(s_1, s_2) \setminus \overline{B}$ интервала (γ_1, γ_2). При этой линейной интерполяции сохраняется оценка $\omega_{T_M} \leqslant \omega_T$. Функцию $N(s)$ на интервале $[s_1, s_2]$ сохраняем такой, какой она получается из $u_c(s)$ по формуле (20). По $T_H(s)$ определяем функцию $\lambda_H(s)$, используя (20), и соответственно лемме 4 определяем функции $s_H(\sigma)$ и $K_H(s) = N/T_H$. Константы D_1, D_3 леммы 4 сохраняются такими, как если бы использовали на $[s_1, s_2]$ функции $T_c(s)$, $K_c(s)$, $N(s)$, соответствующие решению $u_c(s)$. Оценим интеграл

$$\int_a^b K_H(\sigma)\, d\sigma = \int_{s_1}^{s_2} K_H(s)\lambda_H(s)\, ds.$$

Подынтегральное выражение допускает оценку (в силу выбора c)

$$\lambda_H(s) \leqslant \lambda_c(s);\ K_H(s) = \frac{N(s)}{T_H(s)} \leqslant \frac{N(s)}{T_c(s)} \frac{T_c(s)}{T_c(s) - 2D_3} \leqslant 2K_c(s) \qquad (21)$$

при $T_c(s) \geqslant T_0$.

Без ущерба для общности рассуждений можем принять предположение, что $T_0 \leqslant T_c(s_1) \leqslant T_c(s_2)$. В силу всего этого $\int_a^b K_H(\sigma)\, d\sigma \leqslant 4\pi$. Итак, для вновь построенных функций T, N, K лемма 4 применима с теми же константами, как для функций, построенных по решению $u_c(s)$, и применяется она на интервале $[s_1, s_1 + d]$. Далее повторяем рассуждения, уже проведенные выше. Доказательство теоремы 3 закончено.

Простым следствием теоремы является разрешимость задачи (1.1), (1.2), (18) при $p(s) \equiv 0$.

Замечание 3. Ограничения на функцию $p(s)$ в формулировке теоремы 2 можно несколько ослабить, применяя геометрические неравенства из книги [19] (см. статью [12]).

§ 4. Двухслойный итерационный процесс решения стационарной задачи теории мягких оболочек

1. Обратная монотонность оператора. Слабая сходимость двуслойного итерационного метода. Рассмотрим следующую итерационную процедуру решения уравнения

$$Au + Lu = f,$$

полагая $L = 0$ ($p(x) \equiv 0$) и принимая физический закон (2.1):

$$\frac{u_{n+1} - u_n}{\tau} + Au_n = f \quad n = 0, 1 \ldots . \tag{1}$$

Случай $L = 0$ интересен сам по себе, так как во многих задачах, связанных с расчетом мягких оболочек, "следящая" нагрузка отсутствует, а также интересен для организации итерационного вычисления решения уравнения (1.10) по формуле неявного типа $Au_{n+1} + Lu_n = f$. Докажем, что последовательность $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$ слабо сходится к решению уравнения (1.10). Нам потребуется

Лемма 1. *Для всех $u, v \in V$ имеет место неравенство*

$$< Au - Av, Au - Av > \leq < Au - Av, u - v > . \tag{2}$$

Замечание 1. Оператор A, таким образом, обладает сильно монотонным обратным оператором. Операторы, удовлетворяющие условию (2), будем называть обратно монотонными. В англоязычной литературе для таких операторов, принят термин "firmly nonexpansive" [134, с. 128]. Из (2) легко следует, что

$$\|Au - Av\|_{\mathbf{V}^*} \leq \|u - v\|_{\mathbf{V}}.$$

Доказательство. Примем обозначение $K\varphi$ для множества

$$\{x : |\varphi'(x) \geq 1\}.$$

Поскольку

$$Au(x) = \int_0^x g(|u'(\xi)|^2)u'(\xi)\, d\xi - x \int_0^1 g(|u'(\xi)|^2)u'(\xi)\, d\xi,$$

то

$$\|Au - Av\|^2 = \int_0^1 |\psi(x) - c|^2\, dx, \tag{3}$$

где

$$\psi(x) = (1 - 1/|u'|)\,\chi\,(Ku, x)\,u'(x) - (1 - 1/|v'|)\,\chi\,(Kv, x)\,v'(x);$$

$\chi\,(Ku, \cdot),\ \chi\,(Kv, \cdot)$ — характеристические функции множеств $Ku,\ Kv$ соответственно; $c = \int_0^1 \psi(x)\, dx$.

Пусть $Cuv = (0, 1) \setminus (Ku \cup Kv)$. Перепишем (3) в виде

$$\begin{aligned}\|A_0u - A_0v\|^2 = &\int_0^1 (\psi(x),\ u' - v')\, dx - \int_{Kv\setminus Ku} (\psi(x),\ u')\, dx + \\ &+ \int_{Ku\setminus Kv} (\psi(x),\ v')\, dx - \int_{Cuv} (\psi(x),\ u' - v')\, dx + \\ &+ \int_0^1 (\psi(x),\ v'\,\chi(Kv,\ x)/|v'| - u'\,\chi(Ku,\ x)/|u'|)\, dx - c^2.\end{aligned}$$

Очевидно, что четвертое слагаемое в последнем равенстве равно нулю. Подробно исследуем пятое слагаемое. Часть этого интеграла, взятая по множеству $Ku \setminus Kv$, совместно с третьим слагаемым дает величину

$$\int_{Ku\setminus Kv} (u'-u'/|u'|,\ v'-u'/|u'|)\, dx = \int_{Ku\setminus Kv} (1-|u'|+(u'-u'/|u'|,\ v'))\, dx. \tag{4}$$

Поскольку для $x \in Kv$ имеем

$$|(u' - u'/|u'|,\ v')| \le |u' - u'/|u'|| \le |u'| - 1,$$

то, очевидно, величина (4) неположительна. Аналогичные рассуждения мы можем провести относительно части интеграла, которая соответсвует множеству $Ku \setminus Kv$. Рассмотрим интеграл

$$\int_{Ku\cap Kv} (u' - v' + v'/|v'| - u'/|u'|,\ v'/|v'| - u'/|u'|)\, dx. \tag{5}$$

Если координаты вектора u' обозначить через a_1 и a_2, координаты вектора v' — через b_1 и b_2, то скалярное произведение, стоящее под знаком интеграла в (5), можно представить в виде $2-b-a+(a_1b_1+a_2b_2)\ (1/b+1/a-2/(ab))$, где $a^2=a_1^2+a_2^2,\ b^2=b_1^2+b_2^2$. Имеем

$$|(a_1b_1+a_2b_2)\ (1/b+1/a-2/(ab))|\ \le\ ab(1/b+1/a-2/(ab))=a+b-2.$$

Здесь учтено, что $a\ge 1,\ b\ge 1,$ и поэтому

$$1/b+1/a-2/(ab)\ge 1/b^2+1/a^2-2/(ab)\ge 0.$$

Итак,

$$(u'-v'+v'/|v'|-u'/|u'|,\ v'/|v'|-u'/|u'|)\ \le\ 2-b-a+a+b-2=0,$$

следовательно, интеграл (5) не превосходит нуля. Из вышесказанного следует, что

$$\|Au-Av\|^2\ \le\ \int\limits_0^1((Au-Av)',\ u'-v')\ dx,$$

то есть лемма доказана.

Теорема 1. *Последовательные приближения, получаемые по схеме (1), при $0<\tau<2$ слабо сходятся к решению u уравнения $Au=f$.*

Доказательство. Пусть $Au=f$. Имеем

$$\|u_{n+1}-u\|^2=\|u_n-u\|^2-2\tau<Au_n-f,\ u_n-u>\ +\tau^2\|Au_n-f\|^2.\quad(6)$$

Согласно лемме 1

$$\|Au_n-f\|^2=\|Au_n-Au\|^2\ \le<Au_n-Au,\ u_n-u>=<Au_n-f,\ u_n-u>,$$

поэтому $\|u_{n+1}-u\|\ \le\ \|u_n-u\|$ для $\tau\le 2$, и существует предел числовой последовательности $\{\|u_n-u\|\}$ при $n\to\infty$.

Далее, рассуждения мы можем провести двумя способами. Следуя первому способу, мы из неравенства (6) получаем оценку:

$$\|Au_n-f\|^2\le\frac{1}{\tau(2-\tau)}(\|u_n-u\|^2-\|u_{n+1}-u\|^2).\qquad(7)$$

Если подпоследовательность u_{n_j} слабо сходится к $\overline{u}$, то из (7) и существования предела $\lim\limits_{n\to\infty}\|u_n-u\|$ следует, что $Au_{nj}\to f$. Далее, согласно (2) $\|Au_{n_j}-A\overline{u}\|^2 \le < Au_{n_j}-A\overline{u}, u_{n_j}-\overline{u}>$, здесь правая часть имеет предел равный $< f-A\overline{u}, \overline{u}-\overline{u}>= 0$. Следовательно, $Au_{n_j}\to A\overline{u}$ при $j\to\infty$, и $A\overline{u}=f$. Итак, каждая слабо предельная точка $\overline{u}$ является решением нашего уравнения (1.10), и по уже доказанному для нее существует предел $\lim\limits_{n\to\infty}\|\overline{u}-u_n\|$.

Для последовательности u_n элементы a из $V=\left[\overset{\circ}{W}{}_2^1\right]^2$, для которых существует $\lim\limits_{n\to\infty}\|a-u_n\|$, составляют по определению ее аттрактор [76, с. 247]. Закончить доказательство теоремы мы можем, сославшись на следующее предложение [76, с. 247].

Предложение 2. *Если слабо предельные точки ограниченной последовательности принадлежат ее аттрактору, то вся последовательность слабо сходится к своему асимптотическому центру.*

Другой способ закончить доказательство предоставляет

Лемма 2 (Опяль [134], с. 107). *В гильбертовом пространстве X, если последовательность $\{x_n\}$ слабо сходится к x_0, то для $x\ne x_0$*

$$\varliminf_{n\to\infty}\|x_n-x_0\| < \varliminf_{n\to\infty}\|x_n-x\|. \tag{8}$$

Действительно, пусть $y_1,\ y_2$ две различные слабо предельные точки последовательности $\{x_n\}$, и пусть

$$a_1=\lim_{n\to\infty}\|y_1-x_n\|,\quad a_2=\lim_{n\to\infty}\|y_2-x_n\|,$$

пределы существуют, согласно ранее доказанному. Применяя неравенство Опяля (8), получаем

$$a_2=\lim_{n'\to\infty}\|x_{n'}-y_2\| > \lim_{n'\to\infty}\|x_{n'}-y_1\|=a_1,\quad \text{и}$$

$$a_1=\lim_{n''\to\infty}\|x_{n''}-y_1\| > \lim_{n''\to\infty}\|x_{n''}-y_2\|=a_2.$$

Здесь $x_{n'}\rightharpoonup y_1$, при $n'\to\infty$, $\quad x_{n''}\rightharpoonup y_2$, при $n''\to\infty$.

Полученное противоречие: $a_2>a_1$ и $a_1>a_2$, доказывает, что существует единственный слабый предел последовательности $\{x_n\}$, и тем самым теорема доказана.

2. О сильной сходимости. Исследуем вопрос о сильной сходимости последовательных приближений $\{u_n\}_{n=1}^{\infty}$, получаемых по формулам (1). При этом предполагаем большую гладкость функции f и начального приближения u_0 и проводим более детальный анализ соответствующих производных.

Теорема 2. *Пусть $f, u_0 \in [C^1[0,1]]^2$; вектор-функции u_n, получаемые по формуле (1), таковы, что для всякого x выполнено неравенство $\varlimsup_{n\to\infty} |u_n'(x)| > 1$. Тогда последовательность $\{u_n\}$ при $0 < \tau < 2$ сильно сходится в V.*

Доказательство. Производные функций u_{n+1} и u_n связаны соотношением

$$u_{n+1}'(x) = u_n'(x)\ (1 + \tau\chi(Ku_n, x)(1/|u_n'(x)| - 1)) + \\ + \ \tau \int_0^1 u_n'(x)\ \chi(Ku_n, x)(1/|u_n'(x)| - 1)\ dx + \tau f'(x). \quad (9)$$

Анализ этого соотношения показывает, что каждый член последовательности $\{u_n\}$ обладает непрерывной всюду на $[0,1]$ производной, и что последняя равномерно ограничена. При этом используется оценка:

$$\Big| \int_0^1 u_n'(x)\ \chi(Ku_n, x)\ (1/|u_n'(x)| - 1)\ dx \Big| = \\ = \Big| \int_0^1 u_n'(x)\ dx - \int_{[0,1]\setminus Ku_n} u_n'(x)\ dx - \int_{Ku_n} \frac{u_n'(x)}{|u_n'(x)|}\ dx \Big| \le 2.$$

Рассмотрим теперь последовательность $\{u_n'\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве

$$E_{\varepsilon,N} = \{x \in (0,1) :\ |u_n'(x)| \ge 1 + \varepsilon,\ n \ge N\}$$

и докажем ее относительную компактность в равномерной метрике. Согласно критерию Арцела необходимо показать, что величины

$$\omega_n(\Delta, x) = \sup_{y_1, y_2 \in [x, x+\Delta] \cap E_{\varepsilon,N}} |u_n'(y_1) - u_n'(y_2)|$$

становятся сколь угодно малыми равномерно по n и x при соответствующих Δ. Используя (9), получаем

$$\omega_{n+1}(\Delta,x) \le \omega_n(\Delta,x)\,(1-\tau)+ \\ +\tau \sup_{y_1,y_2\in[x,x+\Delta]\cap E_{\varepsilon,N}} \left|\frac{u_n'(y_1)}{|u_n'(y_1)|}-\frac{u_n'(y_2)}{|u_n'(y_2)|}\right| + \tau\omega_f(\Delta,x), \quad (10)$$

где

$$\omega_f(\Delta,x) = \sup_{y_1,y_2\in[x,x+\Delta]} |f'(y_1)-f'(y_2)|.$$

Легко доказываемое элементарное неравенство

$$\left|\frac{a}{|a|}-\frac{b}{|b|}\right| \le \frac{|a-b|}{\min\,(|a|,|b|)},$$

справедливое для любых ненулевых векторов a и b, преобразует (10) к неравенству

$$\omega_{n+1}(\Delta,x) \le \omega_n(\Delta,x)\,(1-\frac{\tau\varepsilon}{1+\varepsilon}) + \tau\omega_f(\Delta,x).$$

Применяя его последовательно, приходим к оценке

$$\omega_m(\Delta,x) \le \omega_N(\Delta,x) + \frac{1+\varepsilon}{\varepsilon}\omega_f(\Delta,x), \quad m = N,\ N+1,\ \ldots.$$

Итак, относительная компактность семейства функций $\{u_n'\}_{n=1}^{\infty}$ на множестве $E_{\varepsilon,N}$ в равномерной метрике установлена. На этом же множестве рассмотрим пространство $L_2(E_{\varepsilon,N})$ функций, суммируемых с квадратом.

Пусть $\varphi \in L_2(E_{\varepsilon,N})$; продолжим φ нулем на весь отрезок $[0,1]$ и рассмотрим функцию

$$v(x) = \int_0^x \varphi(\xi)\,d\xi - x\int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi.$$

По теореме 1 имеем $< u_n, v > \to < u, v >$ при $n \to +\infty$, но

$$< u_n, v > = \int_0^1 (u_n'(x), \varphi(x) - \int_0^1 \varphi(\xi)\,d\xi)\,dx = \int_{E_{\varepsilon,N}} u_n'(x)\,\varphi(x)\,dx.$$

Таким образом, $u_n' \rightharpoonup u'$ при $n \to \infty$ в $L_2(E_{\varepsilon,N})$, и поэтому последовательность $\{u_n'\}$ не просто относительно компактна, но и фундаментальна в равномерной метрике на множестве $E_{\varepsilon,N}$.

Отрезок $[0,1]$ можно представить как счетную сумму множеств вида $E_{\varepsilon,N}$ по условиям теоремы, и поэтому поточечная сходимость последовательности $\{u_n'\}$ имеет место почти всюду на $[0,1]$.

Рассмотрим представление

$$u_n(x) = \frac{u_{n+1}(x) - u_n(x)}{\tau} - f + \int\limits_0^x \frac{u_n'(\xi)}{|u_n'(\xi)|}\,\chi(Ku_n,\xi)\,d\xi +$$

$$+ x\int\limits_0^1 g(|u_n'(\xi)|^2)\,u_n'(\xi)\,d\xi + \int\limits_0^x u_n'(\xi)\,(1-\chi(Ku_n,\xi))\,d\xi.$$

Каждое слагаемое в последней сумме при изменении n образует относительно компактное семейство в V. Для первого слагаемого это следует из полученного при доказательстве теоремы 1 равенства $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_{n+1} - u_n\|_V = 0$. В третьем и пятом слагаемых подынтегральные функции сходятся почти всюду и обладают при разных n равностепенно непрерывными нормами в L_2, следовательно, сами интегралы относительно компактны в V. Для четвертого слагаемого интегралы $\int\limits_0^1 g(|u_n'(\xi)|^2)\,u_n'(\xi)\,d\xi$ ограничены в совокупности.

Из вышесказанного следует, что и последовательность $\{u_n\}$ относительно компактна в сильной топологии пространства V, а поскольку она сходится слабо, то, следовательно, сходится и сильно. Теорема доказана.

Замечание 2. Пусть $D = \{x : |u'(x)| > 1\}$, где $u(x)$ — решение уравнения $Au = f$ (при физическом законе (2.1)). Как следует из неравенства (1.6) и неравенства подчинения, множество D и решение u' на нем определяются однозначно. Как показано О.А Задворновым последовательность $u_n(x)$ сильно сходится к $u(x)$ в метрике пространства $[W_2^1(D)]^2$.

§ 5. Асимптотический анализ уравнений равновесия упругой оболочки при стремлении изгибной жесткости к нулю

1. Введение. В этом параграфе исследуются выпуклые формы равновесия замкнутой бесконечно длинной упругой цилиндрической обо-

лочки при стремлении изгибной жесткости к нулю. Упрощающие исследования предположения: касательно приложенные внешние нагрузки, а также внешние моменты отсутствуют, срединная поверхность нерастяжима, первоначальная форма оболочки круговая.

Уравнения статического равновесия цилиндрической оболочки в этих допущениях следующие [74]:

$$\frac{dT}{ds} + k(s)N(s) = 0,\ \frac{dN}{ds} - k(s)T(s) - f(s) = 0.\ \frac{dM}{ds} - N(s) = 0. \quad (1)$$

Здесь $T(s), N(s)$ — соответственно касательное и перерезывающее усилия в точке контура деформированного цилиндра с дуговой координатой s; $-f(s)$ — линейная плотность нормально действующей нагрузки; при движении в направлении возрастания s внешняя нормаль направлена вправо; $M(s)$ — изгибающий момент, связанный с кривизной направляющей $k(s)$ формулой Лява:

$$M(s) = D\left(k\left(s\right) - k_{\text{н}}\left(s\right)\right). \quad (2)$$

D — изгибная жесткость, $k_{\text{н}}(s)$ — кривизна контура цилиндра в недеформированном состоянии. Пусть s меняется в пределах интервала $[0, 2]$, тогда $k_{\text{н}}(s) = \pi$. Дополнительно к (1) и (2) ставятся условия замкнутости:

$$\int_0^2 \cos\Big(\int_0^s k(\xi)d\xi\Big)ds = \int_0^2 \sin\Big(\int_0^s k(\xi)d\xi\Big)ds = 0, \quad (3)$$

и условие на угол поворота касательной при полном обходе контура:

$$\int_0^2 k\left(\xi\right)d\xi = 2\pi. \quad (4)$$

Рассматриваются только классические решения задачи (1), (2); предполагается, что $k(s) \in C^2[0, 2]$. Из последнего уравнения (1), исключая M с помощью (2), получаем $N(s) = Dk'(s)$, и тогда из первого уравнения (1) следует, что величина

$$\omega = \frac{T(s)}{D} + \frac{1}{2}\ k^2(s) \quad (5)$$

является константой, не зависящей от s. Второе уравнение системы (1) преобразуется в уравнение

$$k''(s) + \frac{1}{2}\ k^3(s) - \omega k(s) = \frac{1}{D}\ f(s). \tag{6}$$

Предположим, что нагрузка $f(s)$ симметрична относительно $s = 1$. Например, рассматривается деформация при симметричном обтекании упругого цилиндра, удерживаемого в потоке жестким защемлением в точке $s = 0$. Нет принципиальных трудностей в переносе полученных результатов на общий случай, предположение введено для упрощения доказательств. Для симметричного относительно $s = 1$ решения $k(s)$ условия (3), (4) принимают вид

$$\int_0^1 cos\Big(\int_0^s k\,(\xi)\,d\xi\Big)ds = 0,\ k'(1) = 0,\ \int_0^1 k\,(s)\,ds = \pi. \tag{7}$$

Результаты исследования неотрицательных решений задачи (6), (7) при D, стремящемся к нулю, подытожены в теоремах 1, 2. Теоремой 1 даются оценки: $k(s) = O(\sqrt{1/D})$ равномерно по $s \in [0, 1]$, и $k(s) = O(1)$ равномерно по $s \in [\delta, 1]$ при любом $\delta > 0$, $D \to 0$. Утверждается далее, что, если $f(s) \leqslant 0$, то из любой последовательности положительных решений $k_n(s)$, соответствующих значению $D = D_n$, где $D_n \to 0$ при $n \to \infty$, извлекается подпоследовательность, сходящаяся к решению уравнений безмоментного состояния оболочки в слабой топологии пространства $L_2(\delta, 1)$.

В теореме 2 утверждается существование положительного решения задачи (6), (7) при $f(s) \leqslant 0$. Результат получен при помощи техники, применявшейся для доказательства теоремы 1, с привлечением теории Лерэ-Шаудера.

Из работ других авторов, изучавших изгиб упругого кольца, отметим работу [93]. Из нее, в частности, следует, что множество всех решений (6), (7) может быть неограниченным в пространстве $W_2^1(0, 1)$. Автору, однако, неизвестны публикации, содержащие результаты, подобные теореме 1.

2. Вспомогательные результаты. Пусть последовательность положительных чисел $D_1,\ D_2, \ldots$ стремится к нулю, и для каждого натурального числа n обозначим через $k_n(s)$ непрерывное неотрицательное решение уравнения (6), при условиях (7) определяющее кривую без самопересечений и соответствующее значению $D = D_n$. Функция $f(s)$ предполагается принадлежащей $C^1[0,1]$. Константа ω_n определяется задачей (6), (7).

Лемма 1. *Пусть $\omega_n D_n \geq \beta > 0$ для всех n, и пусть $\varepsilon-$ произвольно фиксированное положительное число. Тогда существует число N, что любое экстремальное значение M_n функции $k_n(s)$, достигаемое в критической точке, при $n \geq N$ удовлетворяет одному из неравенств:*

$$|M_n/2\sqrt{\omega_n} - 1| \leqslant \varepsilon \quad \textit{или} \quad M_n/\sqrt{\omega_n} \leqslant \varepsilon.$$

Доказательство. В дальнейшем символами $c, c_1,\ c_2, \ldots$ будем обозначать константы, не зависящие от n; $\delta, \delta_1,\ \delta_2, \ldots$ — константы, от n не зависящие, которые можно брать произвольно малыми, если ограничиться достаточно большими номерами n; $\varepsilon, \varepsilon_1,\ \varepsilon_2, \ldots$ — малые константы, задаваемые априорно. Пусть M_n — экстремальное значение функции $k_n(s)$, принимаемое этой функцией в критической точке $b_n \in [0,1]$.

Покажем существование константы c со следующим свойством: для всякого n функция $k_n(s)$ в некоторой точке a_n удовлетворяет неравенствам $k_n(a_n) \leqslant c,\ |k_n'(a_n)| \leqslant c$. Если имеет место случай $k_n'(0) \leqslant 0$ или $k_n(0) > \pi$, то в качестве a_n можно взять точку, где $k_n(s)$ достигает наименьшего значения, тогда $k_n(a_n) \leqslant \pi,\ k_n'(a_n) = 0$. В противном случае определим положительную константу c_1 неравенствами $c_1/(c_1 - \pi) \leqslant 2$, $c_1 \geqslant \pi$. Если есть критическая точка θ_n, в которой $k_n(\theta_n) \leqslant c_1$, то в качестве c оставляем c_1, полагая $a_n = \theta_n$. Иначе, рассмотрим наибольший интервал $[0, \sigma]$, на котором $k_n(s) \leqslant c_1$. Вне $[0,\sigma]$ всюду $k_n(s) > c_1$, поэтому

$$(1-\sigma)c_1 < \int_0^1 k\,(s)\,ds = \pi, \quad \text{или} \quad \sigma > 1 - \frac{\pi}{c_1}.$$

В некоторой точке θ_n интервала $[0,\sigma]$ имеем, что

$$k_n'(\theta_n) = (c_1 - k(0))/\sigma \leqslant c_1^2/(c_1 - \pi) \leqslant 2c_1.$$

Эти рассуждения показывают, что константа $2c_1$ обладает нужными нам свойствами для всех n. Введем обозначения: $k_n(a_n) = m_n$, $k_n'(a_n) = l_n$. Умножая обе части уравнения (6) на $k'(s)$ и интегрируя по интервалу (a_n, s), получим следующее равенство (ниже, где это не вызывает недоразумений, индекс n опускаем для удобства записи):

$$4\left(k_s'\right)^2 = -k^4(s) + 4\omega k^2(s) + m^4 - 4\omega m^2 + 4l^2 + \\ + \frac{8}{D}\left[f(s)k(s) - \int_a^s f'(t)k(t)dt - f(a)m\right]. \tag{8}$$

Отсюда, в частности, следует, что экстремальные значения функции $k(s)$ удовлетворяют соотношению

$$M^4 - 4M^2\left(\omega + \frac{\varphi}{D}\right) + 4\omega m^2 - m^4 - 4l^2 = 0, \tag{9}$$

где

$$\varphi = \frac{2}{M^2}\left[f(b)M - \int_a^b f'(t)k(t)dt - f(a)m\right].$$

Интерпретируя (9) как квадратное уравнение относительно M^2, получаем

$$M^2 = 2\left(\omega + \frac{\varphi}{D}\right) \pm 2\omega\sqrt{1+\alpha}, \tag{10}$$

где

$$\alpha = \frac{2\varphi}{\omega D} + \frac{\varphi^2}{\omega^2 D^2} - \frac{m^2}{\omega} + \frac{m^4 + 4l^2}{4\omega^2}.$$

Выбору знака плюс в (10) перед квадратным корнем соответствует представление

$$M^2 = 2\left(2\omega + 2\frac{\varphi}{D} + \frac{\varphi^2}{2\omega D^2} - \frac{m^2}{2} + \frac{m^4 + 4l^2}{8\omega} + \\ + \omega\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\alpha^j\right). \tag{11}$$

Минусу соответствует разложение в ряд

$$M^2 = 2\left(\frac{m^2}{2} - \frac{\varphi^2}{2\omega D^2} - \frac{m^4 + 4l^2}{8\omega} - \omega\sum_{j=2}^{\infty}(-1)^{j-1}\frac{(2j-3)!!}{(2j)!!}\alpha^j\right). \tag{12}$$

Фиксируем некое положительное число E и рассмотрим экстремальные значения, не меньшие, чем E: $M_n \geq E$. Для таких M_n числа $M_n\,|\varphi_n|$ равномерно ограничены по n и возможному выбору M_n, ибо

$$\Big|\int\limits_a^b f'(t)k(t)dt\Big| \leq \max|f'(t)|\,\pi$$

для всех $a, b \in [0,1], m_n/M_n \leq c/E, 1/M_n \leq 1/E$. Аналогичное утверждение справедливо для последовательности α_n: $|\alpha_n| \leqslant c_1/M_n + \delta_1$.

Рассмотрим экстремальные значения M_n, удовлетворяющие уравнению (12) — уравнению, имеющему вид

$$\frac{M^2}{\omega} = \left(\frac{m^2}{\omega} - \frac{m^4+4l^2}{4\omega^2}\right) - \frac{\varphi^2}{\omega^2 D^2} - \alpha^2\psi(\alpha),$$

где $\psi(\alpha)$ — непрерывная, ограниченная на ограниченных интервалах функция. Учитывая оценки для φ_n, α_n, получаем неравенство

$$M^2/\omega \leqslant c_2/M^2 + \delta_2,$$

откуда

$$M^2 \leqslant \left(\delta_2\omega + \sqrt{\delta_2^2\omega^2 + 4c_2\omega}\right)/2 \leqslant \delta_2(1+\delta_2)\omega \leqslant \varepsilon\omega$$

для $n \geqslant N_1$.

При номерах $n \geqslant N_1$ экстремальные значения M_n, большие чем $(\varepsilon\omega)^{1/2}$, удовлетворяют, следовательно, уравнению (11), которое мы перепишем в виде

$$\frac{M^2}{4\omega} = 1 + \frac{\varphi}{\omega D} + \frac{\varphi^2}{4\omega^2 D^2} - \frac{m^2}{4\omega} + \frac{m^4+4l^2}{16\omega^2} + \alpha^2\psi(\alpha).$$

Отсюда вытекает оценка $\left|M^2/(4\omega) - 1\right| \leqslant c_3/(\varepsilon\omega)^{1/2} + \delta_3$. Увеличивая, если необходимо, N_1, добьемся того, чтобы $c_3/(\varepsilon\omega)^{1/2} + \delta_3 \leqslant \varepsilon$. Увеличивая, если необходимо, N_1 еще более, добьемся того, чтобы все экстремальные значения $M < E$ удовлетворяли соотношению $M/(2\sqrt{\omega}) \leqslant \varepsilon$.

Итак, требуемое разбиение экстремальных значений функции $k_n(s)$ на две непересекающиеся группы при достаточно больших номерах n получено.

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Существуют положительные числа N, E такие, что для $n \geqslant N$ максимальный интервал (μ_n, ν_n), на котором $k_n(s) > \sqrt{\omega_n}$, если таковой существует, обладает свойством: $\mu_n = 0, \nu_n \leqslant \varepsilon$; на $[2\varepsilon, 1]$ функция $k_n(s) \leqslant E$, на $[0, 2\varepsilon]$ функция $k_n(s) \leqslant c\sqrt{\omega_n}$.*

Доказательство. Число $\sqrt{\omega}$ разделяет две полученных группы экстремумов, и на одном из концов интервала (μ_n, ν_n) функция $k_n(s)$ равна $\sqrt{\omega_n}$. Допустим, что это левый конец; пусть s_n — координата первого максимума $k_n(s)$ на $[\mu_n, \nu_n]$. В следующих ниже оценках интеграла I произведена замена переменной $x = k(t)$, индексы n опущены, использовано представление производной (8)

$$I = \int\limits_{\mu}^{\nu} k(t)dt \geqslant \int\limits_{\mu}^{s} k(t)dt = \int\limits_{\sqrt{\omega_n}}^{k(s)} xt'_x dx =$$

$$= \int\limits_{\sqrt{\omega_n}}^{k(s)} 2x\Big(-x^4 + 4\omega x^2 + \frac{8}{D}\Big[xf(t(x)) - \int\limits_a^{t(x)} f'(\xi)x(\xi)d\xi - f(a)m\Big] +$$

$$+ m^4 - 4\omega^2 m^2 + 4l^2\Big)^{-1/2} dx.$$

Функция

$$Q(t) = -\int\limits_a^t f'(\xi)k_n(\xi)d\xi$$

по модулю равномерно по n ограничена. В интеграле, оценивающем I снизу, перейдем от переменной x к переменной y: $x = 2\sqrt{\omega}y$. Получим

$$I \geqslant \int\limits_{1/2}^{k(s)/2\sqrt{\omega}} 2y\left(y^2 - y^4 + \frac{1}{2\omega^2 D}\left(Q(t(x(y))) + f(t(x(y)))2\sqrt{\omega}y - \right.\right.$$

$$\left.\left. - f(a)m\right) + \frac{m^4 + 4l^2}{16\omega^2} - \frac{m^2}{4\omega}\right)^{-1/2} dy.$$

Правая сторона неравенства имеет предел при $\omega \to \infty$, равный

$$2\int\limits_{1/2}^{1} \frac{dy}{\sqrt{1-y^2}} = \frac{2}{3}\pi.$$

Следовательно, количество обсуждаемых интервалов $[\mu, \nu]$, у которых $k(\mu) = \sqrt{\omega}$, для рассматриваемого решения $k(s)$ при достаточно большом n не больше, чем $[\pi/(2\pi/3)] = 1$. Если бы интервал (μ, ν) был внутренним, интеграл $\int\limits_{\mu}^{\nu} k(t)dt$ оценивался бы снизу числом $4\pi/3$, что невозможно. Аналогичные рассуждения можно провести для случая $k_n(\nu_n) = \sqrt{\omega_n}$. При этом заметим, что точка первого максимума, лежащая левее ν, может не быть критической, совпадая с $s = 0$. Таким образом, приходим к выводу, что либо $\mu = 0$, либо $\nu = 1$. Заметим, что длина интервала становится сколь угодно малой с ростом n, поскольку $\nu_n - \mu_n \leqslant \pi/\sqrt{\omega_n}$. Для замкнутых, выпуклых форм равновесия, представляемых функцией $k_n(s)$, интервал $(\mu_n, 1)$ со свойствами, о которых идет речь в лемме, отсутствует при больших n. Действительно, на малом участке изменения s, длины меньшей ε, угол наклона касательной изменяется более, чем на

$$2\int\limits_{\mu_n}^{1} k_n(t)dt \geqslant \frac{4}{3}\,\pi - \varepsilon_1.$$

Следовательно, диаметр выпуклой фигуры, ограничиваемой контуром деформированной оболочки, меньше, чем $\varepsilon(1 + 1/(2\sin(\pi/6)))$. Соответственно, длина контура меньше, чем $3\pi\varepsilon$ [117, с. 87], тогда как она равна 2. Поэтому далее полагаем $\mu_n = 0$. Взяв произвольно $\varepsilon > 0$, определим интервал $[\xi_n, 1]$, где в качестве ξ_n берем точку $\nu_n + \varepsilon/3$, если в интервале $(\nu_n, \nu_n + \varepsilon/3)$ нет экстремальных точек; берем первую экстремальную точку в противном случае. Мы утверждаем, что

$$\lim_{n\to\infty} k_n(\xi_n)/\sqrt{\omega_n} = 0.$$

Действительно, пусть это не так, и $k_n(\xi_n)/\sqrt{\omega_n} = \alpha > 0$ для какой-то последовательности чисел n. Поскольку в этом случае ξ_n — не критические

точки, имеем

$$\int_{\nu_n}^{1} k_n(t)dt \geqslant \int_{\nu_n}^{\xi_n} k_n(t)dt \geqslant \alpha\sqrt{\omega_n}\varepsilon/3 \to \infty$$

при $n \to \infty$. Это противоречит тому, что $\int_0^1 k_n(t)dt = \pi$. По свойству экстремумов каждой группы из доказанного следует, что на интервалах $[\xi_n, 1]$ отношение $k_n(s)/\sqrt{\omega_n}$ равномерно по s стремится к нулю при $n \to \infty$.

Возьмем число E такое, чтобы выполнялось соотношение

$$\max_{t\in[0,1]} |f(t)| \leqslant \frac{1}{4}\beta E.$$

На любом подинтервале $\Delta_n \subseteq [\xi_n, 1]$, где $k_n(s) \geqslant E$ функция $k_n(s)$ выпуклая. Действительно, для $t \in \Delta_n$ имеем

$$k_n''(t) = \omega_n k_n(t)\left(1 - \frac{1}{2}\frac{k_n^2(t)}{\omega_n} + \frac{f(t)}{D_n\omega_n k_n(t)}\right).$$

Последнее слагаемое в скобках допускает оценку

$$\left|\frac{f(t)}{D_n\omega_n k_n(t)}\right| \leqslant \frac{|f|_\infty}{\beta E} \leqslant \frac{1}{4},$$

поскольку $k_n^2(t) \leqslant \omega_n$, то для достаточно больших n имеем:

$$k_n''(t) \geqslant \frac{1}{4}\omega_n k_n(t) > 0.$$

Пусть Δ_n — максимальный интервал, на котором $k_n(s) \geqslant E$. Из выпуклости $k_n(s)$ на Δ_n следует, что Δ_n не может быть внутренним подинтервалом в $[\xi_n, 1]$, поэтому множество $t : t \in [\xi_n, 1], k_n(t) \geqslant E$, является интервалом $[\xi_n, \theta_n]$. На $[\xi_n, \theta_n]$ функция $k_n(s)$ монотонно убывает, $k_n'(\theta_n) \leqslant 0$. С учетом этого для точек $t \in [\xi_n, \theta_n]$ проводим следующие оценки:

$$k'(\theta) - k'(t) = \int_t^\theta k''(s)ds \geqslant (\theta - t)\frac{1}{4}\omega E,$$

$$-k'(t) \geqslant (\theta - t)\frac{1}{4}\omega E,$$

$$k(t) - k(\theta) = -\int_t^\theta k'(s)ds \geqslant \int_t^\theta (\theta - t)\frac{1}{4}\omega E dt = \frac{1}{8}(\theta - t)^2 \omega E,$$

$$k(\xi_n) \geqslant \frac{1}{8}(\theta_n - \xi_n)^2 \omega E.$$

Поскольку $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(\xi_n)\big/\sqrt{\omega_n} = 0$, заключаем, что $\lim\limits_{n\to\infty}(\theta_n - \xi_n) = 0$. Поэтому $|\nu_n - \mu_n| \leqslant \varepsilon/3$, $(\theta_n - \xi_n) \leqslant \varepsilon/3$ для достаточно больших n. Лемма доказана.

Лемма 3. *Если* $\lim\limits_{n\to\infty} \omega_n D_n = \infty$ *и* ε *— произвольное фиксированное положительное число, то справедливо утверждение леммы 2 с заменой* E *на* $E_n = 1\big/\sqrt{\omega_n D_n}$.

Доказательство аналогично доказательству леммы 2. Следует только учесть, что величина

$$\left|\frac{f(t)}{D_n \omega_n k_n(t)}\right|$$

теперь меньше, чем $C/D_n\omega_n E_n$ — числа, стремящегося к нулю при $n \to \infty$. Также в соответствующем месте $k_n(\xi_n)$ оцениваем так: $k_n(\xi_n) \geqslant (\theta_n - \xi_n)^2 \omega_n E_n = (\theta_n - \xi_n)^2 \sqrt{\omega_n / D_n}$, и учитываем, что $\lim\limits_{n\to\infty} k_n(\xi_n)\big/\sqrt{\omega_n} = 0$.

Лемма 4. *Пусть последовательность положительных функций* $k_n(s)$ *представляет решения уравнения (6) при условиях замкнутости (3) и симметричности нагрузки* $f(s)$ *относительно* $s = 1$. *Пусть дополнительно выполнено условие* $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\omega_n| D_n = \beta > 0$. *Тогда* $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}} |\omega_n| D_n < \infty$.

Доказательство. Предполагая противное, примем, что

$$\lim_{n\to\infty} |\omega_n| D_n = +\infty.$$

Рассмотрим случай,когда $\omega_n > 0$ для всех n. Согласно лемме 3 функция $k_n(s)$ ограничена числом $E_n = 1\big/\sqrt{\omega_n D_n}$ вне интервала $[0, 2\varepsilon]$ при произвольно взятом $\varepsilon > 0$, если n достаточно большое. При этом

$\int\limits_0^{2\varepsilon} k_n(t)dt \leqslant \frac{2}{3}\pi$, ибо противоположное неравенство ведет к противоречию (см. доказательство леммы 2). Следовательно, $\int\limits_{2\varepsilon}^{1} k_n(t)dt \geqslant \frac{\pi}{3}$, с другой стороны,

$$\int\limits_{2\varepsilon}^{1} k_n(t)dt \leqslant \frac{1}{\sqrt{\omega_n D_n}} \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

Обратимся теперь к случаю, когда $\omega_n < 0$ для всех n. Интегрируя по интервалу (0,1) равенство $-\omega_n D_n k_n(s) = -D_n {k_n}''(s) - \frac{1}{2} D_n K_n^3(s) + f(s)$, получим при условиях (7), что $-D_n\omega_n\pi \leqslant \int\limits_0^1 f(s)ds + D_n {k_n}'(0)$. Оценим ${k_n}'(0)$, исходя из формулы (8):

$$4\left(k'(0)\right)^2 D^2 \leqslant -4\omega D^2 c + Dk(0)c_1 + c_2.$$

Рассуждения, использованные при доказательстве леммы 1, применимы и для случая $\omega < 0$, поэтому мы имеем $k(0) \leqslant c_3\sqrt{|\omega|}$. Собирая вместе три последних неравенства, получаем:

$$2\pi^2 (D\omega)^2 \leqslant 4Dc\,|\omega D| + c_1 c_3 \sqrt{D}\sqrt{|\omega D|} + c_4.$$

Это соотношение не может выполняться для сколь угодно больших значений $|\omega D|$. Полученные противоречия опровергают предположение. Лемма доказана.

3. Поведение положительных по $k(s)$ решений системы (1), (3), (4) при $D \to 0$.

Теорема 1. *Пусть для каждого $D_n > 0$, $n = 1, 2\ldots$, где $D_n \to 0$ при $n \to \infty$, выбрано положительное непрерывное решение $k_n(s)$ уравнения (6), где $s \in (0,1)$, а дополнительными выступают условия (7). Пусть,далее, функция $f \in C^1[0,1]$ и не равна тождественно нулю. Тогда справедливы следующие утверждения.*

Последовательность $k_n(s)$ *допускает оценку* $k_n(s) \leqslant C/\sqrt{D_n}$ *с константой* C, *не зависящей от* s, n. *При сколь угодно малом* $\delta > 0$ *последовательность* $k_n(s)$ *равномерно ограничена на отрезке* $[\delta, 1]$.

В пространстве $C[0,1]$ *ограничена соответствующая* $k_n(s)$ *последовательность функций касательных усилий* $T_n(s)$, *а функции момента* $M_n(s)$ *стремятся к нулю при* $n \to \infty$. *Перерезывающие усилия* $N_n(s)$ *стремятся к нулю равномерно на [0,1], если* $\omega_n < 0$, *или на* $[\delta, 1]$, *если* $\omega_n > 0$.

Если $\omega_n > 0$, *то некоторая подпоследовательность* $k_n(s)$ *слабо сходится в* $L_2(\delta, 1)$ *к* $k_0(s)$, *а соответствующие* $T_n(s)$ *равномерно сходятся к константе* T_0 *при любом* $\delta > 0$. *При этом* $k_0(s)$, T_0 *не зависят от* δ *и являются решениями системы (1) при* $N = M = 0$ *в области* $(0,\ 1)$ *с условием*

$$\int_0^1 \cos\Big(\int_s^1 k_0\,(\xi)\,d\xi\Big)ds = 0.$$

Доказательство. Проверим, что $\beta = \varliminf\limits_{n\to\infty} |\omega_n|\, D_n > 0$. Предположим противное, и пусть $\varliminf\limits_{n\to\infty} |\omega_n|\, D_n = 0$. Для соответствующей подпоследовательности перепишем (10) в виде

$$M^2 D = 2\Big(\omega D + \varphi \pm \big(\omega^2 D^2 + 2\varphi\omega D + \\ + \varphi^2 - \omega D^2 m^2 + \frac{1}{4} D^2 (m^4 + 4l^2)\big)^{1/2}\Big). \quad (13)$$

Мы утверждаем, что $\lim\limits_{n\to\infty} (M_n^2 D_n) = 0$. Если это не так, то некоторая подпоследовательность M_{n_j} стремится к ∞. Следовательно, φ_{n_j} стремятся к нулю, ибо допускают оценку $\big|\varphi_{n_j}\big| \leqslant c_1 \big/ M_{n_j} + c_2 \big/ M_{n_j}^2$. Итак, в (13) все слагаемые стремятся к нулю, а потому $\lim\limits_{j\to\infty} \Big(M_{n_j}^2 D_{n_j}\Big) = 0$. Полученное противоречие доказывает утверждение. Фиксируем $\gamma > 0$. Последовательность $k_n^2(\gamma) D_n$ также стремится к нулю, ибо в противном случае для некоторой подпоследовательности $k_{n_j}^2(\gamma) D_{n_j} \geqslant c$. Кроме того, на $[0, \gamma]$

функции $k_n(s)$ в этом случае убывают. Следовательно,

$$\pi \geqslant \int_o^\gamma k_n(s)ds \geqslant \frac{c}{\sqrt{D_n}}\gamma \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Из основного уравнения (6) для любых $e, d \in [\gamma, 1]$ получаем:

$$\int_e^d D_n\left(\frac{1}{2}k_n^2(s) - \omega_n\right)k_n(s)ds + D_n\left(k_n'(d) - k_n'(e)\right) = \int_e^d f(s)ds.$$

Интеграл I в левой части равенства допускает оценку:

$$|I| \leqslant \varepsilon_n \int_e^d k_n(s)ds = \pi\varepsilon_n, \quad \varepsilon_n = \max_{\gamma\leqslant s\leqslant 1}\left(\left|\frac{1}{2}k_n^2(s) - \omega_n\right| D_n\right),\ \varepsilon_n \to 0.$$

Для оценки внеинтегрального слагаемого вновь обращаемся к основной "рабочей" формуле (8):

$$4D^2\left(k'(s)\right)^2 \leqslant 4\left|\omega\right| D^2k^2(s) + D^2\left|\omega\right| c_1 + Dk(s)c_2 + Dc_3.$$

Переходя к пределу при $n \to \infty$, заключаем, что $\int_e^d f(s)ds = 0$, следовательно, $f(s) \equiv 0$ на $[0, 1]$ в противоречие с допущениями теоремы. Итак, $\beta > 0$. Исключительный случай $f(s) \equiv 0$ на $[0, 1]$ рассмотрен в лемме 7.

Леммы 1, 2 (или их доказательства, очевидным образом измененные для случая $\omega < 0$) приводят к оценке $k_n(s) \leqslant 2\sqrt{|\omega_n|}\,(1 + \varepsilon_n)$, $\varepsilon_n \to 0$, $s \in [0, 1]$; и к оценке $k_n(s) \leqslant E$ на $[\delta, 1]$. Утверждаемое относительно последовательности $k_n(s)$ следует теперь из леммы 4.

Вспомним, что $\omega_n = k_n^2(s)/2 + T_n(s)/D_n$. Поэтому

$$\frac{|T_n|}{D_n} \leqslant |\omega_n| + \frac{k_n^2(s)}{2}.$$

Учитывая, что

$$|\omega_n| \leqslant \frac{C}{D_n}, \quad k_n(s) \leqslant \frac{C}{\sqrt{D_n}},$$

получаем для некоторой константы c оценку: $|T_n(s)| \leqslant c$ для всех n и всех $s \in [0, 1]$.

Из равенства $M_n(s) = D_n(k_n(s) - k_{\text{н}}(s))$ и полученной уже оценки $k_n(s)$ следует утверждение для функции $M_n(s)$, утверждения относительно последовательности $N_n(s) = Dk_n{}'(s)$ вытекают из формулы (8) и лемм 2, 4.

Предположим, наконец, что все ω_n положительны. Для любой финитной в (0,1) функции $\varphi(s)$ имеем

$$\int_0^1 \varphi(s) N_n{}'(s) ds = -\int_0^1 \varphi'(s) N_n(s) ds \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0,$$

вся последовательность $N_n{}'(s)$ в смысле распределений стремится к нулю в области (0,1). Пусть последовательность $k_{n_j}(s)$ сходится слабо к $k_0(s)$ в $L_2(\delta, 1)$; вследствие первого уравнения системы (1) можно заключить, что $T_{n_j}(s) \to T_0$ при $j \to \infty$ в $C[\delta, 1]$, где T_0 — константа. Переходя к пределу во втором уравнении (1) по последовательности n_j, получаем в области $(\delta, 1)$ равенство в смысле распределений:

$$-k_0(s)T_0 - f(s) = 0. \tag{14}$$

Ввиду непрерывности $f(s)$ равенство (14) имеет место поточечно. Уменьшая δ и выбирая подпоследовательность из предыдущей последовательности, убеждаемся, что (14) имеет место в области (0,1). Для функции $k_0(s) = -f(s)/T_0$ сохраняется условие замкнутости

$$\int_0^1 \cos\Big(\int_s^1 k_0(\xi)\, d\xi\Big) ds = 0.$$

Теорема доказана.

Замечание 1. Если рассматриваемое как уравнение относительно T_0 последнее равенство имеет не более одного физически приемлемого решения, то вся исходная последовательность $k_n(s)$ сходится к $k_0(s)$ в смысле распределений в области (0,1).

Теорема 1 может быть использована для организации вычислений напряженно-деформированного состояния моментной оболочки как безмоментной с поправками типа погранслоя. В линейной постановке для сетчатых оболочек вращения алгоритм подобных вычислений подробно

изложен в [55]. Целесообразность такого подхода к вычислениям обуславливается жесткостью системы (1). Подробнее жесткость обсуждается в пункте 5.

Теорема 1 сохраняет силу, если учитывать растяжимость срединной поверхности оболочки при линейном законе Гука, но рассматривать последовательность положительных решений $k_n(s)$ с дополнительным условием: $\Lambda \geqslant \lambda_n(s) \geqslant \lambda > 0$ для всех n, где $\lambda_n(s) = ds/d\sigma$ — степень удлинения, σ — дуговая координата, отсчитываемая по недеформированному контуру.

Можно априори утверждать, что константа $\omega > 0$, если $f(s) \leqslant 0$.

4. Существование положительных решений. Технику доказательства лемм 1–4 мы можем использовать и для получения теоремы существования положительных решений задачи (6), (7).

Лемма 5. *Пусть $f(s) \leqslant 0$, $f \in C^1[0,1]$. Введем в рассмотрение функцию $\varphi(s;t) = \dfrac{t}{D} f(s)$, D — фиксированная изгибная жесткость, параметр t меняется в интервале $[0,1]$.*

Множество положительных решений задачи

$$k''(s) + \frac{1}{2}k^3(s) - \omega k(s) = \varphi(s;t), \qquad s \in (0,1), \tag{15}$$

при условиях (7) для всевозможных $t \in [0,1]$ ограничено в пространстве $W_2^{(1)}[0,1]$.

Доказательство. Пусть t_n таковы, что решения $k_n(s)$ неотрицательны, а соответствующие ω_n стремятся к ∞; это влечет, конечно, и равенство $\lim\limits_{n\to\infty}(\omega_n D) = \infty$. Последовательно проводим рассуждения лемм 1–4 с очевидными изменениями и приходим к противоречию, как в лемме 4. Отсюда следует, что множество всех ω, соответствующих положительному решению задачи (15), (7) при каком-либо t, ограничено.

Нетрудно видеть, что

$$-\Big(k''(s) + \frac{1}{2}k^3(s) - \omega k(s), k(s)\Big) = -\int\limits_0^1 k(\xi)''k(\xi)d\xi - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 k^4(\xi)d\xi +$$

$$+\omega\int\limits_0^1 k^2(\xi)d\xi = -\left(k'k\right)\Big|_0^1 + \int\limits_0^1 \left(k'(\xi)\right)^2 d\xi - \frac{1}{2}\int\limits_0^1 k^4(\xi)d\xi + \omega\int\limits_0^1 k^2(\xi)d\xi. \tag{16}$$

Элементарные выкладки показывают, что

$$k'(0) = \frac{1}{D}N(0) = -\int\limits_0^1 \varphi(s,t)cos\Big(\int\limits_0^s k\left(\xi\right)d\xi\Big)ds.$$

Следовательно, $|k'(0)| \leqslant c_1$, где c_1 — априорно вычисляемая константа. С другой стороны, в силу теоремы вложения $W_2^{(1)}(0,1)$ в $C[0,1]$ имеем $k(0) \leqslant c_2 \left\|k\right\|_{2,1}$, где $\left\|\cdot\right\|_{p,q}$ обозначает норму в соболевском пространстве $W_p^{(q)}(0,1)$. Фиксируя $\varepsilon > 0$, оценим первое слагаемое в правой части (16) следующим образом:

$$|k(1)k'(1) - k(0)k'(0)| \leqslant \varepsilon \left\|k\right\|_{2,1}^2 + \frac{c_3}{\varepsilon}.$$

Приступаем к оценке третьего слагаемого в правой части (16). Для этого функцию $k(s)$ продолжим на интервал $[0,2]$ четно относительно точки $s = 1$. Пусть a — первая точка из $[0,1]$, где $k(s)$ достигает абсолютного минимума $m \leqslant \pi$. Отрезок графика функции $k(s)$ на интервале $[2-a,2]$ четно продолжаем за точку $s = 2$ на интервал $[2,2+a]$. Полагаем

$$y(s) = \begin{cases} k(s) - m, \ s \in [a, 2+a], \\ 0, \ \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Определенная на всей прямой неотрицательная функция $y(s)$ абсолютно непрерывна и удовлетворяет всем условиям применимости мультипликативного неравенства Наги [98, с. 383]. Имеем

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^4(s)ds \leqslant c_4 \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} y^2(s)ds\right]^{3/2} \left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty} \left(y'_s(s)\right)^2 ds\right]^{1/2},$$

или

$$2\int_0^1 (k(s)-m)^4\,ds \leqslant$$

$$\leqslant c_4\left[2\int_0^1 (k(s)-m)^2\,ds\right]^{3/2}\left[2\int_0^1 (k'(s))^2\,ds\right]^{1/2}. \quad (17)$$

Учтем, что ограниченность констант ω_n вследствие равенства

$$\omega=\frac{1}{2\pi}\int_0^1 k^3(\xi)\,d\xi-\frac{1}{\pi}\int_0^1 \varphi(\xi,t)\,d\xi-\frac{1}{\pi}\,k'(0)$$

равносильна ограниченности норм $k(s)$ в $L_3(0,1)$ равномерно по t, и, следовательно, ограничены интегралы

$$\int_0^1 k_n^2(s)\,ds.$$

Простыми вычислениями получаем теперь из (17), что

$$\frac{1}{2}\int_0^1 k^4(\xi)\,d\xi\leqslant\varepsilon\int_0^1 (k'(\xi))^2\,d\xi+\frac{c_5}{\varepsilon}.$$

Вследствие того же замечания относительно ω

$$\omega\int_0^1 k^2(\xi)\,d\xi\leqslant c_6.$$

Собирая полученные оценки слагаемых последнего выражения в (16), имеем

$$(1-2\varepsilon)\,\|k\|_{1,2}^2\leqslant c_6+\left\|k''+\frac{1}{2}k^3-\omega k\right\|_{0,2}\|k\|_{0,2}.$$

Используя ε-неравенство Коши и непрерывность оператора вложения для соответствующих пространств, получаем

$$(1-2\varepsilon)\,\|k\|_{1,2}^2\leqslant c_6+\frac{1}{2}\left(\frac{\|\varphi(s,t)\|_{0,2}^2}{\varepsilon}+\varepsilon\,\|k\|_{1,2}^2\right).$$

При достаточно малом ε отсюда следует искомая оценка: $\|k\|_{1,2}^2 \leqslant c_7$. Лемма доказана.

Рассмотрим следующую систему интегральных уравнений относительно функции $k(s)$ и констант $d,\ \omega$:

$$k(s) = d_+ + \int_0^s \int_1^\sigma \left[-\frac{1}{2}k_+^3(\xi) + \omega k(\xi) + \varphi\,(\xi, t)\right] d\xi d\sigma,$$

$$d = \int_0^1 k(\xi)d\xi - \pi + d, \qquad \omega = \int_0^1 \cos\Big(\int_0^s k\,(\xi)\,d\xi\Big)ds + \omega. \tag{18}$$

Здесь $k_+(\xi)$ – положительная часть функции $k(\xi)$, аналогично: $d_+ = d$, если $d \geqslant 0$, иначе $d_+ = 0$.

Лемма 6. *Пусть $(k(s), d, \omega)$ — решение уравнений (18) в пространстве $X = C[0,1]\times R\times R$ (R — множество вещественных чисел), тогда $k(s)$ есть неотрицательное решение задачи (6), (7).*

Доказательство. Дважды дифференцируя первое уравнение системы (18), получаем

$$k''(s) + \frac{1}{2}k_+^3(s) - \omega k(s) = \varphi(s,t). \tag{19}$$

Помимо этого, из (18) следует, что $k(0) = d_+ \geqslant 0$, $k'(1) = 0$. Умножение (19) скалярно в пространстве $L_2(0,1)$ на функцию $k_-(s) = (|k(s)| - k(s))/2$ приводит к равенствам:

$$(k'(s)k_-(s))\Big|_0^1 - \int_0^1 k'(s){k_-}'(s)ds - \omega\int_0^1 k(s)k_-(s)ds = \int_0^1 \varphi(s,t)k_-(s)ds,$$

$$\int_0^1 \left({k_-}'(s)\right)^2 ds + \omega\int_0^1 \left(k_-(s)\right)^2 ds = \int_0^1 \varphi(s,t)k_-(s)ds.$$

Левая часть последнего равенства неотрицательна, правая согласно предположениям на функцию φ — неположительна. Следовательно,

$$\int_0^1 \left({k_-}'(s)\right)^2 ds = 0,$$

и потому $k_-(s) = 0$. Лемма доказана.

Оператор A_t, определяемый правой частью (18), в пространстве X вполне непрерывен. Согласно лемме 5 найдется открытый шар $B_R(\theta)$ радиуса R с центром в нулевой точке θ пространства X, вне которого решения уравнения (18) отсутствуют.

Лемма 7. *Уравнение (6) при условиях (3), (4), если $f(s) \equiv 0$, имеет единственное положительное решение $k(s) \equiv \pi$, $\omega = \pi^3/2$; и оператор $I - A_0$ в некоторой окрестности точки $(\pi, \pi, \pi^3/2)$ взаимно однозначен.*

Доказательство. Фиксируем некоторое положительное решение $k(s)$ задачи (6), (3), (4) при $f(s) \equiv 0$. Для его производной из (6) получаем представление

$$4\left(k'(s)\right)^2 = -k^4(s) + 4\omega k^2(s) + c_0. \tag{20}$$

Не теряя общности рассуждений, можем считать, что в точке $s = 0$ функция $k(s)$ принимает свое наибольшее значение, которое обозначим через M. Поэтому $c_0 = M^2\left(M^2 - 4\omega\right)$. Другое выражение для c_0 получим, привлекая вторую производную $k(s)$:

$$c_0 = 4\left(k'(s)\right)^2 + k^4(s) - 4\omega k^2(s) = 4\left(k'(s)\right)^2 - 2k(s)k''(s) - 2\omega k^2(s) =$$

$$= 6\left(k'(s)\right)^2 - \left(k^2(s)\right)'' - 2\omega k^2(s).$$

Существует точка ξ, где функции $k^2(s)$ и $k(s)$ принимают минимальные значения. Пользуемся этим для оценки постоянной c_0:

$$\omega = \frac{1}{4\pi}\int\limits_{-1}^{1} k^3(\tau)d\tau > 0, \qquad c_0 = -\left(k^2(\xi)\right)''_{\xi\xi} - 2\omega k^2(\xi) < 0.$$

Следовательно, $4\omega - M^2 = m^2$ для некоторого m, и для производной в (20) можем написать новое выражение:

$$4\left(k'(s)\right)^2 = -k^4(s) + M^4 + 4\omega k^2(s) - 4\omega M^2 =$$

$$= \left(-k^2(s) + M^2\right)\left(-m^2 + k^2(s)\right). \tag{21}$$

Отсюда видно, что

$$M^2 \geqslant k^2(s) \geqslant m^2, \qquad 4\omega \geqslant M^2 \geqslant 2\omega,$$

а экстремальные значения $k(s)$ есть M и m.

Предположим, что $M \neq m$, а s_M и s_m – последовательные значения s, в которых $k(s_M) = M$, $k(s_m) = m$; можем считать, что $s_m < s_M$. Значение $k(s)$, $s \in [s_m, s_M]$, входит в следующее равенство:

$$\int_{s_m}^{s} ds = \int_{m}^{k(s)} \frac{2dx}{\sqrt{(M^2 - x^2)\,(x^2 - m^2)}}. \tag{22}$$

Здесь мы воспользовались заменой переменной $x = k(s)$ и формулой (21). Из (22) следует, что $k(s)$ есть $2(s_M - s_m)$-периодическая функция; пусть n — целое число периодов на интервале $[0, 2]$: $n = 1/(s_M - s_m)$. Оценим теперь интеграл $\int_{s_m}^{s_M} k(s)ds$ с помощью той же самой замены:

$$\frac{\pi}{n} = \int_{s_m}^{s_M} k(s)ds = \int_{m}^{M} \frac{2xdx}{\sqrt{(M^2 - x^2)\,(x^2 - m^2)}}.$$

Поскольку последний интеграл равен π, отсюда получаем $n = 1$. Но по теореме о четырех вершинах [93, с. 60–62] из дифференциальной геометрии замкнутая выпуклая кривая с непрерывно меняющейся касательной имеет, как минимум, четыре точки с экстремальными значениями $k(s)$. Полученное противоречие показывает, что $m = M$, и решение $k(s)$ равно постоянной, которую легко находим подстановкой в уравнение (6).

Проверим, что единица не есть собственное число производной Фреше оператора A_0 в точке $P = (\pi, \pi, \pi^3/2)$. Это обеспечивает локальную взаимную однозначность отображения $I - A_0$ в окрестности этой точки. Действительно, обозначим возмущение точки $P = (k_0(s), d_0, \omega_0)$ через $h_1(s), h_2, h_3$. Ввиду положительности компонент точки P и малости возмущений $(d_0 + h_2)_+ - d_{0+} = h_2$, $(k_0 + h_1)_+^3 - (k_{0+})^3 = (k_0 + h_1)^3 - k_0^3$. Отсюда легко находим, что равенство $A_0'(P)h = h$, где $h = (h_1(s), h_2, h_3) \in X$,

представляется системой уравнений

$$h_2 + \int_0^s \int_1^\sigma \left[\frac{\pi^2}{2}(\pi - 3)h_1(\xi) + \pi h_3\right] d\xi d\sigma = h_1(s),$$

$$h_2 + \int_0^1 h_1(\xi)d\xi = h_2, \qquad h_3 - \int_0^1 \Big(sin(\pi s) \int_1^s h_1(\xi)\, d\xi\Big) ds = h_3. \tag{23}$$

Для решения $h_1(s)$ имеем условия (следующие из второго и третьего уравнений (23)):

$$\int_0^1 h_1(s)ds = 0, \qquad \int_0^1 \cos(\pi s)h_1(s) = 0. \tag{24}$$

Покажем также, что $h_1'(0) = 0$, $h_1'(1) = 0$. Второе равенство немедленно следует из первого уравнения (23). Для получения другого равенства первое уравнение (23) дважды продифференцируем по s:

$$h_1''(s) - \alpha^2 h_1(s) = \pi h_3, \alpha^2 = \frac{\pi^2}{2}(\pi - 3). \tag{25}$$

Умножим это равенство на $\cos(\pi s)$ и проинтегрируем по интервалу (0,1):

$$\int_0^1 h_1''(s)\cos(\pi s)ds = 0.$$

Последующие преобразования дают

$$\cos(\pi s)h_1'(s)\Big|_0^1 + \pi \int_0^1 h_1'(s)\sin(\pi s)ds =$$

$$= -h_1'(0) + \pi \sin(\pi s)h_1(s)\Big|_0^1 - \pi^2 \int_0^1 h_1(s)\cos(\pi s)ds = -h_1'(0) = 0.$$

Интегрируя вновь уравнение (25) по (0,1), получаем $h_3 = 0$.

Общее решение для однородного уравнения (25) записывается в виде $h_1(s) = c_1 e^{\alpha s} + c_2 e^{-\alpha s}$. Константы c_1, c_2 вычисляются из условий (24):

$$c_1\left(e^{\alpha} - 1\right) - c_2\left(e^{-\alpha} - 1\right) = 0, \qquad c_1\left(e^{\alpha} + 1\right) - c_2\left(e^{-\alpha} + 1\right) = 0.$$

Поэтому $c_1 = c_2 = 0$, $h_1(s) \equiv 0$. Из первого уравнения (23) следует теперь, что $h_2 = 0$. Наше утверждение о производной Фреше, а вместе с тем и лемма, доказаны.

Однопараметрическое семейство вполне непрерывных операторов A_t преобразования банахова пространства X в себя, $0 \leqslant t \leqslant 1$, равностепенно непрерывно по t на шаре $B_R(\theta)$, не имеет на границе этого шара неподвижных точек, а вращение векторного поля $I - A_0$ на $\partial B_R(\theta)$ равно 1, как следует из леммы 7. Следовательно, выполнены условия теоремы Лере-Шаудера [60, с. 128–145], и имеет место

Теорема 2. *Пусть* $f(s) \leqslant 0$, $f \in C^1[0,1]$. *Тогда задача (6), (7) имеет неотрицательное решение.*

5. О жесткости общих уравнений равновесия упругой оболочки. Система (1) принадлежит к классу жестких систем дифференциальных уравнений, определение которого Штеттер [115, с. 133] в случае задачи Коши дает в следующей форме: "Общая задача Коши будет рассматриваться нами как жесткая, если дифференциальное уравнение обладает частными решениями с быстрым экспоненциальным убыванием, в то время как точное решение задачи Коши изменяется лишь умеренно на большей части интервала интегрирования. Разумеется, жесткость может проявляться только на некоторых определенных участках временного интервала или только при особых данных... Для эффективного численного решения "сильно жестких" задач требуется пошаговые конечно-разностные методы очень специальных типов". В частности, наиболее часто употребляемые в расчетах варианты метода Рунге-Кутта могут дать значительные погрешности для описанных задач, если шаг интегрирования выбран без достаточного обоснования. Для нашей задачи (1) мы убедились в этом при численных экспериментах. Ниже устанавливается свойство жесткости для дифференциального уравнения (6), равносильного системе (1). При этом предполагается, что ω — известная постоянная, f — известная функция, и что исходная форма оболочки круговая $\lambda = -1/D$.

Преобразуем исследуемое уравнение

$$k'' + \frac{1}{2}k(s) - \omega k(s) + \lambda f(s) = 0, \quad -1 \leqslant s \leqslant 1,$$

в интегральное — при периодических граничных условиях:

$$k = \mathbf{A}k,$$

где оператор $\mathbf{A}$ имеет вид:

$$\mathbf{A}x(s) = \frac{1}{2}\int_{-1}^{1}\left[x(t) + \left(\frac{7}{2} + t - \frac{t^2}{2} + s(t+1)\right)\chi(t)\right]dt + \int_{-1}^{s}(s-t)\chi(t)dt, \tag{26}$$

$$\chi(t) = -\frac{1}{2}x^3(t) + \omega x(t) - \lambda f(t).$$

Пусть Q_n — оператор проектирования в пространстве $L^2[-1,1]$:

$$Q_n x(s) = a_0 + a_1 P_1(s) + \cdots + a_n P_n(s),$$

где a_i — первые n коэффициентов Фурье-разложения $x(s)$ по полиномам Лежандра $P_j(s)$. Используя проекционный метод, перейдем к уравнению

$$x = Q_n\mathbf{A}(x), \quad x \in Q_n L^2[-1,1]. \tag{27}$$

Задача (27) — система нелинейных уравнений относительно компонент a_i вектора $a = (a_0, a_1, \ldots, a_n)$:

$$\psi_i(a_0, \ldots, a_n) = 0, \quad i = 0, \ldots, n. \tag{28}$$

Для ее решения рассмотрим модифицированную итерационную процедуру Ньютона-Канторовича

$$a^{i+1} = a^i - A^{-1}\Psi(a^i), \tag{29}$$

A — матрица Якоби системы функций $\psi = (\psi_0, \ldots \psi_n)$, вычисленная в точке a^0. Без доказательства приводим следующий результат.

Лемма 8. *Пусть J — квадратная матрица размерности $n+1$, диагональные элементы которой нули, а остальные равны единице, $n \geqslant 2$. Пусть период f не меньше двух, a^0 — решение задачи (28) при $\lambda = 0$, имеющее вид $a^0 = (c, c, \ldots, c)$. Тогда существует λ_0 такое, что при $0 < \lambda \leqslant \lambda_0$ итерационный процесс*

$$b^{i+1} = b^i - (A+J)^{-1}\Psi(b^i),\ i = 0, 1, \ldots, \quad b^0 = a^0 \tag{30}$$

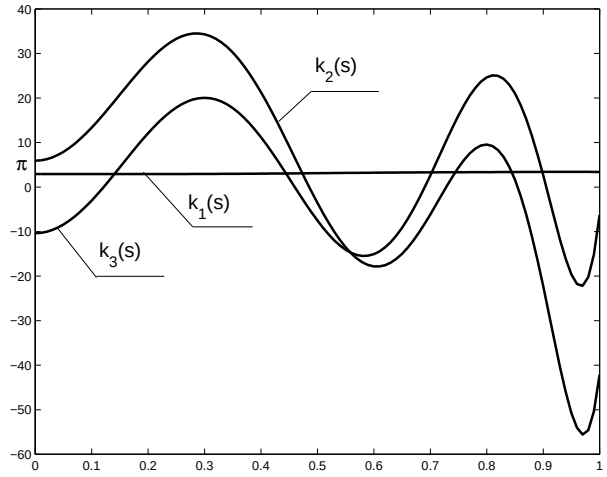

Рис. 1

и итерационный процесс (29) сходятся и дают различные решения задачи (27).

Заметим, что матрица J есть частный случай используемой в геометрии матрицы Кэли-Менгера [17, с. 290]. Отметим также, что автору неизвестны случаи построения итерационным методом нового корня какого-либо операторного уравнения по приближению, имеющемуся для другого корня.

Реализацией процесса (30) получено осциллирующее решение $k(s)$, имеющее участки быстрого роста и убывания, обнаруживающие жесткость системы (1) в соответствии с вышеприведенным определением. Так, при $\lambda = 5,\ \omega = 6.34,\ n = 10$, когда функция f представляет гидродинамические силы, действующие на круговую оболочку со стороны невесомой жидкости при докритическом режиме обтекания и рассчитанные по модели Паркинсона-Яндали (см. §2, гл. 4), ожидаемое решение есть

$$k_1(s) = \pi + 0.413P_2(s) - 0.121P_4(s) - 0.038P_6(s) + 0.058P_8(s) - 0.058P_{10}(s),$$

а "жесткое", полученное процессом (30), представляется формулой

$$k_2(s) = \pi - 3.925P_2(s) - 6.178P_4(s) - 19.290P_6(s) - 30.354P_8(s) + 49.804P_{10}(s),$$

Когда сила тяжести учитывается при определении f ($\omega = -12.94$) имеем следующее выражение для "жесткого" решения:

$$k_3(s) = \pi - 3.84P_2(s) - 5.96P_4(s) - 18.77P_6(s) - 27.6P_8(s) + 46.77P_{10}(s),$$

Графики этих функций представлены на рис. 1, в масштабе которого "обычное" решение, $k_1(s)$, совпадает с прямой $k = \pi$.

Поскольку подстановкой можно проверить, что каждое из рассматриваемых выражений $k(s)$ удовлетворяет уравнению (28) с точностью до 10^{-6}, отсутствие доказательства леммы не мешает установлению факта жесткости. Более серьезным недостатком в приведенных рассуждениях является то, что сходимость получаемых "нетривиальных" решений при $n \to \infty$ нами не исследовалась. Исследование, однако, легко провести численно, особенно в том случае, когда в вышеприведенных примерах считаем, что f в точности совпадает с пятичленным Фурье-разложением соответствующих функций нагрузок.

§ 6. Теорема существования для нелинейной нестационарной задачи теории мягких оболочек

В этом параграфе исследуется задача, возникающая в нелинейной теории динамики мягких оболочек. Используемая здесь модель описывает колебания мягкой оболочки, находящейся в одноосном состоянии, а точнее бесконечно длинной цилиндрической оболочки, когда нагрузки не меняются вдоль образующей. Постановке такого типа задач, а также разработке алгоритмов их численной реализации посвящены работы [5], [34], [33]. В отличие от [5], [34] здесь рассматриваются уравнения, в которых присутствуют слагаемые, соответствующие искусственной вязкости. Следует отметить, что в [33] аналогичные слагаемые вводились в разностные уравнения для получения устойчивых алгоритмов счета. Основным результатом данного параграфа является теорема существования обобщенного решения нелинейной нестационарной задачи теории мягких оболочек, находящихся в одноосном состоянии.

1. Постановка задачи, обозначения. Требуется найти функции $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$, удовлетворяющие при $x \in (0,l), t \in (0,T]$ уравнениям:

$$\begin{aligned} \rho\ddot{u}_1 &= \varepsilon\frac{\partial^2\dot{u}_1}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T(\lambda)}{\lambda}\frac{\partial u_1}{\partial x}\right) + p(x)\frac{\partial u_2}{\partial x} + f_1(x,t), \\ \rho\ddot{u}_2 &= \varepsilon\frac{\partial^2\dot{u}_2}{\partial x^2} + \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{T(\lambda)}{\lambda}\frac{\partial u_2}{\partial x}\right) - p(x)\frac{\partial u_1}{\partial x} + f_2(x,t), \end{aligned} \tag{1}$$

а также граничным и начальным условиям следующего вида:

$$u_i(0,t) = u_i(l,t) = 0,\ i = 1,2, \tag{2}$$

$$u_i(x,0) = h_i(x),\ \dot{u}_i(x,0) = v_i(x), i = 1,2. \tag{3}$$

Здесь

$$T(\lambda) = \begin{cases} E(\lambda - 1), & \lambda > 1, \\ 0, & \lambda \leqslant 1, \end{cases}$$

$\lambda^2 = \left(\dfrac{\partial u_1}{\partial x}\right)^2 + \left(\dfrac{\partial u_2}{\partial x}\right)^2$, E, ε — постоянные, $\dot{w} = \partial u(x,t)/\partial t$, $\rho = \rho(x)$, $p = p(x)$, $f_i(x,t)$, $v_i(x)$, $h_i(x)$, $i = 1,2$ — заданные функции. С механической точки зрения функции $u_i(x,t)$ определяют в момент времени t координаты радиуса-вектора перемещенной точки, имеющей в недеформированном состоянии дуговую координату x, T — касательное усилие в оболочке, λ — степень удлинения, $p(x)$ — плотность нормальной следящей нагрузки, $f\,dx$ — массовую силу, действующую на элемент dx, $\rho(x)$ — погонную плотность массы, рассчитанную в недеформированном состоянии.

Пусть далее, $u = (u_1, u_2)$, $\quad f = (f_1, f_2)$,

$$u' = \left(\frac{\partial u_1}{\partial x}, \frac{\partial u_2}{\partial x}\right), \dot{u} = \left(\frac{\partial u_1}{\partial t}, \frac{\partial u_2}{\partial t}\right), |u| = \sqrt{u_1^2 + u_2^2},$$

$$h = (h_1, h_2), v = (v_1, v_2), \sigma = (\sigma_1, \sigma_2),$$

$$\sigma_i = \frac{T(\lambda)}{\lambda}\frac{\partial u_i}{\partial x}, \qquad P = \begin{bmatrix} 0 & p \\ -p & 0 \end{bmatrix}.$$

Используя эти обозначения, задачу (1)–(3) можно записать в следующем эквивалентном виде:

$$\rho\ddot{u} - \varepsilon\dot{u}' - \sigma' - Pu' = f,$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \tag{4}$$

$$u(x,0) = h(x), \quad \dot{u}(x,0) = v(x).$$

Если понимать производные в (4) в классическом смысле, то предполагается, что, например, σ как функция от x дифференцируема в каждой

точке. Такое предположение не всегда является естественным (см. вид $T(\lambda)$). Поэтому наряду с классическим — дадим определение обобщенного решения задачи.

2. Обобщенная постановка задачи. В дальнейшем полагаем, что $\Omega = (0, l)$. Через $L_2(0, T; X)$ будем, как обычно, обозначать пространство функций аргумента t со значениями в банаховом пространстве X:

$$\|v\|^2_{L_2(0,T;X)} = \int_0^T \|v\|^2_X dt.$$

Кроме того, обозначим через H пространство вектор-функций $u = (u_1, u_2)$, каждая компонента которых принадлежит пространству $L_2(\Omega)$, через V — пространство вектор-функций с компонентами из $\overset{\circ}{W}{}^1_2$. Сопряженное пространство $V^\star$ состоит из пар вида $(v_1^\star, v_2^\star)$, где $v_i^\star$ — элементы пространства $W_2^{(-1)}$. Пусть, далее, A и B — операторы, действующие из пространства V в $V^\star$ и определенные соотношениями:

$$< Az, w >= \varepsilon \int_\Omega z' \cdot w' dx, \tag{5}$$

$$< Bz, w >= \int_\Omega \sigma(z) \cdot w' dx - \int_\Omega Pz' \cdot w dx, \tag{6}$$

здесь $< \cdot, \cdot >$ — отношение двойственности между пространствами V и $V^\star$, $z \cdot w = z_1 w_1 + z_2 w_2$.

Определение 1. Вектор-функцию $u = (u_1, u_2)$ назовем обобщенным решением задачи (1)–(3), если

$$u, \dot{u} \in L_2(0, T; V), \ddot{u} \in L_2(0, T; V^\star), \tag{7}$$

$$u(x, 0) = h(x) \quad \text{в} \quad V, \tag{8}$$

$$\dot{u}(x, 0) = v(x) \quad \text{в} \quad H,$$

и, кроме того, имеет место равенство:

$$\rho\ddot{u} + A\dot{u} + Bu = f. \tag{9}$$

Равенство (9) понимается как равенство элементов пространства $L_2(0,T;V^\star)$, что эквивалентно выполнению для произвольного элемента $w \in L_2(0,T;V)$ следующего тождества

$$\int_0^T < \rho\ddot{u} + A\dot{u} + Bu, w > dt = \int_0^T < f, w > dt.$$

Убедимся в корректности данного определения: из (7) следует (см., например, [22]), что $u \in C(0,T;V), \dot{u} \in C(0,T;H)$, поэтому равенства (8) имеют смысл. Что касается равенства (9), то из (7) и определения операторов A и B следует, что $A\dot{u}$ и Bu являются элементами пространства $L_2(0,T;V^\star)$, кроме того, поскольку $\ddot{u} \in L_2(0,T;V^\star)$, то, очевидно, $\rho\ddot{u}$ будет принадлежать этому пространству, если выполнено условие: $\|\rho(x)\|_{L_\infty(\Omega)} \leq \text{const}$.

3. Теорема существования и единственности обобщенного решения. При доказательстве существования и единственности обобщенного решения будем использовать следующий общий результат [22, с. 285].

Теорема 1. *Пусть V — сепарабельное гильбертово пространство, непрерывно и плотно вложенное в некоторое другое гильбертово пространство H, $X = L_2(0,T;V)$, I — оператор вложения X в $X^\star$. При некотором $\mu \geq 0$ пусть $A + \mu I : X \to X^\star$, радиально-непрерывный, сильно монотонный оператор Вольтерры. Пусть далее $B : X \to X^\star$ — липшиц-непрерывный оператор Вольтерры. Тогда при любых $a_0 \in V, a_1 \in H, f \in X^\star$ задача:*

$$\ddot{u} + A\dot{u} + Bu = f,\ u(0) = a_0,\ \dot{u}(0) = a_1, \quad u \in C(0,T;V),\ u' \in X, \quad (10)$$

имеет точно одно решение $u \in X$. При этом $\dot{u} \in X,\ \ddot{u} \in X^\star$.

Докажем, что введенные нами в п. 2 операторы A и B удовлетворяют условиям теоремы 1, если их естественным образом трактовать как операторы, действующие из X в X^*. Нетрудно проверить, что они — операторы Вольтерры.

Лемма 1. *Оператор A, определенный соотношением (5), является непрерывным и сильно монотонным.*

Утверждение леммы 1 очевидно. Из леммы 1 следует, что для любого $\mu \geq 0$ оператор $A + \mu I$ удовлетворяет условиям теоремы 1.

Лемма 2. *Оператор B, определенный соотношением (6), является липшиц-непрерывным, то есть:*

$$\left| \int_0^T < Bz - Bv, w > dt \right| \leq M \|z - v\|_X \|w\|_X. \tag{11}$$

Доказательство. Представим B в виде $B = B_1 + B_2$, где операторы B_1 и B_2 определяются следующими соотношениями:

$$\int_0^T < B_1 z, w > dt = \int_0^T \int_\Omega \sigma(z) \cdot w' dx dt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega (\sigma_1(z) w_1' + \sigma_2(z) w_2') dx dt,$$

$$\int_0^T < B_2 z, w > dt = \int_0^T \int_\Omega Pz' \cdot w dx dt =$$

$$= \int_0^T \int_\Omega (p z_2' w_1 - p z_1' w_2) dx dt.$$

Докажем, что каждый из $B_i,\ i = 1, 2$, липшиц-непрерывен. Имеем:

$$\left| \int_0^T < B_2 z - B_2 v, w > dt \right| = \left| \int_0^T \int_\Omega (p(z_2' - v_2') w_1 - \right.$$

$$\left. - p(z_1' - v_1') w_2) dx dt \right| \leq$$

$$\leq \|p\|_{L_\infty(\Omega)} \int_0^T \|z - v\|_V \|w\|_H dt.$$

Последнее неравенство обеспечивает, очевидно, липшиц-непрерывность оператора B_2, при этом постоянная липшиц-непрерывности будет зависеть от $\|p\|_{L_\infty(\Omega)}$. Далее,

$$\int\limits_0^T < B_1 z - B_1 v, w > dt = \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \sum_{i=1}^2 \left(\frac{T(\lambda(z))}{\lambda(z)} \frac{\partial z_i}{\partial x} - \right.$$

$$\left. - \frac{T(\lambda(v))}{\lambda(v)} \frac{\partial v_i}{\partial x} \right) \frac{\partial w_i}{\partial x} dx dt. \tag{12}$$

Пусть

$$g(\lambda(z)) = \frac{T(\lambda(z))}{\lambda(z)}.$$

Рассмотрим выражение:

$$g(\lambda(z)) \frac{\partial z_i}{\partial x} - g(\lambda(v)) \frac{\partial v_i}{\partial x} =$$

$$= \int\limits_0^1 \frac{\partial}{\partial \theta} \left[g(\lambda(v + \theta(z - v))) \frac{\partial (v_i + \theta(z_i - v_i))}{\partial x} \right] d\theta =$$

$$= \int\limits_0^1 \left\{ g(\lambda(v + \theta(z - v))) \frac{\partial (z_i - v_i)}{\partial x} + \frac{g'_\lambda(\lambda(v + \theta(z - v)))}{\lambda(v + \theta(z - v))} \cdot \right.$$

$$\left. \cdot \sum_{j=1}^2 \left[\frac{\partial (z_j - v_j)}{\partial x} \frac{\partial}{\partial x} (v_j + \theta(z_j - v_j)) \right] \frac{\partial (v_i + \theta(z_i - v_i))}{\partial x} \right\} d\theta.$$

Полученное выражение подставим в (12), в результате будем иметь:

$$\left| \int\limits_0^T < B_1 z - B_1 v, w > dt \right| = \left| \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \int\limits_0^1 g(\lambda(v + \theta(z - v))) \cdot \right.$$

$$\cdot \sum_{i=1}^2 \frac{\partial (z_i - v_i)}{\partial x} \frac{\partial w_i}{\partial x} d\theta dx dt +$$

$$+ \int\limits_0^T \int\limits_\Omega \int\limits_0^1 \frac{g'_\lambda(\lambda(v + \theta(z - v)))}{\lambda(v + \theta(z - v))} \sum_{j=1}^2 \frac{\partial (z_j - v_j)}{\partial x} \cdot$$

$$\cdot \left[\frac{\partial(v_j+\theta(z_j-v_j))}{\partial x}\right]^2 \frac{\partial w_i}{\partial x_i} d\theta dx dt \Bigg| \leq$$

$$\leq \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 g(\lambda(v+\theta(z-v)))\lambda(z-v)\lambda(w)d\theta dx dt +$$

$$+ \int_0^T \int_\Omega \int_0^1 g'_\lambda(\lambda(v+\theta(z-v)))\lambda(z-v)\lambda(v+\theta(z-v))\lambda(w)d\theta dx dt \leq$$

$$\leq M\|z-v\|_X\|w\|_X,$$

где M — постоянная, для которой имеют место неравенства:

$$|g(\xi)| \leq \frac{M}{2}, \quad |g'_\xi(\xi)\xi| \leq \frac{M}{2} \quad \forall\, \xi \geqslant 1.$$

(Нетрудно видеть,что для задачи (1)–(3) $M = E$.) Лемма доказана.

Теорема 2. *Пусть*

$$\rho(x) = const, \quad |p(x)| \leqslant C \quad \forall x \in \Omega.$$

Тогда для любых $f \in L_2(0,T;V^\star)$, $h \in V$, $v \in H$ *существует единственное обобщенное решение задачи (1)–(3).*

Утверждение теоремы 2 непосредственно следует из лемм 1, 2 и теоремы 1.

Замечание 1. Теорема 2 остается справедливой и для неоднородной первой краевой задачи.

Глава 3

Двумерные задачи теории мягких оболочек

Вначале излагаются результаты о разрешимости уравнений, описывающих статическое состояние мягкой однородной, изотропной оболочки (МО), при нагрузках, близких к тем, для которых существует двухосное напряженное состояние. Используются в доказательствах два метода: классическим образом применяется теорема о неявной функции, в другом подходе используется теория монотонных операторов. Вторая половина главы посвящена задаче минимизации функционала полной энергии мягкой оболочки.

§ 1. Исследование на основе теоремы о неявной функции

1. Вычисление производной Фреше. Методы исследования дифференциальной краевой задачи, основанные на теореме о неявной функции, существенно используют производную Фреше дифференциального оператора, соответствующего уравнению равновесия. При переходе от зоны двухосного состояния к зоне одноосного состояния могут образоваться линии разрыва производных функций, определяющих физические соотношения МО, и возникают трудности в определении подходящего функционального пространства и вычислении производной Фреше. Поэтому, упрощая исследование, примем, что оболочка S_0 подвергнута предварительному растяжению, то есть находится целиком в двухосном напряженном состоянии.

Пусть в первоначальной ненапряженной форме оболочка занимает область S_0 плоскости переменных x_1, x_2, последние примем также за лагранжевы переменные частицы оболочки. Условие гладкости на границу области: $\partial S_0 \in C^2$.

Пусть вектор-функция $R(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)), \quad x = (x_1, x_2)$, описывает поверхность оболочки, деформированной под действием массовой силы $f(x)$.

Берем уравнения равновесия, использующие матрицу $\nabla\varphi$ градиента деформации ∇R в системе декартовых координат x_1, x_2, x_3 :

$$\nabla\varphi = \begin{pmatrix} \partial_1\varphi_1 & \partial_1\varphi_2 & \partial_1\varphi_3 \\ \partial_2\varphi_1 & \partial_2\varphi_2 & \partial_2\varphi_3 \end{pmatrix}.$$

Пусть $\nabla\varphi(x) = V(x) \cdot O(x)$ — полярное разложение этой матрицы. Через $\lambda_1(x), \lambda_2(x)$ обозначим собственные числа тензора растяжений, представляемого как $V(x)$; λ_1, λ_2 интерпретируются, как главные степени удлинений элемента оболочки в точке x.

Главные значения тензора касательных усилий T в предположениях однородности и изотропности представляются в следующем виде (см. (1.2.6)):

$$\begin{gathered} T_1 = \varphi_0(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_1\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2) = \theta(\lambda_1, \lambda_2), \\ T_2 = \varphi_0(\lambda_1, \lambda_2) + \lambda_2\varphi_1(\lambda_1, \lambda_2) = \theta(\lambda_2, \lambda_1), \end{gathered} \tag{1}$$

φ_0, φ_1 — непрерывные функции от инвариантов $\lambda_1 + \lambda_2, \lambda_1\lambda_2$ тензора V.

Исходная форма уравнений равновесия мягкой оболочки, с которой мы будем работать (см. (1.4.16)):

$$\begin{gathered} -\operatorname{div}(\beta_0(\lambda)\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi^T \cdot \nabla\varphi(x) + \beta_1(\lambda)\nabla\varphi(x)) = f(x), x \in S_0, \\ \varphi(x) = \varphi_0(x), x \in \partial S_0. \end{gathered} \tag{2}$$

Последнее условие означает, что рассматривается первая краевая задача. Здесь дифференциальные операторы $\operatorname{div}, \nabla$ берутся как двумерные по переменным x_1, x_2. Скалярные функции β_0, β_1 зависят от $\lambda(x) = (\lambda_1(x), \lambda_2(x))$ и имеют следующий вид (см. (1.4.15)):

$$\begin{gathered} \beta_0 = -\frac{\theta(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_2^2 - \theta(\lambda_2, \lambda_1)\lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}, \\ \beta_1 = \frac{\theta(\lambda_1, \lambda_2)\lambda_2^2 - \theta(\lambda_2, \lambda_1)\lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2} + \lambda_1\lambda_2\frac{\theta(\lambda_1, \lambda_2) - \theta(\lambda_2, \lambda_1)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}. \end{gathered} \tag{3}$$

Мягкость оболочки (следствие физических свойств материала оболочки и характера нагрузки) налагает ограничение на физические соотношения (1): $T_1 \geq 0, T_2 \geq 0$. Последним условием при заданном θ выделяется область допустимых значений (λ_1, λ_2), которую обозначим через D.

В качестве функционального пространства для $\varphi(x)$ возьмем соболевское пространство $W = [(W_p^{(2)}(S_0)]^3, \quad p \geq 3$.

Переходим к исследованию существования решения задачи (2). Пусть осуществлена начальная деформация $\varphi_H(x)$, представимая как преобразование подобия с центром в начале координат с коэффициентом $\lambda_0 > 1$ плоской области S_0. Деформация $\varphi_H(x) = \lambda_0 x$ является решением задачи (2) при $\varphi_0(x) = \lambda_0 x, x \in \partial S_0,$ и $f(x) = 0, x \in S_0$. Покажем, что разрешимость задачи (2) с таким краевым условием сохраняется, если $f(x)$ берется из окрестности нуля в пространстве $[L_p(S_0)]^3$. Сделаем предположение, что функции $\beta_0(\lambda_1(x), \lambda_2(x)),\ \beta_1(\lambda_1(x), \lambda_2(x))$, определяемые физическими соотношениями для материала МО, представимы функциями от инвариантов $i_1(x) = \lambda_1^2(x) + \lambda_2^2(x),\ i_2(x) = \lambda_1^2(x)\lambda_2^2(x)$ матрицы $G = \nabla\varphi\nabla\varphi^T(x)$ и трижды непрерывно дифференцируемы вне любой окрестности точки $(i_1, i_2) = (0, 0)$.

Поскольку пространства $W_p^k(\Omega)$ при $kp > n$, где n — размерность области Ω, являются алгебрами, и поскольку

$$i_1(x) = \sum_{\alpha=1}^{2}\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_\alpha}\right)^2,$$

$$i_2(x) = \sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\right)^2\sum_{i=1}^{3}\left(\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right)^2 - \left(\sum_{i=1}^{3}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_1}\frac{\partial\varphi_i}{\partial x_2}\right)^2, \tag{4}$$

то инварианты $i_1(x), i_2(x)$ являются элементами пространства $W_p^{(1)}(S_0)$. Согласно теоремам вложения, они непрерывно зависят от x в замкнутой области $\overline{S}_0$.

Из этих замечаний и предположений следует, что β_0 и β_1 как функции от x принадлежат пространству $W_p^{(1)}(S_0)$, если

$$\inf_{S_0}[\lambda_1(\varphi(x)), \lambda_2(\varphi(x))] > 0.$$

Обозначим через $B(\varphi_H)$ окрестность φ_H, определяемую неравенством $\|\varphi - \varphi_H\|_W < C$. Здесь C выбрано так, что для любого $\varphi \in B$ выполнено условие $\lambda_1(\varphi(x)),\ \lambda_2(\varphi(x)) \geq \delta > 0$, где δ — фиксированное положительное число.

Вычислим производную Фреше оператора P — тензора Пиолы, который стоит под знаком div в уравнении (2) :

$$P(\varphi) = \beta_0(\lambda)\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi^T \cdot \nabla\varphi(x) + \beta_1(\lambda)\nabla\varphi(x),$$

в точке φ_H , проведя несколько утомительные, но страндартные вычисления.

Пусть $\Psi(x)$ — вектор-функция из W такая, что $\varphi = \varphi_H + \psi$ принадлежит B. Все, что нужно — это выделить линейную часть приращения $P(\varphi)$ и выявить конструкцию остаточного члена.

Сначала вычислим вариации $\delta i_1, \delta i_2$ инвариантов матрицы G. Имеем:

$$i_1(\varphi) = \operatorname{tr} G = \operatorname{tr}[(\nabla\varphi_H + \nabla\psi) \cdot (\nabla\varphi_H^T + \nabla\psi^T)] = 2\lambda_0^2 + \tag{5}$$

$$+ \operatorname{tr}(\nabla\varphi_H \cdot \nabla\psi^T + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi_H^T) + \operatorname{tr}(\nabla\psi \cdot \nabla\psi^T) = 2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 \operatorname{tr}\mathbf{e}(x) + \|\nabla\psi\|_2^2.$$

Здесь через $\mathbf{e}(x)$ обозначен линейный оператор на плоскости (x_1, x_2), порожденный деформацией $\psi(x)$:

$$\mathbf{e}(x) = \begin{pmatrix} \partial_1\psi_1(x) & \frac{1}{2}(\partial_1\psi_2 + \partial_2\psi_1) \\ \\ \frac{1}{2}(\partial_1\psi_2 + \partial_2\psi_1) & \partial_2\psi_2 \end{pmatrix}.$$

Заметим, что

$$\nabla\varphi_H \cdot \nabla\psi^T + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi_H^T = 2\lambda_0\mathbf{e}(x), \quad \nabla\varphi_H \cdot \nabla\varphi_H^T = \lambda_0^2 I_2. \tag{6}$$

Через $\|\nabla\psi\|_2$ в (5) обозначена евклидова норма матрицы $\nabla\psi$. Переходим к определению δi_2. По теореме Гамильтона–Кэли

$$G^2 - i_1 G + i_2 I_2 = 0, \quad \text{и поэтому} \quad 2i_2 = i_1^2 - \operatorname{tr}(G^2) \tag{7}$$

Считаем след матрицы G^2, используя (6):

$$\operatorname{tr}(G^2(\varphi)) = \operatorname{tr}[\nabla\varphi_H \cdot \nabla\varphi_H^T + \nabla\varphi_H \cdot \nabla\psi^T + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi_H^T + \nabla\psi \cdot \nabla\psi^T]^2 =$$

$$= \operatorname{tr}[(\nabla\varphi_H \cdot \nabla\varphi_H^T)^2 + \nabla\varphi_H \cdot \nabla\varphi_H^T \cdot \nabla\varphi_H \cdot \nabla\psi^T + \nabla\varphi_H \cdot \nabla\varphi_H^T \cdot \nabla\psi \cdot \nabla\varphi_H^T +$$
$$+\nabla\varphi_H \cdot \nabla\psi^T \cdot \nabla\varphi_H \cdot \nabla\varphi_H^T + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi_H^T \cdot \nabla\varphi_H \cdot \nabla\varphi_H^T] + O(\|\nabla\psi\|_2^2) =$$
$$= \operatorname{tr}[G^2(\varphi_H) + 2(\nabla\varphi_H \cdot \nabla\varphi_H^T)(\nabla\varphi_H \cdot \nabla\psi^T + \nabla\psi \cdot \nabla\varphi_H^T)] + O(\|\nabla\psi\|_2^2) =$$
$$= 2\lambda_0^4 + 4\lambda_0^3 \operatorname{tr}\mathbf{e} + O(\|\nabla\psi\|_2^2).$$

Согласно (7) нам надо вычислить еще величину

$$(\operatorname{tr} G(\varphi))^2 = (2\lambda_0^2 + 2\lambda_0 \operatorname{tr}\mathbf{e}(x) + \|\nabla\psi\|_2^2)^2 = 4\lambda_0^4 + 8\lambda_0^3 \operatorname{tr}\mathbf{e}(x) + O(\|\nabla\psi\|_2^2).$$

В итоге проведенных выкладок имеем:

$$\delta i_1(x) = i_1(\varphi) - i_1(\varphi_H) = 2\lambda_0 \operatorname{tr}\mathbf{e}(x) + O(\|\nabla\psi\|_2^2), \qquad (8_1)$$

$$\delta i_2(x) = i_2(\varphi) - i_2(\varphi_H) = 2\lambda_0^3 \operatorname{tr}\mathbf{e}(x) + O(\|\nabla\psi\|_2^2). \qquad (8_2)$$

Следующая разность, которую нам необходимо рассмотреть, определяет вариацию произведения $\Pi = \nabla\varphi \cdot \nabla\varphi^T \cdot \nabla\varphi$:

$$\delta\Pi = \nabla\varphi\cdot\nabla\varphi^T\nabla\varphi - \nabla\varphi_H\cdot\nabla\varphi_H^T\cdot\nabla\varphi_H = \nabla\psi\cdot\nabla\varphi_H^T\cdot\nabla\varphi_H + \nabla\varphi_H\cdot\nabla\psi^T\cdot\nabla\varphi_H +$$
$$+\nabla\varphi_H \cdot \nabla\varphi_H^T \cdot \nabla\psi + O(\|\nabla\psi\|_2^2).$$

Напомним, что форма записи последнего слагаемого означает, что каждый элемент этого матричного слагаемого по модулю меньше, чем $C\|\nabla\psi\|_2^2$, где C – константа. Поскольку выполняются равенства:

$$\nabla\varphi_H = \lambda_0 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix},$$

$$\nabla\varphi_H \cdot \nabla\varphi_H^T = \lambda_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \lambda_0^2 I_2,$$

$$\nabla\varphi_H^T \cdot \nabla\varphi_H = \lambda_0^2 \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

то имеем как их следствие:

$$\nabla\psi \cdot \nabla\varphi_H^T \cdot \nabla\varphi_H = \lambda_0^2 \begin{pmatrix} \partial_1\psi_1 & \partial_1\psi_2 & 0 \\ \partial_2\psi_1 & \partial_2\psi_2 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \nabla\varphi_H \cdot \nabla\varphi_H^T \cdot \nabla\psi = \lambda_0^2 \nabla\psi,$$

$$\nabla\varphi_H \cdot \nabla\psi^T \cdot \nabla\varphi_H = \lambda_0^2 \begin{pmatrix} \partial_1\psi_1 & \partial_2\psi_1 & 0 \\ \partial_1\psi_2 & \partial_2\psi_2 & 0 \end{pmatrix},$$

поэтому рассматриваемую вариацию $\delta\Pi$ можно представить в виде:

$$\delta\Pi = 2\lambda_0^2 \begin{pmatrix} \partial_1\psi_1 & \frac{1}{2}(\partial_1\psi_2 + \partial_2\psi_1) & 0 \\ \\ \frac{1}{2}(\partial_1\psi_2 + \partial_2\psi_1) & \partial_2\psi_2 & 0 \end{pmatrix} + \lambda_0^2\nabla\psi + O(\|\nabla\psi\|_2^2). \quad (9)$$

В целом, изменение тензора Пиолы P составляет величину:

$$\begin{aligned} P(\varphi) - P(\varphi_H) &= \beta_0(\varphi)\Pi(\varphi) + \beta_1(\varphi)\nabla\varphi - \beta_0(\varphi_H)\Pi(\varphi_H) - \beta_1(\varphi_H)\nabla\varphi_H = \\ &= (\beta_0(\varphi) - \beta_0(\varphi_H))\Pi(\varphi) + \beta_0(\varphi_H)\delta\Pi + \\ &+ (\beta_1(\varphi) - \beta_1(\varphi_H))\nabla\varphi + \beta_1(\varphi_H)\nabla\psi = \\ &= \delta\beta_0\Pi(\varphi_H) + \beta_0(\varphi_H)\delta\Pi + \delta\beta_0\delta\Pi + \delta\beta_1\nabla\varphi_H + \beta_1(\varphi_H)\nabla\psi + \delta\beta_1\nabla\psi. \end{aligned} \quad (10)$$

Иногда в дальнейшем, для удобства записи, опуская аргумент φ_H, будем помечать соответствующие величины индексом 0:

$$\beta_k(\varphi_H) = \beta_k^0,\ \ i_k(\varphi_H) = i_k^0.$$

Введем также следующие обозначения:

$$h = (\delta i_1^0,\ \delta i_2^0); \quad D^2\beta_k = \left(\frac{\partial^2\beta_k}{\partial i_\alpha \partial i_\beta}\right)_{\alpha,\beta=1}^2.$$

В силу наших предположений относительно функций $\beta_0(i_1, i_2),\ \beta_1(i_1, i_2)$ их вариации представимы в следующей форме:

$$\begin{aligned} \delta\beta_k &= \beta_k(i_1(\varphi), i_2(\varphi)) - \beta_k(i_1(\varphi_H), i_2(\varphi_H)) = \\ &= \frac{\partial\beta_k}{\partial i_1}(i_1^0, i_2^0)\delta i_1 + \frac{\partial\beta_k}{\delta i_2}(i_1^0, i_2^0)\delta i_2 + R_k; \quad k = 0, 1; \\ R_k &= \int_0^1 (1-t)(D^2\beta_k(i_1^0 + th_1, i_2^0 + th_2)h, h)dt. \end{aligned} \quad (11)$$

Согласно формулам (8)–(11) получаем (производные от β_k берутся в точке (i_1^0, i_2^0)):

$$P(\varphi) - P(\varphi_H) = 2\lambda_0^2\beta_0(\varphi_H) \begin{pmatrix} \partial_1\psi_1 & \frac{1}{2}(\partial_1\psi_2 + \partial_2\psi_1) & 0 \\ \\ \frac{1}{2}(\partial_1\psi_2 + \partial_2\psi_1) & \partial_2\psi_2 & 0 \end{pmatrix} +$$

(12)

$$+ (\lambda_0^2\beta_0(\varphi_H) + \beta_1(\varphi_H))\nabla\psi + \\ + 2\left[(\lambda_0^3\frac{\partial\beta_0}{\partial i_1} + \lambda_0^5\frac{\partial\beta_0}{\partial i_2}) + (\lambda_0\frac{\partial\beta_1}{\partial i_1} + \lambda_0^3\frac{\partial\beta_1}{\partial i_2})\right]\nabla\varphi_0 \operatorname{tr}\mathbf{e} + R.$$

Во всех проведенных выкладках четко прослеживается структура остаточных членов, и легко усматривается, что R представляет матрицу, каждый элемент которой имеет вид $CR_k\Phi$, где C — константа, определяемая λ_0, а $\Phi(x)$ — произведение конечного числа (может быть пустого) производных $\partial_\alpha\psi_i$.

В силу непрерывности функций $i_1(x), i_2(x)$, а также трижды непрерывной дифференцируемости функций $\beta_0(i_1, i_2),\ \beta_1(i_1, i_2)$ при $i_1,\ i_2$, определяемых формулами (8) с достаточно малыми $\delta i_1,\ \delta i_2$, а также при $\psi \in [W_p^2]^3$, билинейная форма, стоящая под знаком интеграла в (11) является функцией класса $W_p^1(S_0)$. Сам интеграл допускает возможность дифференцирования под знаком интеграла в силу общих теорем теории интеграла Лебега [71, с. 14, с. 41]. Поскольку $W_p^1(S_0)$ — алгебра, анализ выражения R приводит нас к заключению, что $R \in [W_p^1(S_0)]^3$, и имеют место оценки:

$$R = 0(\|\nabla\psi\|^2), \quad \|\operatorname{div} R\|_{L_2(S_0)} = 0(\|\psi\|_W^2). \tag{13}$$

Следствием формул (12), (13) является существование в точке φ_H производной Фреше от $\operatorname{div} P(\varphi(x))$ как оператора из пространства $\mathbf{W}$ в $\mathbf{L}_2(S_0) = \left[L_2(S_0)\right]^3$ и представление её формулой:

$$D\{\operatorname{div} P(\varphi(x))\}\psi = \\ = \operatorname{div}\left\{2\lambda_0^2\beta_0(\varphi_H)\begin{pmatrix} \partial_1\psi_1 & \frac{1}{2}(\partial_1\psi_2 + \partial_2\psi_1) & 0 \\ \frac{1}{2}(\partial_1\psi_2 + \partial_2\psi_1) & \partial_2\psi_2 & 0 \end{pmatrix} + \right. \\ + [\lambda_0^2\beta_0(\varphi_H) + \beta_1(\varphi_H)]\nabla\psi + 2[(\lambda_0^3\frac{\partial\beta_0}{\partial i_1} + \lambda_0^5\frac{\partial\beta_0}{\partial i_2}) + \tag{14}$$

$$\left. + \left(\lambda_0\frac{\partial\beta_1}{\partial i_1} + \lambda_0^3\frac{\partial\beta_1}{\partial i_2}\right)] \cdot \lambda_0(\partial_1\psi_1 + \partial_2\psi_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\right\} \equiv \operatorname{div} L(\psi).$$

Напомним, что производные от β_0, β_1 берутся в точке i_1^0, i_2^0. В итоге мы доказали, что имеет место

Лемма 1. *Производная Фреше операторной функции*

$$\operatorname{div} P(\varphi) : \mathbf{W} \to \mathbf{L}$$

существует, определяется формулой (14), и ей соответствует линеаризованная задача:

$$-\operatorname{div}\{[\lambda_0^2\beta_0(\varphi_H)+\beta_1(\varphi_H)]\operatorname{grad}\overline{\psi}+2\lambda_0^2\beta_0(\varphi_H)e(\overline{\psi})+2(\lambda_0^4\frac{\partial\beta_0}{\partial i_1}+ \tag{15}$$

$$+\lambda_0^6\frac{\partial\beta_0}{\partial i_2}+\lambda_0^2\frac{\partial\beta_1}{\partial i_1}+\lambda_0^4\frac{\partial\beta_1}{\partial i_2})\operatorname{tr}\mathbf{e}(\overline{\psi})I_2\}=\overline{f}(x),$$

$$-(\lambda_0^2\beta_0(\varphi_H)+\beta_1(\varphi_H))\Delta\psi_3=f_3(x),\quad x\in S_0. \tag{16}$$

Здесь

$$\psi(x)=(\psi_1,\psi_2,\psi_3),\quad \overline{\psi}(x)=(\psi_1,\psi_2),\quad \mathbf{e}(\overline{\psi})=((\partial_i\psi_j+\partial_j\psi_i)/2)_{i,j=1,2},$$

$$\overline{f}=(f_1,f_2),\quad f_i\in L_2(S_0),\quad \psi(x)=0,\quad x\in\partial S_0.$$

Сразу отметим важную особенность линеаризованной задачи — наличие независимого от компонент ψ_1, ψ_2 деформации ψ уравнения (16) для компоненты ψ_3.

Замечание 1. Среди наших предположений о функциях $\beta_0(\lambda_1,\lambda_2), \beta_1(\lambda_1,\lambda_2)$ предположение о выразимости через инварианты i_1, i_2 можно убрать, ибо при достаточно гладких β_0, β_1 требуемое выражение можно получить, разлагая эти функции в ряд Тейлора по $\lambda=(\lambda_1,\lambda_2)$. При этом надо воспользоваться симметричностью функций φ_0, φ_1 в (1) и формулами (3).

2. Исследование линеаризованной задачи. Подставив в (15) и (16) выражение (3) функций β_0, β_1 через ϑ и λ, после очевидных вычислений получим следующую формулу для уравнений (15), (16):

$$-\operatorname{div}\{[-2\theta_0+\lambda_0(\partial_1\theta_0-\partial_2\theta_0)]\mathbf{e}(\psi)+\theta_0\nabla\psi+[\theta_0+\lambda_0\partial_2\theta_0]\operatorname{tr}\mathbf{e}(\psi)I_2\}=\overline{f}, \tag{17}$$

$$-\theta_0\Delta\psi_3=f_3, \tag{18}$$

$$\psi|_{\partial S_0}=0, \tag{19}$$

где $\theta_0 = \theta(\lambda_0, \lambda_0)$, $\quad \partial_1\theta_0 = \dfrac{\partial\theta}{\partial\lambda_1}(\lambda_0, \lambda_0)$, $\quad \partial_2\theta_0 = \dfrac{\partial\theta}{\partial\lambda_2}(\lambda_0, \lambda_0)$.

Координата ψ_3 неизвестной вектор-функции ψ линеаризованной задачи вычисляется явным образом из уравнения Пуассона (18). Для вычисления оставшихся компонент ψ_1, ψ_2 рассмотрим краевую задачу (17), (19) в слабой формулировке.

Необходимо найти в пространстве $\mathbf{V} = \left[\, \overset{\circ}{W}{}_2^1\right]^2$ функцию $u = (\psi_1, \psi_2)$, удовлетворяющую для всех $v(x) \in \mathbf{V}$ вариационному равенству

$$\int\limits_{S_0} [(-2\theta_0 + \lambda_0\partial_1\theta_0 - \lambda_0\partial_2\theta_0)\mathbf{e}(u)\cdot\cdot\mathbf{e}(v) + \theta_0\nabla u\cdot\cdot\nabla v + \\ + (\theta_0 + \lambda_0\partial_2\theta_0)\operatorname{tr}\mathbf{e}(u)\cdot\operatorname{tr}\mathbf{e}(v)]dx = \int\limits_{S_0}(f_1v_1 + f_2v_2)dx. \quad (20)$$

Лемма 2. *Симметричная билинейная форма $B(u, v)$, определяемая правой частью уравнения (20) на пространстве $\mathbf{V}$ строго положительна, если выполняется условие:*

$$\partial_1\theta_0 > \max\{\partial_2\theta_0, |\partial_2\theta_0 + \frac{1}{\lambda_0}\theta_0|\}; \quad (21)$$

или

$$-3\partial_1\theta_0 < \partial_2\theta_0 < \partial_1\theta_0, \quad \partial_1\theta_0 > 0; \quad (22)$$

или

$$-5\partial_1\theta_0 < \partial_2\theta_0 < \frac{1}{3}\partial_1\theta_0, \quad \partial_1\theta_0 > 0. \quad (23)$$

Доказательство. Простыми преобразованиями получаем:

$$B(u, v) = \lambda_0\partial_1\theta_0(<\partial_1u_1, \partial_1v_1> + <\partial_2u_2, \partial_2v_2>) + (-2\theta_0 + \lambda_0\partial_1\theta_0 - \lambda_0\partial_2\theta_0)\times$$

$$\times\frac{1}{2} <\partial_1u_2 + \partial_2u_1, \partial_1v_2 + \partial_2v_1> + \theta_0(<\partial_2u_1, \partial_2v_1> + <\partial_1u_2, \partial_1v_2>) +$$

$$+(\theta_0 + \lambda_0\partial_2\theta_0)(<\partial_1u_1, \partial_2v_2> + <\partial_2u_2, \partial_1v_1>) =$$

$$= \lambda_0\partial_1\theta_0(<\partial_1u_1, \partial_1v_1> + <\partial_2u_2, \partial_2v_2>) + \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0)(<\partial_1u_2, \partial_1v_2> +$$

$$+ <\partial_2u_1, \partial_2v_1>) + \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0)(<\partial_1u_1, \partial_2v_2> + <\partial_2u_2, \partial_1v_1>).$$

Далее используем интегральное соотношение

$$\int\limits_{S_0} \partial_1 u_2 \cdot \partial_2 v_1 dx = \int\limits_{S_0} \partial_2 u_2 \cdot \partial_1 v_1 dx$$

для функций $u_2, v_1 \in \overset{\circ}{W}{}_2^1(S_0)$. Это позволяет написать полученное равенство в виде:

$$B(u,v) = \lambda_0 \partial_1\theta_0(< \partial_1 u_1, \partial_1 v_1 > + < \partial_2 u_2, \partial_2 v_2 >) + \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0)\times$$

$$\times(< \partial_1 u_2, \partial_1 v_2 > + < \partial_2 u_1, \partial_2 v_1 >) + \frac{\lambda_0}{4}(\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0)\times$$

$$\times(< \partial_1 u_1, \partial_2 v_2 > + < \partial_2 u_1, \partial_1 v_2 > + < \partial_2 u_2, \partial_1 v_1 > + < \partial_1 u_1, \partial_2 v_1 >).$$

Здесь через $< \varphi, \psi >$ обозначено скалярное произведение в $L^2(S_0)$:

$$< \varphi, \psi >= \int\limits_{S_0} \varphi(x)\psi(x)dx.$$

Обозначим $\xi_1 = \partial_1 v_1,\ \xi_2 = \partial_1 v_2,\ \xi_3 = \partial_2 v_1,\ \xi_4 = \partial_2 v_2$. Тогда согласно полученным представлениям $B(u,v)$ подинтегральное выражение в $B(u,v)$ есть квадратичная форма $\sum\limits_{i,j=1}^{4} a_{ij}\xi_i\xi_j = \Phi(\xi)$ с матрицей коэффициентов $A = (a_{ij})$, где

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0\partial_1\theta_0 & 0 & 0 & \theta_0 + \lambda_0\partial_2\theta_0 \\ 0 & \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0) & -\theta_0 + \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0) & 0 \\ 0 & -\theta_0 + \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0) & \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0) & 0 \\ \theta_0 + \lambda_0\partial_2\theta_0 & 0 & 0 & \lambda_0\partial_1\theta_0 \end{bmatrix}, \tag{24}$$

либо

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0\partial_1\theta_0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0) \\ 0 & \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0) & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0) & 0 \\ \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0) & 0 & 0 & \lambda_0\partial_1\theta_0 \end{bmatrix}, \tag{25}$$

либо

$$A = \begin{bmatrix} \lambda_0\partial_1\theta_0 & 0 & 0 & \frac{\lambda_0}{4}(\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0) \\ 0 & \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0) & \frac{\lambda_0}{4}(\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0) & 0 \\ 0 & \frac{\lambda_0}{4}(\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0) & \frac{\lambda_0}{2}(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0) & 0 \\ \frac{\lambda_0}{4}(\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0) & 0 & 0 & \lambda_0\partial_1\theta_0 \end{bmatrix}. \quad (26)$$

Строгую положительность формы $\Phi(\xi)$, а вместе с тем и строгую положительность квадратичной формы $B(u, v)$ обеспечивает строгая положительность главных угловых миноров матрицы (24), что дает условия (21); или матрицы (25), что приводит к условиям (22); наконец, анализ матрицы (26) показывает, что достаточны для положительности $B(u, v)$ условия (23). Лемма доказана.

Примеры. Для линейного закона:

$$\theta(\lambda_1, \lambda_2) = \alpha(\lambda_1 - 1),\ \alpha > 0,$$

выполняются критерии (21)–(23). Для закона Трилора:

$$\theta(\lambda_1, \lambda_2) = \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^3\lambda_2^3}$$

выполняются неравенства (21), (22), и неверно в общем (23). Для закона Муни:

$$\theta(\lambda_1, \lambda_2) = c\lambda_1\lambda_2 + \frac{\lambda_1}{\lambda_2} - c\frac{1}{\lambda_1^3\lambda_2} - \frac{1}{\lambda_1^3\lambda_2^3}$$

при $c > 0$ неравенства (22) выполняются, тогда как выполнение условия (21) налагает ограничение на значение $\lambda_0 > 1$ вида $\varphi(\lambda_0, c) > 0$, где φ — полином относительно λ_0 и c, причем старший по λ коэффициент положителен ($c > 0$). Для материала Трилора соблюдаются неравенства (23), если $3\lambda_0^7 + \lambda_0^2 - 6 > 0$.

Лемма 3. *Пусть S_0 — область на плоскости (x_1, x_2) с липшицевой границей ∂S_0. Пусть выполнены условия леммы* 2 *и одно из неравенств (21), (22), (23) имеет место. Если $\overline{f}(x) \in (L^2(S_0))^2$, существует одно и только одно решение уравнения (20), принадлежащее пространству* **V**.

Доказательство. Сперва показываем, что $B(v,v)$ определяет норму, эквивалентную $\|v\|_{\mathbf{V}}$. Для этого нужна $\mathbf{V}$-эллиптичность B: существует $\gamma > 0$ со свойством $B(u,v) \geq \gamma\|v\|^2$ для всех $v \in \mathbf{V}$. Последнее неравенство будет справедливо, если все главные угловые миноры матрицы $M(\gamma) = A - \gamma I$ строго положительны, A — одна из матриц (24)–(25). Поскольку угловые миноры $M(\gamma)$ зависят от γ полиномиально, с постоянными, не зависящими от x коэффициентами и при $\gamma = 0$ согласно доказательству леммы 2 строго положительны, то требуемое $\gamma > 0$ существует.

Билинейная форма $B(u,v)$ ограничена в пространстве $\mathbf{V}$. Это непосредственно следует из любой формы представления $B(u,v)$, приведенной в начале доказательства леммы 2. Итак, $B(u,v)$ — симметричная, ограниченная, $\mathbf{V}$-эллиптическая форма, и потому существование решения вариационного равенства (20) следует из леммы Лакса-Мильграмма (см., например, [92, с. 316]). Лемма доказана.

Замечание 2. Условие липшицевости ∂S_0 и принадлежности $\overline{f} \in L_2$ можно ослабить [92, с. 323].

3. Нелинейная задача. Далее исследование разрешимости исходной задачи (2) проводим по известной схеме (см., например, [92, с. 324–325]). В первую очередь доказываем регулярность слабого решения линеаризованной задачи (17)–(18).

Лемма 4. *Пусть S_0 — область на плоскости (x_1, x_2) с границей класса C^2; $f \in [L^p(S_0)]^3$, $p \geq 2$; и выполняются условия (23). Тогда слабое решение $u(x) \in \mathbf{V}$ задачи (20) принадлежит пространству $\mathbf{W}_p^2(S_0)$ и удовлетворяет уравнению (17) в $L^p(S_0)$.*

Здесь в согласии с прежними обозначениями $\mathbf{W}_p^k(S_0)$ означает декартово произведение соболевских пространств: $\mathbf{W}_p^k(S_0) = [W_p^k(S_0)]^2$.

Доказательство. Обозначим $D_j\psi_l$ через $p_j^{(l)}$ и перепишем систему (17) в виде:

$$-D_1 a_1(p) - D_2 a_2(p) = \overline{f}, \quad \text{где } a_1 = (a_1^{(1)}, a_1^{(2)}), a_2 = (a_2^{(1)}, a_2^{(2)}), \text{ и}$$

$$a_1^{(1)} = \lambda_0(\partial_1\theta_0 p_1^{(1)} + \frac{1}{4}(\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0)p_2^{(2)}),$$

$$a_1^{(2)} = \lambda_0(\frac{1}{2}(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0)p_1^{(2)} + \frac{1}{4}(\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0)p_2^{(1)}),$$
$$a_2^{(1)} = \lambda_0((\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0)p_1^{(2)} + (\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0)p_2^{(1)}),$$
$$a_2^{(2)} = \lambda_0((\partial_1\theta_0 + \partial_2\theta_0)p_1^{(1)} + \partial_1\theta_0 p_2^{(2)}).$$

Матрица $\left(\partial a_i^{(k)}/\partial p_j^{(l)}\right)_{i,j,k,l=1}^2$, где пары $(i,k),(j,l)$ упорядочены лексикографически, совпадает с матрицей A, определенной равенством (26). Поэтому условие (23) обеспечивает сильную эллиптичность системы (17), как это следует из проведенных уже рассуждений. Сильная эллиптичность в свою очередь гарантирует [92, с. 324] принадлежность слабого решения $u(x)$ пространству $\mathbf{W}_2^2(S_0) \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(S_0)$, если граница ∂S_0 принадлежит к классу C^2, а свободный член $\overline{f} \in \mathbf{L}_2(S_0)$.

Регулярность слабого решения задачи (20) следует также из теоремы А.И. Кошелева [57, с. 150] о регулярности решений сильно эллиптических систем с ограниченной нелинейностью: при $f(x) \in \mathbf{L}^\infty(S_0)$ решение $u(x) \in \mathbf{W}_q^2$ с любым показателем q.

Выполнение условий этой теоремы в нашем случае легко проверить; заметим, что костанта K, фигурирующая в условиях, в силу симметричности A меньше единицы [99, с. 57], а потому условие (4. 3. 19) в [57] выполняется автоматически. Все остальные условия следуют из линейности, постоянства коэффициентов и сильной эллиптичности уравнения (17).

Оставшаяся часть утверждения леммы 4 следует из вариационного равенства (20) применением формулы интегрирования по частям в пространствах Соболева. Лемма доказана.

Замечание 3. Согласно леммам 3, 4 отображение A:

$$v(x) \in \mathbf{W}_p^2(S_0) \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_2^1(S_0) \to -\operatorname{div}[\theta_0\nabla v + (-2\theta_0 + \lambda_0(\partial_1\theta_0 - \partial_2\theta_0))\mathbf{e}(v) +$$
$$+(\theta_0 + \lambda_0\partial_2\theta_0)\operatorname{tr}\mathbf{e}(v)I_2] \in \mathbf{L}^p(S_0),$$

при $p = 2$ инъективно (слабое решение единственно) и сюръективно (уравнение $Av = f$ имеет решение при любом $f \in \mathbf{L}^2$), следовательно, имеет индекс $\operatorname{ind} A = 0$.

Как показано в работе [132, теорема 3.5, с. 240] индекс A не зависит от p при равномерной эллиптичности линеаризованной задачи и соблюдении условий дополнительности [2, с. 22] Эти условия для нашей задачи имеют место, и поэтому $\operatorname{ind} A = 0$ при любом $p \geqslant 2$.

Возвращаемся к исходной краевой задаче (2) при $\varphi_H(x) = \lambda_0 x$, если $x \in \partial S_0$.

Существование производной Фреше оператора - $\operatorname{div} P(\varphi)$, определяемого левой частью уравнения (2), в области $B(\varphi_H)$ и ее непрерывность легко доказывается благодаря теоремам вложения и тому факту, что $W_p^k(\Omega_n)$ при $kp > n$ являются алгебрами. Надо учесть, что трилинейное отображение $\nabla\varphi\nabla\varphi^T\nabla\varphi$ бесконечно дифференцируемо, а β_1, β_2 по предположению есть функции класса C^4 от инвариантов i_1, i_2 матрицы $\nabla\varphi\nabla\varphi^T$, когда $\varphi \in B(\varphi_H)$. Явное выражение i_1, i_2 через φ дается формулами (4).

Согласно замечанию 3 производная Фреше от - $\operatorname{div} P(\varphi)$ в точке φ_H осуществляет изоморфизм пространств $\mathbf{W}_p^2(S_0) \cap \overset{\circ}{\mathbf{W}}{}_1^2(S_0)$ и $\mathbf{L}_p$.

В силу вышеприведенных фактов применима теорема о неявной функции [92, с. 48] и, следовательно, справедлива

Теорема 1. *Пусть S_0 — область на плоскости переменных (x_1, x_2) с границей класса C^2. Предположим также, что выполняются условия (23) на определяющее соотношение $\theta(\lambda_1, \lambda_2)$ и константу λ_0. Тогда найдется окрестность нуля U в пространстве $[L_p(S_0)]^3$ и окрестность нуля Φ в пространстве $\{\, \varphi :\ \varphi \in [W_p^2(S_0)]^3; \varphi = 0$ на $\partial S_0 \,\}$ такая, что задача (2) для каждого $f \in U$ имеет в точности одно решение, принадлежащее множеству $\varphi_H + \Phi \subseteq B(\varphi_H)$.*

§ 2. Критерий монотонности тензора Пиолы для мягких оболочек

1. Ведение. Целью параграфа является получение критерия монотонности оператора, определяющего уравнение статического состояния мягкой оболочки. Материал оболочки предполагается однородным изотропным. Оболочка в недеформированном ненапряженном состоянии занимает область S_0 в координатной плоскости (x_1, x_2) фиксированной декартовой системы координат. Под действием внешних сил, поверхностная плотность которых задается вектор-функцией $f(x)$, частица мягкой оболочки $x = (x_1, x_2)$ занимает новое положение $\varphi(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\big)$.

Определение $\varphi(x)$ сводится к решению задачи (см. (1.4.16)):

$$\begin{aligned} -\operatorname{div} P(\varphi) &= f(x), x \in S_0. \\ P(\varphi) &= \beta_0\big(\lambda(x)\big)\nabla\varphi \cdot \nabla\varphi^T \cdot \nabla\varphi(x) + \beta_1\big(\lambda(x)\big)\nabla\varphi(x), \\ \varphi(x) &= x, x \in \partial S_0 \end{aligned} \tag{1}$$

Здесь для определенности предполагается, что оболочка закреплена по краям. Напомним, что дифференциальные операторы div, ∇ берутся как двумерные по переменным x_1, x_2. Вектор-функция $\lambda(x) = \big(\lambda_1(x), \lambda_2(x)\big)$ задает главные степени удлинения бесконечно малого линейного элемента поверхности S в точке x при деформации $\varphi(x)$; они совпадают с сингулярными числами матрицы

$$\nabla\varphi = \begin{bmatrix} \partial_1\varphi_1 & \partial_1\varphi_2 & \partial_1\varphi_3 \\ \partial_2\varphi 1 & \partial_2\varphi_2 & \partial_2\varphi_3 \end{bmatrix}.$$

Скалярные функции $\beta_0(\lambda)$, $\beta_1(\lambda)$ имеют вид:

$$\begin{aligned} \beta_0 &= -\frac{\theta(\lambda_1,\lambda_2)\lambda_2^2 - \theta(\lambda_2,\lambda_1)\lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{1}{\lambda_1\lambda_2}, \\ \beta_1 &= \frac{\theta(\lambda_1,\lambda_2)\lambda_2^2 - \theta(\lambda_2,\lambda_1)\lambda_1^2}{\lambda_2^2 - \lambda_1^2} \cdot \frac{\lambda_1^2 + \lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2} + \lambda_1\lambda_2\frac{\theta(\lambda_1,\lambda_2) - \theta(\lambda_2,\lambda_1)}{\lambda_1^2 - \lambda_2^2}. \end{aligned} \tag{2}$$

Функция $\theta(\lambda)$ определяет касательные усилия в оболочке (главные значения):

$$T_1 = \theta(\lambda_1,\lambda_2), \quad T_2 = \theta(\lambda_2,\lambda_1),$$

и задается как физический закон при постановке задачи (1).

Мягкая оболочка не воспринимает сжимающих усилий. Вследствие этого $T_i \geq 0$, $i = 1, 2$. Условие положительности θ выделяет область допустимых значений $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, последнюю обозначим через D.

Функциональным пространством, в котором ищется решение $\varphi(x)$ задачи (1), возьмем соболевское пространство $\mathbf{W} \equiv \big[(W_p^{(2)}(S_0)\big]^3$, $p \geq 2$.

2. Рабочая лемма. Для получения критерия монотонности оператора P (тензора Пиолы для мягких оболочек) нам нужна

Лемма 1. *Пусть* (a_{ij}), (b_{ij}), $i,j=1,2,3$, – *ортогональные матрицы;* (c_{ij}) – *матрица с неотрицательными элементами, у которой* $c_{\alpha\beta}=0$, *когда* $\alpha=3$ *или* $\beta=3$. *При этих условиях*

$$\Big|\sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}c_{ij}\Big| \le \max(c_{11}+c_{22}, c_{12}+c_{21}). \tag{3}$$

Доказательство. Рассмотрим функционал $\Phi(A,B)=\sum\limits_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}c_{ij}$ и при отыскании экстремальных значений используем множители Лагранжа, принимая в качестве ограничивающих условий ортонормированность строк матриц A и B. Таким образом приходим к исследованию критических точек функции:

$$\begin{aligned}\Phi^1 &= \sum_{i,j=1}^{3} a_{ij}b_{ij}c_{ij} + \sum_{k=1}^{3}\lambda_k\sum_{n=1}^{3}a_{kn}^2 + \lambda_4\sum_{k=1}^{3}a_{1k}a_{2k} + \lambda_5\sum_{k=1}^{3}a_{1k}a_{3k} + \\ &+ \lambda_6\sum_{k=1}^{3}a_{2k}a_{3k} + \sum_{k=1}^{3}\mu_k\sum_{n=1}^{3}b_{kn}^2 + \mu_4\sum_{k=1}^{3}b_{1k}b_{2k} + \\ &+ \mu_5\sum_{k=1}^{3}b_{1k}b_{3k} + \mu_6\sum_{k=1}^{3}b_{2k}b_{3k}.\end{aligned} \tag{4}$$

Неизвестные параметры λ_k, μ_k — множители Лагранжа. Для удобства записи и анализа получаемых ниже уравнений вводим матрицу $N=(\nu_{ij})$, определяя ее элементы соглашениями:

$$2\lambda_k=\nu_{kk}, \nu_{12}=\lambda_4, \nu_{13}=\lambda_5, \nu_{23}=\lambda_6, \nu_{ij}=\nu_{ji}, i,j,k=1,2,3.$$

Приравнивая нулю производные $\partial\Phi^1/\partial a_{ik}$, получаем следующие уравнения:

$$b_{ik}c_{ik} + \sum_{j=1}^{3}\nu_{ij}a_{jk} = 0, i,k=1,2,3. \tag{5}$$

и аналогично уравнения: $\partial\Phi^1/\partial b_{ik}=0$. Вместе с условиями ортогональности матриц A, B они образуют систему из 30 уравнений для 30 неизвестных $a_{ij}, b_{ij}, \lambda_k, \mu_k$. Выделим из этой системы следующую подсистему,

содержащую уравнения (5):

$$N \cdot A = -B * C, \quad A^{-1} = A^T, \quad N = N^T \tag{6}$$

Здесь $B * C$ означает произведение матриц B, C по Адамару. Получаем из (6), что $N = -(B * C)A^T$.

Условие симметричности N приводит к трем скалярным уравнениям, матричная запись которых имеет вид:

$$(B * C)A^T = A(B * C)^T.$$

Условие $c_{3k} = c_{k3} = 0,\ k = 1, 2, 3$, позволяет записать эти уравнения в форме:

$$\begin{aligned} b_{11}c_{11}a_{21} + b_{12}c_{12}a_{22} &= b_{21}c_{21}a_{11} + b_{22}c_{22}a_{12}, \\ b_{11}c_{11}a_{31} + b_{12}c_{12}a_{32} &= 0, \\ b_{21}c_{21}a_{31} + b_{22}c_{22}a_{32} &= 0. \end{aligned} \tag{7}$$

Имеет место следующая альтернатива: либо

$$b_{11}c_{11}b_{22}c_{22} - b_{12}c_{12}b_{21}c_{21} \neq 0, \tag{8}$$

либо

$$b_{11}c_{11}b_{22}c_{22} - b_{12}c_{12}b_{21}c_{21} = 0. \tag{9}$$

Предположим сначала, что выполняется (8), тогда из двух последних уравнений системы (7) находим, что

$$a_{31} = a_{32} = 0. \tag{10}$$

Примем для элементов ортогональной трехмерной матрицы параметрическое представление Эйлера через углы $(\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3) \in [0, \pi] \times [0, 2\pi) \times [0, 2\pi)$ [73, с. 140]:

$$A = \begin{bmatrix} c_2c_3 - c_1s_2s_3 & -c_2s_3 - c_1s_2c_3 & s_1s_2 \\ s_2c_3 + c_1c_2c_3 & -s_2s_3 + c_1c_2c_3 & -s_1c_2 \\ s_1s_3 & s_1c_3 & c_1 \end{bmatrix}.$$

Здесь $c_i = \cos\varphi_i$, $s_i = \sin\varphi_i$. Если $\det(A) = -1$, то последнюю строку следует умножить на -1 и с очевидными изменениями повторить нижеследующие рассуждения. Условия (10) дают, что $\sin\varphi_1 \sin\varphi_3 = 0$ и $\sin\varphi_1 \cos\varphi_3 = 0$, откуда получаем: $\varphi_1 = 0$ (или π).

Теперь фиксируем критическую точку (A, B) функционала Φ, такую, что для коэффициентов B выполняется альтернативное условие (9). Сначала добавочно предположим:

$$b_{11} \neq 0 \quad \text{или} \quad b_{21} \neq 0. \tag{11}$$

Обозначим через k константу, такую, что $b_{21}c_{21} = kb_{11}c_{11}$, $b_{22}c_{22} = kb_{12}c_{12}$, и перепишем систему (7) в виде

$$\begin{aligned} b_{11}c_{11}(ka_{11} - a_{21}) + b_{12}c_{12}(ka_{12} - a_{22}) &= 0, \\ b_{11}c_{11}a_{31} + b_{12}c_{12}a_{32} &= 0. \end{aligned} \tag{12}$$

Рассматривая эту систему как определяющую величины $b_{11}c_{11}$, $b_{12}c_{12}$, заключаем, что

$$k \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} = 0.$$

Вычисляем определители в последнем равенстве, пользуясь тождеством: $A = \operatorname{cof} A$, ($\operatorname{cof} A$ — матрица алгебраических дополнений A), и находим константу k и угол φ_2:

$$a_{23}k + a_{13} = 0, \qquad k = -a_{13}/a_{23} = \operatorname{tg}\varphi_2.$$

Возвращаясь к определению k как коэффициента пропорциональности, заключаем, что имеют место также соотношения

$$-\frac{a_{13}}{a_{23}} = \frac{b_{21}c_{21}}{b_{11}c_{11}} = \frac{b_{22}c_{22}}{b_{12}c_{12}}, \tag{13}$$

и, что система (9) сводится к одному уравнению:

$$b_{11}c_{11}a_{31} + b_{12}c_{12}a_{32} = 0.$$

Из последнего находим угол φ_3; $\operatorname{tg}\varphi_3 = a_{31}/a_{32}$, где

$$a_{31}/a_{32} = -\frac{b_{12}c_{12}}{b_{11}c_{11}}. \tag{14}$$

Итак, при выполнении условий (9), (8) система уравнений (7) равносильна условиям (10), (14), однозначно определяющим φ_2, φ_3. Фиксируя значения B, φ_2, φ_3 рассматриваемой критической точки (A, B) функции

$\Phi(A,B)$, берем значение φ_1 в эйлеровом представлении A произвольно. Определим матрицу $N=(\nu_{ij})$ равенством $N=-(B*C)A^T$. Согласно вышеприведенному замечанию сохраняются равенства (7), то есть матрица матрица N симметрична, $N=N^T$. Равенство $A^{-1}=A^T$ выполняется благодаря тому, что мы получаем элементы A согласно параметрическому представлению Эйлера. Следовательно, рассматриваемые значения $\{a_{ij}\}$ и $\{\nu_{ij}\}$ удовлетворяют системе (6), которую теперь следует рассматривать как уравнения метода Лагранжа для функции $\Phi^2(A)$, получаемой из $\Phi(A,B)$ фиксированием матрицы B, и рассматриваемой на множестве ортогональных матриц A: $A^{-1}=A^T$.

Умножим уравнение (5) на $\partial a_{ik}/\partial\varphi_1$ и просуммируем получаемые при $i,k=1,2,3$ равенства. Получаем для рассматриваемых фиксированных φ_2, φ_3 и произвольного значения φ_1, что $\partial\Phi^2/\partial\varphi_1=0$, ибо

$$\sum_{j=1}^{3}\nu_{ij}a_{jk}=\partial\left(\sum_{m<n}\nu_{mn}\varphi_{mn}\right)/\partial a_{ik}+\partial\left(\sum_{m}\lambda_m\varphi_{mm}\right)/\partial a_{ik},$$

где $\varphi_{mn}=\sum_k a_{mk}a_{nk}$. Следовательно, исследуемое экстремальное значение Φ^2 достигается и при значении $\varphi_1=0$ (π), т.е. на множестве $\varkappa$ тех матриц, для которых $a_{33}=\pm1$. Эти матрицы можно отождествлять с двумерными матрицами — алгебраическими дополнениями элемента a_{33}. Рассмотрим, наконец, случай выполнения условия (10) при $b_{11}=b_{12}=0$. Проводится та же схема рассуждений. Из (7) получаем два равенства:

$$b_{21}c_{21}a_{11}+b_{22}c_{22}a_{12}=0,\qquad b_{21}c_{21}a_{31}+b_{22}c_{22}a_{32}=0$$

Следствием этих равенств является равенство нулю определителя:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12}\\ a_{31} & a_{32}\end{vmatrix}=a_{23}=0.$$

При эйлеровом представлении это означает, что $s_1c_2=0$. Если $s_1=0$, то снова приходим к заключению, что исследуемое экстремальное значение достигается на подмножестве матриц $\varkappa$. Если $c_2=0$, то определяется угол $\varphi_2=\pi/2$ (или $3\pi/2$). Как и ранее вместо системы (7) остается одно уравнение, скажем, такое:

$$b_{21}c_{21}a_{31}+b_{22}c_{22}a_{32}=0,$$

откуда: $\operatorname{tg}\varphi_3 = a_{31}/a_{32} = -b_{22}c_{22}/(b_{21}c_{21})$.

Дальше рассуждениями, аналогичными вышеизложенным, доказываем возможность выбора $\varphi_1 = 0$ (или π).

Фиксировав $A \in \varkappa$, при котором $\Phi(A, B)$ при подходящем B достигает экстремального значения, можем повторить наши рассуждения, поменяв в них местами A и B. Итак, каждое экстремальное значение функции Φ достигается при некоторых A и B, которым в эйлеровом представлении соответствуют значения $c_1 = \pm 1$. Поэтому поиск максимального значения модуля Φ достаточно вести на множестве двумерных ортогональных матриц A и B.

Представим 2×2-матрицы A и B в виде

$$A = \pm \begin{bmatrix} \cos\theta_1 & \sin\theta_1 \\ -\sin\theta_1 & \cos\theta_1 \end{bmatrix}, \qquad B = \begin{bmatrix} \cos\theta_2 & \sin\theta_2 \\ -\sin\theta_2 & \cos\theta_2 \end{bmatrix}$$

Тогда

$$\begin{aligned} \Phi(A,B) &= \pm[\cos\theta_1\cos\theta_2(c_{11}+c_{22}) + \sin\theta_1\sin\theta_2(c_{12}+c_{21})] = \\ &= \pm\frac{1}{2}\big\{\cos(\theta_1+\theta_2)[(c_{11}+c_{22}) - (c_{12}+c_{21})] + \\ &+ \cos(\theta_1-\theta_2)[(c_{11}+c_{22}) + (c_{12}+c_{21})]\big\}. \end{aligned}$$

Мы видим, что Φ линейно зависит от $U = \cos(\theta_1+\theta_2)$ и $V = \cos(\theta_1-\theta_2)$, и поэтому экстремальные значения Φ достигает при значениях $U, V = \pm 1$. Как следствие этого

$$|\Phi(A,B)| \le \max\big\{(c_{11}+c_{22}), (c_{12}+c_{21})\big\}.$$

Лемма доказана.

3. Критерий монотонности. Получим критерий монотонности оператора рассматриваемой дифференциальной задачи (1), т.е. исследуем условия, при которых выполняется неравенство:

$$-\int\limits_{S_0} [\operatorname{div} P(\varphi) - \operatorname{div} P(\varphi^\nu] \cdot (\varphi - \varphi^\nu) dx \ge 0 \quad \forall \varphi, \varphi^\nu \in \mathbf{K}. \qquad (15)$$

Множество $\mathbf{K}$ состоит из вектор-функций $\varphi(x)$, которые принадлежат соболевскому пространству $\mathbf{W}$, удовлетворяют граничным условиям задачи (1), и сингулярные числа градиентов которых лежат в допустимой области D.

Интегрированием по частям преобразуем левую часть равенства (15):

$$-\int\limits_{S_0}[\operatorname{div} P(\varphi)-\operatorname{div} P(\varphi^\nu)]\cdot(\varphi-\varphi^\nu)dx=$$

$$=\int\limits_{S_0}[P(\varphi)-P(\varphi^\nu)]\cdot\cdot[\nabla\varphi-\nabla\varphi^\nu]^T dx-$$

$$-\int\limits_{\partial S_0} n\cdot[P(\varphi)-P(\varphi^\nu)]\cdot(\varphi-\varphi^\nu)dx.$$

В силу краевого условия задачи (1) последнее слагаемое нулевое, поэтому монотонность имеет место, если почти всюду

$$[P(\varphi)-P(\varphi^\nu)]\cdot\cdot[\nabla\varphi-\nabla\varphi^\nu]^T dx\geq 0. \tag{16}$$

Мы исследуем выполнимость неравенства (16) при более слабых предположениях: $\varphi,\varphi^\nu\in[W_p^1(S_0)]^3$; $\lambda(\varphi)$, $\lambda(\varphi^\nu)\in D$ почти всюду. Заметим, что в теории упругости именно неравенство (16) принимается как определение монотонности тензора Пиолы [64, с. 177].

Теорема 1. *Для однородной изотропной мягкой оболочки, материал которой подчиняется физическому закону:* $T_1=\theta(\lambda_1,\lambda_2)$, $T_2=\theta(\lambda_2,\lambda_1)$, *тензор Пиолы монотонен на допустимых деформациях, то есть выполняется неравенство (16), если и только если для допустимых пар* (λ_1,λ_2), $(\lambda_1^\nu,\lambda_2^\nu)$ *имеет место неравенство:*

$$(\lambda_1-\lambda_1^\nu)\left(\lambda_2\theta(\lambda_1,\lambda_2)-\lambda_2^\nu\theta(\lambda_1^\nu,\lambda_2^\nu)\right)+$$
$$+(\lambda_2-\lambda_2^\nu)\left(\lambda_1\theta(\lambda_2,\lambda_1)-\lambda_1^\nu\theta(\lambda_2^\nu,\lambda_1^\nu)\right)\geq 0. \tag{17}$$

Доказательство. Напомним соглашение, что по повторяющемуся индексу проводится суммирование на множестве значений {1,2,3}; в случае необходимости суммирование указывается явным образом, например, суммирование по множеству {1,2}. Подынтегральное выражение в

(16) распишем согласно определению тензора P:

$$\big(P(\varphi)-P(\varphi^\nu)\big)\cdot\cdot(\nabla\varphi-\nabla\varphi^\nu)^T=$$
$$=\sum_{\beta,\alpha=1}^{2}\big\{[\beta_0(\varphi)\partial_\alpha\varphi_i\partial_\beta\varphi_i\partial_\beta\varphi_k-\beta_0(\varphi^\nu)\partial_\alpha\varphi_i^\nu\partial_\beta\varphi_i^\nu\partial_\beta\varphi_k^\nu](\partial_\alpha\varphi_k-\partial_\alpha\varphi_k^\nu)\big\}+$$
$$+[\beta_1(\varphi)\nabla\varphi-\beta_1(\varphi^\nu)\nabla\varphi^\nu]\cdot\cdot[\nabla\varphi-\nabla\varphi^\nu]^T.$$

Раскрывая двойные скалярные произведения тензоров в последнем слагаемом, получаем.

$$\big(P(\varphi)-P(\varphi^\nu)\big)\cdot\cdot(\nabla\varphi-\nabla\varphi^\nu)^T=$$
$$=\sum_{\alpha,\beta=1}^{2}\big\{\beta_0(\varphi)(\partial_\alpha\varphi_i\partial_\alpha\varphi_k)(\partial_\beta\varphi_i\partial_\beta\varphi_k)+\beta_0(\varphi^\nu)(\partial_\alpha\varphi_i^\nu\partial_\alpha\varphi_k^\nu)(\partial_\beta\varphi_i^\nu\partial_\beta\varphi_k^\nu)-$$
$$-[\beta_0(\varphi)(\partial_\alpha\varphi_i\partial_\alpha\varphi_k^\nu)(\partial_\beta\varphi_i\partial_\beta\varphi_k)+\beta_0(\varphi^\nu)(\partial_\alpha\varphi_i^\nu\partial_\alpha\varphi_k)(\partial_\beta\varphi_i^\nu\partial_\beta\varphi_k^\nu)]\big\}+$$
$$+[\beta_1(\varphi)\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_i+\beta_1(\varphi^\nu)\nabla\varphi_i^\nu\cdot\varphi_i^\nu-$$
$$-\big(\beta_1(\varphi^\nu)\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_i^\nu+\beta_1(\varphi)\nabla\varphi_i^\nu\cdot\nabla\varphi_i\big)].$$

Простая перегруппировка слагаемых дает

$$\begin{aligned}&\big(P(\varphi)-P(\varphi^\nu)\big)\cdot\cdot(\nabla\varphi-\nabla\varphi^\nu)^T=\\&=\beta_0(\varphi)(\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_k)^2+\beta_1(\varphi^\nu)(\nabla\varphi_i^\nu\cdot\nabla\varphi_k^\nu)^2-\\&-(\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_k^\nu)\big[\beta_0(\varphi)(\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_k)+\\&+\beta_0(\varphi^\nu)(\nabla\varphi_i^\nu\cdot\nabla\varphi_k^\nu)\big]+\beta_1(\varphi)\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_i+\beta_1(\varphi^\nu)\nabla\varphi_i^\nu\cdot\nabla\varphi_i^\nu-\\&-(\beta_1(\varphi^\nu)\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_i^\nu+\beta_1(\varphi)\nabla\varphi_i^\nu\cdot\nabla\varphi_i).\end{aligned}\tag{18}$$

Проведем полярное разложение следующей матрицы:

$$\begin{bmatrix}\partial_1\varphi_1 & \partial_1\varphi_2 & \partial_1\varphi_3\\ \partial_2\varphi_1 & \partial_2\varphi_2 & \partial_2\varphi_3\\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}=OV=OU.$$

Собственные числа U и V есть λ_1, λ_2, 0; пусть последним соответствуют единичные собственные векторы e_1, e_2, e_3 матрицы U и g_1, g_2, g_3 — матрицы V. Заметим, что $g_3=N$, $e_3=r_3$, где N — единичная нормаль к поверхности $\varphi(x)$; r_1, r_2, r_3 — орты выбранной декартовой системы координат (x_1,x_2,x_3). Имеют место представления:

$$O=e_1g_1+e_2g_2+r_3N,\ U=\lambda_1e_1e_1+\lambda_2e_2e_2+0r_3r_3,\ V=\lambda_1g_1g_1+\lambda_2g_2g_2+0NN,$$

которые мы используем для дальнейшего преобразования подынтегрального выражения (18). Для этого заметим, что:

$$\nabla\varphi^T\cdot\nabla\varphi = V^2;\quad \nabla\varphi^T\cdot\nabla\varphi^\nu = (\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_j^\nu)_{i,j=1,2,3} = \lambda_\alpha\lambda_\gamma^\nu(e_\alpha\cdot e_\gamma^\nu)g_\alpha\cdot g_\gamma^\nu.$$

Отсюда следуют равенства:

$$\sum_{i,k=1}^{3}(\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_k)^2 = \operatorname{tr}V^4 = \lambda_1^4+\lambda_2^4; \tag{19}$$

$$\sum_{i=1}^{3}\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_i = \operatorname{tr}V^2 = \lambda_1^2+\lambda_2^2; \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&(\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_k^\nu)[\beta_0(\varphi)(\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_k)+\beta_0(\varphi^\nu)(\nabla\varphi_i^\nu\cdot\nabla\varphi_k^\nu)] =\\ &= (\nabla\varphi^T\cdot\nabla\varphi^\nu)\cdot\cdot[\beta_0(\varphi)\nabla\varphi^T\cdot\nabla\varphi+\beta_0(\varphi^\nu)\nabla(\varphi^\nu)^T\cdot\nabla\varphi^\nu] =\\ &= (\lambda_\alpha\lambda_\gamma^\nu(e_\alpha\cdot e_\gamma^\nu)g_\alpha g_\gamma^\nu\cdot\cdot[\beta_0(\varphi)\lambda_\beta^2 g_\beta g_\beta+\beta_0(\varphi^\nu)(\lambda_\beta^\nu)^2 g_\beta^\nu g_\beta^\nu] =\\ &= (e_\alpha\cdot e_\gamma^\nu)(g_\alpha\cdot g_\gamma^\nu)[\beta_0(\varphi)\lambda_\alpha^3\lambda_\gamma^\nu+\beta_0(\varphi^\nu)\lambda_\alpha(\lambda_\gamma^\nu)^3];\end{aligned} \tag{21}$$

$$\nabla\varphi_i\cdot\nabla\varphi_i^\nu = \operatorname{tr}(\nabla\varphi^T\cdot\nabla\varphi^\nu) = I\cdot\cdot(\nabla\varphi^T\cdot\nabla\varphi^\nu) = \lambda_\alpha\lambda_\gamma^\nu(e_\alpha\cdot e_\gamma^\nu)(g_\alpha\cdot g_\gamma^\nu). \tag{22}$$

Здесь и далее мы примем соглашение, что при отсутствии знака суммы по повторяющимся греческим индексам суммирование происходит по множеству {1,2}, латинским — по множеству {1,2,3}. Введем матрицы $A = (a_{ij}) = (e_i\cdot e_j^\nu)$, $B = (b_{ij}) = (g_i\cdot g_j^\nu)$, $i,j = 1,2,3$. Матрица A соответствует ортогональному преобразованию, переводящему базис e_1, e_2, e_3 в e_1^ν, e_2^ν, e_3^ν. Аналогично интерпретируется матрица B.

Используя формулы (19)–(22), представим выражение (18) в следующей форме:

$$\begin{aligned}&\big(P(\varphi)-P(\varphi^\nu)\big)\cdot\cdot(\nabla\varphi-\nabla\varphi^\nu)^T = \beta_0(\varphi)(\lambda_1^4+\lambda_2^4)+\beta_0(\varphi^\nu)\big((\lambda_1^\nu)^4+\\ &+(\lambda_2^\nu)^4\big)+\beta_1(\varphi)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+\beta_1(\varphi^\nu)\big((\lambda_1^\nu)^2+(\lambda_2^\nu)^2\big)-\sum_{\alpha,\gamma=1}^{2}a_{\alpha\gamma}b_{\alpha\gamma}c_{\alpha\gamma},\end{aligned}$$

где

$$c_{\alpha\gamma} = \lambda_\alpha\lambda_\gamma^\nu\big(\beta_0(\varphi)\lambda_\alpha^2+\beta_0(\varphi^\nu)(\lambda_\gamma^\nu)^2+\beta_1(\varphi)+\beta_1(\varphi^\nu)\big).$$

Имеем согласно (2):

$$\beta(\varphi)\lambda_2^2+\beta_1(\varphi)=-\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\varphi_2(\lambda)+\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\lambda_1\lambda_2}\varphi_2(\lambda)+\lambda_1\lambda_2\varphi_3(\lambda)=$$
$$=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}\big[\varphi_2(\lambda)+\lambda_2^2\varphi_3(\lambda)\big]=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}T_2(\lambda).$$

Определение $\varphi_2(\lambda),\ \varphi_3(\lambda)$ дано в §1.4 (1.4.11). Поэтому $c_{22}\geq 0$ при допустимых значениях λ_1, λ_2. Аналогично проверяется неотрицательность остальных постоянных $c_{\alpha\gamma}$.

Функция

$$\Phi(\lambda,\lambda^\nu)=\beta_0(\varphi)(\lambda_1^4+\lambda_2^4)+\beta_1(\varphi)(\lambda_1^2+\lambda_2^2)+\beta_0(\varphi^\nu)((\lambda_1^\nu)^4+(\lambda_2^\nu)^4)+$$
$$+\beta_1(\varphi^\nu)\big((\lambda_1^\nu)^2+(\lambda_2^\nu)^2\big)$$

обладает следующими свойствами симметрии:

$$\Phi(\lambda_1,\lambda_2;\lambda_1^\nu,\lambda_2^\nu)=\Phi(\lambda_1,\lambda_2;\lambda_2^\nu,\lambda_1^\nu)=\Phi(\lambda_2,\lambda_1;\lambda_1^\nu,\lambda_2^\nu)=$$
$$=\Phi(\lambda_2,\lambda_1;\lambda_2^\nu,\lambda_1^\nu)=\Phi(\lambda_1^\nu,\lambda_2^\nu;\lambda_1,\lambda_2).$$

Согласно лемме справедлива одна из оценок:

$$\big[P(\varphi)-P(\varphi^\nu)\big]\cdot\cdot[\nabla\varphi-\nabla\varphi^\nu]^T\geq\Phi(\lambda;\lambda^\nu)-\big(c_{11}(\lambda,\lambda^\nu)+c_{22}(\lambda,\lambda^\nu)\big),\quad(23)$$

или

$$\big[P(\varphi)-P(\varphi^\nu)\big]\cdot\cdot[\nabla\varphi-\nabla\varphi^\nu]^T\geq\Phi(\lambda;\lambda^\nu)-\big(c_{12}(\lambda,\lambda^\nu)+c_{21}(\lambda,\lambda^\nu)\big).\quad(24)$$

Поскольку, как легко установить, $c_{12}(\lambda,\lambda^\nu)=c_{11}(\lambda,\overline{\lambda})$, $c_{21}(\lambda,\lambda^\nu)=c_{22}(\lambda,\overline{\lambda})$, где $\overline{\lambda}=(\overline{\lambda}_1,\overline{\lambda}_2)$, $\overline{\lambda}_1=\lambda_2^\nu$, $\overline{\lambda}_2=\lambda_1^\nu$, а β_0 и β_1 как функции от λ_1, λ_2 симметричны, то в силу сказанного об Φ из положительности правой части (23) для всех допустимых λ, λ^ν следует положительность и правой части (24).

Займемся преобразованием выражения $\Phi-c_{11}-c_{22}$, обозначая для краткости записи $\beta_i(\varphi^\nu)$ через β_i^ν, $i=0,1$:

$$\Phi(\lambda;\lambda^\nu)-c_{11}(\lambda,\lambda^\nu)-c_{22}(\lambda,\lambda^\nu)=\beta_0\big[\lambda_1^3(\lambda_1-\lambda_1^\nu)+\lambda_2^3(\lambda_2-\lambda_2^\nu)\big]+$$
$$+\ \beta_0^\nu\big[(\lambda_1^\nu)^3(\lambda_1^\nu-\lambda_1)+(\lambda_2^\nu)^3(\lambda_2^\nu-\lambda_2)\big]+\beta_1\big[\lambda_1(\lambda_1-\lambda_1^\nu)+\lambda_2(\lambda_2-\lambda_2^\nu)\big]+$$
$$+\ \beta_1^\nu\big[\lambda_1^\nu(\lambda_1^\nu-\lambda_1)+\lambda_2^\nu(\lambda_2^\nu-\lambda_2)\big]=(\lambda_1-\lambda_1^\nu)\big[(\beta_0\lambda_1^3+\beta_1\lambda_1)-(\beta_0^\nu(\lambda_1^\nu)^3+$$
$$+\ \beta_1^\nu\lambda_1^\nu)\big]+(\lambda_2-\lambda_2^\nu)\big[(\beta_0\lambda_2^3+\beta_1\lambda_2)-(\beta_0^\nu(\lambda_2^\nu)^3+\beta_1^\nu\lambda_2^\nu)\big].$$

Чтобы доказать достаточность условий теоремы, осталось заметить, что согласно (2)

$$\begin{aligned}\beta_0\lambda_1^3+\beta_1\lambda_1 &= -\frac{\lambda_1^2}{\lambda_2}\varphi_2(\lambda)+\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\lambda_2}\varphi_2(\lambda)+\lambda_1^2\lambda_2\varphi_3(\lambda)= \\ &= \lambda_2\big(\lambda_1^2\varphi_3(\lambda)+\varphi_2(\lambda)\big)=\lambda_2\theta(\lambda_1,\lambda_2).\end{aligned}$$

Докажем необходимость неравенства (17) для монотонности P. Зафиксировав допустимые пары чисел (λ_1,λ_2) и $(\lambda_1^\nu,\lambda_2^\nu)$, рассмотрим "плоскую" деформацию φ области S_0, состоящую в равномерном растяжении в λ_1 раз в направлении оси x_1 и растяжении в λ_2 раз по оси x_2. Аналогично определяется деформация φ^ν. Простые вычисления показывают, что для этих φ и φ^ν неравенство (16) равносильно неравенству (17). Теорема доказана.

Пример. Рассмотрим мягкую оболочку из материала Трилора:

$$T_1=\frac{\lambda_1}{\lambda_2}-\frac{1}{\lambda_1^3\lambda_2^3};\quad T_2=\frac{\lambda_2}{\lambda_1}-\frac{1}{\lambda_1^3\lambda_2^3}. \tag{25}$$

Допустимая область значений D (где $T_1,T_2\geq 0$) выделяется неравенствами $\lambda_1^2\lambda_2\geq 1$, $\lambda_2^2\lambda_1\geq 1$. При выполнении физического закона (25)

$$\beta_0=\frac{1}{\lambda_1^4\lambda_2^4},\quad \beta_1=-\frac{\lambda_1^2+\lambda_2^2}{\lambda_1^4\lambda_2^4}+1,\quad \varphi_2=-\frac{1}{\lambda_1^3\lambda_2^3},\quad \varphi_3=\frac{1}{\lambda_1\lambda_2}.$$

Неравенство теоремы сводится к неравенству

$$\begin{aligned}&(\lambda_1-\lambda_1^\nu)^2+(\lambda_2-\lambda_2^\nu)^2+(\lambda_1-\lambda_1^\nu)\cdot \\ &\cdot\left(\frac{1}{(\lambda_1^\nu)^3(\lambda_2^\nu)^2}-\frac{1}{\lambda_1^3\lambda_2^2}\right)+(\lambda_2-\lambda_2^\nu)\left(\frac{1}{(\lambda_2^\nu)^3(\lambda_1^\nu)^2}-\frac{1}{\lambda_2^3\lambda_1^2}\right)\geq 0.\end{aligned} \tag{26}$$

Обозначив $\lambda_1/\lambda_1^\nu=t$; $\lambda_2^\nu/\lambda_2=\tau$, запишем сумму последних двух слагаемых в виде:

$$\frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2\tau^3 t}\big[(t^3+\tau^3)(1+t\tau)-2t\tau(t^2+\tau^2)\big]\equiv\Psi.$$

Пользуясь неравенством Гельдера, оценим $t^3+\tau^3$:

$$t^3+\tau^3\geq\frac{1}{\sqrt{2}}(t^2+\tau^2)^{3/2},$$

что дает нам возможность оценить так же снизу Ψ:

$$\begin{aligned}\Psi &\geq \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2\tau^3 t}(t^2+\tau^2)\Big[\sqrt{\frac{t^2+\tau^2}{2}}(1+t\tau)-2t\tau\Big] \geq \\ &\geq \frac{t^2+\tau^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2\tau^3 t}\sqrt{t\tau}[1-2\sqrt{t\tau}+t\tau] \geq \frac{t^2+\tau^2}{\lambda_1^2\lambda_2^2\tau^3 t}\sqrt{t\tau}(1-\sqrt{t\tau})^2.\end{aligned}$$

Проведенные выкладки доказывают неравенство (26), и тем самым монотонность тензора Пиолы при физическом законе (25) на деформациях, для которых $\lambda_1^2(x)\lambda_2(x) \geq 1$ и $\lambda_2^2(x)\lambda_1(x) \geq 1$.

Замечание 1. В отличие от тензора Пиолы трехмерной упругой среды, который заведомо, как показано в [64, с. 178.], не монотонен на всех допустимых деформациях, рассмотренный пример показывает, что в случае мягких оболочек монотонность может выполняться на всех допустимых деформациях.

Замечание 2. Для закона Трилора имеем

$$[P(\varphi)-P(\varphi^\nu)]\cdot\cdot[\nabla\varphi-\nabla\varphi^\nu] \geqslant (\lambda_1-\lambda_1^\nu)^2+(\lambda_2-\lambda_2^\nu)^2$$

всюду, где $\lambda_1\lambda_2^2 \geqslant 1$, $\lambda_1^\nu\lambda_2^{\nu 2} \geqslant 1$. Поэтому вектор-функция $\lambda(x)=(\lambda_1(x),\lambda_2(x))$ определяется единственным образом для допустимых решений задачи (1).

4. Еще о физическом законе для мягких оболочек. Существуют "физические" основания, чтобы постулировать монотонность тензора Пиолы [64, с. 188]. Эти основания делают важным вывод из критерия монотонности факта существенной зависимости физических соотношений $T_i = \theta(\lambda_i, \lambda_{3-i})$, $i = 1, 2$, от обеих переменных λ_1, λ_2. Более точно, имеет место

Теорема 2. *Пусть для материала мягкой оболочки с заданным физическим законом тензор Пиолы монотонен на допустимых деформациях. Пусть для любого $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2)$, где $|\lambda| \geq C$ (C– фиксированная константа), среди этих деформаций встречается деформация в некоторой точке имеющая λ набором сингулярных чисел своего градиента. Тогда не существует функций одной переменной $\theta(\lambda)$ удовлетворяющей условиям: $\theta(\lambda) \in C^1(0,\infty)$; $\theta(\lambda)$ монотонно возрастает; $\theta(\lambda)$ не принадлежит классу быстрорастущих функций; выполняются равенства $T_i = \theta(\lambda_i)$, $i = 1, 2$.*

Доказательство. Для функции одной переменной θ критерий монотонности (17) перепишется в виде:

$$(\lambda_1-\lambda_1^\nu)\,(\lambda_2\theta(\lambda_1)-\lambda_2^\nu\theta(\lambda_1^\nu))+(\lambda_2\ -\lambda_2^\nu)\,(\lambda_1\theta(\lambda_2)-\lambda_1^\nu\theta(\lambda_1^\nu)) \geqslant 0. \quad (27)$$

Преобразуем это неравенство следующим образом:

$$(\lambda_1 - \lambda_1^\nu)(\lambda_2 - \lambda_2^\nu)\theta(\lambda_1) + (\lambda_1 - \lambda_1^\nu)(\lambda_2 - \lambda_2^\nu)\theta(\lambda_2) + \lambda_2^\nu(\lambda_1 - \lambda_1^\nu)$$
$$(\theta(\lambda_1) - \theta(\lambda_1^\nu)) + \lambda_1^\nu(\lambda_2 - \lambda_2^\nu)\,(\theta(\lambda_2) - \theta(\lambda_2^\nu)) \geqslant 0. \quad (28)$$

Рассмотрим числа λ_1, λ_2, λ_1^ν, λ_2^ν такие, что $\lambda_1 > \lambda_1^\nu > \lambda_2^\nu > \lambda_2 \geqslant 1$, тогда $(\lambda_1 - \lambda_1^\nu)(\lambda_2 - \lambda_2^\nu) < 0$, и из (28) следует, что

$$\theta(\lambda_1) + \theta(\lambda_2) + \lambda_2^\nu \frac{\lambda_1 - \lambda_1^\nu}{\lambda_2 - \lambda_2^\nu} \frac{\theta(\lambda_1) - \theta(\lambda_1^\nu)}{\lambda_1 - \lambda_1^\nu} + \lambda_1^\nu \frac{\lambda_2 - \lambda_2^\nu}{\lambda_1 - \lambda_1^\nu} \frac{\theta(\lambda_2) - \theta(\lambda_2^\nu)}{\lambda_2 - \lambda_2^\nu} \leqslant 0$$

(в "одномерной" задаче выбор указанной четверки невозможен, поскольку $\lambda_2 \equiv 1$, и поэтому нижеизложенные рассуждения не проходят). Вычисляем предел левой части равенства при $\lambda_1^\nu \to \lambda_1$, $\lambda_2^\nu \to \lambda_2$, когда $t = \dfrac{\lambda_1 - \lambda_1^\nu}{\lambda_2^\nu - \lambda_2} > 0$ сохраняет свое значение. Получаем

$$\theta(\lambda_1) + \theta(\lambda_2) \leqslant \lambda_2\theta'(\lambda_1)t + \lambda_1\theta'(\lambda_2)\frac{1}{t}. \quad (29)$$

Заметим, что $\lambda_2\theta'(\lambda_1) \geqslant 0$, $\lambda_1\theta'(\lambda_2) \geqslant 0$, t может быть любым положительным числом. Выбираем t таким образом, чтобы сообщить минимум правой части при фиксированных λ_1, λ_2, то есть полагаем $t = \sqrt{\dfrac{\lambda_1\theta'(\lambda_2)}{\lambda_2\theta'(\lambda_1)}}$. Таким образом, приходим к неравенству:

$$\theta(\lambda_1) + \theta(\lambda_2) \leqslant 2\sqrt{\lambda_1\lambda_2\theta'(\lambda_1)\theta'(\lambda_2)}. \quad (30)$$

Рассмотрим последовательно три условия, исчерпывающие возможные решения (30) в классе функций, растущих не быстрее любого полинома при $\lambda \to \infty$.

Сперва предположим, что выполняется условие:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\theta(\lambda)}{\lambda^p} = C_1, \quad 0 < C_1 < \infty, \quad p \geq 1. \quad (31)$$

Из (31) следует существование константы C_2 со свойством:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\theta'(\lambda)}{\lambda^{p-1}} = pC_2, \quad C_2 \leq C_1. \quad (32)$$

Если это не так, то найдется такое $N > 0$, что $\theta'(\lambda) \geq pC_3\lambda^{p-1}$ всюду на $[N, \infty)$ с константой $C_3 > C_1$, поэтому выполняется неравенство:

$$\int_N^\lambda \theta'(\lambda)d\lambda = \theta(\lambda) - \theta(N) \geq C_3(\lambda^p - N^p),$$

из которого, в свою очередь, следует, что $\lim\limits_{\lambda\to\infty} \theta(\lambda)/\lambda^p \geq C_3 > C_1$, в противоречии с (31). Разделив обе части (30) на λ_1^p и, фиксировав значение λ_2, рассмотрим предельное поведение этих частей при $\lambda_1 \to \infty$, используя (31), (32):

$$\begin{aligned} 0 \quad &< C_1 = \lim_{\lambda_1\to\infty} \frac{\theta(\lambda_1) + \theta(\lambda_2)}{\lambda_1^p} \leqslant 2 \lim_{\lambda_1\to\infty} \frac{\sqrt{\lambda_1\theta'(\lambda_1)}\sqrt{\lambda_2\theta'(\lambda_2)}}{\lambda_1^p} = \\ = \quad & 2\lambda_2^{1/2}[\theta'(\lambda_2)]^{1/2} \lim_{\lambda_1\to\infty} \left[\frac{\theta'(\lambda_1)}{\lambda_1^{p-1}}\right]^{1/2} \lim_{\lambda_1\to\infty} \frac{1}{\lambda_1^{p/2}} = 0. \end{aligned}$$

Полученные неравенства противоречат друг другу. Рассмотрим случай, когда

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\theta(\lambda)}{\lambda} = 0. \tag{33}$$

Из (30), полагая $\lambda_1 = \lambda_2$ и выбирая $\varepsilon > 0$ так, что $\theta(1+\varepsilon) > 0$, последовательно получаем:

$$\begin{aligned} \theta(\lambda) \leqslant \lambda\theta'(\lambda) \quad &, \qquad \theta'(\lambda)/\theta(\lambda) \geq 1/\lambda, \\ \int_{1+\varepsilon}^{\lambda} \frac{\theta'(\lambda)}{\theta(\lambda)}d\lambda \geq \int_{1+\varepsilon}^{\lambda} \frac{1}{\lambda}d\lambda \quad &, \qquad \ln\frac{\theta(\lambda)}{\theta(1+\varepsilon)} \geq \ln\frac{\lambda}{1+\varepsilon}, \quad \frac{\theta(\lambda)}{\lambda} \geq \frac{\theta(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon}. \end{aligned}$$

И снова налицо противоречие, поскольку

$$0 = \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\theta(\lambda)}{\lambda} \geqslant \frac{\theta(1+\varepsilon)}{1+\varepsilon} > 0.$$

Переходим к обсуждению такой возможности:

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\theta'(\lambda)}{\lambda^p} = 0, \ p > 1. \tag{34}$$

Рассуждения, с помощью которых мы из (31) получили (32), показывают, что в этом случае

$$\lim_{\lambda\to\infty} \frac{\theta'(\lambda)}{\lambda^{p-1}} = 0. \tag{35}$$

Введём в рассмотрение множество:

$$M = \left\{ p \geqslant 0 : \lim_{\lambda\to\infty} \frac{\theta'(\lambda)}{\lambda^p} = 0, \right\}.$$

Пусть $p_0 = \inf M$. Полагая $p_0 > 0$, выберем ε так, чтобы $p_0 - 3\varepsilon > 0$, и проведём следующие преобразования неравенства (30):

$$\frac{\theta(\lambda_1)+\theta(\lambda_2)}{\lambda_1^{p_0-\varepsilon}} \leqslant 2\sqrt{\lambda_2\theta'(\lambda_2)}\frac{\sqrt{\theta'(\lambda_1)}}{\lambda_1^{p_0-\varepsilon-\frac{1}{2}}} = 2\sqrt{\lambda_2\theta'(\lambda_2)}\sqrt{\frac{\theta'(\lambda_1)}{\lambda_1^{p_0+\varepsilon-1}}}\cdot\frac{1}{\lambda^{\frac{p_0}{2}-3\varepsilon/2}}.$$

Правая часть этого неравенства при $\lambda \to \infty$ стремится к нулю согласно выбору p_0 и (35). Следовательно, $p_0 - \varepsilon \in M$, и p_0 не может быть точной нижней гранью M. Итак, $p_0 = 0$, поэтому $1 \in M$, и имеет место условие (33), которое, как мы видели, ведёт к противоречию. Невозможность отношений (31), (33), (34) показывает, что функция $\theta(\lambda)$ должна расти быстрее любого полинома. Теорема доказана.

§ 3. Минимизация функционала полной энергии для мягкой оболочки

1. Введение. Для исследования последовательности деформаций, минимизирующей функционал полной энергии однородной изотропной мягкой оболочки, мы развиваем технику, основанную на геометрических идеях, которые первым, по-видимому, использовал Г.А. Шварц при построении поверхности известной как "сапог Шварца" [24, с. 191–193]. Эти же идеи лежат в основе работ Нэша и Кёйпера [75], [49], посвященных C^1-вложимости римановых многообразий в евклидово пространство.

Напомним (см. (1.15)), что физические соотношения для однородной изотропной мягкой оболочки в терминах главных усилий T_1, T_2 и степеней удлинений λ_1, λ_2 имеют вид:

$$\begin{aligned} T_1(\lambda_1,\lambda_2) &= \varphi_0(\lambda_1,\lambda_2) + \lambda_1\varphi_1(\lambda_1,\lambda_2), \\ T_2(\lambda_1,\lambda_2) &= \varphi_0(\lambda_1,\lambda_2) + \lambda_2\varphi_1(\lambda_1,\lambda_2), \end{aligned} \tag{1}$$

и что специфика мягкой оболочки сказывается в ограничениях, накладываемых на функции φ_0, φ_1:

1) функции φ_0, φ_1 заданы и непрерывны в некоторой области

$$\Omega \subseteq \{(\lambda_1 \geqslant 1 \,\&\lambda_2 > 0) \cup (\lambda_1 > 0 \,\&\lambda_2 \geqslant 1)\};$$

2) функции $\varphi_0 + \lambda_i\varphi_1$, $i = 1, 2$, неотрицательны;

3) если $\lambda_i > 1$ при $i = 1$ или $i = 2$, то соответствующее $T_i > 0$;

4) если $\lambda_1 \leqslant 1$ и $\lambda_2 \leqslant 1$, то $T_1 = T_2 = 0$.

Удельная потенциальная энергия деформированной оболочки $э$ есть величина, вариация которой равна элементарной работе внутренних сил, отнесенная к единице площади отсчетной конфигурации. Условием ее существования является (см. (1.3.28)) наличие следующего тождества:

$$\frac{\partial}{\partial\lambda_2}(\lambda_2\varphi_0 + \lambda_1\lambda_2\varphi_1) = \frac{\partial}{\partial\lambda_1}(\lambda_1\varphi_0 + \lambda_1\lambda_2\varphi_1). \tag{2}$$

Выбор φ_0, φ_1 продиктован особенностями материала, а зачастую и методов решения, и вид их весьма разнообразен. В монографиях [83], [68] наиболее сложная зависимость представлена законом Муни

$$\begin{aligned} T_1 &= c_1(\lambda_1^4\lambda_2^2 - 1)(1 + c\lambda_2^2)/\lambda_1^3\lambda_2^3, \\ T_2 &= c_1(\lambda_2^4\lambda_1^2 - 1)(1 + c\lambda_1^2)/\lambda_1^3\lambda_2^3. \end{aligned} \tag{3}$$

Здесь $\varphi_0,\ \varphi_1$ определены соотношениями

$$\begin{aligned} \lambda_1^3\lambda_2^3\varphi_0 &= c_1(\lambda_1^4\lambda_2^4 - 1 - c(\lambda_1^2 + \lambda_2^2) - \lambda_1^3\lambda_2^3 - c\lambda_1\lambda_2), \\ \lambda_1^3\lambda_2^3\varphi_1 &= c_1(\lambda_1^2\lambda_2^2(\lambda_1 + \lambda_2) + c(\lambda_1 + \lambda_2)), \end{aligned}$$

условие (2) имеет место, и

$$э(\lambda) = \frac{c_1}{2}(\lambda_1^2 + \lambda_2^2 + c\left(\frac{1}{\lambda_1^2} + \frac{1}{\lambda_2^2}\right) + \frac{1}{\lambda_1^2\lambda_2^2} + c\lambda_1^2\lambda_2^2) + c_2.$$

Область определения функции $э(\lambda)$ есть

$$\overline{\Omega} = \{(\lambda_1, \lambda_2) : \lambda_1^2\lambda_2 \geqslant 1,\ \ \lambda_2^2\lambda_1 \geqslant 1\}.$$

Выполнение всех условий 1)–4) на $\overline{\Omega}$ проверяется просто. Заметим, что реальные резиноподобные материалы выдерживают определенные сжимающие усилия и поэтому ведут себя как мягкая оболочка в определенной области изменения нагрузок, когда сжимающие усилия не возникают или ими можно пренебречь. Этим нагрузкам и соответствует область $\overline{\Omega}$.

Мы излагаем схему исследования проблемы минимизации функционала полной энергии, выбрав мягкую оболочку с физическими соотношениями (3) для её материала. Будем считать, что первоначальная ("раскройная") форма мягкой оболочки ненапряженная, плоская, представляет собой прямоугольник S_0: $0 \leqslant x_1 \leqslant a$, $0 \leqslant x_2 \leqslant b$ на плоскости переменных x_1, x_2, которые и примем за лагранжевы координаты частиц оболочки. По границе этого прямоугольника оболочка закреплена. Деформированная форма оболочки задается как поверхность $R(x)$, $R(x)$ – радиус-вектор частицы x с координатами $x = (x_1, x_2)$, $R(x) = (\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x))$. Условием того, что вектор-функция $R(x)$ определяет поверхность, примем невырожденность почти всюду матрицы первой квадратичной формы $g(R(x))$, построенной по $R(x)$: $g_{ij} = \partial_i R \cdot \partial_j R$. Относительно внешних сил $f(x)$, действующих на оболочку, предположим, что они обладают потенциалом, и потенциальная энергия их непрерывна в метрике $C(S_0)$. Это условие выполняется, например, если внешние силы заморожены, то есть их поверхностная плотность $f(x)$, рассчитанная по недеформированному состоянию, не меняется при деформации оболочки. Поэтому вклад этих сил в полную энергию деформированной оболочки задается линейным функционалом $L(R) = \int\limits_{S_0} f(x) \cdot R(x)dx$ от определяющей деформацию вектор-функции $R(x)$ [92, с. 115, 386, 396] . Полная энергия оболочки представляется следующим функционалом (полагаем в (3) $c_1 = 2,\ c_2 = 0$):

$$I(R) = \int_{S_0} [\lambda_1^2(x) + \lambda_2^2(x) + c(\lambda_1^{-2}(x) + \lambda_2^{-2}(x) + \lambda_1^{-2}(x)\lambda_2^{-2}(x) + \\ + c\lambda_1^2(x)\lambda_2^2(x)]dx - I_2(R). \tag{4}$$

Здесь $\lambda_1(x)$, $\lambda_2(x)$ — главные значения степени удлинения, вызываемой деформацией $R(x)$. Первый интеграл в (4) обозначим через $I_1(R)$. Слагаемое $I_2(R)$ — потенциал внешних сил $f(x)$, в случае замороженных нагрузок $I_2(R) = L(R)$.

Функционал (4) исследуется в пространстве $\mathbf{W} = [W_4^1(S_0)]^3$. Векторная функция $f(x)$ в общем случае принадлежит сопряженному к $\mathbf{W}$ пространству $\mathbf{W}^{-1}$. Наши соглашения о непрерывности $I_2(R)$ в простран-

стве $C^3(S_0)$ выделяют из $\mathbf{W}^{-1}$ определенное подмножество допустимых $f(x)$.

Положим $\mathbf{L} = \left[L_2(S_0)\right]^3$. При записи скалярного или матричного произведений употребляется точка. Два рядом стоящих вектора означают диаду или тензорное произведение.

2. Вспомогательные результаты.

Лемма 1. *Множество V положительных симметричных матриц второго порядка, собственные числа которых Λ_1, Λ_2 удовлетворяют условию $\Lambda_1^2\Lambda_2 \geqslant 1$, $\Lambda_2^2\Lambda_1 \geqslant 1$, выпукло.*

Доказательство Пусть A_1 и A_2 — матрицы из V и A — их выпуклая комбинация $A = \alpha A_1 + \overline{\alpha}A_2$, $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, $\overline{\alpha} = 1 - \alpha$. Как обычно, полагаем $\Lambda_2 \leqslant \Lambda_1$, и потому достаточно проверить наличие неравенства

$$\Lambda_2^2(A)\Lambda_1(A) \geqslant 1. \tag{5}$$

Используем выпуклость $\Lambda_1(A)$ и вогнутость $\Lambda_2(A)$ на множестве положительных матриц (более общий результат Лакса см. в [70, с. 485] Имеем

$$\begin{aligned}&\Lambda_2(\alpha A_1 + \overline{\alpha}A_2) \geqslant \\ &\geqslant \alpha\Lambda_2(A_1) + \overline{\alpha}\Lambda_2(A_2) \geqslant \frac{\alpha}{\det(A_1)} + \frac{\overline{\alpha}}{\det(A_2)} \geqslant \frac{1}{\det^{\alpha}(A_1)}\,\frac{1}{\det^{\overline{\alpha}}(A_2)}.\end{aligned} \tag{6}$$

Здесь последовательно использовали равенство $\Lambda_1(A)\Lambda_2(A) = \det(A)$, исходные неравенства (5) для A_1, A_2 и известное числовое неравенство Гельдера $\alpha x + \overline{\alpha}y \geqslant x^{\alpha}y^{\overline{\alpha}}$, $x > 0$, $y > 0$.

Далее воспользуемся вогнутостью функции $\ln(\det(A))$ [70, с. 480] на множестве положительно полуопределенных матриц

$$\det(\alpha A_1 + \overline{\alpha}A_2) \geqslant \det{}^{\alpha}(A_1)\det{}^{\overline{\alpha}}(A_2). \tag{7}$$

Из неравенств (6) и (7) следует, что

$$\Lambda_2(\alpha A_1 + \overline{\alpha}A_2) \geqslant 1/\det(\alpha A_1 + \overline{\alpha}A_2).$$

Это равносильно выполнению (5) для $\alpha A_1 + \overline{\alpha}A_2$.

Обозначим через $\mathbf{V}$ множество матричных функций, элементы которых принадлежат $L_2(S_0)$ и значения которых почти для всех $x \in S_0$ суть матрицы из V.

Деформацию оболочки характеризует трехмерное тензорное поле $\overset{\circ}{\nabla} R(x) = e_1 R_1(x) + e_2 R_2(x)$. Здесь e_1, e_2 — единичные орты осей x_1, x_2, $R_i(x) = \partial_i R(x)$, $i = 1, 2$. Тензор $\overset{\circ}{\nabla} R$ однозначно определяется матрицей $\nabla\varphi = \|\partial_i \varphi_j\|$; $i = 1, 2$, $j = 1, 2, 3$. Функции $\lambda_1(x)$ и $\lambda_2(x)$ являются при фиксированном x ненулевыми собственными числами тензора искажения $V(x)$ из ортогонального разложения $\overset{\circ}{\nabla} R(x) = O(x) \cdot V(x)$. Напомним, что символы i_1, i_2, i_3 обозначают инварианты матрицы.

Согласно выводам главы 1 удельную потенциальную энергию $э$ мягкой оболочки можно считать функцией от $\sqrt{g(x)}$ или $g(x)$ — матрицы первой квадратичной формы поверхности $R(x)$. При этом $\lambda_1^2 = \Lambda_1$, $\lambda_2^2 = \Lambda_2$, где Λ_1, Λ_2 — собственные числа $g(x)$ и

$$\Lambda_1 + \Lambda_2 = |R_1|^2 + |R_2|^2 = \|\sqrt{g}\|^2. \tag{8}$$

Соответственно, множество $\mathbf{V}$ можно интерпретировать как множество, содержащее в себе матричные функции $g(R(x)) = \nabla\varphi(x) \cdot \nabla\varphi^T(x)$, соответствующие всевозможным допустимым деформациям $R(x)$. Далее определим два подмножества $\mathbf{V}$.

Сначала вводим множество $\mathbf{V}_K$, куда входят те матричные функции из $\mathbf{V}$, для которых скалярные функции $\mathbf{\Lambda}_1(x)$, $\mathbf{\Lambda}_2(x)$ удовлетворяют условию равномерной "хорошей обусловленности":

$$\Lambda_1(x)/\Lambda_2(x) \leqslant K, \tag{9}$$

где K — константа, не зависящая ни от x, ни от рассматриваемой матричной функции. Легко показать выпуклость $\mathbf{V}_K$.

Мы можем также предположить, что деформации $R(X)$ ограничены наличием препятствия:

$$-R(x) \cdot e_3 \geqslant d, \ d > 0, \tag{10}$$

f совпадает с силой тяжести ($f = -e_3 g$), а число d определяет уровень земной поверхности в системе декартовых координат x_1, x_2, x_3.

При рассмотрении более общего закона Муни мы прибегаем к более сильному ограничению на матрицы $g\big(R(x)\big)$, считая, что они принадлежат $\mathbf{V}_M$. Здесь $\mathbf{V}_M$ — выпуклое подмножество множества $\mathbf{V}$, состоящее

из матричных функций, чьи собственные числа почти всюду не превосходят M.

Применяя идею поливыпуклости Болла [92, с. 204] функционал $I(R)$ при необходимости будем рассматривать как функцию от двух переменных g, R, полагая: $I_1 = I_1(g)$, $I_2 = I_2(R)$. При этом множеством изменения g будет множество $\mathbf{V}$, или $\mathbf{V}_K$, или $\mathbf{V}_M$. Допустимыми деформациями

$$R(x) = \big(\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x)\big)$$

являются вектор-функции из пространства $\mathbf{W}$, которым соответствуют почти всюду невырожденные $g(x)$, кроме того $R(x) = x$, если $x \in \partial S_0$. Обозначим это множество через $\mathcal{R}$.

Лемма 2. *Пусть $c > 0$, тогда функция удельной потенциальной энергии как функция от матрицы первой квадратичной формы $э = э(g)$ монотонна на множестве V, то есть $g_1 > g_2$, $g_1,\ g_2 \in V \Rightarrow э(g_1) > э(g_2)$. Для каждого M существует такая константа c_M, что при $c \leqslant c_M$ функция*

$$I_1(g) = \int\limits_{S_0} э(g(x))dx$$

выпукла на множестве $\mathbf{V}_M$ и слабо полунепрерывна снизу. Последнее утверждение остается справедливым при любом c, если $M \leqslant \sqrt[6]{4}$. Для материала Трилора $I_1(g)$ выпукла и слабо полунепрерывна снизу на множестве $\mathbf{V}$.

Доказательство. Известно, что неравенство $g_1(x) > g_2(x)$ влечет выполнение неравенств $\Lambda_1(g_1(x)) > \Lambda_1(g_2(x))$ и $\Lambda_2(g_1(x)) > \Lambda_2(g_2(x))$ (см. [70, с. 480]). Следовательно, необходимо убедиться лишь в строгой монотонности функции $э(\Lambda_1, \Lambda_2) = \Lambda_1 + \Lambda_2 + c(\Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1}) + \Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1} + c\Lambda_1\Lambda_2$ на множестве $\{(\Lambda_1, \Lambda_2) : \Lambda_1\Lambda_2^2 \geqslant 1,\ \ \Lambda_2\Lambda_1^2 \geqslant 1\}$ по каждой переменной. Нетрудно видеть, что $\partial_1 э(\Lambda_1, \Lambda_2) = (1 - \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-1}) + c\Lambda_2(1 - \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-1})$. Аналогично вычисляется производная $\partial_2 э(\Lambda_1, \Lambda_2)$. Положительность полученных выражений и доказывает первую часть леммы. Для доказательства второй части используем следующий результат Томпсона и Фрида [92, с. 206]: пусть задана симметрическая выпуклая функция $\Phi : [0, +\infty)^2 \to \mathbf{R}$, которая является функцией, неубывающей

по каждому аргументу. Тогда функция

$$W : A \in M^2 \to W(A) = \Phi(\sigma_1(A), \sigma_2(A))$$

выпукла. Здесь M^2 — множество квадратных матриц второго порядка; σ_1, σ_2 — сингулярные числа матрицы.

Из доказательства, приведенного в [92, с. 206–209], следует, что этот результат остается справедливым, если Φ рассматривается на замкнутом выпуклом подмножестве. Проверим условия, накладываемые на Φ, для нашей функции $э(\Lambda) = \Phi_1(\Lambda) + c\Phi_2(\Lambda)$, где

$$\Phi_1(\Lambda) = \Lambda_1 + \Lambda_2 + \Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1}, \quad \Phi_2(\Lambda) = \Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1} + \Lambda_1\Lambda_2.$$

Матрицы

$$\begin{pmatrix} 2\Lambda_1^{-3}\Lambda_2^{-1} & \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-2} \\ \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-2} & 2\Lambda_2^{-3}\Lambda_1^{-1} \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 2\Lambda_1^{-3} & 1 \\ 1 & 2\Lambda_2^{-3} \end{pmatrix}$$

вторых производных для Φ_1 и Φ_2 являются, как легко видеть, положительно определенными на множестве

$$\{(\Lambda_1, \Lambda_2) : \Lambda_1\Lambda_2^2 \geqslant 1,\ \Lambda_2\Lambda_1^2 \geqslant 1,\ \Lambda_1^3\Lambda_2^3 \leqslant 4\}.$$

Итак, условие выпуклости функции $э$ выполняется, если $M \leqslant \sqrt[6]{4}$.

Рассмотрим другое представление $э = \Phi_1 + \Phi_2$,

$$\Phi_1(\Lambda) = \Lambda_1 + \Lambda_2 + c(\Lambda_1^{-1} + \Lambda_2^{-1}), \quad \Phi_2(\Lambda) = \Lambda_1^{-1}\Lambda_2^{-1} + c\Lambda_1\Lambda_2.$$

Выпуклость Φ_1 проверяется просто. Для Φ_2 матрица вторых производных имеет вид

$$\begin{pmatrix} 2\Lambda_1^{-3}\Lambda_2^{-1} & c + \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-2} \\ c + \Lambda_1^{-2}\Lambda_2^{-2} & 2\Lambda_2^{-3}\Lambda_1^{-1} \end{pmatrix}.$$

При $c \leqslant M^{-4}$ определитель этой матрицы неотрицателен. Для рассматриваемых случаев условия теоремы Томпсона, Фрида выполнены, и потому $э$ выпукла по g, когда g меняется на V_M. Слабая полунепрерывность снизу функционала $I_1(g)$ следует из доказанной выпуклости $э$ и сильной непрерывности $I_1(g)$ в пространстве $\mathbf{L}$ на множестве $\mathbf{V}_M$ (см., например, [116]).

Лемма 3 (аппроксимационная). *Пусть*

$$g \in \mathbf{V},\ R(x) \in \mathbf{W},\ g(x) \geqslant g\big(R(x)\big) > 0 \ \textit{п.в.}$$

Существуют матричная функция $g_H(x)$ и вектор-функция $R_H(x)$ со свойствами:

$$R_H(x) \in C^\infty(S_0),\ g_H \in C(S_0),\ \|g - g_H\|_{\mathbf{L}} \leqslant \varepsilon,$$

$$\|R - R_H\|_{C(S_0)} \leqslant \varepsilon,\ g_H(x) > g\big(R_H(x)\big),\ g_H(x) \in \mathbf{V},$$

где ε — наперед заданное положительное число.

Доказательство. Рассмотрим вектор-функцию

$$R_0(x) = x = (x_1, x_2, 0),\ x_1, x_2 \in S_0.$$

Функция перемещений $u(x) = R(x) - R_0(x)$ принадлежит пространству $[\overset{\circ}{W}{}^{1}_{4}]^3$. Выбираем функцию $u_H(x)$, бесконечно дифференцируемую, с носителем, лежащим строго внутри S_0, с точностью до ε_1 аппроксимирующую $u(x)$: $\|u - u_H\|_{\mathbf{W}} \leqslant \varepsilon_1$. В качестве $R_H(x)$ выберем $R_0(x) + u_H(x)$. Существует такое $\delta > 0$, что $R_H(x) = x$ в приграничной полосе S_δ ширины δ. Выбор ε_1, определится в дальнейших рассуждениях.

Будем строить матричную функцию $g_H(X)$ по шагам, стремясь подчинить получаемые на каждом шаге матрицы $\widetilde{g}(x)$ следующим условиям:

$$\widetilde{g}(x) \in \mathbf{V}, \tag{11}$$

$$\|g - \widetilde{g}\|_{\mathbf{L}} \leqslant \varepsilon_2, \tag{12}$$

$$\widetilde{g}(x) \geqslant g(R_H(x)). \tag{13}$$

где ε_2 для каждого шага задается априорно.

Первый шаг. Рассмотрим сингулярное разложение матрицы

$$\omega(x) = g(x) - g\big(R(x)\big)$$

в произведение ортогональных и диагональной матриц:

$$\omega(x) = O(x)D(x)O^T(x), \quad D(x) = \operatorname{diag}\big(\lambda_1(\omega), \lambda_2(\omega)\big). \tag{14}$$

Положим $c_2 = \int\limits_{S_0} \|\omega(x)\|^2 dx$, где

$$\|\omega\|^2 = \sum_{i,j=1}^{2} \omega_{ij}^2 = \lambda_1^2(\omega) + \lambda_2^2(\omega), \tag{15}$$

а константу c_3 выберем из условия, что множество

$$A = \{x : \lambda_1\big(\omega(x)\big) \geqslant c_3 \text{ или } \lambda_2\big(\omega(x)\big) \geqslant c_3\}$$

имеет меру, не превосходящую ε_3, ε_3 — наперед заданное число. Такой выбор возможен, поскольку согласно (15) имеем $\mathrm{mess}(A) \leqslant c_2/c_3^2$.

В разложении (14) заменим $d_{ii}(x)$, диагональные элементы $D(x)$, на $\widetilde{d}_{ii} = \min(\lambda_i(x), c_3)$, получаем матричную функцию $\widetilde{\omega}(x)$ такую, что

$$\int\limits_{S_0} \sum_{i,j} \big(\omega_{ij}(x) - \widetilde{\omega}_{ij}(x)\big)^2 dx = \int\limits_{A} \sum_{i,j} \big[O(x) \cdot (D - \widetilde{D})(x) \cdot O^T(x)\big]_{ij}^2 dx \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{A} \sum_{i,j} \omega_{ij}^2 dx = \varepsilon_4$$

при достаточно малых ε_3.

Вводим в рассмотрение матрицу $g_1(x) = g(R_H) + \widetilde{\omega}(x)$. Условию (13) $g_1(x)$ удовлетворяет. Выполняется также (12) подходящим выбором ε_1, ε_4, что следует из очевидной оценки (компоненты вектор-функции $R(x)$ обозначены через $\varphi_i(x)$, $i = 1, 2, 3$):

$$\|g - g_1\|_L = \|g - g(R_H) - (g - g(R)) + \omega - \widetilde{\omega}\|_L \leqslant$$
$$\leqslant \|g(R) - g(R_H)\|_L + \|\omega - \widetilde{\omega}\|_L \leqslant \|g(R) - g(R_H)\| + \varepsilon_4.$$

где

$$\|g(R) - g(R_H)\|_L^2 = \int\limits_{S_0} \sum_{p,q=1}^{2} |g_{pg}(R) - g_{pg}(R_H)|^2 dx,$$

а также из неравенства

$$\int\limits_{S_0} |g_{pq}(R) - g_{pq}(R_H)|^2 dx \leqslant 3 \int\limits_{S_0} \sum_{i=1}^{3} |\partial_p\varphi_i\partial_q\varphi_i - \partial_p\varphi_{Hi}\partial_q\varphi_i + \partial_p\varphi_{Hi}\partial_q\varphi_i -$$

$$- \partial_p\varphi_{Hi}\partial_q\varphi_{Hi}|^2 dx \leqslant 6\Big\{ \int\limits_{S_0} \sum_{i=1}^{3} (\partial_q\varphi_i)^4 dx \int\limits_{S_0} \sum_{i=1}^{3} (\partial_p\varphi_i - \partial_p\varphi_{Hi})^4 dx \Big\}^{1/2} +$$

$$+ 6\Big\{ \int\limits_{S_0} \sum_{i=1}^{3} (\partial_p\varphi_{Hi})^4 dx \int\limits_{S_0} \sum_{i=1}^{3} (\partial_q\varphi_i - \partial_q\varphi_{Hi})^4 dx \Big\}^{1/2}, \ p, q = 1, 2.$$

Второй шаг. Переходим к выполнению условия (11). Сравним собственные числа матриц $g_1(x)$ и $g(x)$. Имеем

$$\int_{S_0} |\Lambda_i(g(x)) - \Lambda_i(g_1(x))|^2 dx \leqslant \varepsilon_5. \tag{16}$$

При этом $\varepsilon_5 \to 0$, когда $\varepsilon_2 \to 0$. Это следует из неравенства Виландта-Хоффмана (см., например, [79, с. 29]), которое имеет место для симметричных матриц g и g^ν:

$$\sum_j \big(\Lambda_j(g) - \Lambda_j(g^\nu)\big)^2 \leqslant \|g - g^\nu\|^2 \equiv \sum_{i,j} (g - g^\nu)_{ij}^2. \tag{17}$$

Проводим с матрицами $g(x)$, $g_1(x)$ преобразования, подобные тем, какие мы провели над $\omega(x)$. Выберем число c_4 такое, что

$$c_4 \geqslant \max\{|\Lambda_1(g_1)|_\infty, |\Lambda_2(g_1)|_\infty\} \text{ и } \int\limits_{A_1} |\Lambda_i\big(g(x)\big) - c_4|^2 dx \leqslant \varepsilon_6, \ i = 1, 2.$$

Здесь A_1 есть множество точек:

$$A_1 = \{x : \Lambda_1\big(g(x)\big) \geqslant c_4 \text{ или } \Lambda_2\big(g(x)\big) \geqslant c_4\}.$$

Положительное число ε_6 можно выбрать произвольно. Заметим также, что поскольку $g(R_H)$, $\widetilde{\omega} \in \mathbf{L}^\infty(S_0)$, то и $g_1(x) \in \mathbf{L}^\infty(S_0)$, так что определение c_4 корректно.

В сингулярном разложении матричной функции:

$$g_1(x) = O(x)d(x)O^T(x),$$

заменим диагональные элементы $d(x)$ $\big($собственные числа $g_1(x)\big)$ новыми по формуле:

$$\Lambda_1'(x) = \min\{c_4, \quad \max\big(\Lambda_1(g(x)), \quad \Lambda_1(g_1(x))\big)\},$$
$$\Lambda_2'(x) = \min\{c_4, \quad \max\big(\Lambda_2(g(x)), \quad \Lambda_2(g_1(x))\big)\}.$$

Легко проверяется, что $\Lambda_1'(x) \geqslant \Lambda_2'(x)$; $\Lambda_1'(x)\Lambda_2'^2(x) \geqslant 1$ п.в. на S_0;

$$|\Lambda_i\big(g(x)\big) - \Lambda_i'(x)| \leqslant |\Lambda_i\big(g(x)\big) - \Lambda_i\big(g_1(x)\big)| \quad \text{для} \quad x \in S_0 \setminus A_1, \quad i = 1, 2;$$

$$\int\limits_{A_{1i}} |\Lambda_i\big(g(x)\big) - \Lambda_i'(x)|^2 dx \leqslant \int\limits_{A_{1i}} |\Lambda_i\big(g(x)\big) - c_4|^2 dx \leqslant \varepsilon_6,$$

где $A_{1i} = \big\{x : \Lambda_i\big(g(x)\big) \geqslant c_4\big\} \subseteq A_1$.
Благодаря этим отношениям (а также (16)) имеет место неравенство:

$$\int\limits_{S_0} |\Lambda_i\big(g(x)\big) - \Lambda_i'(x)|^2 dx \leqslant \varepsilon_5 + \varepsilon_6 \equiv \varepsilon_7, \quad i = 1, 2. \tag{18}$$

Пусть $g_2(x)$ обозначает матрицу, полученную из $g_1(x)$ заменой диагональных элементов $\Lambda_i(g_1)$ на Λ_i', $i = 1, 2$. Она удовлетворяет всем условиям (11)–(13), поскольку согласно (18) по евклидовой норме $g_2(x)$ при $\varepsilon_2 \to 0$ отличается от $g(x)$ произвольно мало в среднем:

$$\int\limits_{S_0} \|g_1 - g_2\|^2 dx = \int\limits_{S_0} \|O(d - d')O^T\|^2 dx =$$
$$= \int\limits_{S_0} \sum_i \big\{O(d - d')^2 O^T\big\}_{ii} dx = \int\limits_{S_0} \big[(\Lambda_1 - \Lambda_1')^2 + (\Lambda_2 - \Lambda_2')^2\big] dx.$$

Матричная функция $g_2(x)$ принадлежит классу $[L_\infty(S_0)]^3$, поскольку $|(g_2)_{ij}(x)| \leqslant M_1$ для всех $x \in S_0$, где M_1 — положительная константа.

Третий шаг. Выберем такое открытое множество S_{δ_1} сколь угодно малой меры δ_1, что вне его (на замкнутом множестве $S_0 \setminus S_{\delta_1}$) $g_2(x)$ непрерывна. Переходим к непрерывному продолжению g_2 на все S_0 с соблюдением условий (14).

Для проведения нижеследующих рассуждений необходима невырожденость $g\big(R_H(x)\big)$ для всех $x \in S_0 \setminus S_{\delta_1}$. Если $R_H(x)$ не представляет

поверхность в нашем смысле, то применим к $R_H(x)$ конечно-элементную аппроксимацию в соответствующем пространстве Соболева. Предварительно, варьируя R_H в сколь угодно малой окрестности границ конечных элементов гладким образом и сколь угодно мало по норме этого пространства Сообoлева, можно добиться, что "новое" $R_H(x)$ есть поверхность в нашем определении.

Подробно подобное построение проведено в начале доказательства леммы 6. Вместо $R_H(x)$ настоящей леммы можно взять соответствующее $R_H(x)$ этой леммы, включив границы применяемых конечных элементов в выделенное множество S_{δ_1}. Все проведенные рассуждения сохраняют силу для этого R.

Итак, не теряя в общности рассуждений, примем что $g\big(R_H(x)\big)$ невырождена для всех $x \in S_0$.

Пусть $b(x) = \sqrt{g(R_H(x))}$. Имеем неравенство

$$a(x) = b^{-1}(x) g_2(x) b^{-1}(x) \geqslant I,$$

где I — единичная матрица, а функция $a(x)$ непрерывна на $S_0 \setminus S_{\delta_1}$, и $|a_{ij}(x)| \leqslant M_2$ для всех x с известной нам константой M_2. Для того чтобы непрерывное продолжение $a(x)$ по-прежнему удовлетворяло этому неравенству, необходимо и достаточно выполнение условий

$$a_{11}(x) \geqslant 1, \quad a_{22}(x) \geqslant 1, \quad (a_{11}(x) - 1)(a_{22}(x) - 1) - a_{12}^2(x) \geqslant 0.$$

Пользуясь теоремой Урысона-Титце [97, с. 16], сначала непрерывно продолжим $a_{11}(x)$ и $a_{22}(x)$ с сохранением неравенств $M_2 \geqslant a_{ii}(x) \geqslant 1$, $i = 1, 2$, $x \in S_0$, а затем продолжим непрерывно на всё S_0 функцию $a_{12}(x)$ в рамках оценки

$$-\sqrt{(a_{11}(x) - 1)(a_{22}(x) - 1)} \leqslant a_{12}(x) \leqslant \sqrt{(a_{11}(x) - 1)(a_{22}(x) - 1)}.$$

Итак, непрерывная матричная функция $a'(x)$, совпадающая с $a(x)$ на $S_0 \setminus S_{\delta_1}$ и удовлетворяющая всюду оценке $a'(x) \geqslant I$, получена. Для матричной функции $g_2'(x) = b(x) a'(x) b(x)$ имеем непрерывность на всем S_0, и $g_2'(x)$ на всем S_0 мажорирует $g(R_H(x))$.

Как видно из приведенных рассуждений, еще до выбора S_{δ_1} можем оценить сверху элементы $g_2'(x)$. Введем скалярную функцию $\mu(x)$ при

помощи условия

$$\mu(x) = \inf_t \{t : t \geqslant 1, \ \ \Lambda_1[tg_2']\Lambda_2^2[tg_2'] \geqslant 1\}.$$

Легко проверить, что $\mu(x)$ — непрерывная на S_0 функция с известной верхней оценкой (последняя получается по значениям Λ_1, Λ_2 матрицы $g(R_H(x))$, поскольку $\Lambda_1\Lambda_2^2(g_2'(x)) \geqslant \Lambda_1\Lambda_2^2(g(R_H(x)))$. На $S_0 \setminus S_{\delta_1}$ имеем $\mu(x) = 1$. Функция $\mu(x)g_2'(x)$, будучи непрерывной, удовлетворяет всем условиям (11)–(13) при достаточно малом δ_1. Добавляем к $\mu(x)g_2'(x)$ слагаемое $\delta_2 I$. При подходящем выборе δ_2 и δ_1, ε_2 – мы сохраняем свойства (11)–(13) для матричной функции

$$g_3'(x) = \mu(x)g_2'(x) + \delta_2 I.$$

Применяя соответствующую аппроксимацию к $g_3'(x)$, получаем матричную функцию $g_3(x)$, для которой выполняются условия (11)–(13) и кроме того $g_3(x) \ \in \ C^\infty(S_0), g_3(x) \geqslant g\big(R_H(x)\big) + \dfrac{\delta_2}{2} I$ для всех $x \in S_0$. Лемма доказана.

Лемма 4. *Если в условиях леммы 3 заменить множество* $\mathbf{V}$ *на* $\mathbf{V}_K$*, то заключение леммы 3 останется справедливым.*

Для доказательства делаем

Четвертый шаг. дополняющий рассуждения леммы 3. На этом шаге обеспечиваем выполнение для матричной функции g_H помимо (11)–(13) условия

$$\Lambda_1/\Lambda_2 \leqslant K,$$

используя те же технические приемы.

Выбираем множество A_2 со свойствами:

а) A_2 содержит подмножество A_3:

$$A_3 = \big\{x : x \in S_0, \big|\Lambda_1\big(g(x)\big) - \Lambda_1\big(g_3(x)\big)\big| \geqslant \varepsilon_7 \\ \text{или } \big|\Lambda_2\big(g(x)\big) - \Lambda_2\big(g_3(x)\big)\big| \geqslant \varepsilon_7\big\}$$

б) A_2 – открыто;

в) $g(x)$ непрерывна на $S_0 \setminus A_2$;

г) A_2 содержит подмножество A_4:

$$A_4 = \Big\{x : x \in S_0, \quad \Lambda_2\big(g_3(x)\big) \leqslant \frac{\Delta}{2}, \quad \Delta = \sqrt{1/K}\Big\};$$

д) $\operatorname{mess}(A_2) \leqslant \varepsilon_8$.

Константы ε_7, ε_8 задаются, возможность выбора множеств A_3, A_4 сколь угодно малыми по мере следует из неравенства Виландта-Хоффмана (17). А именно, поскольку

$$\int\limits_{S_0} \sum_j \big(\lambda_j(g) - \lambda_j(g_3)\big)^2 dx \leqslant \int\limits_{S_0} \sum_{i,j} (g_{ij} - g_{3,ij})^2 dx \leqslant \varepsilon_2$$

то

$$\operatorname{mess}(A_3) \leqslant \varepsilon_2/\varepsilon_7^2.$$

Из условий $\Lambda_1(g)/\Lambda_2(g) \leqslant K$, $\Lambda_1(g)\Lambda_2(g) \geqslant 1$ следует, что $K\Lambda_2^2 \geqslant 1$, или $\Lambda_2 \geqslant \Delta = \sqrt{1/K}$. Поэтому, все по тому же неравенству (17):

$$\operatorname{mess}(A_4) \cdot (\frac{\Delta}{2})^2 \leqslant \varepsilon_2 \;\Rightarrow\; \operatorname{mess}(A_4) \leqslant 4\varepsilon_2/\Delta^2.$$

При фиксированных ε_7, ε_8, выбирая ε_2 предыдущего шага равным:

$$\varepsilon_2 = \frac{1}{3}\max\left\{\varepsilon_7^2\varepsilon_8,\ \Delta^2\varepsilon_8/4\right\},$$

добиваемся выполнения условия д).

Последующее построение $g_H(x)$ делится на две стадии: на первой стадии соответствующая $\mathbf{L}_2$-близость обеспечивается малостью ε_7, на второй — малостью ε_8.

Итак, имеем на $S_0 \setminus A_1$:

$$\big|\Lambda_1\big(g(x)\big) - \Lambda_1\big(g_3(x)\big)\big| < \varepsilon_7, \quad \big|\Lambda_2\big(g(x)\big) - \Lambda_2\big(g_3(x)\big)\big| < \varepsilon_7,$$

где, напомним, $\varepsilon_7, (\varepsilon_8)$ выбираем произвольно, $\varepsilon_2 = \varepsilon_2(\varepsilon_7, \varepsilon_8)$.

Первая стадия. На $S_0 \setminus A_2$ определяем функцию $t_0(x)$ равенством:

$$t_0(x) = \min\Big\{t : t \in [0,1], \quad \frac{\Lambda_1\big(g_3(x)\big) + t\varepsilon_7}{\Lambda_2\big(g_3(x)\big) + 3t\varepsilon_7} \leqslant K\Big\}.$$

Заметим, что определяющее t_0 неравенство всегда выполняется при $t = 1$:

$$\frac{\Lambda_1\big(g_3(x)\big) + \varepsilon_7}{\Lambda_2\big(g_3(x)\big) + 3\varepsilon_7} \leqslant \frac{\Lambda_1\big(g(x)\big) + 2\varepsilon_7}{\Lambda_2\big(g(x)\big) + 2\varepsilon_7} \leqslant \frac{\Lambda_1\big(g(x)\big)}{\Lambda_2\big(g(x)\big)} \leqslant K.$$

Функция $t_0(x)$ непрерывна по x в точках $S_0 \setminus A_2$. Для $x \in S_0 \setminus A_2$ полагаем:

$$\begin{aligned} \Lambda_1^H(x) &= \Lambda_1\big(g_3(x)\big) + t_0(x)\varepsilon_7, \\ \Lambda_2^H(x) &= \Lambda_2\big(g_3(x)\big) + 3t_0(x)\varepsilon_7. \end{aligned}$$

Неравенство $\Lambda_2^H(x) \leqslant \Lambda_1^H(x)$ сохранится. Действительно, в противном случае существует точка $x_0 \in S_0 \setminus A_2$, такая, что

$$\Lambda_2\big(g_3(x_0)\big) + 3t_0(x_0)\varepsilon_7 > \Lambda_1\big(g_3(x_0)\big) + t_0(x_0)\varepsilon_7,$$

это влечет оценки

$$\Lambda_1\big(g_3(x_0)\big) < \Lambda_2\big(g_3(x_0)\big) + 2t_0(x_0)\varepsilon_7,$$

и

$$\Lambda_1\big(g_3(x_0)\big)/\Lambda_2\big(g_3(x_0)\big) < 1 + \frac{4t_0(x_0)\varepsilon_7}{\Delta} < 1 + \frac{4}{\Delta}.$$

Мы можем считать, что $K > 1 + \frac{4}{\Delta} = 1 + 4\sqrt{K}$, и потому из полученных оценок следует, что $t_0(x_0) = 0$, а, следовательно, и отношения:

$$\Lambda_1^H(x_0) = \Lambda_1\big(g_3(x_0)\big), \quad \Lambda_2^H(x_0) = \Lambda_2\big(g_3(x_0)\big), \quad \Lambda_1^H(x_0) \geqslant \Lambda_2^H(x_0).$$

Это противоречит предположениям относительно точки x_0.

Очевидно, мажоризация $\Lambda^H \geqslant \Lambda(g_3)$ сохраняется, так же, как оценки

$$\Lambda_1^{H2}\Lambda_2^H \geqslant 1, \quad \Lambda_1^H\Lambda_2^{H2} \geqslant 1.$$

В представлении:

$$g_3(x) = O(x)D(x)O^T(x), \tag{19}$$

заменим $D(x) = \operatorname{diag}\big(\Lambda_1\big(g_3(x)\big), \Lambda_2\big(g_3(x)\big)\big)$ на $D^H(x) = \operatorname{diag}\big(\Lambda_1^H(x), \Lambda_2^H(x)\big)$, при $x \in S_0 \setminus A_2$. Новую матричную функцию обозначим через $g^H(x)$. Выбором ε_7 мы обеспечиваем заданную малость $\big\|g(x) - g^H(x)\big\|_{\mathbf{L}_2(S_0 \setminus A_2)}$.

Приступаем ко второй стадии. С помощью теоремы Урысона-Титце продолжаем $g^H(x)$ непрерывным образом на всё S_0. Строим непрерывные продолжения $\Lambda_1^H(x), \Lambda_2^H(x)$. Сначала продолжаем $\Lambda_1^H(x)$ в рамках оценки

$$\Lambda_1\big(g_3(x)\big) \leqslant \lambda_1^H(x) \leqslant \min\left\{\Lambda_1\big(g_3(x)\big) + 1, K\big(\Lambda_2\big(g_3(x)\big) + 3\big)\right\}.$$

Затем продолжаем $\Lambda_2^H(x)$, сохраняя неравенства

$$\min\left\{\Lambda_1^H(x), \Lambda_2\big(g_3(x)\big)+3\right\} \geqslant \Lambda_2^H(x) \geqslant$$
$$\geqslant \max\left\{1/\Lambda_1^{H2}(x), \quad 1/\sqrt{\Lambda_1^H(x)}, \quad \Lambda_2\big(g_3(x)\big), \quad \Lambda_1^H(x)/K\right\}.$$

Легко проверить что левая часть этих неравенств на самом деле превосходит правую часть и, следовательно, требуемое продолжение Λ_1^H, Λ_2^H возможно:

$$\Lambda_2+3 \geqslant \frac{1}{\Lambda_1^{H2}} \Leftarrow \frac{1}{\Lambda_1} < \Lambda_2+3 \sim \Lambda_1\Lambda_2+3\Lambda_1 > 1,$$
$$\Lambda_2+3 \geqslant \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1^H}} \Leftarrow \frac{1}{\sqrt{\Lambda_1}} \leqslant \Lambda_2+3 \sim 1 \leqslant \sqrt{\Lambda_1}\Lambda_2+3\sqrt{\Lambda_1},$$
$$\Lambda_2+3 \geqslant \frac{\Lambda_1^H}{K}.$$

Заменяем в сингулярном разложении (19) матрицу $D(x)$ на так продолженное $D^H(x)$ и получаем искомую матричную функцию $g^H(x)$. По построению

$$\Lambda_1\big(g_3(x)\big) \leqslant \Lambda_1(x)^H \leqslant \Lambda_1\big(g_3(x)\big)+1,$$
$$\Lambda_2\big(g_3(x)\big) \leqslant \Lambda_2(x)^H \leqslant \Lambda_2\big(g_3(x)\big)+3,$$

а потому малость нормы $\|g(x)-g^H(x)\|_{\mathbf{L}_2}$ гарантируется только выбором ε_7 и ε_8. (важно, что оценка $\|g-g^H\|_{\mathbf{L}_2}$ не зависит от константы ε_2, определяемой выбором $\varepsilon_7, \varepsilon_8$). Лемма доказана.

Лемма 5. *Пусть $\|g\|_{\mathbf{L}} \leqslant M$ вдобавок к условиям лемм 3, 4. Тогда можно провести все построения в доказательствах этих лемм и получить матричную функцию $g_3(x)$ с условием:*

$$\|g_3\|_{\mathbf{L}}^2 \leqslant M-\delta,$$

где δ – некоторое положительное число.

Для доказательства этого утверждения функцию $R_H(x)$, построенную на первом этапе, преобразуем в функцию $\widetilde{R}_H(x) = (1-\varepsilon)R_H\left(\dfrac{x}{1-\varepsilon}\right)$ для $x \in S_0$, считая, что $R_H(x) \equiv x$ вне S_0 . Введем новую переменную y, полагая $x=(1-\varepsilon)y$. Легко подсчитывается, что

$$\widetilde{g}_H(x) \equiv g\big(\widetilde{R}_H(x)\big) = g\big(R_H(y)\big) \equiv g_H(y).$$

Согласно этой формуле преобразуем и матричную функцию $g_1(x)$ первого шага доказательства леммы 3: $\widetilde{g}_1(x) \equiv g_1(y)$. Как следствие имеем: $g_1(y) \geqslant g_H(y)$. При этом, не теряя общность в доказательствах, полагаем $g_1(y) = I$ (I — единичная матрица), когда $y \notin \overline{S}_0$.

Оценим $J = \int\limits_{S_0} \|\widetilde{g}_1(x)\|^2 dx$. С этой целью выполним замену переменной интегрирования $x = (1-\varepsilon)y$. Получим

$$J = \int\limits_{S_0} \sum_{i,j} \widetilde{g}_{1ij}(x)\widetilde{g}_{1ij}(x)dx = (1-\varepsilon)^2 \|g_1\|^2_{\mathbf{L}_{(S_0)}} + (1-\varepsilon)^2 \int\limits_{\Pi} \|g_1(x)\|^2 dx.$$

Здесь

$$\Pi = \frac{1}{1-\varepsilon} S_0 \setminus S_0, \ \text{mess}\ \Pi = 4\varepsilon \frac{2-\varepsilon}{(1-\varepsilon)^2}.$$

Для удобства вычислений положим, что S_0 — квадрат с центром в начале координат и сторонами длины два, параллельными координатным осям. Учитывая, что в точках Π справедливо равенство $\|g_1(x)\|^2 = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 = 2$, получаем:

$$J = (1-\varepsilon)^2 \|g_1\|^2_{\mathbf{L}} + 8\varepsilon(2-\varepsilon).$$

Допустим, что получили g_1 таким, что $\|g_1\|^2_{\mathbf{L}(\mathbf{S_0})} = M + \varepsilon_1$ (ε_1 мы можем сделать меньшим любого наперед заданного числа). Берем $\varepsilon = \varepsilon_1$ и требуем выполнение неравенства $J < M$:

$$(1-\varepsilon_1)^2(M+\varepsilon_1) + 16\varepsilon_1 - 8\varepsilon_1^2 < M \sim (1-\varepsilon_1)^2/(2-\varepsilon_1) + 8 < M.$$

Таким образом, если к примеру $M > 9$, то для малых ε_1 это неравенство выполняется, и мы имеем некоторый $\widetilde{\delta} > 0$ "запас" для $\widetilde{g}_1(x)$:

$$\|\widetilde{g}_1(x)\|^2 \leqslant M - \widetilde{\delta}.$$

Оценим интеграл $\int\limits_{S_0} \|\widetilde{g}_1(x) - g_1(x)\|^2 dx = \Delta$. Если $\widetilde{g}_1(x)$ и $g_1(x)$ – непрерывные функции, то, очевидно, уменьшением ε_1 можем сделать Δ меньшим любого наперед заданного числа. Утверждение это остается справедливым и для $g_1, \widetilde{g}_1 \in \mathbf{L}$, поскольку непрерывные функции плотны в $\mathbf{L}$. В силу этих рассуждений мы можем закончить первый шаг доказательства леммы 3 с требуемыми оценками, но, имея теперь некоторый "$\widetilde{\delta}$-запас" для g_1: $\|g_1\|^2 \leqslant M - \widetilde{\delta}$.

На втором шаге, очевидно, мы сохраняем этот запас, а на третьем, заключительном этапе, мы "съедаем" часть "$\widetilde{\delta}$-запаса" за счет подходящего выбора δ_1 третьего шага. В этом обосновании леммы 5 свою роль сыграла приграничная полоса в S_0, где $R_H(x) \equiv x$.

Лемма 6. *Пусть* $R(x) \in [C^\infty(S_0)]^3$, $g(x) \in [C(S_0)]^3$, $g(x) - g\left(R(x)\right) \geqslant \delta I$, $\delta > 0$, $g(x) - \dfrac{\delta}{2} I \in \mathbf{V_K}$; $R(x) = x$, *если* $x \in \partial S_0$. *Существует вектор-функция* $R^\nu(x)$ *со свойствами:*

а) $R^\nu(x) \in \left[W^1_\infty(S_0)\right]^3$; $R^\nu(x) = (x_1, x_2, 0)$, *если* $x \in \partial S_0$;

б) $R^\nu(x)$ *определяет поверхность* ($g\left(R^\nu(x)\right)$ *невырождена п.в на* S_0);

в) $g\left(R^\nu(x)\right) \in \mathbf{V}_K$;

г) $\|R - R^\nu\|_{\mathbf{C}} \leqslant \varepsilon$;

д) $\|\Lambda_i\left(g\left(R^\nu\right)\right) - \Lambda_i\left(g\right)\|_{L^\infty} \leqslant \varepsilon$, $i = 1, 2$.

Положительное число ε *наперед задано.*

Доказательство. Проведем регулярную триангуляцию S_0. Сколь угодно мало "возмущая" $R(x)$, можем считать, что значения $R(x)$ в узлах триангуляции попарно-различны. Проведем кусочно-аффинную интерполяцию $\Pi_K R(x)$ на каждом треугольнике K, используя значения $R(x)$ в вершинах треугольника. Интерполяция, следовательно, принадлежит пространству элементов X_h, составленному из треугольников типа (1) [91, с. 56, с.149].

Далее используем результаты из теории интерполяции в пространствах Соболева, в частности, оценку [91, с. 131]

$$|\varphi_i - \Pi_K \varphi_i|_{m,\infty,K} \leqslant C_1 \frac{h_K^2}{\rho_K^m} |\varphi_i|_{2,\infty,K}, \quad m = 0, 1, \tag{20}$$

где h_K — диаметр K, ρ_K — диаметр вписанной в K окружности,

$$|\varphi|_{m,\infty,K} = \operatorname*{vrai\,sup}_{x \in K} \|D^m \varphi(x)\|.$$

При этом полагаем, что

$$\|D^m \varphi\| = \begin{cases} |\varphi|, & m = 0, \\ |\operatorname{grad} \varphi|, & m = 1. \end{cases}$$

Отметим, что константа C_1 от K не зависит.

Явные формулы, задающие $\Pi R(x)$ показывают, что $\Pi R(x)$ есть поверхность в нашем определении. В силу (20) для достаточно малых h имеем $\|g(R)-g(\Pi R)\|_{L_\infty} \leqslant \varepsilon_1$, $\|R(x)-\Pi R(x)\|_{\mathbf{C}} \leqslant \varepsilon_1$, $h = \max\{h_K\}$. Выбором ε_1 добиваемся того, что $\dfrac{\delta}{2}I+g\left(R(x)\right)-g\left(\Pi R(x)\right) \geqslant 0$. Поэтому $g(x)$ по-прежнему будет строго мажорировать $g\left(\Pi R(x)\right)$: $g(x) - g\left(\Pi R(x)\right) \geqslant \dfrac{\delta}{2}I$.

Образ каждого треугольника K на поверхности $\Pi R(x)$ есть треугольник, который обозначим как $\Pi R(K)$. Отображение $x \to \Pi R(x)$ аффинно на K, и, следовательно, линии главных степеней удлинения образуют ортогональную сетку прямых на $\Pi R(K)$, а сами $\lambda_1\left(\Pi R(x)\right)$, $\lambda_2\left(\Pi R(x)\right)$ постоянны на K. Обозначим их через λ_{1K}, λ_{2K}; $\lambda_{1K} \geqslant \lambda_{2K}$.

Рассмотрим следующий элементарный призматоид $ABCDEF$ (назовем его призматоидом первого ряда): основание его есть прямоугольник $ABCD$, $AD \geqslant AB$, $EF \parallel AD \parallel BC$. Точка E проектируется на плоскость $ABCD$ в точку K, EK — соответствующий перпендикуляр. Аналогично $FM \perp ABCD$, $M \in ABCD$. Полагаем, что $BK = AK = CM = MD$. (см. рис. 2). Призматоид располагается на плоскости треугольника $\Pi R(K)$ своим основанием так, что стороны основания параллельны линиям главных степеней удлинения. (см. рис. 1).

Пусть Φ — отображение точек основания $\Pi_1 \equiv ABCD$ на точки боковой поверхности $\Pi_2 \equiv ABE \cup EBCF \cup AEFD \cup BFC$, такое, что обратное отображение Φ^{-1} есть ортогональное проектирование Π_2 на Π_1; например, $\Phi(K) = E$.

Для отображения Φ, рассматриваемого как деформация Π_1, линии главных степеней удлинения параллельны AB или AD (это же справедливо для композиции $\Phi \circ \Pi R$); сами степени удлинения на каждой из четырех боковых граней постоянны и определяются углом наклона соответствующей грани к основанию. Пусть λ^{11} — степень удлинения элементарных отрезков в $ABCD$ параллельных AB, λ^{21} — параллельных AD.

Доля площади треугольников ABK и MCD в площади прямоугольника $ABCD$ может быть сделана меньшей любого наперед заданного ε_3,

если отношения $AD/AB, AD/EF$ взяты достаточно большими. Степень удлинения λ^{21} мы можем удержать в рамках $1 \leqslant \lambda^{21} \leqslant 1+\varepsilon_4$, где ε_4 наперед задано, если возьмем достаточно малыми отношения EK/LK (L — середина отрезка AB).

Итак, для любых заданных положительных чисел $a > 1$, ε_3, ε_4 можно выбрать относительные размеры призматоида: $\frac{AD}{AB}$, $\frac{AD}{EF}$, $\frac{LK}{EK}$, $\frac{\Gamma K}{EK}$ (Γ — основание перпендикуляра, опущенного из E на AD) такими, что:

$$\begin{aligned}
&1)\ \lambda^{11}(x) = a, \quad \lambda^{21}(x) = 1, \text{ если } x \in ABCD \setminus (ABK \cup DMC),\\
&2)\ \lambda^{21}(x) = 1+\varepsilon_4, \quad \lambda^{11} = 1, \text{ если } x \in ABK \cup DMC,\\
&3)\ \operatorname{mess}(ABK \cup DMC)/\operatorname{mess}(ABCD) \leqslant \varepsilon_3.
\end{aligned} \tag{21}$$

Очень важно для наших дальнейших рассуждений, что при подобном преобразовании призматоида с любым коэффициентом подобия соотношения 1)–3) сохраняются.

"Усложним" теперь элементарный призматоид $ABCDEF$, построив на трапециодальных боковых гранях аналогичные призматоиды (призматоиды второго ряда) $A_1B_1C_1D_1E_1F_1$, "длинные" стороны которых перпендикулярны к AD или BC. На рис. 3. показана "гофрировка" грани $AEFD$, аналогичной гофрировке подвергается грань $BEFC$.

Соответствие между точками боковой грани и точками накрывающей эту грань гофрированной поверхности по-прежнему определяется через проектирование. Пусть отображение Ψ переводит точку H грани $AEFD$ в точку $\Psi(H)$, являющуюся пересечением перпендикуляра, восстановленного к $AEFD$ из H, и соответствующей гофры. Продолжаем Ψ как тождественное отображение на всю боковую поверхность призматоида $ABCDEF$. Отображение Ψ вызывает относительные удлинения λ^{12}, λ^{22} элементов, параллельных EF, соответственно — $E\Gamma$.

Выбираем относительные размеры призматоида второго ряда так, чтобы аналогично (21) выполнялись условия для Ψ:

$$\begin{aligned}
&1)\ \lambda^{12}(x) = b > 1,\ \lambda^{22}(x) = 1,\ x \in A_1B_1C_1D_1 - (A_1B_1K_1 \cup D_1M_1C_1),\\
&2)\ \lambda^{22}(x) = 1+\varepsilon_4,\ \lambda^{12} = 1, \quad x \in A_1B_1K_1 \cup D_1M_1C_1,\\
&3)\ \operatorname{mess}(A_1B_1K_1 \cup D_1M_1C_1)/\operatorname{mess}(A_1B_1C_1D_1) \leqslant \varepsilon_3.
\end{aligned} \tag{22}$$

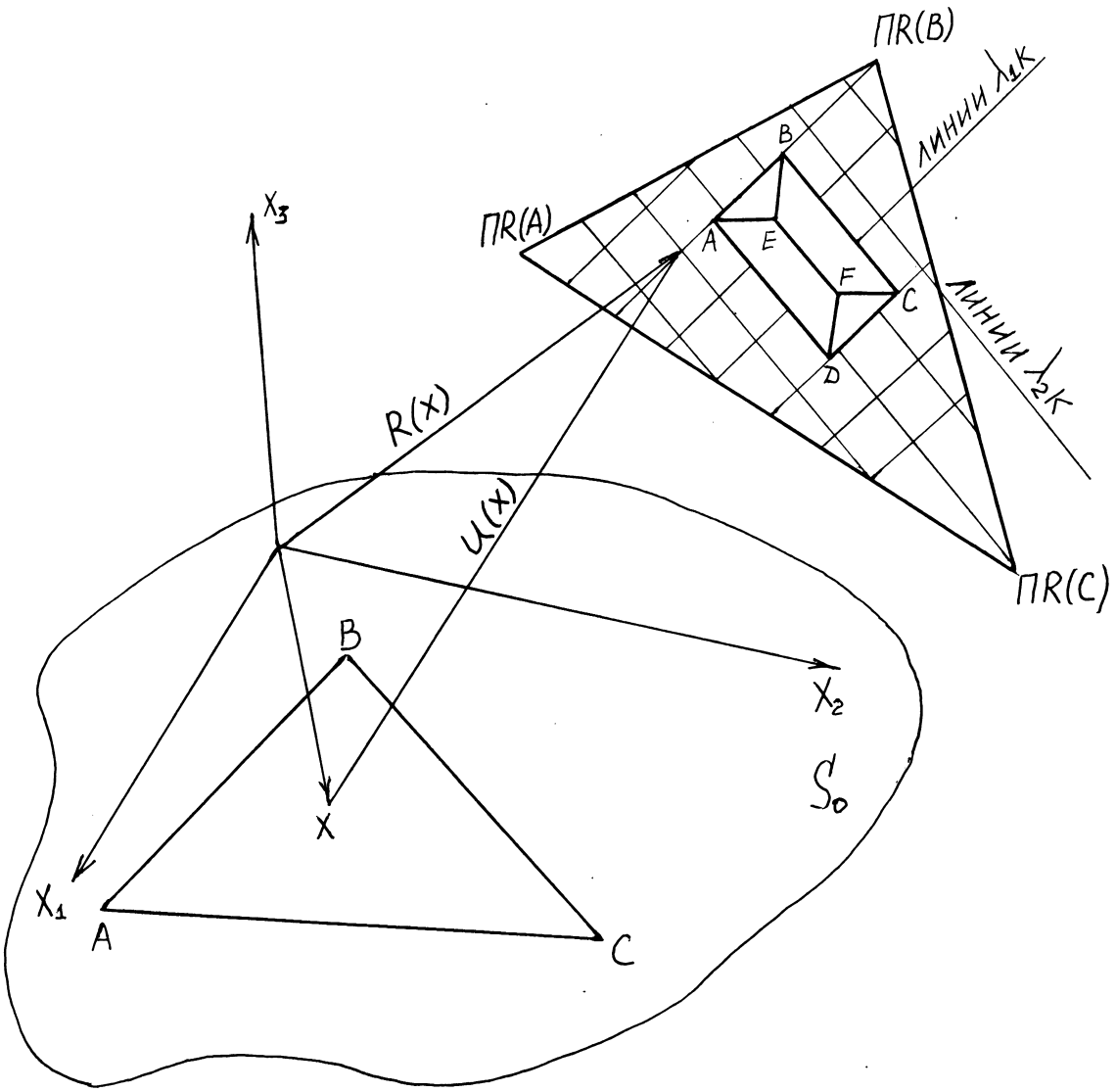

Рис. 1

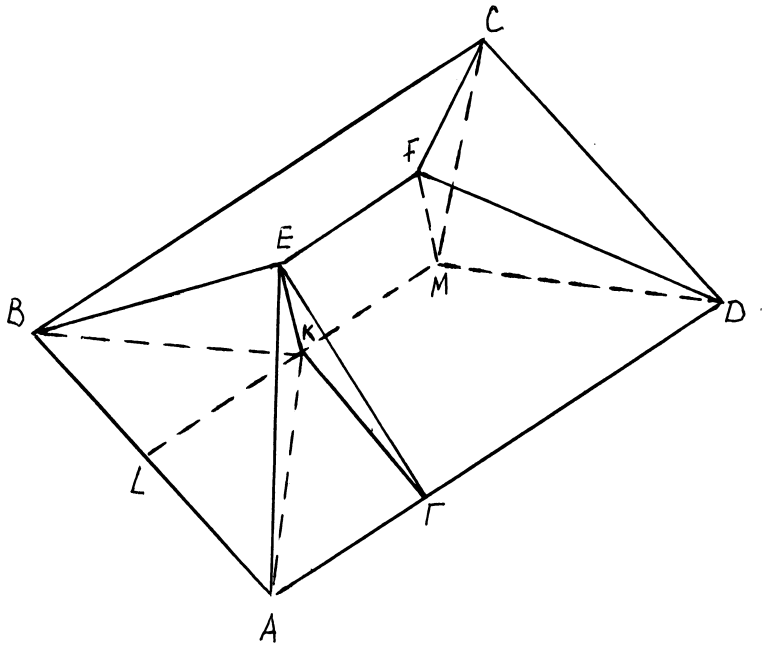

Рис. 2

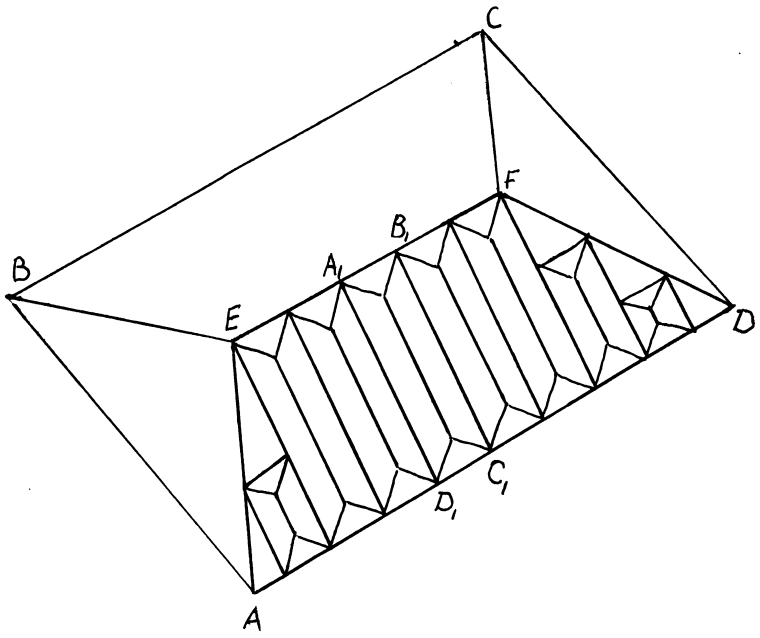

Рис. 3

Функция Ψ и соответствующие отношения естественно определяются и для грани $BCFE$.

Будем считать, что максимальный диаметр h, конечных элементов триангуляции S_0 столь мал, что в каждом треугольнике K:

$$\big|\lambda_1\big(g(x)\big) - \mu_{1K}\big| \leqslant \varepsilon_5, \quad \big|\lambda_2\big(g(x)\big) - \mu_{2K}\big| \leqslant \varepsilon_5, \quad \forall x \in K, \tag{23}$$

где μ_{1K}, μ_{2K} – значения $\lambda_1(g)$, $\lambda_2(g)$ в центре тяжести K. Имеем также:

$$\mu_{1K} > \lambda_{1K}, \quad \mu_{2K} > \lambda_{2K}. \tag{24}$$

Гофрированный призматоид с основанием $ABCD$ помещается на $\Pi R(K)$ так, что AB параллельно линии λ_1. Рассмотрим удлинения $\widetilde{\lambda}_1$, $\widetilde{\lambda}_2$, вызываемые суперпозицией $\Psi \circ \Phi \circ \Pi R(x) \equiv \varphi(x)$ для точек x, где эта суперпозиция определена. Множество этих точек обозначим через K_φ. Имеем:

$$\widetilde{\lambda}_1(x) = \begin{cases} \lambda_{1K} a, & \text{если } \varphi(x) \text{ принадлежит трапециодальным} \\ & \text{граням призматоидов второго ряда;} \\ \lambda_{1K} a(1+\varepsilon_4), & \text{если } \varphi(x) \text{ принадлежит треугольным} \\ & \text{граням призматоидов второго ряда;} \\ \lambda_{1K} a, & \text{если } \varphi(x) \text{ лежит в плоскости } AEFD \text{ или} \\ & BEFC \text{ призматоидов первого ряда;} \\ \lambda_{1K}, & \text{если } \varphi(x) \text{ лежит в плоскости } BEA \text{ или } DFC \\ & \text{призматоидов первого ряда.} \end{cases} \tag{25}$$

Аналогично:

$$\widetilde{\lambda}_2(x) = \begin{cases} \lambda_{2K} b, & \text{если } \varphi(x) \text{ принадлежит трапециодальным граням} \\ & \text{призматоидов второго ряда;} \\ \lambda_{2K}, & \text{если } \varphi(x) \text{ принадлежит треугольным граням} \\ & \text{призматоидов второго ряда;} \\ \lambda_{2K}, & \text{если } \varphi(x) \text{ лежит в плоскости } AEFD \text{ или } BEFC \\ & \text{призматоидов первого ряда;} \\ \lambda_{2K}(1+\varepsilon_4), & \text{если } \varphi(x) \text{ лежит в плоскости } BEA \text{ или } DFC \\ & \text{призматоидов первого ряда.} \end{cases} \tag{26}$$

Точки K, которые переводятся отображением φ на трапециодальные грани призматоидов второго порядка обозначим через $K_{1\varphi}$; $K_{2\varphi} = K_\varphi \setminus K_{1\varphi}$.

Выберем a и b (и определим тем самым относительные размеры призматоидов, помещаемых на $\Pi R(K)$) так, чтобы

$$\lambda_{1K} a(1+\varepsilon_4) = \mu_{1K} - \varepsilon_6, \quad \lambda_{2K} b = \mu_{2K} - \varepsilon_6, \tag{27}$$

где ε_6 взято удовлетворяющим условию:

$$0 < \varepsilon_6 < \inf_K \min_{i=1,2} (\mu_{iK} - \lambda_{iK}, \varepsilon_5). \tag{28}$$

Таким образом, для множества K_φ согласно (27), (28), (21), (22) имеем следующие соотношения:

$$\begin{aligned}
&1) \quad \lambda_1(\varphi(x)) = \widetilde{\lambda}_1(x) = \frac{\mu_{1K} - \varepsilon_6}{1+\varepsilon_4} = \mu_{1K} - \varepsilon_K, x \in K_{1\varphi}, \\
&\varepsilon_K \quad \text{может быть сделано сколь угодно малым выбором } \varepsilon_4 \quad \varepsilon_6; \\
&2) \quad \lambda_2(\varphi(x)) = \widetilde{\lambda}_2(x) = \mu_{2K} - \varepsilon_6; \quad x \in K_{1\varphi} \\
&3) \quad \lambda_1(\varphi(x)) < \mu_{1K}, \quad \lambda_2(\varphi(x)) < \mu_{2K}, \quad x \in K_{2\varphi}; \\
&4) \quad \operatorname{mess}(K_{2\varphi})/\operatorname{mess}(K_{1\varphi}) \leqslant \varepsilon_3;
\end{aligned} \tag{29}$$

Выбираем теперь абсолютные размеры призматоидов (высоты $h = EK$, $h_1 = E_1K_1$) так, чтобы общая высота гофрированного призматоида Ω над $\Pi R(K)$ не превосходила числа ε_7, задаваемого априорно:

$$h + h_1 \leqslant \varepsilon_7. \tag{30}$$

Покроем гофрированными призматоидами Ω_α, $\alpha = 1 \ldots m$, где каждое Ω_α конгруэнтно Ω, возможно большую площадь $\Pi R(K)$ таким образом, что основания Ω_α — прямоугольники — пересекаются разве лишь по границе и одинаково направлены. Пусть K_Ω – сумма этих прямоугольников, $K_0 = \Pi R(K) \setminus K_\Omega$. Используя отношения (29), добиваемся того, что:

$$\operatorname{mess}(K_0)/\operatorname{mess}(K) \leqslant \varepsilon_8, \tag{31}$$

Каждому Ω_α соответствует отображение φ_α.

Пусть каждое $\Pi R(K)$ покрыто подобным образом; числа ε_i выбираются наперед заданными, независимыми от K. Грани призматоидов, исключая их прямоугольные основания, и части K_0 треугольников $\Pi R(K)$

образуют многогранную поверхность $S^{(1)}$. Пусть $\varphi^{(1)}(x)$ есть непрерывное отображение S_0 на $S^{(1)}$, совпадающее с φ_α на множестве вида K_{φ_α}, и равное $\Pi R(x)$ в остальных точках. Сочетая оценки (20), (29), (30), (31) при подходящем выборе констант $\varepsilon_1,\ \varepsilon_3 - \varepsilon_8$ получаем:

$$\begin{aligned}
&1)\ \left\|\varphi^1(x) - R(x)\right\|_{C(S_0)} \leqslant \varepsilon;\\
&2)\ \left|\Lambda_1\big(g(\varphi^1(x))\big) - \Lambda_1\big(g(x)\big)\right| \leqslant \varepsilon,\ \left|\Lambda_2\big(g(\varphi^1(x))\big) - \Lambda_2\big(g(x)\big)\right| \leqslant \varepsilon \quad (32)\\
&\quad \text{во всех точках множества } \bigcup_{K,\alpha} K_{1\varphi_\alpha} \equiv D^{(1)};\\
&3)\ \operatorname{mess}\left(S_0 \setminus D^{(1)}\right) \leqslant \varepsilon_9.
\end{aligned}$$

Далее осуществляем итерационное построение последовательности отображений: $\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(2)}(x), \ldots \varphi^{(m)}(x), \ldots$. Для получения $\varphi^{(2)}(x)$ проводим те же рассуждения и построения, что и для получения $\varphi^{(1)}(x)$ (благодаря строгой мажоризации $\lambda_i(\varphi^{(1)}(x))$ числами $\lambda_i(g(x))$. Полагаем, что $\varphi^{(2)}(x)$ совпадает с $\varphi^{(1)}(x)$ на множестве $D^{(1)}$. В качестве S_0 берем множество $S_1 = S_0 \setminus D^{(1)}$. Триангуляцию S_1 образуют треугольники, составляющие множества $K_{2\varphi_\alpha}$ или переходящие в K_0, при всевозможном выборе K, α. Роль $\Pi R(x)$ играет $\varphi^{(1)}(x)$. В качестве нового значения ε_7 берем ε_7^2, а ε_9 полагаем равным ε_9^2. Подобным образом последовательно возникают множества $D^{(n)}$, S_n и отображения $\varphi^{(n)}$, $n = 1, 2, 3, \ldots$ По построению имеем:

$$\begin{aligned}
&1)\ \|\varphi^{(n+m)} - \varphi^{(n)}\|_{C(S_0)} \leqslant \varepsilon_7^{n+1} + \varepsilon_7^{n+2} + \ldots + \varepsilon_7^{n+m} \leqslant \frac{\varepsilon_7^{n+1}}{1-\varepsilon_7},\\
&2)\ \bigcup_{n=1}^{\infty} D^{(n)} = S_0, \qquad (33)\\
&3)\ \text{на } \bigcup_{n=1}^{m} D^{(n)} \text{ функция } \varphi^{(k)}(x) \text{ совпадает с } \varphi^{(m)}(x), \text{ если } k > m.
\end{aligned}$$

Из (33) следует, что существует вектор-функция $R^\nu(x)$, к которой последовательность $\varphi^{(n)}(x)$ сходится равномерно;

$$R^\nu(x) \in \left[W_\infty^{(1)}(S_0)\right]^3,\ R^\nu(x) = (x_1, x_2, 0),\ \text{если } x \in \partial S_0.$$

В силу (32) и (33, 2)), (33, 3)):

$$\big|\Lambda_1\big(R^\nu(x)\big) - \Lambda_1\big(g(x)\big)\big| \leqslant \varepsilon,$$
$$\big|\Lambda_2\big(R^\nu(x)\big) - \Lambda_2\big(g(x)\big)\big| \leqslant \varepsilon.$$

В силу условия леммы $g(x) - \dfrac{\delta}{2}I \in V_K$, для некоторой константы $\varepsilon_2 > 0$ выполняются неравенства:

$$\Lambda_1\big(g(x)\big)/\Lambda_2\big(g(x)\big) \leqslant K - \varepsilon_2, \quad \Lambda_1\Lambda_2^2\big(g(x)\big) \geqslant 1 + \varepsilon_2, \quad \forall x \in S_0.$$

В силу ε_2-"запаса", уменьшая, если необходимо ε_4, ε_6, добиваемся выполнения (благодаря оценкам (29)) неравенств:

$$\Lambda_1\big(R^\nu(x)\big)/\Lambda_2\big(R^\nu(x)\big) \leqslant K, \quad \Lambda_1\big(R^\nu(x)\big)\Lambda_2^2\big(R^\nu(x)\big) \geqslant 1,$$

$$\Lambda_1^2\big(R^\nu(x)\big)\Lambda_2\big(R^\nu(x)\big) \geqslant 1.$$

Очевидно также выполнение искомого условия: $\|R(x) - R^\nu(x)\| \leqslant \varepsilon$. Лемма доказана.

Замечание 1. Если $R(x)$ удовлетворяет условию $\varphi_3(x) \geqslant -d \quad \forall x \in S_0$, сохраняем при интерполяции $\Pi_K R(x)$ это свойство и свойство составленности $\Pi_K R(S_0)$ из треугольников, взяв:

$$\widetilde{R}(x) = \begin{cases} \Pi_K R(x), & \text{если } (\Pi_K R(x))_3 \geqslant -d; \\ -de_3, & \text{если } (\Pi_K R(x))_3 < -d. \end{cases}$$

Сохраняем неравенство $\varphi_3 \geqslant -d$ в дальнейших построениях, заметив, что мы можем помещать элементарные призматоиды на плоскость $\Pi R(K)$ с внешней стороны или с внутренней стороны, считая выбранным направление нормали к $\Pi R(K)$. При этом λ_1, λ_2 получаемых функций не изменяются. Выбираем стороны $\Pi R(K)$ так, чтобы призматоид не пересекал плоскость $x_3 = -d$.

Замечание 2. Можно вести исследование минимума функционала полной энергии $I(R)$, взяв вместо матричной функции $g(x)$ вектор-функцию $\Lambda(x) = (\Lambda_1(x), \Lambda_2(x))$. Мы не делаем этого по причине того, что матричная функция $g(x)$ естественно связана с поверхностью $R(x)$: это — матрица её квадратичной формы. Она не меняется при изгибании оболочки и несет больше информации о напряженно-деформированном состоянии мягкой оболочки, чем функция $(\lambda_1(x), \lambda_2(x))$. Но в доказательствах (например, конец доказательства нижеследующей теоремы) мы используем тот факт, что леммы 3,4,5 остаются справедливыми, когда в условиях и в заключении лемм требование (14.3) мажоризации возникающих матричных функций: $\widetilde{g}(x) \geqslant g\left(R_H(x)\right)$ п.в. заменяется на более слабое условие $\Lambda\left(\widetilde{g}(x)\right) \geqslant \Lambda\left(g\big(R_H(x)\big)\right)$.

3. Основной результат. Для произвольной симметричной матричной функции $g(x)$ введем множества

$$S_2(g) = \{x : x \in S_0,\ \ \Lambda_1\Lambda_2^2(g(x)) > 1\},$$

$$S_1(g) = \{x : x \in S_0,\ \ \Lambda_1\Lambda_2^2(g(x)) = 1,\ \ \Lambda_1(g(x)) > \Lambda_2(g(x))\}.$$

Можно условно назвать S_2 зоной двухосного состояния, S_1 — зоной одноосного состояния, соответствующего матричной функции $g(x)$.

Напомним, что мы представляем функционал полной энергии в виде $I(R) = I_1(g(R)) - I_2(R)$; здесь $I_2(R)$ — потенциал внешних сил, а $I_1(g(R)) = \int\limits_{S_0} э(\Lambda_1, \Lambda_2)dx$, где э — плотность внутренней энергии оболочки. Функционал I рассматриваем на множестве $\mathcal{R}_1$ вектор-функций $R(x)$ таких, что $R(x) \in \mathcal{R},\ g(R(x)) \in \mathbf{V}$.

Теорема 1. *Пусть $э(\Lambda_1, \Lambda_2)$ как функция собственных чисел $g(R)$ непрерывно дифференцируема на допустимом множестве, строго возрастает по каждой переменной, и $\partial э(\Lambda_1, \Lambda_2)/\partial\Lambda_1 > \partial э(\Lambda_1, \Lambda_2)/\partial\Lambda_2$, если $\Lambda_1 > \Lambda_2$. Пусть далее функционал $I_1(g)$ непрерывен и слабо полунепрерывен снизу в пространстве $[L_2(S_0)]^3$, а функционал $I_2(R)$ непрерывен в пространстве $[C(S_0)]^3$. Наконец, предположим, что существует ограниченная в пространстве $\mathbf{W}$ минимизирующая функционал I последовательность функций $R^1(x), R^2(x), \ldots, R^k(x) \ldots \in \mathcal{R}_1$. Пусть $g^1(x), g^2(x), \ldots$ — соответствующая последовательность матричных функций: $g^k(x) = g(R^k(x))$, $k = 1, 2, \ldots$, $x \in S_0$. Переходя, если необходимо к подпоследовательности, имеем:*

$$R^k(x) \rightharpoonup R_m \quad в \quad \mathbf{W}, \qquad g^k(x) \rightharpoonup g_m \quad в \quad \mathbf{L}_2.$$

При этом справедливы утверждения: $g_m(x) \in \mathbf{V}$, и $\lim\limits_{k\to\infty} I_1(g^k) = I_1(g_m)$. Далее, $S_2(g_m) = S_2(g(R_m))$, и $g_m(x) = g(R_m(x))$ почти всюду на $S_2(g_m)$. Почти всюду на $S_1(g_m)$ имеем $\Lambda_1(g_m(x)) = \Lambda_1(g(R_m(x)))$.

Доказательство. В силу наших предположений можем выделить подпоследовательности (индексируя их так же):

$$R^k(x) \rightharpoonup R_m \quad \text{в} \quad \mathbf{W}, \qquad g^k(x) \rightharpoonup g_m \quad \text{в} \quad \mathbf{L}_2. \tag{34}$$

Из леммы 1 следует $g_m(x) \in \mathbf{V}$. Пусть $a(x)$, $b(x)$ — фиксированные вектор-функции из пространства $[L_\infty(S_0)]^2$. В силу определения слабой сходимости

$$\int\limits_{S_0} a(x)g^k(x)b(x)dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int\limits_{S_0} a(x)g_m(x)b(x)dx.$$

Полагая $a(x) = b(x)$ и принимая во внимание равенство

$$g^k(x) = \nabla\varphi^k(x)(\nabla\varphi^k(x))^T,$$

последнее соотношение перепишем в виде

$$\int\limits_{S_0} \|a(x)\nabla\varphi^k(x)\|^2 dx \xrightarrow[k\to\infty]{} \int\limits_{S_0} a(x)g_m(x)a(x)dx. \tag{35}$$

С другой стороны, последовательность $\{a(x)\nabla\varphi^k(x)\}$ слабо сходится к функции $a(x)\nabla\varphi_m(x)$ (см. (34)). В силу выпуклости нормы отсюда получаем

$$\varliminf_{k\to\infty} \int\limits_{S_0} \|a(x)\nabla\varphi^k(x)\|^2 dx \geqslant \int\limits_{S_0} \|a(x)\nabla\varphi_m(x)\|^2 dx. \tag{36}$$

Сравнение неравенств (35) и (36) приводит к следующему заключению: для любой функции $a(x) \in [L_\infty(S_0)]^2$ имеет место

$$\int\limits_{S_0} a(x)g_m(x)a(x)dx \geqslant \int\limits_{S_0} a(x)\nabla\varphi_m(x)\nabla^T\varphi_m(x)a(x)dx. \tag{37}$$

Стандартными рассуждениями из (37) заключаем, что почти всюду на S_0

$$g_m(x) \geqslant \nabla\varphi_m(x)\nabla^T\varphi_m(x) = g(R_m(x)). \tag{38}$$

Неравенство (38) — ключевое для дальнейших рассуждений. Оно равносильно положительной полуопределенности симметричной матрицы

$$h(x) = g_m(x) - g(R_m(x)).$$

Из слабой полунепрерывности снизу функционала $I_1(g)$ имеем

$$\varliminf_{k\to\infty} I_1(g^k) \geqslant I_1(g_m).$$

Предположим, что $\underline{\lim}_{k\to\infty} I_1(g^k) - I_1(g_m) = \gamma > 0$. Из лемм 3, 6 и замечаний к ним следует, что существует допустимая вектор-функция $\widetilde{R}(x)$, находящаяся в ε-C-окрестности функции $R_m(x)$, и для которой

$$|I_1(g_m) - I_1(g(\widetilde{R}))| \leqslant \varepsilon.$$

Отсюда при достаточно малом ε вытекает неравенство

$$I_1(g(\widetilde{R})) - I_2(\widetilde{R}) < \underline{\lim}_{k\to\infty} I_1(g^k) - I_2(R_m).$$

Это противоречит тому, что последовательность $\{R^k(x)\}$ минимизирует функционал $I(R)$. Следовательно, $\gamma = 0$.

Рассмотрим далее матричную функцию $\widetilde{g}(x)$, определяемую равенством $\widetilde{g}(x) = (1 - t(x))g_m(x) + t(x)g(R_m(x))$, где

$$t(x) = \sup\{t : t \in [0,1],\ \ \Lambda_1\Lambda_2^2(\widetilde{g}(x)) \geqslant 1\}.$$

Относительно $\widetilde{g}(x)$ имеем $\widetilde{g}(x) \in \mathbf{V}$ и $g_m \geqslant \widetilde{g} \geqslant g(R_m)$. Случай $g_m(x) \neq \widetilde{g}(x)$ на множестве положительной меры приводит к противоречию рассуждениями, аналогичными вышеизложенным. Поэтому $g_m(x) = \widetilde{g}(x)$ п.в. Если на множестве положительной меры $\Lambda_1\Lambda_2^2(g_m(x)) = 1$, $\Lambda_1(g_m(x)) > \Lambda_1(g(R_m(x)))$, и $\Lambda_1(g_m(x)) > 1$, то, уменьшая подходящим образом значения $\Lambda_1(g_m(x))$ и увеличивая значения $\Lambda_2(g_m(x))$, можно построить матричную функцию $\overline{g}(x)$ со свойствами

$$\overline{g}(x) \in \mathbf{V},\ I_1(\overline{g}) < I_1(g_m),\ \overline{g}(x) \geqslant g(R_m(x)) \text{ п.в. на } S_0.$$

Это опять ведет к противоречию. Из последних рассуждений следует, что на множестве

$$S_2 = \{x : x \in S_0,\ \ \Lambda_1\Lambda_2^2(g_m(x)) > 1\}$$

почти всюду

$$\Lambda_1(g_m(x)) = \Lambda_1(g(R_m(x))),\ \Lambda_2(g_m(x)) = \Lambda_2(g(R_m(x))).$$

На множестве

$$S_1 = \{x : x \in S_0,\ \ \Lambda_1\Lambda_2^2(g_m(x)) = 1,\ \ \Lambda_1(g_m(x) \neq \Lambda_2(g_m(x))\}$$

почти всюду имеет место равенство $\Lambda_1(g_m(x)) = \Lambda_1(g(R_m(x)))$.

Согласно полученным результатам $\Lambda_1(g_m(x)) = \Lambda_1(g(R_m(x)))$ п.в. в зоне $S_2(g(R_m)) \cup S_1(g(R_m))$. Совпадение $g(R_m)$ и g_m в точках множества $S_2(g_m)$ следует из факта, что почти всюду $g_m \geqslant g(R_m)$ и $\Lambda_i(g_m) = \Lambda_i(g(R_m)), i = 1, 2$. Действительно, этот факт эквивалентен условиям:

$$(g_m)_{11} - (g(R_m))_{11} \geqslant 0, \quad (g_m)_{22} - (g(R_m))_{22} \geqslant 0,$$
$$(g_m)_{11} + (g_m)_{22} = (g(R_m))_{11} + (g(R_m))_{22},$$
$$[(g_m)_{11} - g(R_m)_{11}][(g_m)_{22} - g(R_m)]_{22} - [(g_m)_{12} - (g(R_m))_{12}]^2 \geqslant 0.$$

Из первых двух равенств следует: $(g_m)_{11} = (g(R_m))_{11}$, $(g_m)_{22} = (g(R_m))_{22}$. Из последнего: $(g_m)_{12} = (g(R_m))_{12}$. Доказательство теоремы закончено.

Следствие 1. *Если $g_m(x)$ является алгебраически внутренней точкой [65, с. 28] множества $\mathbf{V}$, то достигается минимум функционала полной энергии мягкой оболочки.*

Следствие 2. *В условиях теоремы 1, если э(Λ_1, Λ_2) строго выпукла (при $\Lambda_1\Lambda_2^2 > 1$), то имеет место сильная сходимость $g^k(x)$ к $g_m(x)$ в пространстве $[L_1(S_2(g_m))]^3$ (а также в пространстве $[L_1(S_2(g(R_m)))]^3$).*

Это утверждение очевидным образом следует из теорем 1, 2 работы [90]. Интересно сравнить этот результат с теоремой 1.4.2.

4. Определение обобщенного решения. Функционал полной энергии $I(R)$ минимизировался на множестве $\mathcal{R}_1$ вектор-функций $R(x)$, где $R(x) \in \mathcal{R}$, $g(R(x)) \in \mathbf{V}$. Рассмотрим более широкое множество $\mathcal{R}_2$, которое образуют функции $R(x)$ со свойствами: 1) $R(x) \in \mathbf{W}$; 2) $R(x) = x$, если $x \in \partial S_0$; 3) для $R(x)$ можно указать матричную функцию $g(x)$ с условиями: а) $g(x) \in \mathbf{V}$; б) $g(x) \geqslant g(R(x))$ п.в. на S_0; в) на $S_2(g)$ предыдущее неравенство превращается в равенство: $g(x) = g(R(x))$ п.в.; г) $\Lambda_1(g(x)) = \Lambda_1(g(R(x)))$ п.в на $S_1(g)$.

Легко убедиться в том, что если для $R(x)$ функция $g(x)$ со свойствами а)–г) существует, то она определяется однозначно на $S_2(g)$; само множество $S_2(g)$ определяется единственным образом по $R(x)$; на $S_0 \setminus S_2$ однозначно определяется вектор-функция $\lambda(x) = (\Lambda_1(x), \Lambda_2(x))$ собственных значений $g(x)$.

Действительно, пусть $g_1(x)$ — другая матричная функция для $R(x)$ со свойствами а)–г). На $S_2(g)$ имеем равенство: $g(R(x)) = g(x)$, аналогично на $S_2(g_1)$: $g(R(x)) = g_1(x)$, следовательно, и на $S_2(g)$ и на $S_2(g_1)$ имеем $\Lambda_1\Lambda_2^2(g(R(x))) > 1$, а потому $S_2(g) = S_2(g_1)$.

Зона $S_1(g)$ также однозначно определяется самой функцией $R(x) \in \mathcal{R}_2$. Ибо, пусть $x \in S_1(g)$, тогда в этой точке $\Lambda_1(g) = \Lambda_1(g_1)$ и $\Lambda_2(g_1) \geqslant \Lambda_2(g)$ в силу того что $\Lambda_1(g)\Lambda_2^2(g) = 1$ и $\Lambda_1(g_1)\Lambda_2^2(g_1) \geqslant 1$. Если $\Lambda_2(g_1) > \Lambda_2(g)$, то $\Lambda_1(g_1)\Lambda_2^2(g_1) > \Lambda_1(g)\Lambda_2^2(g) = 1$, поэтому $x \in S_2(g_1)$ и

$$\Lambda_2(g_1(x)) = \Lambda_2(g(R(x))) \leqslant \Lambda_2(g(x)).$$

Получилось противоречие. Следовательно, $x \in S_1(g_1)$, включение

$$S_1(g) \subseteq S_1(g_1)$$

доказано. В другую сторону оно доказывается аналогично. Оставшаяся часть утверждения об однозначности очевидна.

Функцию $g(x)$, соответствующую $R(x)$ по определению $\mathcal{R}_2$, обозначим через $g_R(x)$. Определим на $\mathcal{R}_2$ функционал I_r формулой:

$$I_r(R(x)) = I_1(g_R(x)) - I_2(R(x)). \tag{39}$$

В силу установленной выше однозначности его определение корректно. Имеет место

Теорема 2. *Пусть выполнены условия теоремы 1 и следствия 2. Функционал $I_r(R(x))$ достигает своего минимума на множестве $\mathcal{R}_2$. При этом имеет место равенство:*

$$\min_{R\in\mathcal{R}_2} I_r(R) = \min_{R\in\mathcal{R}_1} I(R). \tag{40}$$

Всякая минимизирующая в $\mathcal{R}_1$ последовательность функций, слабо сходящаяся в $\mathbf{W}$, сходится к элементу R_m из $\mathcal{R}_2$, на котором достигается минимум I_r. При этом соответствующая последовательность $g(R^{(k)}(x))$ сходится сильно в пространстве $[L_1(S_2(g(R_m)))]^3$ к $g(R_m)$.

Доказательство. Пусть (R_m, g_m) есть пара функций, обсуждаемая в доказательстве основной теоремы 1, для нее:

$$\min_{R\in\mathcal{R}_1} I(R) = I_1(g_m) - I_2(R_m), \quad g_m = g_{R_m}, \quad R_m \in \mathcal{R}_2. \tag{41}$$

Предположим, что существует функция $\overline{R}(x) \in \mathcal{R}_2$, для которой

$$I_r(\overline{R}) < I_r(R_m).$$

По $\overline{R}$ как в доказательстве теоремы 1 мы можем построить вектор-функцию $R_H(x)$такую, что $R_H(x) \in \mathcal{R}_1$ и $I(R_H) < I_r(R_m)$. Это противоречит (41). Теорема доказана.

Привлекая леммы 4, 5 и проводя очевидные изменения в доказательстве теорем 1, 2, получаем следующий результат.

Теорема 3. *Для мягкой оболочки из материала Трилора с потенциалом* $э(\Lambda_1, \Lambda_1) = \Lambda_1 + \Lambda_2 + 1/(\Lambda_1\Lambda_2)$ *в релаксированной задаче минимизации функционала полной энергии:*

$$\min_{R \in \mathcal{R}_2 \bigcap B_m} I_r(R),$$

минимизирующий элемент существует. Здесь $B_m = \{R(x) : \|g(R)\|_{\mathbf{L}} \leqslant M\}$. *При потенциале* $э(\Lambda_1, \Lambda_1) = \Lambda_1^2 + \Lambda_2^2 + 1/(\Lambda_1^2\Lambda_2^2)$ *минимизирующий элемент существует при отыскании минимума на всем множестве* $\mathcal{R}_2$. *Эти утверждения справедливы и для задачи с препятствием, когда* $\mathcal{R}_2$ *ограничивается условием (10); или условием* $g(R(x)) \in \mathbf{V}_K$.

При замене множества $\mathbf{V}$ *в описании* $\mathcal{R}_2$ *на* $\mathbf{V}_M$ *имеет минимизирующий элемент на* $\mathcal{R}_2$ *и релаксированная задача для оболочки из материала Муни. На величину* M *необходимы ограничения из леммы 2.*

Замечание 3. В случае закона Трилора, естественно считать, что $R(x) \in \left[W_2^1(S_0)\right]^3 \equiv \mathbf{W}_2$. Однако, это пространство не обеспечивает непрерывность $R(x)$ и "не реализует" наше представление о поверхности. Также, поскольку наша техника исследования связана с матрицей первой квадратичной формы $g(x)$, мы в случае закона Трилора сохраняем ограничение: $R(x) \in \mathbf{W}$. Поскольку свойством коэрцитивности I не обладает пологаем, что I минимизируется на ограниченном подмножестве пространства $\mathbf{W}$, что эквивалентно дополнительному условию на $R(x)$: $\|g\left(R(x)\right)\|_{\mathbf{L}_2}^2 \leqslant M$.

Замечание 4. Можно построить пример, когда соответствующая дифференциальная задача при физическом законе Трилора, поставленная в пространстве W_4^1, имеет решение, для которого $\Lambda_1\Lambda_2^2 < 1$ на множестве положительной меры. Этот факт свидетельствует в пользу релаксации задачи минимизации, но не доказывает, конечно, отсутствия минимизирующей функции $R_m(x)$ для исходной задачи на множестве $\mathcal{R}_1$. Последнее осталось открытой проблемой.

Замечание 5. По релаксационной задаче $\min\limits_{R\in\mathcal{R}_2} I_r(R)$ определяется понятие обобщенного решения, которое согласуется с тем, какую трактовку дают, например, авторы работ [83], [68] численно получаемым решениям задачи равновесия мягкой оболочки. Геометрия оболочки $R(x)$ воспринимается как действительная только в зоне $S_2(g(R))$; а в области $S_0 \setminus S_2$ считается, что оболочка может потерять устойчивость и приобрести мелкоскладчатое строение. В то же время, относительные удлинения и соответствующие им касательные усилия (определяемые матрицей $g_m(x)$) считаются соответствующими реальным на всей оболочке.

Замечание 6. Можно распространить идею поливыпуклости с функционала $I(R)$ на $I_1(g(R))$, выделяя в I_1 как самостоятельные вхождения величин $g(R),\ V(R),\ \det g(R)$:

$$I_1(g(R)) = \widetilde{I}_1(g(R), V(R), \det g(R)).$$

Вместо V можно взять "более информативную" матрицу U, определяющую левый тензор искажения из разложения $\overset{\circ}{\nabla}R = U \cdot O$. Исследование отношений между слабыми пределами $R^{(n)},\ V\left(R^{(n)}\right),\ \det\left(g(R^{(n)})\right)$ имеется в книге Сьярле [92], где оно ведется с помощью методов компенсированной компактности ([92], §7.5, §7.6). Пользуясь этим замечанием, возможно, удастся ослабить требования на физический закон, налагаемые в проведенных исследованиях.

Замечание 7. Теоремы типа 1, 2 с некоторыми ограничениями справедливы для широкого класса физических законов, представленных трехконстантными потенциалами, в частности, потенциалами Бартенева-Хазановича, Черных [100, с. 88] Вообще, леммы 3–6, как видно из их доказательств, остаются справедливыми для физического закона, который накладывает ограничение на собственные числа V вида: $\Lambda_i^\alpha \Lambda_{3-i}^\beta \geqslant 1,\ \alpha,\ \beta \geqslant 0,\ i = 1, 2$, и вида $\Lambda_1 \Lambda_2^{-\beta} \leqslant K$.

Глава 4

Моделирование аэрогидродинамических нагрузок при отрывном обтекании оболочки. Задачи взаимодействия

Цель главы — представить модели течения над оболочкой, позволяющие с большой точностью рассчитать давление со стороны жидкости. Ввиду большой деформативности мягких оболочек разработка таких моделей необходима.

§ 1. Стационарные задачи

Многие инженерные сооружения из мягких оболочек — воздухоопорные помещения, паруса, парашюты, дирижабли и т.п. — находятся под воздействием ветровой нагрузки или потока жидкости. Расчет напряженно-деформированного состояния оболочек, представляющих эти конструкции, становится задачей взаимодействия мягкой оболочки с течением газа или жидкости — задачей гидроупругости.

Предметом исследования данного параграфа является установившееся взаимодействие бесконечно длинной тонкой упругой цилиндрической оболочки и безграничного потока маловязкой несжимаемой жидкости. На бесконечности поток считается равномерным и направленным перпендикулярно к образующей цилиндра. Рассматривается область чисел Рейнольдса ($Re_d \geq 10^5$), когда за телом образуется развитый турбулентный след. Если в начале движения жидкости или оболочки вязкость оказывает решающую роль на структуру течения, то затем ее действие проявляется в узких слоях, ограничивающих обширные зоны эффективно невязкого потока. Тогда течение может быть представлено следующим образом. Во-первых, имеется пограничный слой, ламинарный или турбулентный, весьма тонкий при указанных числах Рейнольдса. Во-вторых,

существует след, в котором преобладают мелкомасштабные вихреобразования, за счет этого выравнивается давление на тыльной поверхности цилиндра, и граница следа становится квазистационарной. Наконец, можно выделить внешнее потенциальное движение жидкости, ограниченное передней частью контура тела и отошедшей линией тока. Отметим, что внутри оболочки предполагается постоянное давление, создаваемое заполняющим ее газом. Такая зонная модель течения сводит задачу определения сил, вызывающих деформацию цилиндра, в основном к расчету внешнего невязкого ядра потока.

Специфической особенностью рассматриваемого нами движения жидкости является то, что оно формируется вокруг профиля заранее неизвестной формы. Границы потока определяются взаимодействием упругих сил оболочки и сил давления жидкости. В работе постоянно будет предполагаться, что результирующее течение есть течение вокруг плохообтекаемого, а не тонкого гладкого препятствия. Соответственно этому в основном рассматриваются замкнутые оболочки, близкие по профилю к круговой (но нет трудностей на перенос результатов на оболочки, закрепленные по краям, и оболочки со свободным краем).

Большинство удовлетворительных математических моделей отрывного обтекания, исходящих из зонной схематизации течения, базируется на знании коэффициента донного давления c_p и положения точки S_0 отрыва пограничного слоя (альтернативным подходом является численное решение полных уравнений Навье-Стокса). Если тело сильно меняет форму под воздействием потока, а это, как правило, имеет место для мягких оболочек ввиду их большой деформативности, возникает проблема определения нового положения точки отрыва и нового значения донного давления при изменении обтекаемой формы. Расчет внешнего невязкого течения по выбранной модели должен, следовательно, сочетаться с расчетом пограничного слоя.

Простая "зонная" модель турбулентного отрывного обтекания "нетонких" тел, позволяющая рассчитывать в хорошем согласии с экспериментом распределение давления жидкости вдоль обтекаемого контура до точек отрыва, предложена Г.Паркинсоном и Т.Яндали [78], [69]. Модификация этой модели П.Бирманом и И.Факреллом [122] позволя-

ет рассчитывать трехмерные, не обязательно, осесимметричные, отрывные течения. Модель хорошо приспособлена для совместных расчетов зоны потенциального течения и пограничного слоя [124], [123] и оправдала себя в различных задачах [138], [137], [72], [37] Отметим также, что модель Паркинсона-Яндали (впрочем, как и любая другая модель) правильно отражает не все гидродинамические явления. Как отмечено Г.Ю.Степановым [28, с. 16], если требовать плавного отрыва (с конечной кривизной отходящей от поверхности линии тока), то положение точки отрыва и скорость жидкости в точке отрыва будут связаны определенным соотношением, что не позволяет независимо задавать координаты точек отрыва и коэффициент донного давления. Нас, однако, не интересует поведение оторвавшейся линии тока и распределение давления в следе на расстоянии от тела. Будем помнить, что выбор модели диктуется целью, а наша цель — определить распределение давления жидкости именно на поверхности оболочки в определенном диапазоне скоростей набегающего потока до тех пор, пока оболочка остается "плохообтекаемой". Многочисленные публикации (см., например, [37], [69], [72], [122], [123], [137], [138]) подтверждают, что модель Паркинсона-Яндали с независимым выбором S_0 и c_p этой цели удовлетворяет.

К турбулентному отрывному течению вокруг плохообтекаемого тела близки кавитационные течения, когда след за телом становится газообразным. Для этого класса отрывных потоков предложены и хорошо изучены различные модели [18], [36], [133] [21].

1. Вывод интегрального уравнения для струйного обтекания. Цель этого и последующего пунктов — показать, что оба класса отрывных течений, о которых речь шла выше, объединяет интегральное уравнение одинаковой структуры для расчета гидродинамических характеристик.

Напомним кратко, как получают уравнение в теории струйного обтекания. Традиционно, зону, которую занимает течение, конформно отображают на верхнюю половину Г единичного круга с центром в начале координат ζ-плоскости. "Твердая" граница потока переходит в верхнюю полуокружность $\zeta = e^{i\sigma},\ 0 < \sigma < \pi$, свободные линии тока в диаметр

$(-1, +1)$.

Пусть s обозначает дуговую координату на обтекаемом контуре, отсчитываемую от точки разветвления потока C; возрастанию s соответствует движение по контуру, когда поток остается слева. Пусть $\varphi(s)$ — угол между положительным направлением действительной оси и касательной в точке s. Контур предполагается гладким, имеющим непрерывную кривизну в каждой точке, исключая, возможно , точку C, где контур может иметь излом, характеризующийся углом $\beta\pi$ между касательными в точке C (угол содержит в себе контур).

Кроме физической переменной z вводится комплексный потенциал w и его производная $\omega = dw/dz$. Дополнительно рассматривается верхняя полуплоскость Π, в которой изменяется переменная:

$$t = -\frac{\zeta + \zeta^{-1}}{2} \quad , \tag{1}$$

когда ζ пробегает Γ. Роль этой полуплоскости Π проясняется из возможности явного представления производной dw/dt. Именно, качественный анализ особенностей функции $w = w(t)$ с использованием теоремы Пойа-Стоуна [18, с. 61, 85] приводит к формуле:

$$\frac{dw}{dt} = \frac{Mt}{\prod\limits_{k=0}^{2}(1 - \alpha_k t)}, \quad t \in \Pi\,, \tag{2}$$

где константы $M > 0,\ -1 < \alpha_k < 1$; переменная t может принимать и граничные значения на Π.

Относительно $\omega(\zeta)$ можно сказать, что это аналитическая в Γ, непрерывная и не обращающаяся в нуль за исключением точки C на замыкании $\overline{\Gamma}$ функция [18, с. 169]. Наконец, определим функцию $\Omega(\zeta) = \theta(\zeta) + i\tau(\zeta)$ соотношением:

$$\omega(\zeta) = \left(\frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}\right)^{\beta} e^{-i\Omega(\zeta)}\,. \tag{3}$$

Разделяющиеся струи около препятствия полностью определяются выбором аналитической при $|\zeta| < 1$ и непрерывной при $|\zeta| \le 1$ функции $\Omega(\zeta)$ и параметров $M,\ \alpha_0,\ \alpha_1,\ \alpha_2$ [18, с. 170].

Между θ и φ имеется простая связь:

$$\theta = \begin{cases} \varphi - \pi + \frac{\beta}{2}\pi & \text{на "верхней" половине контура,} \\ \varphi - \frac{\beta}{2}\pi & \text{на "нижней".} \end{cases} \tag{4}$$

Помимо $\theta(\sigma)$ вводят в рассмотрение еще функции:

$$\lambda(\sigma) = -\frac{d\theta}{d\sigma}, \quad \chi(s) = -\frac{d\varphi}{ds}, \quad \nu(\sigma) = \frac{\sin\sigma(1+\sin\sigma)^{\beta}|\cos\sigma|^{1-\beta}}{\prod\limits_{k=0}^{2}(1+\alpha_k\cos\sigma)}, \tag{5}$$

все они имеют соответствующую геометрическую интерпретацию.

Следующие интегральные операторы входят в структуру основного уравнения:

$$C\theta(\sigma) = \tau(\sigma) = \frac{\sin\sigma}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\frac{\theta(\sigma)-\theta(\sigma')}{\cos\sigma-\cos\sigma'}d\sigma'\,; \tag{6}$$

$$J\lambda(\sigma) = \theta(\sigma) = \int\limits_{\sigma}^{\frac{\pi}{2}}\lambda(\sigma)d\sigma\,; \tag{7}$$

$$D\lambda(\sigma) = \tau(\sigma) = \int\limits_0^{\pi} D(\sigma,\sigma')\lambda(\sigma')d\sigma'\,; \tag{8}$$

где

$$D(\sigma,\sigma') = \frac{2}{\pi}\sum_{j=1}^{\infty}\frac{\sin j\sigma\sin j\sigma'}{j}\,. \tag{9}$$

При выборе в качестве основной неизвестной функции $s = s(\sigma)$ искомое интегральное уравнение имеет вид [18, с. 174]:

$$s(\sigma) = M\int\limits_{\frac{\pi}{2}}^{\sigma}\nu(\sigma)e^{-C\theta(s(\sigma))}d\sigma\,. \tag{10}$$

Если контур тела сохраняет положительность кривизны во всех точках (контур не имеет точек перегиба), то разделенное течение около препятствия можно характеризовать, используя решение $\lambda(\sigma)$ уравнения:

$$\lambda(\sigma) = M\nu(\sigma)k(J(\lambda(\sigma)))e^{-D\lambda(\sigma)}\,, \tag{11}$$

где $k(\theta) = \chi(s)$. После нахождения $s(\sigma)$ или $\lambda(\sigma)$ определяется $\Omega(\zeta)$ и остальные характеристики течения находятся по формулам (1), (2), (3) и формуле

$$z(\zeta) = \int_i^\zeta \omega^{-1} \left(\frac{dw}{dt}\right) \left(\frac{dt}{d\zeta}\right) d\zeta.$$

2. Вывод интегрального уравнения для модели отрывного обтекания со следом Паркинсона-Яндали. Ограничимся рассмотрением симметричного обтекания. Интегральное уравнение общего случая получается аналогично. Пусть ось симметрии двумерного тела без изломов контура параллельна скорости $\overline{U}_\infty$ равномерного на бесконечности и неограниченного потока несжимаемой жидкости и совпадает с осью x. Ось y проходит через точки отрыва пограничного слоя S_1, S_2, положение которых, также как и коэффициент донного давления c_p, считаются известными. Сдвиговые слои, ограничивающие след, заменяются линиями тока, уходящими по касательной к телу в точках S_1, S_2. Течение внутри этих линий не рассматривается. Пограничный слой полагается тонким и границей зоны G потенциального внешнего потока являются, таким образом, часть контура тела и отрывные линии тока.

Пусть $F(\zeta)$ — конформное отображение внешности круга γ вспомогательной плоскости ζ на внешность разреза физической плоскости z вдоль части S_1AS_2 обтекаемого контура, нормированное условием: $F(\infty) = \infty$, $F'_\zeta(\infty) > 0$ (рис. 1). Точки круга $\zeta_0 = Re^{i\alpha}$ и $\overline{\zeta}_0 = Re^{-i\alpha}$ являются критическими для $F(\zeta)$, поскольку соответствуют концевым точкам разреза.

Пусть функция $s(\sigma)$ описывает соответствие, устанавливаемое по отображению F между точками разреза с дуговой координатой s (отсчитывается от точки торможения A обходом против часовой стрелки) и точками с полярным углом σ ($\zeta = Re^{i\sigma}$ на γ). Для дальнейшего введем еще функцию $x(\sigma)$:

$$s(\sigma) = 2R \int_0^\sigma (\cos\alpha - \cos\sigma) x(\sigma) d\sigma \,. \tag{12}$$

Течение в ζ-плоскости согласно модели Паркинсона-Яндали моделирует-

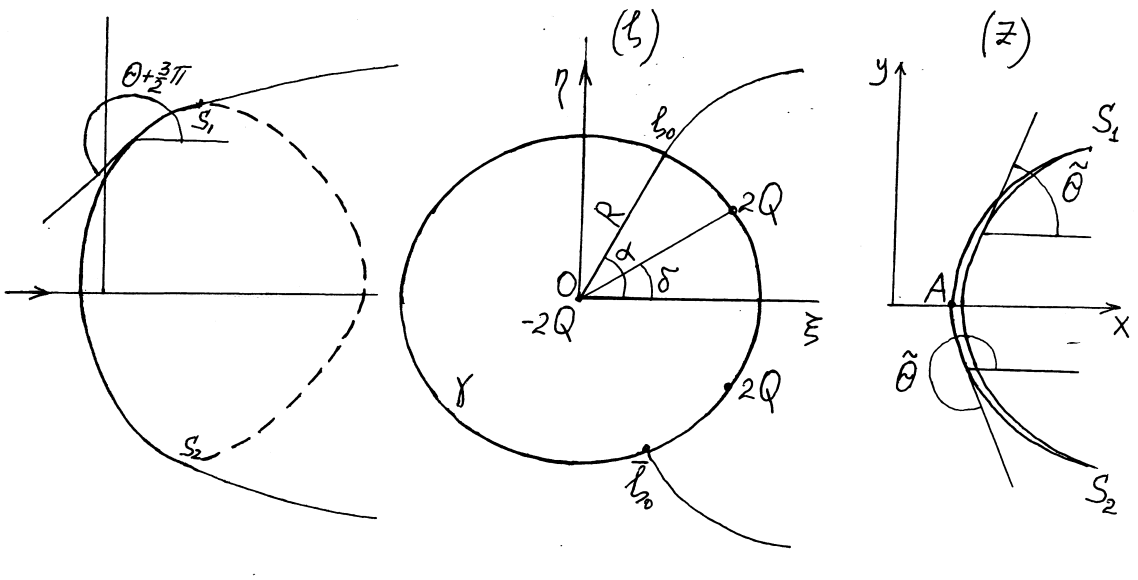

Рис. 1

ся двумя источниками мощности $2Q$, расположенными на контуре круга γ симметрично относительно оси ξ под углом δ к ней, стоком мощности $-2Q$ в центре и равномерным потоком со скоростью $\overline{V}_\infty$ на бесконечности. Величина V_∞ , также, как угол α, находятся по отображению F. Легко записать комплексный потенциал $w(\zeta)$ и комплексную скорость $\omega(\zeta)$ общего потока:

$$w(\zeta) = V_\infty \left(\zeta + \frac{R^2}{\zeta}\right) + \frac{Q}{\pi} \ln \frac{(\zeta - Re^{i\delta})(\zeta - Re^{-i\delta})}{\zeta},$$

$$\omega(\zeta) = V_\infty \left(1 - \frac{R^2}{\zeta^2}\right) + \frac{Q}{\pi} \left(\frac{1}{\zeta - Re^{i\delta}} + \frac{1}{\zeta - Re^{-i\delta}} - \frac{1}{\zeta}\right). \qquad (13)$$

Чтобы свободные линии тока стали нормальными к поверхности γ в точках отрыва, а их образы в плоскости z касательными к обтекаемому телу, интенсивность источника $2Q$ и угол δ нужно подобрать из условия превращения точек ζ_0, $\overline{\zeta}_0$ в точки полного торможения. Кроме того, значения Q и δ должны обеспечить равенство скорости в точке отрыва на плоскости z заданной величине (соответствующей c_p). Эти условия связывают Q и δ двумя соотношениями:

$$\omega(\zeta_0) = 0\,, \quad \lim_{\zeta \to \zeta_0} \frac{|\omega(\zeta)|}{|F'_\zeta|} = U_\infty \sqrt{1 - c_p}.$$

Для $\zeta \in \gamma$ выражение (13) преобразуется следующим образом:

$$\omega(\zeta) = 2ie^{-i\sigma}[V_\infty \sin\sigma + \frac{Q}{4\pi R}(\mathrm{ctg}\frac{\delta-\sigma}{2} - \mathrm{ctg}\frac{\delta+\sigma}{2})].$$

Следовательно, уравнения, определяющие Q и δ таковы:

$$Q + 2\pi R V_\infty(\cos\alpha - \cos\delta) = 0\,,$$

$$V_\infty \sin\alpha + (\cos\alpha - \cos\delta)k_d x(\alpha) U_\infty = 0\,, \quad k_d = (1-c_p)^{1/2}.$$

Теперь легко получить, что для точек $\zeta \in \gamma$

$$|\omega(\zeta)| = 2V_\infty \left|\sin\sigma \frac{\cos\sigma - \cos\alpha}{\cos\sigma - \cos\delta}\right|. \tag{14}$$

Комплексная скорость течения в плоскости z равна $\omega(\zeta)\,\overline{\zeta}'_z$. И для ее абсолютной величины в точках поверхности тела согласно формуле (14) получаем следующее параметрическое представление:

$$v(\sigma) = \frac{V_\infty \sin\sigma}{x(\sigma)(\cos\delta - \cos\sigma)}\,, \quad \alpha \le \sigma \le 2\pi - \alpha\,. \tag{15}$$

При $|s| \ge s_0$, где s_0 — дуговая координата точки S_2 отрыва пограничного слоя, полагается $v(s) \equiv v(s_0)$.

Приступая к выводу интегрального уравнения, введем в рассмотрение функцию

$$\Phi = \frac{F'_\zeta \zeta^2}{(\zeta - \zeta_0)(\zeta - \overline{\zeta}_0)}.$$

Функция Φ отображает внешность окружности γ на область, ограниченную, односвязную и не содержащую нуля. Можно, следовательно, на области значений Φ выделить однозначную ветвь логарифмической функции $\mathrm{Ln}\, z$. Мы предполагаем у изучаемых кривых непрерывную кривизну. Тогда легко показать, что действительная и мнимая части функции $i\,\mathrm{Ln}\,\Phi(\zeta)$ на γ удовлетворяют условию непрерывности по Гельдеру и поэтому связаны соотношением Гильберта [62, с. 64].

Чтобы воспользоваться этим соотношением, вначале проведем некоторые элементарные преобразования. Заметим, что для $\zeta \in \gamma$:

$$|\zeta - \zeta_0| = 2R|\sin\frac{\sigma-\alpha}{2}|\,, \quad |\zeta - \overline{\zeta}_0| = 2R|\sin\frac{\sigma+\alpha}{2}|.$$

Это позволяет упростить $Im(i\operatorname{Ln}\Phi(\zeta))$:

$$\ln\left|\frac{F'_\zeta\,\zeta^2}{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\overline{\zeta}_0)}\right| = \ln\left|\frac{\dfrac{R^2ds}{Rd\sigma}}{4R^2\sin\dfrac{\sigma-\alpha}{2}\sin\dfrac{\sigma+\alpha}{2}}\right| =$$

$$= \ln\left|\frac{\dfrac{ds}{d\sigma}}{2R(\cos\alpha-\cos\sigma)}\right| = \ln\frac{-\dfrac{ds}{d\sigma}}{2R(\cos\sigma-\cos\alpha)} = \ln\frac{s'_\sigma}{2R(\cos\alpha-\cos\sigma)}.$$

Здесь принято во внимание, что величина s'_σ меняет знак одновременно с разностью $\cos\sigma-\cos\alpha$. Для аргумента функции F'_ζ имеем равенство:

$$\arg F'_\zeta = \widetilde{\theta}(\zeta) - \arg\zeta - \frac{\pi}{2}, \quad \zeta\in\gamma.$$

Величина $\widetilde{\theta}(\zeta)$ равна углу наклона к оси x прямой, касающейся L (см. рис. 1). Проводя все эти рассуждения, надо помнить, что образ точки $\zeta = Re^{i\sigma}$ при отображении F дважды пробегает L при изменении σ от 0 до 2π, и что для заданного ζ направление касательной на L определяется движением ζ против часовой стрелки по контуру γ.

Функцию $\theta(s)$ введем равенством $\theta(s) = \int\limits_0^s k(s)ds$. Ее значение для заданной точки L находится однозначно. Выразим $\arg\Phi$ через $\widetilde{\theta},\ \theta$:

$$-\arg\frac{F'_\zeta\,\zeta^2}{(\zeta-\zeta_0)(\zeta-\overline{\zeta}_0)} = -\arg F'_\zeta - 2\arg\zeta + \arg(\zeta-\zeta_0) + \arg(\zeta-\overline{\zeta}_0) =$$

$$= -\widetilde{\theta}(\zeta) + \frac{\pi}{2} - \arg\zeta + \arg(\zeta-\zeta_0) + \arg(\zeta-\overline{\zeta}_0). \qquad (16)$$

Положим, что σ меняется в пределах от 0 до 2π , и определим подходящие значения $\arg\Phi$ в соответствии с условиями выбора $\operatorname{Ln} z$. Просто вычисляются отдельные слагаемые в (16):

$$\arg\zeta = \sigma + 2\pi n; \quad \arg(\zeta-\zeta_0) = \frac{\pi+\sigma+\alpha}{2} + 2\pi n\,, \quad \text{если}\,\sigma>\alpha,$$

$$\arg(\zeta-\zeta_0) = \frac{3\pi+\sigma+\alpha}{2} + 2\pi n, \text{ если}\,\sigma<\alpha$$

Подставляя эти значения вместо соответствующих слагаемых в (16), получаем

$$Re(i\,\mathrm{Ln}\,\Phi(\zeta)) = \begin{cases} -\widetilde{\theta} + \frac{9}{2}\pi + 2\pi j \quad , \quad 0 < \sigma < \alpha\,, \\ -\widetilde{\theta} + \frac{7}{2}\pi + 2\pi k \quad , \quad \alpha \le \sigma \le 2\pi - \alpha\,, \\ -\theta + \frac{5}{2}\pi + 2\pi n \quad , \quad 2\pi - \alpha < \sigma < 2\pi\,. \end{cases} \tag{17}$$

Необходимо выбрать j, k, n такими, чтобы получилась непрерывная от $\sigma \in [0, 2\pi]$ зависимость. Для этого заметим, что величина $\widetilde{\theta}$ как угол наклона касательной скачком возрастает на $\pm\pi$, когда переходим с одной стороны разреза L на другую. Положим $j = 1, k = n = 0$, от $\widetilde{\theta}$ перейдем к θ .

Легко проверяется, что правая сторона (17) после такого выбора представляет непрерывную от $\sigma \in [0, 2\pi]$ функцию:

$$Re(i\,\mathrm{Ln}\,\Phi(\zeta)) = -\theta + 2\pi.$$

Закончив преобразования мнимой и вещественной частей функции $i\mathrm{Ln}\Phi\,(\zeta)$, выпишем соотношение Гильберта между ними:

$$\ln \frac{s'_\sigma}{2R(\cos\alpha - \cos\sigma)} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \theta[s(\beta)]\mathrm{ctg}\frac{\beta - \sigma}{2}d\beta + c_0.$$

Отсюда получаем уравнение для $s(\sigma)$:

$$s(\sigma) = \int\limits_0^{\sigma} 2R(\cos\alpha - \cos\sigma)\exp\Big\{ -\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \theta[s(\beta)]\,\mathrm{ctg}\,\frac{\beta - \sigma}{2}d\beta + c_0\Big\}d\sigma, \tag{18}$$

где константы α и c_0 определяются из условий:

$$s(\pi) = 0, \quad s(\alpha) = -s_0. \tag{19}$$

В частности, первое из условий (19) дает следующее выражение для c_0:

$$c_0 = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi} \ln \frac{s'_\sigma}{2R(\cos\alpha - \cos\sigma)}d\sigma.$$

С целью уйти от оператора Гильберта

$$S\varphi = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\varphi(\beta)\mathrm{ctg}\frac{\beta-\sigma}{2}d\beta,$$

относительно которого пространство непрерывных функций $C[0,2\pi]$ не инвариантно, и с целью выявить сходство структур уравнений (11), (18) преобразуем уравнение (18), учитывая симметричность препятствия относительно оси x. Имеем равенства:

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\theta[s(\beta)]\mathrm{ctg}\frac{\beta-\sigma}{2}d\beta = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}k[s(\beta)]s'_\beta \ln\sin^2\frac{\beta-\sigma}{2}d\beta =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}k[s(\beta)]s'_\beta \ln\left|\sin\frac{\beta-\sigma}{2}\right|d\beta + \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}k[s(\beta)]s'_\beta \ln\left|\sin\frac{\beta+\sigma}{2}\right|d\beta =$$

$$= -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}k[s(\beta)]s'_\beta \ln\left|\frac{\cos\sigma-\cos\beta}{2}\right|d\beta.$$

Обозначим через $\lambda(\beta)$ функцию $k[s(\beta)]s'_\beta$ и определим операторы D, J:

$$D[\lambda(\beta)] = -\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{\pi}\lambda(\beta)\ln\frac{|\cos\sigma-\cos\beta|}{2}d\beta$$

$$J[\lambda(\beta)] = \int\limits_\pi^{\sigma}\lambda(\beta)d\beta, \tag{20}$$

а также константу M и функцию ν:

$$M = 2Re^{c_0}, \quad \nu(\sigma) = \cos\alpha - \cos\sigma. \tag{21}$$

Воспользовавшись проведенными выше преобразованиями, легко получить из (18) уравнение:

$$\lambda(\sigma) = M\nu(\sigma)k(J(\lambda(\sigma)))e^{-D\lambda(\sigma)}, \tag{22}$$

где k — кривизна контура, взятая как функция угла наклона касательной θ.

Сравнивая уравнения (11) и (22), делаем заключение о полном их структурном сходстве. Единственное существенное отличие состоит в том, что ядро оператора D в уравнении (11) составляет функция

$$\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin n\sigma \sin n\beta}{n},$$

а в уравнении (22) — функция

$$\frac{2}{\pi}\left[\ln 2+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\sigma \cos n\beta}{n}\right].$$

Лемма 1. *1) Оператор D, определяемый формулой (20), в пространстве $L^2(0,\pi)$ является симметричным и положительным, т.е.*

$$\forall\varphi,\varphi_1\in L^2(0,\pi)\quad (D\varphi,\varphi_1)=(\varphi,D\varphi_1),$$

$$(D\varphi,\varphi)\geq 0,\quad (D\varphi,\varphi)=0\Rightarrow\varphi=0;$$

имеет конечную абсолютную норму, и, следовательно, является вполне непрерывным [9, с. 98]. 2) D_1 — нерастягивающий оператор; D оставляет инвариантным конус положительных функций, т.е.

$$\forall\varphi\in L^2(0,\pi)\quad (D_1\varphi,D_1\varphi)\leq(\varphi,D_1\varphi)\leq(\varphi,\varphi),$$

$$\varphi\geq 0\Rightarrow D\varphi\geq 0.$$

Здесь

$$D_1\varphi=-\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\varphi(\beta)\ln\left(\frac{2}{e}|\cos\sigma-\cos\beta|\right)d\beta.$$

3) D отображает ограниченное множество из $L^2(0,\pi)$ в компактное множество из $C[0,\pi]$; для всех $\varphi\in L^2(0,\pi)$ имеет место неравенство:

$$|(D\varphi)(x)-(D\varphi)(y)|\leq|x-y|^{\frac{1}{2}}\|\varphi\|_{L_2},\ x,y\in[0,\pi].$$

Доказательство. Разложив ядро оператора D в ряд:

$$-\frac{1}{\pi}\ln\left|\frac{\cos\sigma-\cos\beta}{2}\right|=\frac{2\ln 2}{\pi}+\frac{2}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\sigma\cos n\beta}{n},$$

введем новый оператор D_2 с ядром:

$$D_2(\sigma,\beta)=\frac{1}{\pi}\Big(4\ln^2 2+2\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\cos n\sigma\cos n\beta}{n^2}\Big).$$

Функция D_2 непрерывная:

$$\pi D_2(\sigma,\beta)\;=\begin{cases}-\pi\sigma+\dfrac{\sigma^2+\beta^2}{2}+\dfrac{\pi^2}{3}+4\ln^2 2, & \sigma\geq\beta,\\[2ex] -\pi\beta+\dfrac{\sigma^2+\beta^2}{2}+\dfrac{\pi^2}{3}+4\ln^2 2, & \sigma\leq\beta.\end{cases}$$

и симметричная: $D_2(\sigma,\beta)=D_2(\beta,\sigma)$. Собственные значения оператора D_2 равны $1/n^2,\ n=1,2,\ldots$. Отсюда следует, что D_2 как интегральный оператор Фредгольма в пространстве $L^2(0,\pi)$ является положительным, самосопряженным, имеет конечную абсолютную норму и, в частности, вполне непрерывен. Такими же свойствами обладает D как квадратный корень из D_2.

Истинность утверждений пункта 2 леммы 1, легко доказывается, если представим φ и $D\varphi$ рядами Фурье, предварительно распространив φ на интервал $(-\pi,\pi)$ четным образом:

$$\varphi=a_0+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos n\beta,$$

$$D\varphi=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}\cos n\beta+a_0 2\ln 2,$$

и далее воспользуемся формулой для скалярного произведения:

$$(f,\psi)\equiv\int_0^{\pi}f\psi d\beta=\pi(b_0c_0+\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{\infty}b_ic_i),$$

где b_i — коэффициенты Фурье-разложения f; c_i — разложения ψ.

Переходим к обоснованию утверждений третьего пункта. Имеем:

$$|(D\varphi)(x)-(D\varphi)(y)|=\Big|\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n}{n}(\cos nx-\cos ny)\Big|=$$

$$= \Big| \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_x^y \sin nt dt \Big| = \Big| \int_x^y \Big(\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt \Big) dt \Big|.$$

Обозначив $\sum_{n=1}^{\infty} a_n \sin nt$ через $\mu(t)$, к последнему интегралу применим неравенство Гельдера:

$$\Big| \int_x^y \mu(t) dt \Big| \le |x-y|^{1/2} \left[\int_0^{\pi} \mu^2(t) dt \right]^{1/2} = |x-y|^{1/2} \Big(\frac{\pi}{2} \sum_{n=1}^{\infty} a_n^2 \Big)^{1/2} \le$$

$$\le |x-y|^{1/2} \|\varphi\|_{L_2}$$

Лемма доказана, а вместе с ней доказана и

Теорема 1. *Схемы струйного обтекания, соответствующие определенному выбору функции Леви–Чивита $\Omega(\zeta)$, и схемы отрывного обтекания, когда след моделируется по Паркинсону–Яндали, имеют общее интегральное уравнение для расчета характеристик течения:*

$$\lambda(\sigma) = M\nu(\sigma) k(J\lambda) e^{-D\lambda}. \tag{23}$$

Оператор D при переходе от одного класса обсуждаемых моделей к другому меняет ядро на сопряженное, и , в любом случае, обладает свойствами, установленными в Лемме 1. Оператор J является оператором интегрирования, а функция $\nu(\sigma)$, если обтекаемый контур не имеет изломов, есть рациональная функция от $\cos\sigma$, $\sin\sigma$.

Замечание 1. Если ввести оператор:

$$C\theta = -\frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \frac{\theta(\sigma)\sin\sigma - \theta(\sigma')\sin\sigma'}{\cos\sigma - \cos\sigma'} d\sigma',$$

то для модели Паркинсона–Яндали получаем уравнение, аналогичное (10):

$$s(\sigma) = M \int_0^{\sigma} \nu(\sigma) e^{-C\theta(s(\sigma))} d\sigma.$$

3. Локальные теоремы существования для задачи взаимодействия оболочки и потока. Структура уравнения (23) позволяет реализовать следующую общую схему исследования задачи взаимодействия оболочки и потока. Соответствующая система уравнений представляется в операторном виде:

$$u = A(\lambda)u, \tag{24}$$

где $A(\lambda)$ — нелинейный вполне непрерывный оператор, действующий в сепарабельном банаховом пространстве X, обладающем базисом. Оператор $A(\lambda)$ непрерывно зависит от λ, и при $\lambda = \lambda_0$ у него существует производная Фреше.

На первом этапе, имея в виду применение теорем Лере-Шаудера (теоремы 4.7, 4.8 из [60, с.141–143], вычисляем производную Фреше F оператора $I - A(\lambda_0)$ в точке u_0, для которой $A(\lambda_0)u_0 = u_0$, I — единичный оператор. Согласно упомянутым теоремам, в некотором интервале $(\lambda_0 - b, \lambda_0 + b)$ изменения λ существует решение уравнения (24), если единица не есть собственное число для F . Предположим противное: для некоторого ненулевого элемента $u_1 \in X$ выполняется равенство:

$$Fu_1 = u_1. \tag{25}$$

Второй этап исследования состоит в таком выборе базиса в X, что для коэффициентов $\{a_i\}$, $i = 1, 2, \ldots$, разложения u_1 по этому базису из условия (25) получается система уравнений, каждое из которых содержит лишь конечное число коэффициентов a_i. Для достижения этого свойства, возможно, придется преобразовать исходные уравнения (24), (25). Интересно, что полученную систему алгебраических уравнений можно рассматривать как систему разностных уравнений для определения коэффициентов a_i.

Третий этап напрямую не зависит от рассматриваемого конкретного уравнения. Он заключается в оценке скорости убывания коэффициентов разложения любого элемента пространства X по выбранному базису. Для наиболее употребительных пространств и базисов эти оценки известны.

На четвертом этапе оценку коэффициентов a_i проводим, пользуясь конечностью каждого разностного уравнения и их конкретным видом.

Если получаем оценки, противоречащие тем, которые получены из общетеоретических соображений третьего этапа, то, следовательно, нетривиальное решение уравнения (25) отсутствует.

Используя описанную схему, рассмотрим задачу отрывного обтекания бесконечно длинной замкнутой круговой упругой цилиндрической оболочки поперечным потоком несжимаемой жидкости, применяя одну из моделей пункта 1. При произвольных перемещениях, но малых деформациях нерастяжимой срединной поверхности общее уравнение равновесия рассматриваемой оболочки имеет вид (§5 гл. 2):

$$k''(s) + \frac{1}{2}k^3(s) - \omega k(s) + \lambda f(s) = 0, \quad -1 \le s \le 1, \tag{26}$$

дуговая координата s отсчитывается по контуру оболочки; $k(s)$ — кривизна контура; $f(s) = p + v^2(s)$, где p — известная константа, $v(s)$ — скорость жидкости на поверхности оболочки. Масштабы выбраны таким образом, что длина l половины направляющей цилиндра и скорость на бесконечности U равняются единице; $p = 2(p_1 - p_\infty)/\rho U^2 - 1$; $\lambda = \rho U^2 l^3/2D$; $p_1,\ p_\infty$ — давления внутри оболочки и на бесконечности; D — изгибная жесткость; обычно полагают $p_1 = p_\infty$. Далее обтекание предполагается симметричным, и, соответственно уравнение (26) рассматривается на интервале (0,1). Константа ω определяется краевыми условиями (2.5.7) замкнутости оболочки, которая закреплена в точке 0, точке разветвления потока. Имея в виду предложенную схему исследования, главное в которой заключается в искусстве преобразования уравнения и выбора подходящего базиса в пространстве так, чтобы получались конечные разностные уравнения, построим интегральное уравнение, эквивалентное (26) при краевых условиях замкнутости, но не, как обычно, при помощи функции Грина, а способом, применяемым в книге М.А. Красносельского и П.П. Забрейко [59, с. 204, 210]. С учетом краевых условий получаем:

$$k(s) = \pi - \frac{1}{2}\int_0^1 (1-t)^2 \left(-\frac{1}{2}k^3(t) + \omega k(t) - \lambda f(t)\right) dt +$$

$$+\int_0^s (s-t)\left(-\frac{1}{2}k^3(t)+\omega k(t)-\lambda f(t)\right)dt. \tag{27}$$

Будем считать, что $k(s) \in C^1[0,1]$, в качестве базисных функций выберем полиномы Лежандра $P_i(s)$, $i = 0, 1, ...$

Для расчета давления жидкости на оболочку привлекаем уравнение (23) при параметрах потока, соответствующих докритическому режиму обтекания, моделируя его по Паркинсону–Яндали. Переходя к функции $x(\sigma)$, связанной с $s(\sigma)$ соотношением:

$$s(\sigma) = 2R\int_0^\sigma (\cos\alpha - \cos\sigma)x(\sigma)d\sigma,$$

приведем уравнение (18) к виду (это преобразование подчинено той же общей идее, что и переход от (26) к (27)):

$$x(\sigma) = exp\Big\{-D[2R(\cos\alpha-\cos\sigma)x(\sigma)k(2R\int_0^\sigma(\cos\alpha-\cos\sigma)x(\sigma)d\sigma)]+c\Big\}, \tag{28}$$

Скорость жидкости на контуре представляется через $x(\sigma)$ параметрически в следующем виде :

$$v(\sigma) = \frac{V_\infty \sin\sigma}{[x(\sigma)(\cos\delta-\cos\sigma)]}, \quad \text{если } \alpha \le \sigma \le 2\pi-\alpha, \tag{29}$$

$$v(\sigma) = const, \quad \text{если} \quad \sigma \notin (\alpha, 2\pi-\alpha).$$

Упрощая исследования, считаем параметры s_0, k_d одинаковыми для цилиндра как в недеформированном , так и в деформированном состоянии. В общем случае для их определения необходимы дополнительные уравнения из теории пограничного слоя. Для констант α, c, ω имеют место следующие интегральные соотношения:

$$\alpha = 2R\int_0^\alpha (\cos\alpha - \cos\sigma)x(\sigma)d\sigma + s_0 + \alpha, \tag{30}$$

$$c = \int_0^{\pi} (\cos\alpha - \cos\sigma) x(\sigma) d\sigma + c, \tag{31}$$

$$\omega = \int_0^1 \cos \int_0^s k(s) ds ds + \omega. \tag{32}$$

Итак, искомое уравнение $u = A(\lambda)u$ представлено интегральными соотношениями (27), (28), (30)–(32);

$$u = (k(s), x(\sigma), c, \alpha, \omega) \in X = C^1[0,1] \times C[0,\pi] \times E_1^3.$$

В качестве базиса в пространстве $C[0,\pi]$ берем тригонометрические функции $\sin nx,\ \cos nx,\ n = 0, 1, \ldots$. Роль λ_0 играет 0.

Пусть $(h(s), p(\sigma), \widetilde{\alpha}, \widetilde{c}, \widetilde{\omega})$ — нетривиальное решение соответствующего оператору A уравнения (25). Чтобы не загромождать деталями изложение доказательства, несущественными для принципиальной схемы рассуждений, мы опустим вычисление требуемой производной Фреше F. Отметим, что линеаризованные уравнения разделяются относительно $h,\ \omega$ и $p,\ \widetilde{\alpha}, \widetilde{c}$, и легко доказывается, что $h = 0,\ \omega = \widetilde{\alpha} = \widetilde{c} = 0$.

В итоге всех выкладок, после приравнивания коэффициентов Фурье разложения правой и левой частей уравнения (25), имеем для коэффициентов разложения

$$p(\sigma) = p_0 + p_1 \cos\sigma + p_2 \cos 2\sigma + \cdots$$

следующие уравнения:

$$p_0(\gamma + 2\ln 2\cos\alpha) = p_1(\frac{1}{2} + \ln 2),$$

$$p_{i+1} = 2p_i \frac{i\gamma + \cos\alpha}{i+1} - p_{i-1}, \quad i = 1, 2, \ldots \quad \gamma = \frac{1 + \cos^2\alpha}{2\cos\alpha}. \tag{33}$$

Рассматривая нетривиальное решение однородных разностных уравнений (33), полагаем $p_0 = 1$ и последовательно находим $p_1, p_2, \ldots$. Так, в докритическом режиме обтекания $\alpha = 50^0, \cos\alpha = 0,643, \gamma = 1,906$. Первые пять значений p_i следующие: $p_1 = 1,668$; $p_2 = 1,906$; $p_3 = 1,942$;

$p_4 = 1,921$; $p_5 = 1,930$. Из предположения $p_i > p_{i-1}$ при $i \geq 4$ следует $p_{i+1} > p_i$. Это легко усмотреть из (3), поскольку тогда $\dfrac{(i\gamma + \cos\alpha)}{(i+1)} > 1$. Так как $p_5 > p_4$ последовательность p_i растет при $i \to \infty$. Это противоречит тому, что p_i - коэффициенты ряда Фурье функции $p(t)$ с конечной L^2 - нормой, когда $\|p\|^2_{L_2} = \sum\limits_{i=0}^{\infty} p_i^2$, и должно быть $\lim\limits_{i\to 0} p_i = 0$. Мы показали, что производная Фреше F не имеет единицу собственным значением. Следовательно установлена

Теорема 2. *Задача гидроупругости (27), (28), (30), (31), (32) в докритическом режиме обтекания имеет решение для достаточно малых* λ.

Замечание 2. В теории ортогональных рядов, исследованиях вопросов существования и свойств базиса в функциональных пространствах имеются многочисленные оценки скорости убывания коэффициентов разложения произвольного элемента пространства по выбранному базису. Имеется возможность, следуя нашей схеме, привлечь эти оценки и результаты теории общих разностных уравнений для исследования существования решения краевых задач в окрестности специальных значений определяющих параметров.

Замечание 3. Разрешимость уравнения (22) геометрико-вариационным методом Лаврентьева исследована автором в [103]. Пример расчета деформации мягкой круговой цилиндрической оболочки при стационарном отрывном обтекании с использованием уравнений погранслоя опубликован в [35, с. 123–127]

§ 2. Моделирование нестационарных отрывных течений над оболочкой с использованием вихревой пелены

1. Введение. В параграфе развивается подход к расчету нестационарного отрывного обтекания цилиндрических оболочек потоком несжимаемой маловязкой жидкости, когда пограничный слой на обтекаемой поверхности и узкие сдвиговые слои течения за точками отрыва моделируются вихревой пеленой. Толщиной указанных областей можно было пренебречь при высоких скоростях набегающего потока. Полагается, что вне пелены жидкость движется как идеальная.

Раскладываем течение вокруг контура Г поперечного сечения цилиндра на четыре составляющих:

1) течение, представляемое неограниченным плоским безотрывным потоком, имеющим на бесконечности скорость U_∞;

2) течение, вызываемое свободными вихревыми пеленами $L_1, \ldots, L_k$, которые представляют оторвавшиеся в точках $S_1, \ldots, S_k$ контура Γ пограничные слои;

3) течение от присоединенной вихревой пелены, которая размещается по контуру Γ и обеспечивает непроницаемость Γ для течения от свободных пелен;

4) безотрывное течение, обусловленное движением точек Γ при деформации оболочки.

2. Специальное фундаментальное решение. Переходим к изучению течений 2) и 3). Пусть контур Γ замкнут, не имеет самопересечений и представлен в комплексной плоскости z периодической функцией класса C^2, $z(s) = x(s) + iy(s)$ в фиксированной декартовой системе координат, $0 \le s \le l$. Возрастанию дуговой координаты s соответствует обход контура против часовой стрелки. Рассмотрим нестационарный поток вокруг Γ, вызванный наличием вихревой пелены L в области, занятой жидкостью. Пусть в данный момент времени t пелена L представлена кривой класса C^2 с непрерывно распределенной по ней завихренностью плотности $\gamma_L(\sigma; t)$, где σ – дуговая координата на L, $0 \le \sigma \le l_1(t)$.

Гидромеханические характеристики потока будем рассчитывать, заменяя контур Γ присоединенной вихревой пеленой интенсивности $\gamma_\Gamma(s; t)$. В начале рассмотрим случай, когда пелена L вырождается в вихреисточник интенсивности γ в точке a комплексной плоскости z. Распределение завихренности по Γ в этом случае играет роль специального фундаментального решения $\gamma_a(s)$, через которое мы выразим $\gamma_\Gamma(s)$ в случае произвольной пелены L, (если время t фиксировано, зависимость от t гидродинамических величин не указываем).

Функция тока вихреисточника равна

$$\psi_a(z) = -\frac{\gamma_a}{2\pi} \ln |z - a|. \tag{1}$$

Нормальная составляющая скорости течения, вызванного вихрем, в точке $z(s)$ границы Γ обтекаемого тела равняется $\dfrac{\partial \varphi}{\partial n}(z)$, где φ — потенциал,

сопряженная к (1) функция. Согласно формуле Коши-Эйлера $\dfrac{\partial\varphi}{\partial n} = \dfrac{\partial\psi}{\partial\tau}$, где n, τ — соответственно единичной длины нормаль и касательная в точке z к контуру Γ. Если n — внешняя нормаль, то τ направлена по возрастанию s. Следовательно,

$$v_n(z) = -\frac{\gamma_a}{2\pi}\frac{\partial}{\partial\tau}\ln|z-a|.$$

Аналогично, нормальная составляющая $\widetilde{v}_n(z)$ скорости течения, вызванного соответствующей вихреисточнику присоединенной пеленой на Γ, равна

$$\widetilde{v}_n(z) = -\frac{1}{2\pi}\text{v.p.}\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial\tau}\ln|z-\zeta(s)|\gamma(s)ds.$$

Здесь $\zeta(s)$ — комплексное число, представляющее точку на Γ с дуговой координатой s. Интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Если $\gamma(s)$ удовлетворяет условию Гельдера при $s \in [0,l]$, то указанное значение существует [58, с. 356-360]. Возможность поменять местами операции $\dfrac{\partial}{\partial\tau}$ и $\int\limits_\Gamma$ следует из того, что следующие пределы существуют равномерно по $z \in \Gamma$ ($\Gamma \in C^2$, $\gamma \in H^\alpha(0,l)$):

$$\lim_{\eta\to z}\frac{\partial}{\partial\tau}\int\limits_\Gamma \ln|\eta-\zeta(s)|\gamma(s)ds = \text{v.p.}\int\limits_\Gamma \frac{\partial}{\partial\tau}\ln|z-\zeta(s)|\gamma(s)ds, \tag{2}$$

$$\lim_{\eta\to z}\int\limits_\Gamma \ln|\eta-\zeta(s)|\gamma(s)ds = \int\limits_\Gamma \ln|z-\zeta(s)|\gamma(s)ds. \tag{3}$$

Предполагается, что точка η стремится к z по внешней нормали, оставаясь вне области D, ограниченной Γ. Необходимые для доказательства равномерности предела (2) рассуждения проведены в [58, с. 361]. Равномерность в (3) следует из общих свойств потенциала простого слоя [58, с. 362]. Поскольку правые части соотношений (2) и (3) представляют собой непрерывные функции от $s \in \Gamma$, то, следуя стандартным рассуждениям, получим, что правая часть (2) есть производная правой части (3) вдоль Γ.

Заметим, что подобные утверждения о равномерности можно также получить (для гладких Γ и суммируемых γ) из обобщенной формулы

Грина (см. формулу (11) настоящей работы, или [61, с. 257]). Они являются простым следствием принадлежности объемного потенциала классу C^1 во всем пространстве и равномерной непрерывности непрерывной функции на компакте. Пример таких рассуждений в [61, с. 261].

Условием непротекания через контур Γ является равенство:

$$v_n(z) \;=\; -\widetilde{v}_n(z) \text{ для всех } z \in \Gamma,$$

или:

$$\frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\frac{\gamma_a}{2\pi}\ln|z-a|\Big) = \frac{\partial}{\partial\tau}\Big(\frac{1}{2\pi}\int\limits_\Gamma \ln|z-\zeta(s)|\gamma(s)ds\Big).$$

После интегрирования вдоль Γ приходим к уравнению:

$$\int\limits_\Gamma \ln|z-\zeta(s)|\nu(s)ds = 2\pi\ln|z-a| + C, \quad z \in \Gamma, \tag{4}$$

где

$$\nu(s) = -\frac{2\pi}{\gamma_a}\gamma_a(s).$$

Константа интегрирования C равна:

$$C = \int\limits_\Gamma \nu(s)\ln\left|\frac{z-\zeta(s)}{z-a}\right| ds \tag{5}$$

и определяется условием равенства нулю суммарной циркуляции:

$$\int\limits_0^l \gamma_a(s)ds + \gamma_a = 0,$$

которое эквивалентно требованию на ν:

$$\int\limits_0^l \nu(s)ds = 2\pi.$$

Исследование разрешимости уравнения (4) начнем с замечания, что подобные уравнения появляются и в задаче построения конформного отображения $F(z)$, переводящего область Ω, ограниченную кривой P в плоскости z, на внутренность круга единичного радиуса B_1 в плоскости

$w : B_1 = \{w : |w| < 1\}$. Считаем без потери общности, что $0 \in \Omega$, и выполняется условие: $F(0) = 0$. Отображающую функцию ищем в виде $F(z) = z\exp(u(z) + iv(z))$, где u и v – гармонические в области Ω функции. Представим $u(z)$ как потенциал простого слоя с плотностью μ:

$$u(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_P \ln|z - \zeta(s)|\mu(s)ds.$$

Из условия $|F(z)| = 1$ при $z \in P$ получаем: $u(z) = -\ln|z|, z \in P$. Функция $\mu(s)$ удовлетворяет поэтому уравнению:

$$\int\limits_P \ln|z - \zeta(s)|\mu(s)ds = -2\pi\ln|z|, \quad z \in P. \tag{6}$$

Далее воспользуемся результатом Гайера [130]

Теорема 1. *Пусть P — замкнутая жорданова кривая класса C^2, ограничивающая односвязную область Ω. Решением уравнения (6) является функция:*

$$\mu(s) = -\theta'_s, \text{ где } \theta(s) = \arg F(z(s)), \quad z(s) \in P, \tag{7}$$

P обходится против часовой стрелки.

Ввиду особой важности этой теоремы для дальнейших выкладок, изложим ее доказательство (отличное от доказательства Гайера). Пусть $F(z;\zeta)$ $\zeta \in \Omega$ – семейство конформных отображений области Ω на B_1 с нормировкой $F(\zeta;\zeta) = 0$. Поскольку P обладает непрерывной кривизной, имеет место теорема о соответствии границ [62, с. 107], в силу которой, во-первых,

$$d\theta = |F_z{}'(z_0;\zeta)|\, ds, \quad z_0 \in P, \tag{8}$$

во-вторых, если dn — элемент длины внутренней нормали в точке z_0, а $d\rho$ — соответствующее изменение радиуса в B_1 ($dn > 0$, $d\rho < 0$), то

$$d\rho = -|F_z{}'(z_0;\zeta)|\, dn. \tag{9}$$

Из равенств (8), (9) и условия $|F_z{}'(z_0;\zeta)| = 1$, последовательно находим $|F_z{}'|$ и $d\theta$ ($\rho = |F(z;\zeta)|$):

$$|F_z{}'(z_0;\zeta)| = -\frac{d\rho}{dn} = -\frac{d\rho}{\rho dn} = \frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{\rho}, \quad d\theta = \frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|F(z_0;\zeta)|}ds. \tag{10}$$

Функция $g(z;\zeta) = -\dfrac{1}{2\pi}\ln\dfrac{1}{|F(z;\zeta)|}$, как легко проверить, является функцией Грина области Ω, то есть выполняются условия: $g(z_0;\zeta) = 0$ при $z_0 \in P$, и

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\right) g(z;\zeta) = \delta(z-\zeta),$$

где δ — обобщенная функция, распределение Дирака.

Обозначим через Ω_ε область, получающуюся из Ω удалением точек $\zeta : |\zeta - z| \le \varepsilon$ где z – фиксированная точка границы P. Граница $\partial\Omega_\varepsilon$ области Ω_ε состоит из части C_ε границы удаляемого круга и остающейся части P_ε границы P: $\partial\Omega_\varepsilon = C_\varepsilon \bigcup P_\varepsilon$. Считая 0 внутренней точкой Ω, применим к Ω_ε вторую обобщенную формулу Грина [61, с. 257], в силу которой для $u(\zeta)$ и $v(\zeta) = -g(\zeta;\zeta_0) + w(\zeta)$ имеет место равенство:

$$\int\limits_{\Omega_\varepsilon} (u(\zeta)\Delta w(\zeta) - v(\zeta)\Delta u(\zeta))d\zeta =$$

$$= -u(\zeta_0) + \int\limits_{\partial\Omega_\varepsilon} \left(u(\zeta)\frac{\partial}{\partial n}v(\zeta) - v(\zeta)\frac{\partial u}{\partial n}(\zeta)\right) ds, \quad \zeta_0 \in \Omega_\varepsilon \quad (11)$$

Положим здесь $u(\zeta) = \ln|z-\zeta|$, $w(\zeta) = 0$. Получим:

$$0 = -\ln|z-\zeta_0| - \int\limits_{C_\varepsilon} \left(\ln\varepsilon\frac{\partial g}{\partial n_\zeta} - g(\zeta;\zeta_0)\frac{1}{\varepsilon}\right) ds -$$

$$- \int\limits_{P_\varepsilon} \left(\ln|z-\zeta|\frac{\partial g(\zeta;\zeta_0)}{\partial n_\zeta} - g(\zeta;\zeta_0)\frac{\partial}{\partial n_\zeta}\ln|z-\zeta|\right) ds.$$

Переходим в полученном равенстве к пределу, когда $\varepsilon \to 0$, применяя к интегралам по C_ε теорему о среднем:

$$0 = -\ln|z-\zeta_0| + \lim_{\varepsilon\to 0}\left(-\ln\varepsilon\frac{\partial g}{\partial n_\zeta}(\zeta_1;\zeta_0)\pi\varepsilon + g(\zeta_2;\zeta_0)\pi\right) -$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int\limits_P \ln|z-\zeta|\frac{\partial}{\partial n}\ln\frac{1}{|F(\zeta;\zeta_0)|}ds = -\ln|z-\zeta_0| + \frac{1}{2\pi}\int\limits_P \ln|z-\zeta|\frac{d\theta}{ds}ds.$$

Здесь n_ζ – внешняя к Ω нормаль, а $n = -n_\zeta$. Учтены формулы (10).

Итак, имеем:

$$\ln|z-\zeta_0| = \frac{1}{2\pi}\int\limits_P \ln|z-\zeta(s)|\frac{d\theta}{ds}ds. \tag{12}$$

Формула (12) устанавливает теорему 1 в несколько более общем виде.

Замечание 1. Единственность решения уравнения (4) также доказана [130] по крайней мере при условии $\mathrm{cap}\,\Gamma \neq 1$.

Фундаментальность решения $\gamma_a(s)$ задачи (4) характеризует следующая

Теорема 2. *Если решение $\nu(s;a)$ уравнения (4) получено для точки a, и $f(z;a)$ – конформное отображение внешности Γ на внутренность круга $|w|<1$, при котором $f(a;a)=0$, то решение $\nu(s;b)$ для другой произвольно взятой точки b (a, b лежат вне Γ) получается по формуле:*

$$\nu(s;b) = \nu(s;a)\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}. \tag{13}$$

Здесь $\rho e^{i\varphi} = f(b;a)$, $e^{i\theta(s)} = f(z(s);a)$, $z(s)\in\Gamma$.

Доказательство. С помощью функции $z_1 = 1/z$ отобразим внешность обтекаемого контура Γ на область D_1. При этом Γ перейдет в контур Γ_1, точка a – в точку a_1. В области D_1 рассмотрим уравнение (12), полагая $P=\Gamma_1$, $\Omega = D_1$, $\zeta_0 = a_1$. Совершив обратное преобразование от z_1 к z получим

$$\int\limits_\Gamma \ln\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{\zeta}\right| d\theta = 2\pi\ln\left|\frac{1}{z}-\frac{1}{a}\right|, \quad z\in\Gamma.$$

В последнем уравнении $d\theta$ – изменение аргумента функции $f(z;a)$ при движении точки z по Γ таким образом, что внешность Γ остается слева. Перепишем это уравнение последовательно так:

$$\int\limits_\Gamma \ln|z-\zeta|\frac{d\theta}{ds} - \ln|z|\int\limits_\Gamma d\theta - \int\limits_\Gamma \ln|\zeta|d\theta = 2\pi\ln|z-a| - 2\pi\ln|z| - 2\pi\ln|a|,$$

$$\int\limits_\Gamma \ln|z-\zeta|\frac{d\theta}{ds}ds = 2\pi\ln|z-a| + C, \quad C = \int\limits_\Gamma \ln|\zeta|\frac{d\theta}{ds}ds - 2\pi\ln|a|.$$

По геометрическому смыслу функции θ очевидно, что $\int\limits_\Gamma d\theta = 2\pi$. Имеем таким образом следующую интерпретацию решения $\nu(s;a)$ уравнения (4):

$$\nu(s;a) = \frac{d\theta}{ds},$$

где θ – полярный угол образа точки на Γ, имеющей дуговую координату s, при конформном отображении $f(z;a)$ внешности Γ на единичный круг с центром в начале координат, при этом a должна перейти в центр круга, и Γ обходится по часовой стрелке.

Эта интерпретация позволяет получить $\nu(s;b)$ – решение (4) при замене a на b следующим образом. Пусть $f(b;a) = B$, $|B| < 1$. Конформное отображение ψ внутренности окружности самой на себя с ограничением $\psi(B) = 0$ легко строится:

$$\psi(\zeta) = e^{i\alpha}\frac{\zeta - B}{1 - \bar{B}\zeta}, \;\; \alpha = \arg\left(\frac{d\psi}{d\zeta}\right)_{\zeta=B}.$$

Необходимое нам отображение $f(z;b)$ равно суперпозиции отображений ψ и $f(z;a)$, и, следовательно:

$$\nu(s;b) = \frac{d}{ds}\arg f(z(s);b) = \frac{d}{ds}\arg(\psi(f(z;a))).$$

Значение α не влияет на величину $\nu(z;b)$, поэтому положим $\alpha = 0$, и преобразуем формулу:

$$\nu(s;b) = \frac{d}{ds}\arg\frac{f(z;a) - f(b;a)}{1 - f(z;a)\overline{f(b;a)}}, \;\; z \in \Gamma,$$

к виду, удобному для расчетов:

$$\nu(s;b) = \frac{d}{ds}\arg\frac{f(z;a) - B}{\frac{B}{|B|^2} - f(z;a)} = \frac{d}{ds}\arg\frac{f(z;a) - B}{B^* - f(z;a)},$$

B^* – точка, инверсная к точке B относительно окружности $|w| = 1$. Продолжая преобразования, получаем:

$$\nu(s;b) = -2\frac{d}{ds}\arg(f(z;a) - B^*) + \nu(s;a). \tag{14}$$

Наконец, вводя в рассмотрение полярные координаты точки B: $B = \rho e^{i\varphi}$, и используя элементарные тригонометрические выкладки, приходим к выражению (14) в форме (13). Теорема 2 доказана.

3. Важнейшие интегральные операторы для течений типа 2), 3). Вернемся к рассмотрению потока, в котором присутствует свободная вихревая пелена L интенсивности $\gamma_L(\sigma)$, $0 \le \sigma \le l_1$. Согласно формуле (13) пелена L индуцирует на Γ присоединенную вихревую пелену интенсивности $\gamma_\Gamma(s)$:

$$\gamma_\Gamma(s) = -\frac{1}{2\pi}\nu(s;a)\int\limits_L \gamma_L(\sigma)\frac{1-\rho^2(\sigma)}{1-2\rho(\sigma)\cos(\theta(s)-\varphi(\sigma))+\rho^2(\sigma)}d\sigma. \quad (15)$$

Когда $z(\sigma)$ пробегает L, точка $f(z(\sigma);a) = \rho(\sigma)\exp(i\varphi(\sigma))$ пробегает на плоскости w кривую L_w. Первый интегральный оператор A_1, свойства которого мы изучим, определяется правой частью формулы (15): $\gamma_\Gamma(s) = A_1(\gamma_L(\sigma))$.

Теорема 3. *Пусть свободная вихревая пелена L как кривая принадлежит классу $C^{1,\delta}[0,l_1]$, $\delta > 0$, и сходит с контура Γ, касаясь его, в точке S с дуговой координатой s^*. Пусть распределение завихренности на L представлено непрерывной функцией $\gamma_L(\sigma)$, $0 \le \sigma \le l_1$, где дуговая координата σ отсчитывается от S, и $\gamma_L(0) = \gamma^*$. При этих условиях оператор A_1 переводит $\gamma_L(\sigma)$ в функцию $\gamma_\Gamma(s)$ непрерывную всюду на Γ, исключая точку $s = s^*$. В точке $s = s^*$ функция γ_Γ терпит скачок первого рода:*

$$\gamma_\Gamma(s^*+) - \gamma_\Gamma(s^*-) = -\gamma^*. \quad (16)$$

Предполагается, что возрастанию s соответствуют как направление отхода L от Γ так и обход Γ по часовой стрелке.

Доказательство. Собственно в теореме речь идет о свойствах потенциала простого слоя, определенного на разветвляющейся кривой $\Gamma \bigcup L$, а доказательство будет опираться на свойства потенциала на простых кривых но при более слабых чем непрерывность предположениях о плотности.

Изложим эти свойства. Пусть потенциал простого слоя

$$V\rho(P) = \int\limits_S \rho(Q)\mathcal{E}(P,Q)ds_Q$$

определен на замкнутой поверхности S класса $C^{1,\delta}$, $0 < \delta \le 1$ в пространстве E_n; плотность $\rho(Q)$ есть ограниченная измеримая функция на

S; $\mathcal{E}(P;Q)$ — фундаментальное решение соответствующего уравнения Лапласа.

Единичную внешнюю нормаль в точке $P_0 \in S$ обозначим через n_0,

через $\dfrac{\partial}{\partial n_0} V\rho(P_0)$ – прямое значение нормальной производной в точке P_0,

через $\dfrac{\partial}{\partial n_0} V\rho(P_0+)$ – правильную нормальную производную, то есть

$$\lim_{t\to 0+} \frac{\partial}{\partial n_0}[V\rho(P_0 + tn_0)].$$

Имеет место

Предложение 3. *Функция* $\dfrac{\partial}{\partial n_0} V\rho(P_0)$ *непрерывна по* P_0 *на* S. *В точке непрерывности* P_0 *плотности* ρ *правильная нормальная производная существует и имеет место равенство:*

$$\frac{\partial}{\partial n_0} V\rho(P_0+) = -\frac{1}{2}\rho(P_0) + \frac{\partial}{\partial n_0} V\rho(P_0). \tag{17}$$

Равенство (17) выполняется почти всюду на S.

Часть этих утверждений сформулирована явно в книгах [89, с. 218–219], [71, с. 263], часть следует из доказательств, проведенных там же для случая всюду непрерывной плотности ρ.

Возвращаясь к доказательству теоремы 3, воспользуемся кривой L_w для иного представления ядра оператора A_1. Обозначим через r расстояние между точкой $P = \rho(\sigma)\exp(i\varphi(\sigma)) \in L_w$ и точкой $Q \in \exp(i\theta(s))$, через ψ — угол между векторами n_Q и $\overrightarrow{PQ}$, n_Q — единичная внешняя нормаль к окружности $|w| = 1$; $Q^* = f(s;a)$, C — окружность $|w| = 1$. Последующее рассуждение поясняет рисунок 2.

Пусть l — длина дуги, отсчитываемая вдоль L_w от точки Q^*. Заменяя переменную интегрирования σ в (15) на l, получаем:

$$\gamma_{\Gamma}(s) = \frac{1}{\pi}\nu(s;a)\int\limits_{L_w} \frac{-\cos\psi(l)}{r(l)}\alpha(l)dl + \frac{1}{2\pi}\nu(s;a)\int\limits_{L_w}\alpha(l)dl, \tag{18}$$

где $\alpha(l) = \gamma(\sigma(l))\sigma_l{}'$.

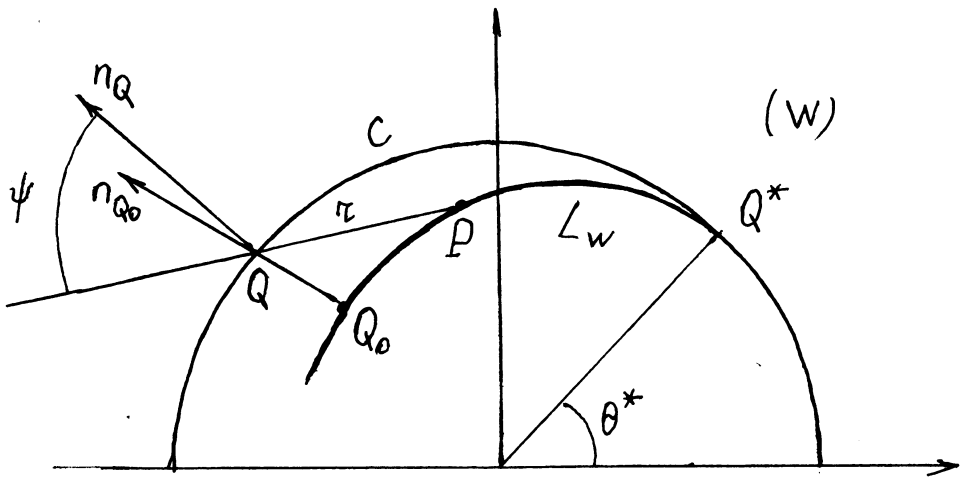

Рис. 2

В силу условий, наложенных на контур Γ и пелену L, функция $\alpha(l)$ непрерывна на L_W и, согласно интерпретации $\nu(s;a)$ через $\theta(s)$, имеет конечный предел при $l \to 0$ равный

$$\alpha(0) = \frac{\gamma(0)}{\nu(s^*;a)}. \tag{19}$$

Первый интеграл I_1 в (18) есть производная от потенциала простого слоя, а именно:

$$I_1(Q) = \frac{\partial}{\partial n_Q} \int\limits_{L_w} \ln \frac{1}{r(P(l),Q)} \alpha(l) dl. \tag{20}$$

Здесь Q — образ точки, имеющей на контуре Γ дуговую координату s. Из формул (18), (19) следует непрерывность $\gamma_\Gamma(s)$ если $s \neq s^*$ ($Q \notin L_w$).

Для нахождения левого предела функции $\gamma_\Gamma(s)$ в точке s^* рассмотрим потенциал

$$V\rho(Q) = \int\limits_{L_1} \rho(P) \ln \frac{1}{r(P,Q)} dl_P.$$

Здесь кривая L_1 состоит из прилегающих к точке Q^* достаточно малых частей L_w и C (окружности $|w| = 1$), замкнута и представляется функциями, имеющими кусочно непрерывную вторую производную. Плотность $\rho(P)$ равна $\alpha(P)$ в точках P, принадлежащих L_w, и равна нулю в остальных точках. Вследствие предложения 1 нормальная производная $\frac{\partial}{\partial n_Q} V\rho(Q)$ всюду на L_1 непрерывна, ее предельное значение при

приближении Q вдоль C к точке Q^* совпадает с

$$\lim_{\substack{Q \to Q^* \\ s < s^*}} \int\limits_{L_{w_1}} \frac{\partial}{\partial n_Q} \ln \frac{1}{r(P(l), Q)} \alpha(l) dl,$$

где L_{w_1} — часть кривой L_w, входящая в L_1. Вследствие этого факта

$$\lim_{s \to s^* -} \gamma_\Gamma(s) = \frac{1}{\pi} \nu(s^*; a) \int\limits_{L_w} \frac{\partial}{\partial n_{Q^*}} \ln \frac{1}{r(P, Q^*)} \alpha(P) dl_p + \frac{\nu(s^*; a)}{2\pi} \int\limits_{L_w} \alpha(l) dl \tag{21}$$

Для вычисления правого предела $\gamma_\Gamma(s^*+)$ применим к интегралу

$$I = \frac{\partial}{\partial n_Q} \int\limits_{L_{w_1}} \ln \frac{1}{r(P(l), Q)} \alpha(l) dl, \tag{22}$$

считая длину L_{w_1} достаточно малой, следующее преобразование. Пусть $\Phi(w)$ конформно преобразует B_1 на верхнюю полуплоскость плоскости комплексной переменной $\omega = \xi + i\eta$ с нормировкой: $\Phi(Q^*) = 0$, $|\Phi'(Q^*)| = 1$. При этом C перейдет в прямую $\eta = 0$; L_{w_1} — в кривую L_ω с уравнением $\eta = \eta(\xi)$, где $\eta(\xi) = o(\xi)$. В (22) от переменной интегрирования l перейдем к переменной ξ – первой координате точки $\Phi(P(l))$. Для достаточно малой длины L_{w_1} интеграл I преобразуется к виду:

$$I = -\frac{1}{2} \frac{\partial}{\partial \eta} \int\limits_0^a \varphi(\xi) \ln r^2((\eta(s), s), (0, \xi)) d\xi + O(a).$$

Функция $\varphi(\xi)$, выражается через $\alpha(l)$ и конформное отображение $\Phi(w)$, непрерывна всюду на $[0, a]$, $\varphi(0) = \alpha(0)$, $(s, \eta(s))$ – точка $\Phi(Q)$. Первое слагаемое в I легко вычисляется с точностью $O(a)$:

$$-\int\limits_0^a \varphi(\xi) \frac{\eta(s) d\xi}{\eta^2(s) + (s - \xi)^2} = \varphi(0) \int\limits_{\frac{a-s}{\eta}}^{-\frac{s}{\eta}} \frac{d\xi}{1 + \xi^2} + O(a) =$$

$$= -\varphi(0) \left(\operatorname{arctg} \frac{a - s}{\eta} + \operatorname{arctg} \frac{s}{\eta} \right) + O(a).$$

Вследствие касания L_ω оси ξ в точке O и только что полученной формулы

$$\lim_{s\to 0} I = -\pi\varphi(0) + O(a).$$

Интеграл $J = \dfrac{\partial}{\partial n_{Q^*}} \displaystyle\int_{L_w} \ln\frac{1}{r(P(l),Q^*)}\alpha(l)dl$ существует, и поэтому существует предел

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\partial}{\partial n_{Q^*}} \int\limits_{L_w\setminus L_{w_1}} \ln\frac{1}{r(P(l),Q^*)}\alpha(l)dl = J.$$

Из полученных равенств следует

$$\lim_{s\to s^*+} \gamma_\Gamma(s) = -\gamma^* + \frac{\nu(s^*;a)}{\pi}\int_{L_w} \frac{\partial}{\partial n_{Q^*}} \ln\frac{1}{r(P,Q^*)}\alpha(P)dl_P + \\ + \frac{\nu(s^*;a)}{2\pi}\int_{L_w}\alpha(l)dl. \quad (23)$$

Соотношения (21), (23) показывают, что теорема 3 верна.

Переходим к вычислению поля скоростей, вызываемого присоединенной вихревой пеленой. Обозначим скорость течения в точке P, порожденного вихреисточником единичной интенсивности, расположенным в точке Q, через $V(P,Q)$:

$$V(P,Q) = \frac{1}{2\pi}\frac{(y_Q - y_P, x_P - x_Q)}{r^2(P,Q)}. \quad (24)$$

Формулы (24) и (15) позволяют нам написать следующее интегральное представление скорости течения, вызываемого пеленой Γ, в точке T:

$$V_\Gamma(T) = \\ = -\frac{1}{2\pi}\int_\Gamma V(T,Q(s))\nu(s;a)\int_L \gamma_L(\sigma)\frac{1-\rho^2(\sigma)}{1-2\rho(\sigma)\cos(\theta(s)-\varphi(\sigma))+\rho^2(\sigma)}d\sigma ds.$$

Меняя порядок интегрирования и переходя от переменной интегрирова-

ния s к переменной θ, получим формулу:

$$V_\Gamma(T) = \\ = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma_L(\sigma)\int\limits_0^{2\pi} V(T, Q(s(\theta)))\frac{1-\rho^2(\sigma)}{1-2\rho(\sigma)\cos(\theta-\varphi(\sigma))+\rho^2(\sigma)}d\theta d\sigma. \tag{25}$$

Напомним, что $s(\theta)$ определяет соответствие точек контура Γ и окружности $|w| = 1$ при конформном отображении $f(z; a)$; точка $\rho(\sigma)e^{i\varphi(\sigma)}$ пробегает образ L при этом отображении.

Рассмотрим следующую задачу Дирихле для уравнения Лапласа относительно неизвестной вектор-функции $\omega(x, y)$:

$$\Delta\omega(x,y) = 0, \quad x^2+y^2 < 1,$$

$$\omega(x,y) = V(T, Q(s(\theta))), \quad x+iy = e^{i\theta}.$$

Ее решение задается формулой Пуассона

$$\omega(x,y) = \int\limits_0^{2\pi} V(T, Q(s(\theta)))\frac{1-\rho^2}{1-2\rho\cos(\theta-\varphi)+\rho^2}d\theta, \quad x+iy = \rho e^{i\varphi},$$

и вследствие этого, выражение (25) можно представить в виде:

$$V_\Gamma(T) = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma_L(\sigma)\omega\left(\rho(\sigma)e^{i\varphi(\sigma)}\right)d\sigma. \tag{26}$$

Этим отношением между функциями γ_L и V_Γ определяется оператор $A_2: \ V_\Gamma(T) = A_2(\gamma_L(\sigma))$, при помощи которого вычисляется поле скоростей, вызываемого наведенной пеленой L на контуре Γ завихренностью. Функция $A_2(\gamma_L)(T)$ является непрерывной вне Γ, а, если Γ и L не имеют общих точек, то вплоть до границы Γ.

Скорость жидкости, совместно индуцируемая пеленами L и T, или иначе совместная скорость течений 2), 3) в точке T в итоге представляется формулой:

$$V_{\Gamma\bigcup L}(T) = A_2(\gamma_L)(T) + \int\limits_L V(T; z(\sigma))\gamma(\sigma)d\sigma. \tag{27}$$

Поле скоростей (27) имеет разрывы только в точках L в касательных к L составляющих, которые (вплоть до точки отрыва S согласно теореме 3) определяются значением $\gamma_L(\sigma)$.

Обратимся теперь к одной из основных величин, определяющих, как мы увидим ниже, поведение точки отрыва S. Пусть $\gamma(s)$ — интенсивность вихревой пелены $\mathcal{L}$; $\eta = \eta(\xi)$ – уравнение пелены в системе координат, для которой начало совпадает с точкой $P_0 \in \mathcal{L}$; ось ξ направлена по касательной к $\mathcal{L}$ в точке P_0, ось η — по нормали n.

Теорема 4. *Величина $\partial v_n(P_0)/\partial n$ для течения, вызываемого только рассматриваемой пеленой $\mathcal{L}$, определяется формулой*

$$\frac{\partial v_n}{\partial n}(P_0) = \frac{1}{\pi} v.p. \int\limits_{\mathcal{L}} \frac{\eta\xi}{(\eta^2+\xi^2)^2}\gamma(s)ds. \tag{28}$$

Предполагаются выполненными условия: в некотором интервале $(-e, e)$ изменения ξ функция $\gamma(s(\xi))$ кусочно-непрерывно, η – трижды кусочно-непрерывно дифференцируемы, причем, соответствующие производные ограничены. В интеграле (28) ξ (и соответственно η) рассматривается как функция дуговой координаты s, определенной на кривой $\mathcal{L}$.

Доказательство. Пусть P приближается к точке P_0, двигаясь по нормали (оси η) к ней. По определению

$$\frac{\partial v_n}{\partial n}(P_0) = \lim_{P\to P_0} \frac{\partial v_n}{\partial n}(P) = \lim_{\eta_P\to 0} \frac{1}{\pi} \int\limits_{L} \frac{\eta\xi\gamma(s)}{((\eta_P-\eta)^2+\xi^2)^2} ds. \tag{29}$$

В силу предположений, имеем:

$$\eta(\xi) = a\xi^2 + O(\xi^3), \quad \eta(\xi)g(\xi) = ag(0)\xi^2 + O(\xi^3), \quad -e < \xi < e. \tag{30}$$

Здесь $g(\xi) = \gamma(s(\xi))s'_\xi$, $g(0) = \gamma(P_0)$. Будем сравнивать выражение для $\dfrac{\partial v_n}{\partial n}(P_0)$ с интегралом

$$I = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-e}^{e} \frac{\eta\xi}{(\eta_P^2+\xi^2)^2} g(\xi)d\xi.$$

Пусть изменению ξ в пределах $(-e, e)$ соответствует часть $\mathcal{L}_1$, кривой $\mathcal{L}$.

Из (29) следует

$$\frac{\partial v_n}{\partial n}(P_0) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{L}\setminus\mathcal{L}_1} \frac{\eta\xi\gamma(s)}{[\eta^2+\xi]^2}ds+$$

$$+\lim_{P\to P_0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{L}_1}\eta\xi\left(\frac{1}{[(\eta_P-\eta)^2+\xi^2]^2}-\frac{1}{(\eta_p^2+\xi^2)^2}\right)\gamma(s)ds+\lim_{p\to P_0} I. \quad (31)$$

Во втором слагаемом I_2 правой части (31) проведем следующие преобразования:

$$[(\eta_p-\eta)^2+\xi^2]^{-2}-[\eta_P^2+\xi^2]^{-2} = [\eta_P^2+\xi^2]^{-2}\Big[\Big(\frac{1}{1-f}\Big)^2-1\Big],$$

$$f(\xi) = \frac{2\eta(\xi)\eta_p-\eta^2(\xi)}{\eta_P^2+\xi^2}.$$

В окрестности P_0 воспользуемся представлениями (30) и получим:

$$f(\xi) = \frac{2\xi^2\eta_P}{\eta_P^2+\xi^2}+\frac{O(\xi^3)}{\eta_P^2+\xi^2}.$$

В силу неравенств $\dfrac{2\xi\eta_P}{\eta_P^2+\xi^2}\le 1$ и $\dfrac{\xi^2}{\eta_P^2+\xi^2}\le 1$ функция $f(\xi)$ имеет порядок ξ. Мы можем оценить теперь выделенное слагаемое из (31):

$$|I_2| \le \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{L}_1}|\eta(\xi)|\,\xi\frac{|2-f|}{(1-f)^2}\,|f|\,d\xi \le C\int\limits_{-e}^{e}\frac{\xi^4}{(\eta_P^2+\xi^2)^2}d\xi =$$

$$= C\left(e+\frac{e}{e+\eta_P^2}\eta_P^2-3\eta_P\operatorname{arctg}\frac{e}{\eta_P}\right).$$

Таким образом, I_2 имеет порядок e, когда $\eta_P < e$.

Оценивая предел I, входящий в (31), опять воспользуемся представлениями (30):

$$I = \frac{a}{\pi}\int\limits_{-e}^{e}\frac{\xi^3}{(\eta_P^2+\xi^2)^2}d\xi+\frac{1}{\pi}\int\limits_{-e}^{e}\frac{O(\xi^4)}{(\eta_P^2+\xi^2)^2}d\xi. \quad (32)$$

Первый интеграл равен нулю, а асимптотика второго по e уже изучена. В итоге из (31) получаем соотношение:

$$\frac{\partial v_n}{\partial n} = \frac{1}{\pi}\int\limits_{\mathcal{L}\setminus\mathcal{L}_1}\frac{\eta\xi}{(\eta^2+\xi^2)^2}\gamma(s)ds+O(e).$$

которое и доказывает теорему.

Замечание 2. Анализируя доказательство, мы видим, что если кривизна $\mathcal{L}$ терпит разрыв в точке P_0(коэффициенты a для интервалов $(0, e)$ и $(-e, 0)$ в формуле (32) разные), то $\dfrac{\partial v_n}{\partial n}(P_0) = \infty$.

Формула (28) теоремы 4 определяет третий основной оператор A_3 в тех исследованиях течений от свободной и присоединенной вихревой пелены, которые мы провели.

$$A_3(\mathcal{L}) \equiv A_3(\gamma(s), z(s)) = \frac{\partial v_n}{\partial n}(z_0), \quad z_0 \in \mathcal{L}.$$

4. Моделирование течения в окрестности точки отрыва. Постулат Ильичева-Постоловского. Упрощая изложение, примем, что с контура Γ сходит одна вихревая пелена L в точке S. При наличии других свободных пелен полученная в итоге система уравнений "расширяется" очевидным образом. На течение от свободной и наведенной на контуре Γ пелен накладывется безотрывное течение вокруг профиля Γ со скоростью U_∞ на бесконечности (течения 1), 4) пункта 1).

Напомним, что σ – дуговая координата на L, отсчитываемая от точки отрыва S. Индексом 1 будем помечать интересующую нас величину в области, которая прилегает к пелене L справа при движении вдоль пелены в направлении возрастания σ. Значение этой же величины в области, прилегающей к L слева, обозначим индексом 2. Так, например, $v_{\sigma 1}$, $v_{\sigma 2}$ — касательная к пелене составляющая скорости части жидкости (точнее их предельные значения при приближении к L соответственно справа и слева); v_σ — касательная составляющая скорости движения частицы самой пелены, v_n – нормальная составляющая. Все величины, относящиеся к точке отрыва будем отмечать звездочкой.

Примем допущение [47], что точка отрыва движется со скоростью частицы жидкости, заключенной между пеленой и обтекаемой поверхностью в точке отрыва, т.е. со скоростью $v_{\sigma 1}$.

Для случая, когда обтекаемый контур Γ является окружностью, Ильичев и Постоловский [47] привели расчетные формулы, следующие из этого допущения, для гидродинамических величин в точке отрыва. Они отметили необходимость предположения схода L с Γ по касательной, но не обнаружили, что в расчетных формулах возникают особенно-

сти, когда нарушается условие совпадения кривизн L и Γ в точке отрыва L – аналог условия Вилла-Бриллюэна для струйного обтекания препятствий. Вместо присоединенной пелены на Γ эти авторы использовали возможность удовлетворить условию непротекания на окружности вводом пелены, сопряженной к L относительно этой окружности.

Мы даем вывод формул Ильичева-Постоловского при тех предположениях, относительно L и Γ, которые входят в формулировки теорем 3,4. Далее $\dfrac{d}{dt}$ обозначает полную производную при движении из рассматриваемой точки со скоростью V частиц жидкости, $\dfrac{d^*}{dt}$ — полную производную при движении из точки со скоростью $V_{\sigma 1}$ перемещения точки отрыва. Последовательно получаем:

$$\frac{d\gamma^*}{dt} = \frac{d^*\gamma^*}{dt} + [(V - V_1)\cdot \mathrm{grad}]\gamma^* = \frac{d^*\gamma^*}{dt} + (v_\sigma - v_{\sigma 1})\frac{\partial \gamma^*}{\partial s} + \\ + (v_n - v_{n1})\frac{\partial \gamma^*}{\partial n} = \frac{d^*\gamma^*}{dt} + (v_\sigma - v_{\sigma 1})\frac{\partial \gamma^*}{\partial s} = \frac{d^*\gamma^*}{dt} + \frac{1}{2}\gamma^*\frac{\partial}{\partial s}(v_{\sigma 2} - v_{\sigma 1}). \tag{33}$$

Здесь использовали соотношения:

$$v_\sigma = \frac{1}{2}(v_{\sigma 1} + v_{\sigma 2}), \quad \gamma = v_{\sigma 1} - v_{\sigma 2}, \quad v_n = v_{n1} = v_{n2},$$

справедливые для любой вихревой пелены [56, с. 250].

Для вычисления $\dfrac{d\gamma^*}{dt}$ заметим, что циркуляция вокруг любого участка вихревой пелены длины Δ сохраняется. Это дает:

$$\frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta} \gamma(\sigma)\tau(\sigma)\cdot dr = \frac{d}{dt}(\gamma(\sigma_1)\Delta) = \Delta\frac{d\gamma(\sigma_1)}{dt} + \gamma(\sigma_1)\frac{d\Delta}{dt} = 0. \tag{34}$$

Точка $\sigma_1 \in \Delta$ получена по теореме о среднем значении; τ означает единичный касательный вектор к пелене; r – радиус-вектор точки пелены. Для изменения Δ имеем:

$$\frac{d\Delta}{dt} = \frac{d}{dt}\int\limits_{\Delta} \tau\cdot dr = \int\limits_{\Delta}\left(\frac{d\tau}{dt} + (\tau\cdot\mathrm{grad})V + \tau\times rotV\right)\cdot dr = \\ = \int\limits_{\Delta}[(\tau\cdot\mathrm{grad})V]dr.$$

Была привлечена общая формула дифференцирования по подвижному контуру [56, с. 268]. Далее вновь применяем к полученному интегралу теорему о среднем значении:

$$\begin{aligned}\frac{d\Delta}{dt} = ((\tau(\sigma_2)\cdot \operatorname{grad})\, V(\sigma_2))\cdot\tau(\sigma_2)\Delta = \Delta\left(\frac{\partial V}{\partial\sigma}\cdot\tau\right) = \\ = \Delta\left(\frac{\partial}{\partial\sigma}(V\cdot\tau) - V\cdot\frac{\partial\tau}{\partial\sigma}\right) = \\ = \Delta\left(\frac{\partial v_\sigma}{\partial\sigma} - V\frac{n}{r}\right) = \Delta\left(\frac{\partial v_\sigma}{\partial\sigma} - \frac{v_n}{R}\right)(\sigma_2).\end{aligned} \tag{35}$$

Здесь $R(\sigma_2)$ – радиус кривизны пелены L в точке $\sigma_2 \in \Delta$. Объединяя формулы (33)–(35), получаем:

$$\begin{aligned}\frac{d^*\gamma^*}{dt} = \lim_{\Delta\to 0}\left\{-\gamma(\sigma_1)\frac{1}{\Delta}\frac{d\Delta}{dt}\right\} - \frac{1}{2}\gamma^*\frac{\partial}{\partial\sigma}(v_{\sigma 2} - v_{\sigma 1}) = \\ = -\gamma^*\Big(\frac{\partial v_\sigma}{\partial\sigma} - \frac{v_n}{R}\Big) - \frac{1}{2}\gamma^*\frac{\partial}{\partial\sigma}(v_{\sigma 2} - v_{\sigma 1}) = -\gamma^*\Big(\frac{\partial v_{\sigma 2}}{\partial\sigma} - \frac{v_n}{R}\Big).\end{aligned} \tag{36}$$

В последней скобке все величины относятся к точке отрыва S. В естественных координатах, для которых данная вихревая линия является координатной линией, имеем [87, с. 60]:

$$\operatorname{div} V = \frac{\partial v_\sigma}{\partial\sigma} + \frac{v_n}{R} + \frac{\partial v_n}{\partial n} = 0.$$

Отсюда и (36) получаем искомую формулу для изменения во времени интенсивности γ^* пелены L в точке отрыва:

$$\frac{d^*\gamma^*}{dt} = \gamma^*\frac{\partial v_n}{\partial n}(s). \tag{37}$$

Полученная формула корректна, если конечна величина $\dfrac{\partial v_n}{\partial n}$. Согласно теореме 3 мы можем рассчитывать ее как сумму соответствующих величин $\dfrac{\partial v_n}{\partial n}$ от двух пелен с непрерывно распределенной завихренностью и имеющих общую часть – участок контура Γ до точки отрыва S. Согласно замечанию к теореме 4 необходимо, чтобы кривизны этих пелен были непрерывны в S, т.е. совпадали с кривизной Γ в точке S.

Поскольку скорость движения точки отрыва по касательной к обтекаемой поверхности есть $v^*_{\sigma 1}$, а скорость движения частицы пелены,

находящейся в этой точке есть v_σ^*, то за бесконечно малое время Δt в поток сойдет вихревая пелена длины $\Delta\sigma$, где

$$\Delta\sigma = (v_\sigma^* - v_{\sigma 1}^*)\Delta t = \frac{1}{2}(v_{\sigma 2}^* - v_{\sigma 1}^*)\Delta t = -\frac{1}{2}\gamma^*\Delta t. \qquad (38)$$

Формулы (37), (38) и есть формулы Ильичева-Постоловского, полученные ими для течения над кругом.

5. Полная система уравнений для нестационарного отрывного обтекания при моделировании оторвавшегося пограничного слоя вихревой пеленой. Мы в состоянии теперь представить математическую модель принятой схематизации течения.

Предполагаем контур Γ неподвижным. Соответственно полагаем известным поле скоростей $V_0(z,t)$ безотрывного обтекания Γ со скоростью U_∞ на бесконечности, $z = (x,y)$. Далее полагаем, что совпадение $\tau(L)$ и $\tau(\Gamma)$ – касательных к L и Γ, или их противоположная направленность в точке отрыва S сохраняется. Соответственно этому накладываем ограничение на γ^*: $\gamma^* < 0$ в случае $\tau(L) = \tau(\Gamma)$, $\gamma^* > 0$ в случае $\tau(L) = -\tau(\Gamma)$. Условие на γ^* согласуется с асимптотическим анализом решений уравнений ламинарного пограничного слоя в малой окрестности точки отрыва при $Re \to \infty$ [8, с. 184]. У нас неравенства $\gamma^* < 0$ или $\gamma^* > 0$ выступают как дополнительное требование, в силу которого соответствие между σ и параметром g, равным полной циркуляции жидкости вокруг участка пелены L от σ до l_1 взаимно однозначно.

$$g = \int_\sigma^{l_1} \gamma(\sigma)d\sigma; \quad \sigma(g) = \int_g^{g_1} \left[(x_g')^2 + (y_g')^2\right] dg; \quad \gamma(g) = -\frac{1}{\sigma_g'}. \qquad (39)$$

Здесь и далее для удобства записи индекс L у γ опускаем.

Основные неизвестные функции: $g_1(t)$ – полная циркуляция жидкости вокруг L; $z(g,t) = (x(g,t), y(g,t))$ – параметрическое представление пелены L, $0 \le g \le g_1(t)$; $s^*(t)$ – дуговая координата точки отрыва на контуре Γ.

Используя (37), (38), получаем:

$$\frac{dg_1}{dt} = -\frac{1}{2}\gamma^{*2}; \quad \frac{d^2g_1}{dt^2} = -\gamma^*\frac{d\gamma^*}{dt} = -\gamma^{*2}\frac{\partial v_n}{\partial n}.$$

Поэтому $g_1(t)$ определяется уравнениями:

$$\frac{d^2g_1(t)}{dt^2} = 2\frac{dg_1(t)}{dt}\frac{\partial v_n}{\partial n}((s^*(t)), \quad g_1(0) = g_0, \quad \frac{dg_1(0)}{dt} = -\frac{\gamma_0^2}{2}. \tag{40}$$

Положение свободной пелены L согласно (26) и (27) можно найти, решая уравнение:

$$\begin{gathered}\frac{\partial z(g,t)}{\partial t} = -\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \gamma(\sigma,t)\omega\left(\rho(\sigma)e^{i\varphi(\sigma)}\right)d\sigma + \\ +\text{v.p.}\int\limits_L V(z(g,t),z(g(\sigma),t))\gamma(\sigma,t)d\sigma + V_0(z(g,t)), \quad 0 \le g \le g_1,\end{gathered} \tag{41}$$

с начальным условием:

$$z(g,0) = z_0(g), \quad 0 \le g \le g_0 \tag{42}$$

и краевыми условиями:

$$z(0,t) = Q(s^*(t)), \quad \partial z(0,t)/\partial t < \infty. \tag{43}$$

При неподвижном контуре Γ функция $\omega(x,y)$, $x^2+y^2<1$, не зависит от времени t и, являясь решением соответствующей задачи Дирихле, может считаться известной. Напомним, что $\rho(\sigma)e^{i\varphi(\sigma)}$ – это образ точки $z(g(\sigma,t),t)$ при конформном отображении $f(z,a)$; $Q(s)$ – точка на Γ с дуговой координатой s. Чтобы обеспечить конечность скорости жидкости вблизи свободного конца пелены L $\quad(\partial z(0,t)/\partial t < \infty)$, необходимо наложить условие $\gamma(g,t) = 0$ при$g = 0$.

Изменение $s^*(t)$ подчиняется отношению:

$$\frac{d}{dt}s^*(t) = v_{s1}(s^*(t)), \quad s^*(0) = s_0.$$

Система уравнений (39)–(43) является искомой. Заметим, что скорость жидкости в произвольной точке (x,y) определяется формулой, аналогичной правой части (41) (см. (27)). Величины v_n и v_{s1}, нам необходимые, получаются из нее предельным переходом. В вычислениях можно использовать формулу (28).

При подвижном контуре Γ к правой части уравнения (41) необходимо добавить слагаемое, соответствующее течению 4) (см. начало п. 2) и

получаемое решением задачи Неймана для гармонической функции во внешней к Γ области. Следует также изменить очевидным образом γ^* (см. вывод формулы (37)).

6. "Вычислительная" модель задачи. Для численного решения системы (39)–(43) применяем метод аппроксимации L сплайнами и метод дискретных вихрей. Вследствие теорем 3, 4 величина $\partial v_n/\partial n^*$, входящая в уравнения, является конечной только в случае, когда в точке отрыва кривизны сходящей пелены и обтекаемого контура совпадают. Поэтому представление вихревой пелены L в окрестности точки отрыва дискретными вихрями неизбежно вносит в вычисления большие погрешности. Начальный участок L_1 пелены в пределах изменения дуговой координаты $0 \le \sigma \le \sigma_1$ необходимо задавать аналитически, и для этой цели будем использовать кубические сплайны, представляя плотность $\gamma(\sigma)$ кусочно-линейной функцией. Таким образом для L_1 используются сплайны минимальной степени, удовлетворяющие условиям теоремы 4.

На самом деле, система уравнений (39)–(43) не описывает полностью все важные для расчета давления на оболочку явления реального течения. Она не учитывает, например, такое важное проявление вязкости, как распад вихрей, диссипацию завихренности с течением времени после ее зарождения на стенках препятствия. С этой точки зрения на систему (39)–(43) следует смотреть, по-существу, как на модель поведения именно начального участка L_1 оторвавшегося пограничного слоя.

Величина σ_1 выбирается из расчета, что величина скорости течения в точке отрыва S, индуцируемая последующим за σ_1 элементарным участком пелены L, в пределах выбранной погрешности вычислений совпадает со скоростью, индуцированной заменяющим этот участок дискретным вихрем.

Когда определена пелена L_1, расчет течения, вызванного ею вокруг Γ, ведется с использованием операторов A_1, A_2, A_3 п. 3. С тем, чтобы сохранить конечность скорости течения возле пелены после ее аппроксимации, пелена $L \setminus L_1$ заменяется не системой вихреисточников, а системой вихревых ядер.

Поскольку методу дискретных вихрей посвящено много работ, в том

числе книга автора [112], отметим только некоторые особенности алгоритма расчета отрывного обтекания по нашей схеме.

1. В проведенных расчетах мы использовали формулы работы [136] для вычисления необходимого конформного отображения (см. также [144]).

2. Различные выражения для вихревых ядер можно найти в работах [135], [125]. В расчетах мы использовали простейшее распределение завихренности от ядра, обеспечивающее непрерывно дифференцируемое поле скоростей:

$$\omega(P) = \begin{cases} \dfrac{3G(\delta - r)}{\pi\delta^3}, & r \le \delta, \\ 0, & r > \delta. \end{cases}$$

Здесь δ — радиус ядра, r — расстояние от центра ядра до точки P, $\omega(P) = |\operatorname{rot} \cdot V(P)|$, G — интенсивность ядра. Само поле скоростей определяется формулой:

$$|V(P)| = G\frac{3\delta - 2r}{\delta^3}r, \text{ если } r \le \delta; \quad |V(P)| = \frac{G}{r} \text{ при } r \ge \delta.$$

3. Применена аппроксимация интегральных операторов A_1, A_2, A_3 более простыми с вычислительной точки зрения опрераторами с погрешностью $O(\sigma_1^2)$ [1].

4. Объединение и диссипация вихрей в дальнем следе моделировались способом работы [39].

5. Задача определения положения L рассматривается как задача с препятствием: пелена $L \backslash L_1$ не может пересекать приграничную к Γ полосу ширины δ.

Детали алгоритма расчета подробно обсуждаются в работах [1], [112], [85].

7. Примеры. Ниже приводятся результаты численных экспериментов по расчету отрывных течений при помощи алгоритмов, изложенных в данном параграфе. Все расчеты были проведены при помощи комплекса рабочих программ, созданного в 80-х годах сотрудником Казанского физико-технического института АН СССР З.Г. Серазетдиновым (см. [1], [85]). Методическое руководство этими разработками осуществлялось автором. На рисунках 3, 4, 5, приведены графики поведения

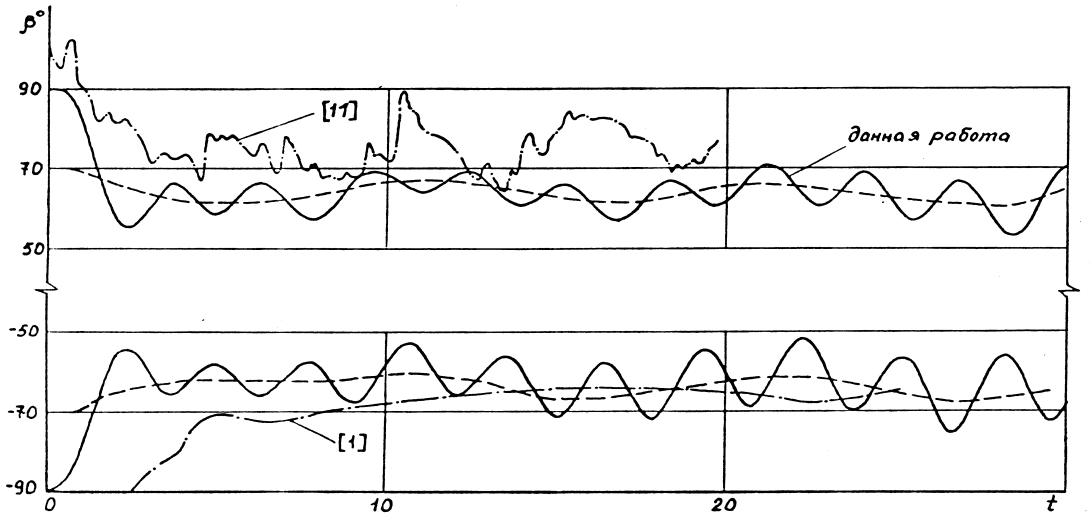
β°
90
70
50
-50
-70
-90
[11]
данная работа
[1]
0
10
20
t

Рис. 3

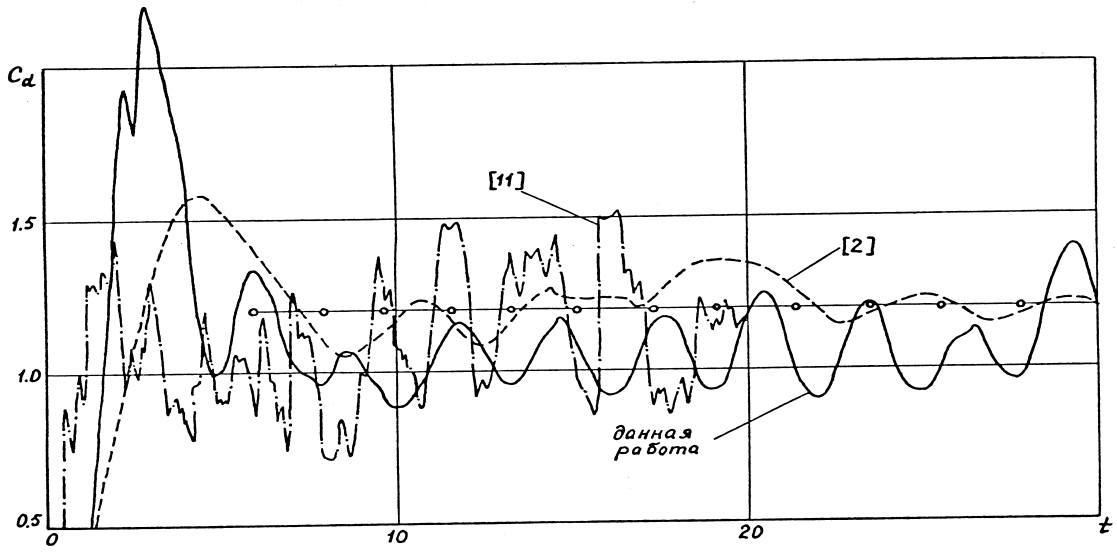
C_d
1.5
1.0
0.5
[11]
[2]
данная работа
0
10
20
t

Рис. 4

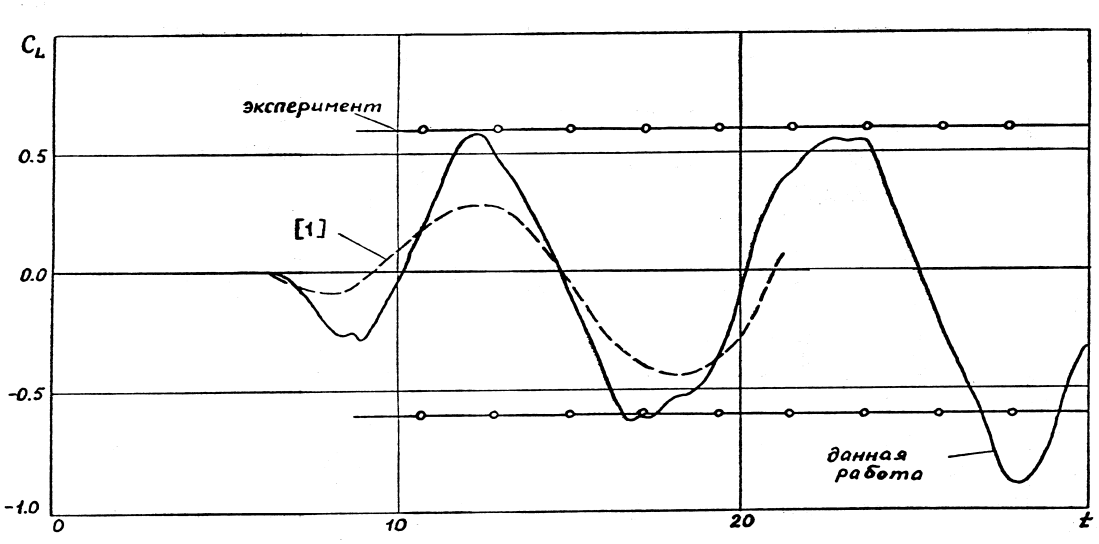
C_L
эксперимент
0.5
[1]
0.0
-0.5
данная работа
-1.0
0
10
20
t

Рис. 5

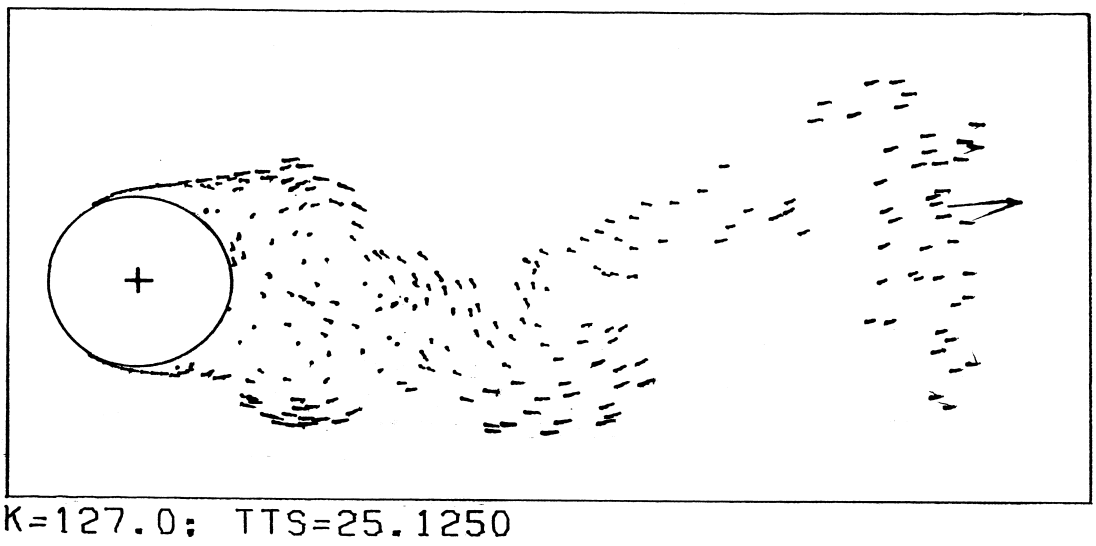
K=127.0; TTS=25.1250

Рис. 6

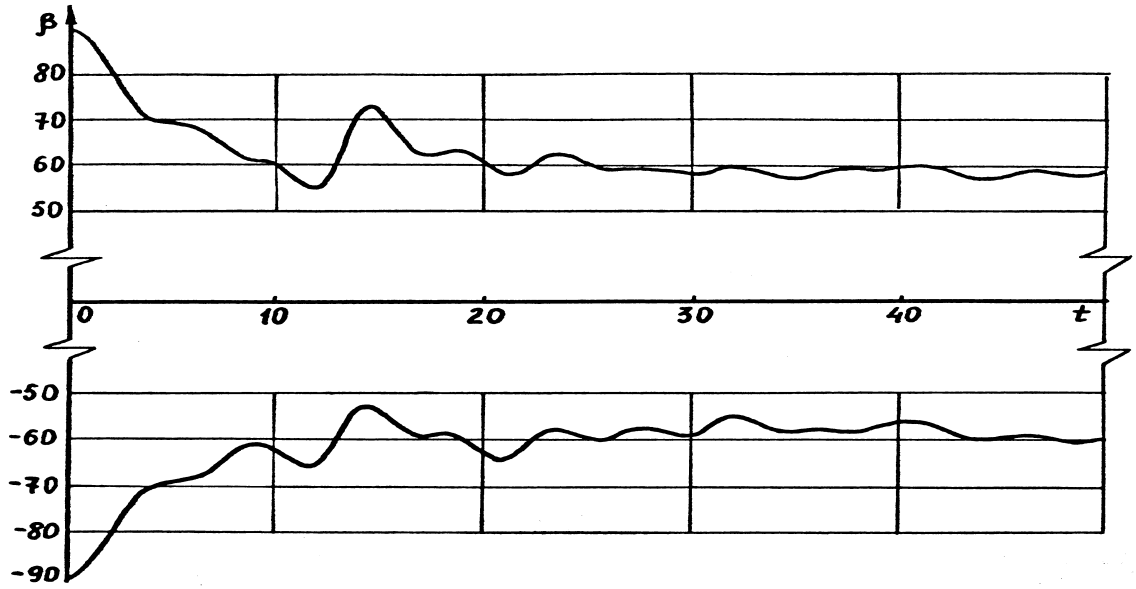
β
80
70
60
50
0
10
20
30
40
t
-50
-60
-70
-80
-90

Рис. 7

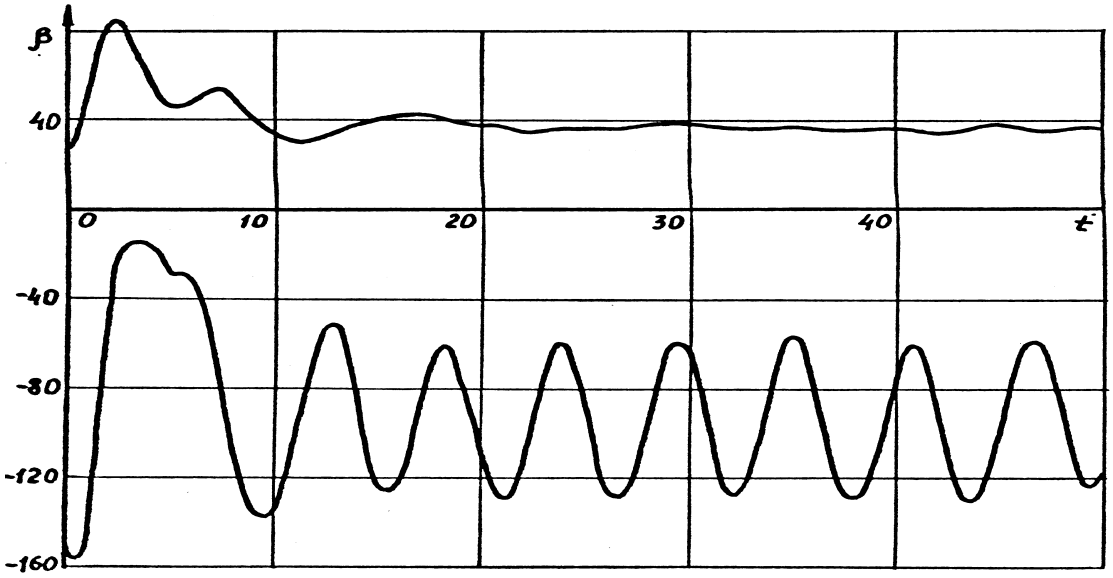
β
40
0
10
20
30
40
t
-40
-80
-120
-160

Рис. 8

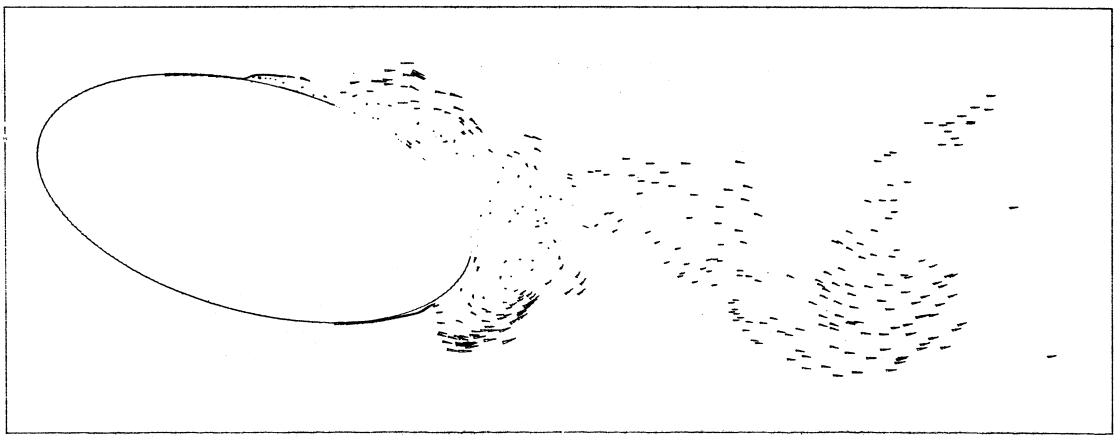
K=200.0; T=25.6500

Рис. 9

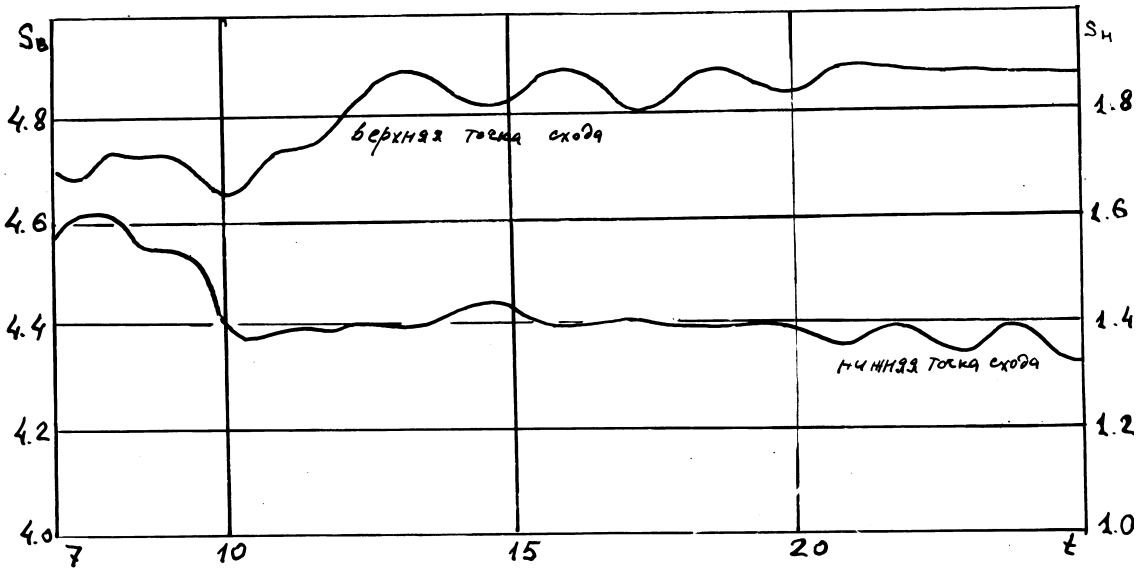
$S_в$
$S_н$
4.8
4.6
4.4
4.2
4.0
1.8
1.6
1.4
1.2
1.0
7
10
15
20
t
верхняя точка схода
нижняя точка схода

Рис. 10

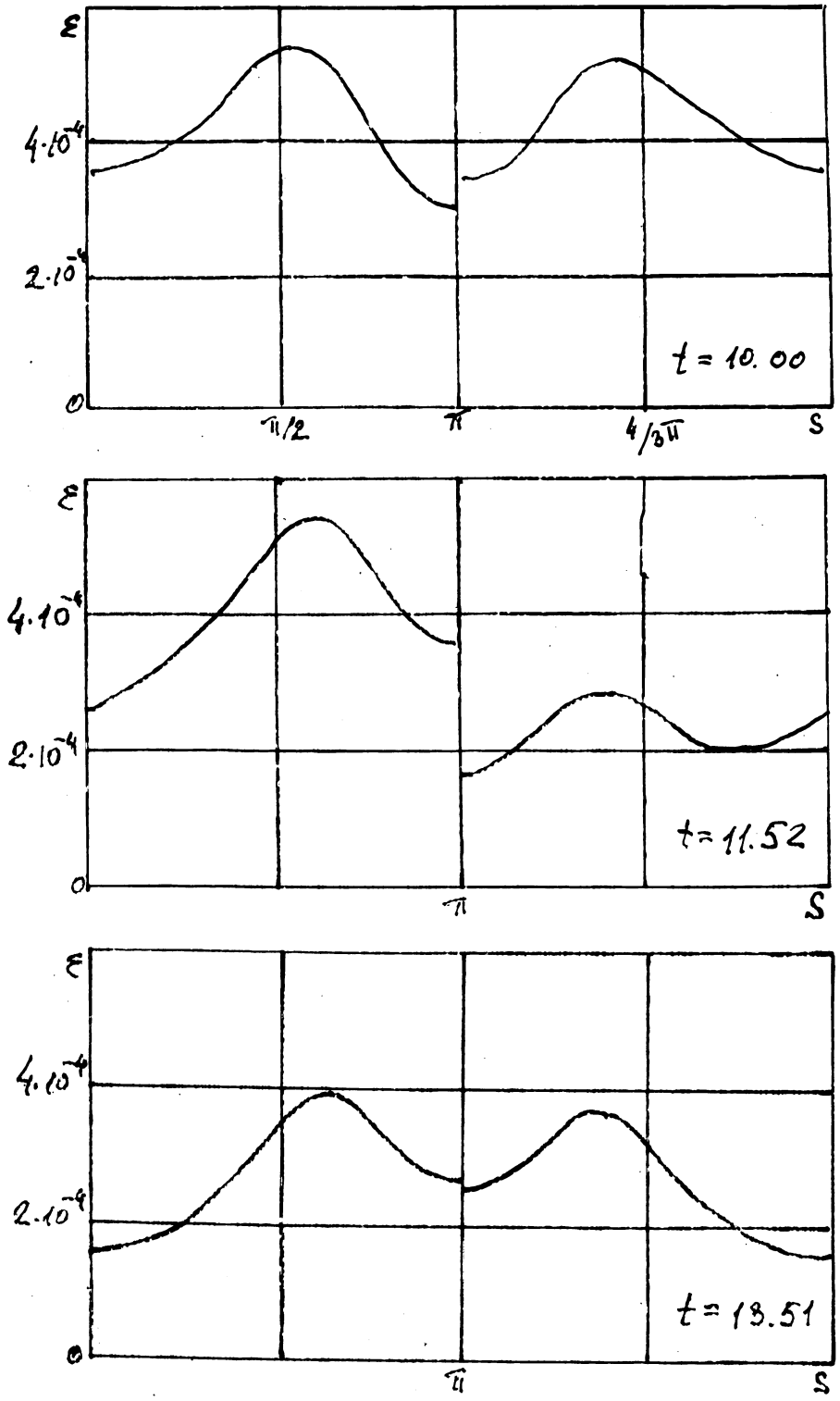
ε
4·10⁻⁴
2·10⁻⁴
0
π/2
π
4/3π
S
t = 10.00
ε
4·10⁻⁴
2·10⁻⁴
0
π
S
t = 11.52
ε
4·10⁻⁴
2·10⁻⁴
0
π
S
t = 13.51

Рис. 11

функций β (угол отрыва), C_d (коэффициент сопротивления) и C_L (коэффициент подъемной силы) при поперечном обтекании жесткого кругового цилиндра. Скорость потока на бесконечности и радиус цилиндра полагаются равными единице. Асимметрия схода вихревых пелен достигалась небольшим смещением вихрей с одной стороны следа по направлению потока в течение промежутка времени $6.25 \leq t \leq 9.25$.

В результате получили течение, в котором наблюдается поочередный срыв крупномасштабных вихрей сверху и снизу цилиндра (рис. 6). Для точек отрыва получается осциллирующее решение, причем, как показали численные эксперименты, период и амплитуда колебаний практически не зависят от шага по времени. Как видно из рисунка 3, точки отрыва осциллируют около некоторого среднего положения, которое в свою очередь совершает синусоидальные колебания, вызванные поочередным сходом крупномасштабных вихрей. Эта средняя линия и характеризует поведение точек отрыва потока.

Коэффициент сопротивления (рис. 5) сначала претерпевает сильный скачок, а затем падает и колеблется около положения близкого к $C_d = 1.2$, полученному экспериментально.

На рисунке 4 приведен график поведения коэффициента подъемной силы. Видно, что вследствие поочередного схода крупномасштабных вихрей C_L совершает синусоидальные колебания с амплитудой $|C_L| \approx 0.58$, что хорошо согласуется с экспериментальными данными $|C_L| = 0.5 - 0.7$.

Численные эксперименты выявили большую чувствительность C_L к процедуре объединения дискретных вихрей. Вероятно, ее использование надо согласовать по времени со сходом в поток крупномасштабных вихрей.

Полученное число Струхаля $St \approx 0.19$ близко к общепринятой величине $St = 0.21$.

Экспериментальные данные взяты либо из книги Шлихтинга [114], либо из книги С.М. Белоцерковского и др. [15]

Численные эксперименты подтвердили способность модели (39)–(43) вполне удовлетворительно описывать физическое явление и на примере расчета нестационарного отрывного обтекания эллипса с полуосями $a = 2$, $b = 1$ под различными углами атаки α к потоку. Результаты

приведены на рисунках 7, 8. Видно, что, в отличие от случая обтекания кругового цилиндра, здесь при $\alpha = 0$ поведение точек отрыва слабо зависит от поочередного схода в поток крупномасштабных вихрей. Это объясняется тем, что вследствие удлиненной формы эллипса зона асимметрии удалена от точек отрыва. Аналогично объясняется их поведение при угле атаки $\alpha = 15^\circ$. Верхняя точка отрыва удалена от следа, нижняя — из-за крупномасштабных вихрей в следе совершает синусоидальные колебания. Сильный скачок в начале счета объясняется произволом в выборе начальных значений β и γ^*. Поле скоростей дискретных вихрей приведено на рисунке 9, где K означает число вихрей в потоке, T — безразмерное время.

В качестве третьего примера рассмотрим отрывное обтекание потоком идеальной несжимаемой жидкости мягкой цилиндрической оболочки, первоначально имеющей поперечное сечение в виде круга радиуса R. Оболочка в потоке удерживается посредством закрепления в передней точке. Внутреннее давление $p_{\text{вн}}$ предполагается постоянным и равным давлению жидкости на бесконечности p_∞.

Реализация начальных условий проводилась следующим образом. При $t = 0$ осуществлялось условие порыва, но до момента t^* оболочка предполагается жесткой, и решение на этом этапе проводилось по схеме первого примера. Лишь потом, при $t > t^*$, начинается процесс взаимодействия.

Представленные ниже результаты получены при следующих значениях основных параметров: $E = 1000$н; $\gamma = 0.01$кг/м; $U_\infty = 10$м/сек; $t^* = 6.9$; $p_\infty = 1$атм; $\rho = 1.2$кг/м^3; $L = R = 0.1$м; $\beta = 0.1$. Количество присоединенных вихрей, моделирующих оболочку, $N = 40$. Шаг по времени в методе конечных разностей для решения по явной схеме уравнения равновесия оболочки, выписанной ниже в безразмерной форме:

$$\frac{dv_k}{dt} = \left(\frac{E}{\gamma U_\infty^2}\right)\frac{\partial}{\partial s}\left(\frac{T}{\lambda}\frac{\partial x_k}{\partial s}\right) + \left(\frac{\rho L^2}{2\gamma}\right)p\frac{\partial x_{3-k}}{\partial s}, \quad k = 1, 2, \tag{44}$$

составляет: $\Delta t_1 = 0.0035$; шаг по времени в методе дискретных вихрей $\Delta t_2 = 0.105$. Новый вихрь в поток "вводится" после $\Delta t_2/\Delta t_1$ шагов, но через каждый шаг по времени Δt_1 "удлиняется" "аналитическая" часть

пелены L_1. Через 6 шагов по Δt_1 пересчитывается нагрузка на оболочку. Изложенный выбор разных шагов по времени для последовательного расчета потока, оболочки и нагрузки позволяет уменьшить число дискретных вихрей в потоке и экономить затраты машинного времени, сохраняя устойчивость процесса решения задачи взаимодействия. Для T принят линейный физический закон: $T = E(\lambda - 1)_+$. При разностной аппроксимации уравнения (44) вводилась искусственная вязкость в полном согласии с теоретическими исследованиями параграфа 6 главы 2.

Замечание к нижеследующим рисункам: дуговая координата S отсчитывается по часовой стрелке и изменяется в пределах $[0, 2\pi]$, точке закрепления соответствует значение $s = \pi$.

На рисунке 10 показан график поведения точек схода в поток вихревых пелен. В результате введения асимметрии в период $6.25 \le t \le 9.25$ их дуговые координаты претерпевают сильный скачок. Затем положение стабилизируется и точки схода в дальнейшем совершают колебания около

некоторого среднего положения. Можно отметить, что в результате деформации оболочки точки отрыва сдвигаются вперед по потоку.

На рисунке 11 показано изменение относительного удлинения $\varepsilon = \lambda - 1$ вдоль дуги s в различные моменты времени. Можно отметить, что чаще наибольшее значение ε имеет в точках, где радиальные смещения велики, наименьшее — в передней или задней точках. В результате маятникообразного колебания появляется разрыв функции ε в точке защемления. Действительно, в момент времени $t = 10.0$ конструкция движется вниз, т.е. в верхней половине контура действует добавочное растягивающее усилие, вследствие чего $\varepsilon(\pi+) > \varepsilon(\pi-)$. Соответственно, в момент времени $t = 11.52$ имеем $\varepsilon(\pi+) < \varepsilon(\pi-)$. Если же оболочка находится в равновесии, к нему она близка при $t = 13.51$, в точке крепления разрыва ε нет, и картина изменения ε практически симметрична относительно точки крепления.

§ 3. Решение задач отрывного обтекания с помощью метода конечных элементов

1. Введение. В этом параграфе мы предлагаем и исследуем вариант метода частиц в ячейке [14] для расчета отрывных течений. Хотя алгоритм и результаты его теоретического исследования изложены для плоского течения, они могут быть обобщены на пространственное обтекание тел.

Пусть Ω_0 — область, занятая жидкостью, Γ — граница тела, v — скорость частиц жидкости, $\overline{k}$ — единичный вектор, перпендикулярный к плоскости течения, ψ — функция тока, $\omega = |rotv|$, ν — коэффициент вязкости. Завихренность ω — основная гидродинамическая величина, которая переносится частицей из ячейки. Выделяем зоны, где вследствие действия вязких сил завихренность зарождается (пограничный слой Ω_1), уменьшает свою интенсивность (дальний след Ω_3), а также зону Ω_2 отрыва погранслоя, где завихренность из пограничного слоя вносится в основной поток. Мы отличаем таким образом зоны, где завихренность увеличивается или уменьшается не только за счет конвективного переноса в основном потоке.

Несмотря на различную природу изменения завихренности в зонах $\Omega_1, \Omega_2, \Omega_3$: трение о стенки препятствия, отрыв потока, диссипация, мы представляем все эти причины как действие распределенных вихреисточников интенсивности $f(x,t)$. При изложении алгоритма и теоретическом исследовании мы считаем f известной функцией.

Отметим одну из возможных математических моделей описания f, связанную с результатами предшествующего параграфа. В качестве Ω_1 выделяем достаточно узкую область течения, примыкающую к поверхности тела, и моделируем в ней процесс зарождения пристеночной завихренности следующим образом. Рассмотрим течение идеальной жидкости, имеющей на данный момент те же скорость на бесконечности и распределение завихренности в области $\Omega_0 \backslash \Omega_1$, что и рассматриваемое течение, а в области Ω_1 — безвихревое. Это течение можно продолжить на всю плоскость, заменяя контур тела присоединенной вихревой пеленой. Примем, что суммарная завихренность поперёк полосы в исходном течении

равна интенсивности присоединенной вихревой пелены:

$$\int_0^{H(S)} \omega dh = \gamma(s), \tag{1}$$

здесь s — дуговая координата, отсчитываемая вдоль контура, $H(s)$ — размер поперечного сечения Ω_1. Действительно, легко показать, что введенное в рассмотрение течение внутри Γ представляет собой застойную зону, а поскольку узкая полоса завихренности в Ω_1 при соблюдении (1) оказывает на существующее поле скоростей действие такое же, как пелена, скорости на внутренней стороне Ω_1 будут близки к нулю, и выполняется условие прилипания. Примем также, что поперек полосы завихренность ω как функция расстояния от тела представляет собою полином, коэффициенты которого определяются из условия (1) и требований гладкости на все поле скаляров $\omega(x,t)$. Изложенную модель возникновения пристеночной завихренности можно считать удачной, если есть быстрые и высокоточные способы расчета $\gamma(s)$. Такой способ подсказывается теоремой 2 предшествующего параграфа.

Вне полосы Ω_1 диффузионными процессами переноса завихренности пренебрегаем.

Считаем, что отрыв пограничного слоя проявляет себя в том, что часть завихренности области Ω_1 переносится в область $\Omega_2 \subseteq \Omega_0 \backslash \Omega_1$ основного потока и участвует затем в образовании пристеночной завихренности. Пусть $u^\star$ — средняя по сечению Ω_1 в точке отрыва скорость потока, $\gamma^\star$ — суммарная по тому же сечению завихренность

$$u^\star = \frac{1}{H(s^\star)} \int_0^{H(s^\star)} u dh, \qquad \gamma^\star = \int_0^{H(s^\star)} \omega dh.$$

Принимаем, что в область Ω_2 (соответствующую одной точке отрыва — $s^\star$) за время Δt сходит завихренность суммарной величины $(1/2)(u_2 - u_1)\Delta t \gamma^\star$, а сама точка отрыва перемещается по контуру тела на величину $u_1 \Delta t$. Значения u_1 и u_2 определяются из соотношений

$$u_1 + u_2 = 2u^\star, \quad u_1 - u_2 = \gamma^\star \tag{2}$$

Параметры области Ω_2 и закон распределения поступившей в нее за счет отрыва погранслоя завихренности должны согласовываться с имеющимися результатами исследования отрывных течений. При $H \to 0$, где $H = \max H(s)$, область Ω_2 переходит в отрезок вихревой линии. Возникающие при этом предельные соотношения и соответствующий численный эксперимент с такой моделью отрыва представлены в предшествующем параграфе. Итак, в изложенной модели $f(x,t))$ определяется интегральными, типа (2.15), и алгебраическими соотношениями.

2. Общая схема расчета отрывного обтекания. При построении алгоритма, в основном, следуем работе [119]. Ограничим рассматриваемую часть течения достаточно большим прямоугольником. Область, заключенную между границами прямоугольника и тела, обозначим через Ω; а через Ω_h — аппроксимацию с полигональной границей. Пусть $\Omega_h \subseteq \Omega$. Проведем в Ω_h регулярную триангуляцию $\mathcal{T}_h$. Максимальный из диаметров ее элементов k будем обозначать через h Предполагаем, что граничные вершины Ω_h либо принадлежат к внешней границе Ω, либо треугольник из $\mathcal{T}_h$ с данной вершиной касается Γ. Пусть τ_i, $i = 1, ..., N$, — перечисление треугольников из $\mathcal{T}_h$, через V_h обозначим пространство непрерывных функций на Ω_h, которые аффинны на каждом треугольнике из $\mathcal{T}_h$ и равны нулю на границе Ω_h. Каждую такую функцию продолжаем как нулевую на $\Omega \backslash \Omega_h$.

Пространство функций на k совпадает с P_1 — множеством многочленов первой степени, а степени свободы конечного элемента определяются как значения функции в вершинах треугольника k. Мы придерживаемся определений монографии [91].

При переходе от k-го временного слоя к $k+1$-му, рассмотрим призмы

$$P_{ik} = \tau_i \times [k\Delta t, (k+1)\Delta t],\ k = 0, ...M-1,\ M = \frac{T}{\Delta t},\ \tau_i \in \mathcal{T}_h.$$

Сам переход осуществим в два этапа. На первом — определяем поле скоростей $u_h^{k+1}(x,t)$ как постоянное на каждой призме P_{ik}:

$$u_h^{k+1}(x,t) = \mathrm{rot}(\psi_h^{k+1}\overline{k}), \quad \psi_h^{k+1} - \psi_h^0 \in V_h, \tag{3}$$

$$\int\limits_{\Omega_h} \nabla\psi_h^{k+1}\nabla\theta dx = \sum_{\tau_i \in \mathcal{T}_h} \omega_h^k(\xi^{i,k}, k\Delta t) \int\limits_{\tau_i} \theta(x)dx \quad \forall\theta \in V_h. \tag{4}$$

Здесь ψ_h^0 — непрерывная в Ω_h функция, в каждом треугольнике имеющая вид $ax_1 + bx_2 + c$, на части границы Ω_h, параллельной оси x_2, она равна $x_2 U_\infty$, на части, параллельной оси x_1, постоянна и равна $\pm bU_\infty$, а на остальной части границы Ω_h функция ψ_h^0 равна нулю. Предполагается, что U_∞ — скорость частиц жидкости на бесконечности, и что Ω лежит точно между прямыми $x_1 = \pm a,\ x_2 = \pm b$. Считаются известными на момент времени $k\Delta t$ распределение завихренности $\omega_h^k(x,t)$, поле скоростей $u_h^k(x,t)$, положение точек отрыва S_1, S_2 пограничного слоя, а также некоторая совокупность точек $\xi^{i,k}, i = 1,\dots,N,\ \xi^{i,k} \in \tau_i$.

Опишем процесс нахождения точек $\xi^{i,k+1}$ (второй этап). По (3), (4), вычислив поле скоростей, определим траекторию частицы, в момент $k\Delta t$ находящейся в $\xi^{i,k}$, т. е. решаем уравнение:

$$\frac{dx}{d\tau} = u_h^{k+1}(x,\tau),\ \tau \in (t^k, t^k + \Delta t),\ x(t^k) = \xi^{i,k}. \tag{5}$$

Впредь функцию, определяющую текущие координаты частицы, на время t занимавшей точку x, будем обозначать через $X(x,t;\tau)$. Поскольку u_h кусочно-постоянна на призмах P_{ik}, легко определяются узлы (x_m^{ik}, t_m), $m = 1,\dots,m_{ik}$, кусочно-линейной траектории $X_h(\xi^{i,k}, t_k;\tau)$. Полагаем:

$$\xi^{j(i),k+1} = x_{m_{ik}}^{ik},\ t^{k+1} = t^k + \Delta t,\ \omega_h(\xi^{j(i),k+1}, t^{k+1}) = \omega_h(\xi^{i,k}, t^k),$$

где $j(i)$ — индекс призмы с условием $(x_{mik}^{ik}, t^{k+1}) \in P_{j(i),k}$. При наличии распределенных вихреисточников интенсивности $f(x,t)$ изменение завихренности выразится формулой:

$$\omega_h(\xi^{j(i),k+1}, t^{k+1}) = \omega_h(\xi^{i,k}, t^k) + \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(X_h(\xi^{i,k}, t_k;\tau),\tau)d\tau.$$

Если последующие интегральные кривые уравнения (5) будут приходить также в призму $P_{j(i),k}$, или, если они выходят на границу $x_1 = a$, их к расчету ω_h^{k+1} не привлекаем.

Пусть i таково, что ни одна траектория не оканчивается внутри τ_i. Вычисляем решение уравнения (5) при условиях $\tau \in (0, t^{k+1})$, $x(t^{k+1}) = \xi$, $\xi \in \tau_i$, находим узлы траектории: (x_m^i, t_m), $m = 1,\dots,m_{ik}$, расположенные в порядке возрастания t, и полагаем $\xi^{i,k+1} = \xi$. После этого

значение $\omega_h(\xi^{i,k+1}, t^{k+1})$ получаем, повторно применяя изложенный алгоритм с момента $t = t_1$ к траектории $X_h(\xi, t^{k+1}; \tau),\ t_1 \le \tau \le t^{k+1}$.

Распределение $\omega_h^{k+1}(x,t)$ теперь определяется как кусочно-постоянное, на каждом треугольнике τ_i его значение равно $\omega_h(\xi^{i,k+1}, t^{k+1})$.

3. Исследование сходимости приближенных решений. Уравнения, которыми описывается принятая модель обтекания, суть следующие:

$$v(x_1, x_2, t) = \mathrm{rot}(\psi(x_1, x_2, t)\overline{k}), \quad x \in \Omega, \quad 0 \le t \le T, \tag{6}$$

$$\Delta\psi = -\omega(x_1, x_2, t), \tag{7}$$

$$\frac{\partial\omega}{\partial t} + (v\nabla)\omega = f(x_1, x_2, t). \tag{8}$$

Здесь $f(x,t)$ описывает зарождение пристеночной завихренности и перенос ее за счет отрыва погранслоя действием распределенных в $\Omega_1 \bigcup \Omega_2$ вихреисточников мощности $f(x,t)$. Необходимо выписать уравнения для функции $f(x,t)$, которая представляет и диссипацию ω в дальнем следе. Мы исследуем сходимость приближенного решения, полученного по изложенному алгоритму, к точному решению системы (6)–(8) в предположении, что функция $f(x,t)$ известна и принадлежит классу C^1. Технику исследования изложим в случае, когда Ω односвязная выпуклая область с достаточно гладкой границей S. Как уже отметили выше, мы можем принять это допущение для рассматриваемого течения при соответствующем выборе f. Второе допущение, что S — линия тока, мы сделаем, чтобы упростить изложение, сделать ясными основными идеи. Оба допущения не принципиальны, ибо легко проследить необходимые дополнительные рассуждения, если их не принимать.

Уравнения (6)–(8) дополняются следующими краевыми и начальными условиями:

$$\psi|_\Gamma = 0, \quad v(x,0) = v_0(x), \quad \omega(x,0) = |\mathrm{rot}v_0| = \omega_0(x). \tag{9}$$

Далее обобщаем методы работы [119], где исследуется случай $f \equiv 0$. Нетрудно видеть, что

$$|\omega_h(\cdot,t)|_{0,\infty} \le |\omega|_{0,\infty} + \max_{x\in\Omega} \int_0^t f(X(x,t;\tau),\tau)d\tau \le$$

$$\leq |\omega_0|_{0,\infty} + TM, \quad M = \max_{x\in\Omega,\ 0\leq t\leq T} |f(x,t)|. \tag{10}$$

Основную роль в дальнейших оценках будет играть

Лемма 1. *Пусть непрерывная функция $y(x,t,\tau)$ удовлетворяет условию $y(x,t,\tau) \geq 0$ для всех $x \in \Omega,\ t,\ \tau \leq T$, и для всех $x \in \Omega, t, \tau \leq T$ выполняется неравенство:*

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau} y(x,t,\tau)\right| \leq c_1 + c_2 \sup_{x\in\Omega}(y(x,\tau,0) + \int_0^\tau y(x,\tau,\sigma)d\sigma) + c_3 y(x,t,\tau). \tag{11}$$

При этих условиях по c_2, c_3 можно определить константу $T_1 = T_1(c_2,c_3)$, обладающую свойством: если для всякого $t \leq T_1$ существует

$$t_0 = t_0(t) \leq T_1,\ y(x,t,t_0) \leq c_4 \text{ при всех } x \in \Omega,$$

то

$$y(x,t,\tau) \leq c(c_1 + c_4) \tag{12}$$

для всех $x \in \Omega, t, \tau \leq T_1$. Константы c, c_1, c_2, c_3, c_4 не зависят от x, t, τ; c определяется по c_2, c_3.

Доказательство. Используя теорему об измеримом выборе для многозначных отображений, построим измеримые (ограниченные) функции $x(\sigma), \tau(\sigma)$ такие, что $y(x(\sigma),\tau(\sigma),\sigma) = \max\limits_{x\in\Omega,\ \tau\in[0,T_1]} y(x,\tau,\sigma) = \varphi(\sigma)$. Первый шаг состоит в группировке всех членов, содержащих t. Имеем:

$$\frac{\partial}{\partial\tau} y(x,t,\tau) - c_3 y(x,t,\tau) \leq c_1 + c_2\Big(\varphi(0) + \int_0^\tau \varphi(\sigma)d\sigma\Big),$$

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(e^{-c_3\tau} y(x,t,\tau)) \leq e^{-c_3\tau}\Big(c_1 + c_2\varphi(0) + c_2\int_0^\tau \varphi(\sigma)d\sigma\Big),$$

$$e^{-c_3T_1} y(x,t,\tau) - y(x,t,0) \leq \int_0^\tau \Big(c_1 + c_2\varphi(0) + c_2\int_0^s \varphi(\sigma)d\sigma\Big)ds \leq$$

$$\leq c_1^{(1)} + c_2^{(1)}\varphi(0) + c_2\int_0^\tau (\tau - s)\varphi(s)ds.$$

Здесь приняты обозначения $c_i^{(1)} = c_i T_1$, $i = 1, 2$. Окончательно получим

$$e^{-c_3 T_1} y(x,t,\tau) - y(x,t,0) \le c_1^{(1)} + c_2^{(1)}\varphi(0) + c_2^{(1)} \int\limits_0^\tau \varphi(s)ds. \qquad (13)$$

Подставив в (13) $x(\tau)$ вместо x и $t(\tau)$ вместо t, будем иметь

$$e^{-c_3 T_1} y(x(\tau),t(\tau),\tau) - y(x(\tau),t(\tau),0) \le c_1^{(1)} + c_2^{(1)}\varphi(0) + c_2^{(1)} \int\limits_0^\tau \varphi(s)ds.$$

Замена $y(x(\tau),t(\tau),0)$ на $y(x(0),t(0),0)$ только усилит получившееся неравенство:

$$\varphi(\tau) \le c_1^{(2)} + c_2^{(2)}\varphi(0) + c_2^{(2)} \int\limits_0^\tau \varphi(s)ds,$$

где

$$c_1^{(2)} = T_1 c_1 \exp(c_3 T_1), \quad c_2^{(2)} = (T_1 c_2 + 1)\exp(c_3 T_1).$$

Отсюда интегральный вариант неравенства Беллмана-Гронуолла дает нам оценку $\varphi(\tau)$:

$$\varphi(\tau) \le c_1^{(3)} + c_2^{(3)}\varphi(0), \quad \tau \in [0, T_1], \qquad (14)$$

$$c_1^{(3)} = c_1^{(2)} \exp(c_2^{(2)} T_1), \quad c_2^{(3)} = c_2^{(2)} \exp(c_2^{(2)} T_1).$$

Используя теперь то, что в левой части неравенства (11) стоит модуль величины $\dfrac{\partial}{\partial\tau} y(x,t,\tau)$, приходим к неравенству:

$$-\frac{\partial}{\partial\tau} y(x,t,\tau) - c_3 y(x,t,\tau) \le c_1 + c_2 \sup_{x\in\Omega} \Big(y(x,\tau,0) + \int\limits_0^\tau y(x,\tau,\sigma)d\sigma \Big).$$

Действуя как и выше, получаем

$$\frac{\partial}{\partial\tau}(e^{c_3\tau} y(x,t,\tau)) \ge -e^{c_3\tau}\Big(c_1 + c_2\varphi(0) + c_2 \int\limits_0^\tau \varphi(\sigma)d\sigma \Big).$$

Интегрируя это соотношение, будем иметь:

$$e^{c_3\tau}y(x,t,\tau)-y(x,t,0)\geq-\int\limits_0^\tau e^{c_3 s}\Big(c_1+c_2\varphi(0)+c_2\int\limits_0^s\varphi(\sigma)d\sigma\Big)ds. \quad (15)$$

Усилим неравенство (15), подставляя вместо $\varphi(\sigma)$ его оценку сверху (14):

$$e^{c_3T_1}y(x,t,\tau)-y(x,t,0)\geq-\frac{c_1}{c_3}(e^{c_3\tau}-1)-\frac{c_2}{c_3}(e^{c_3\tau}-1)\varphi(0)-$$

$$-c_2(c_1^{(3)}+c_2^{(3)}\varphi(0))\int\limits_0^\tau e^{c_3 s}\int\limits_0^s d\sigma ds\geq-\frac{c_1}{c_3}(e^{c_3T_1}-1)-$$

$$-\frac{c_2}{c_3}(e^{c_3T_1}-1)\varphi(0)-\left(\frac{1}{c_3}T_1e^{c_3T_1}+\frac{1}{c_3^2}\right)c_2(c_1^{(3)}+c_2^{(3)}\varphi(0)).$$

После очевидных преобразований имеем:

$$e^{c_3T_1}y(x,t,\tau)-y(x,t,0)\geq-c_1^{(4)}-c_2^{(4)}\varphi(0), \quad (16)$$

где

$$c_1^{(4)}=\frac{c_1}{c_3}\left[e^{c_3T_1}-1+c_2\left(T_1e^{c_3T_1}+\frac{1}{c_3}\right)e^{c_3T_1}T_1\exp(e^{c_3T_1}(T_1c_2+1)T_1)\right], \quad (17_1)$$

$$c_2^{(4)}=\frac{c_2}{c_3}\left[e^{c_3T_1}-1+\left(T_1e^{c_3T_1}+\frac{1}{c_3}\right)e^{c_3T_1}(T_1c_2+1)\exp(e^{c_3T_1}(T_1c_2+1))\right]. \quad (17_2)$$

В левую часть неравенства (16) вместо x подставим $x^\star=x(0)$, $t^\star=t(0)$ вместо t, и $t_0^\star$ вместо τ. Тогда получим

$$e^{c_3T_1}y(x^\star,t^\star,t_0^\star)+c_1^{(4)}\geq c_2^{(5)}\varphi(0),\quad c_2^{(5)}=1-c_2^{(4)}.$$

Можем считать, что в исходном неравенстве (11) $c_3>c_2$ и $c_3>2e$, усиливая его в случае необходимости. Тогда из (17) следует, что при некотором T_1 , зависящем от коэффициентов c_2, c_3 (но не то c_1) $c_2^{(5)}>1/3$. Это позволяет оценить должным образом $\varphi(0)$, а затем при помощи (14) оценить $\varphi(\tau)$.

Следствие 1. *Из доказательства леммы следует существование* $T_1(c_2, c_3)$ *такого, что если для всякого* $t \le T_1$ *существует* $t_0 \le T_1$ *со свойством* $y(x,t,t_0) = O(h^\beta + \Delta t)$, *то* $y(x,t,\tau) = O(h^\beta + \Delta t)$ *для всех* $t, \tau \le T$ *и* $x \in \Omega$.

Лемма 2. *Для фиксированной функции* $\omega \in L^\infty(\Omega) \bigcap H^1(\Omega)$ *определим функции* ψ *и* ψ_h *соотношениями:*

$$\psi \in H_0^1(\Omega), \quad \int\limits_\Omega \nabla\psi \cdot \nabla\theta dx = \int\limits_\Omega \omega\theta dx \quad \forall\theta \in V \equiv H_0^1(\Omega), \tag{18}$$

$$\psi_h \in V_h, \quad \int\limits_{\Omega_h} \nabla\psi_h \cdot \nabla\theta_h dx = \int\limits_{\Omega_h} \omega\theta_h dx \quad \forall\theta_h \in V_h. \tag{19}$$

Тогда

$$|\psi - \psi_h|_{1,\infty,\Omega_h} \le ch^{\frac{1}{3}-\varepsilon}|\omega|_{\infty,\Omega}. \tag{20}$$

Здесь c *— константа, независящая от* h *и* ω; ε *— произвольно фиксированное малое положительное число, символы* $|\cdot|$, $\|\cdot\|$.

Доказательство леммы можно провести, следуя с очевидными изменениями доказательству теоремы 3.3.7. из [91]. Изменения вызваны тем, что $\omega \notin W^{2,\infty}(\Omega)$, и поэтому в используемой для доказательства теоремы 3.3.7 теореме 3.1.5 нельзя полагать $p = \infty$. Легко проследить, что это p можно выбирать достаточно большим при наших условиях. Подробное доказательство леммы 2 можно найти в [112, с. 68–71].

Лемма 3. *Пусть* ψ_h *удовлетворяет вариационному равенству*

$$\int\limits_{\Omega_h} \nabla\psi_h \nabla\theta_h dx = \int\limits_{\Omega_h} \omega_h\theta_h dx \quad \forall\theta_h \in V_h, \quad \psi_h \in V_h, \tag{21}$$

где ω_h *— постоянная на треугольниках функция,* $|\omega_h - \omega|_{\infty,\Omega_h} \leqslant c$ *для заданной непрерывной функции* ω. *Существует непрерывная, кусочно-аффинная функция* $\widetilde{\omega}_h$, *такая, что* $|\widetilde{\omega}_h - \omega|_{\infty,\Omega_h} \le 2c$, *и решение* $\widetilde{\psi}_h$ *аналогичной (21) задачи удовлетворяет неравенству* $|\mathrm{rot}\psi_h\overline{k} - \mathrm{rot}\widetilde{\psi}_h\overline{k}|_{\infty,\Omega_h} \leqslant h$.

Доказательство. В каждом треугольнике τ_i выделим приграничную полосу ширины δ, через $\overset{\circ}{\tau}_i$ обозначим множество точек τ_i, расстояние

которых до границы τ_i превышает δ. Подвергнем все δ-полосы триангуляции таким образом, что вершины новых треугольников принадлежат сторонам τ_i или $\overset{\circ}{\tau}_i$, а их диаметры не превышают d. Строим функцию $\widetilde{\omega}_h$, полагая ее равной ω_h в вершинах, принадлежащих сторонам $\overset{\circ}{\tau}_i$, и равной ω в остальных вершинах триангуляции. В каждом треугольнике $\widetilde{\omega}_h$ — аффинная функция. Пусть $|\widetilde{\omega}_h - \omega|_{\infty,\Omega_h} = |\widetilde{\omega}_h(a) - \omega(a)|$, где a — точка одного из треугольников, лежащих в δ-полосе. На этом треугольнике определим еще вспомогательную аффинную функцию $\underline{\omega}$, во всех вершинах совпадающую с ω.

Имеем $|\widetilde{\omega}_h - \omega|_{\infty,\Omega_h} \le |\widetilde{\omega}_h(a) - \underline{\omega}(a)| + |\underline{\omega}(a) - \omega(a)|$. Будем считать d и δ столь малыми,что $|\underline{\omega}(a) - \omega(a)| \le |\omega_h - \omega|_{\infty,\Omega_h}$, и заметим, что $|\widetilde{\omega}_h(a) - \omega(a)|$ не превосходит максимума значений функции $|\widetilde{\omega}_h(x) - \underline{\omega}(x)|$ в вершинах треугольника. Во всех случаях эти значения меньше $|\omega_h - \omega|_\infty$ по построению. Оценку $|\mathrm{rot}\psi_h\overline{k} - \mathrm{rot}\widetilde{\psi}_h\overline{k}|_{\infty,\Omega_h} \le h$ при достаточно малых d и δ получаем стандартными рассуждениями, используя регулярность триангуляций $\mathcal{T}_h$. Лемма доказана.

Теорема 1. *Если Ω — ограниченное выпуклое открытое множество с непрерывной по Липшицу границей Γ, и если $v_0(\cdot), f(\cdot,t)$ — достаточно гладкие функции, например, принадлежат классу $C^2(\Omega)$ и $C^1(\Omega)$ соответственно, то решение ω_h, полученное по алгоритму, описанному в пункте 2, сходится к точному решению уравнений (6)–(9). При этом для каждой положительной константы $\beta < 1/3$ существуют $h^0, \Delta t^0 > 0$ такие, что*

$$|\omega_h(x,t) - \omega(x,t)| \le c(T)(h^\beta + \Delta t) \tag{22}$$

$\forall h \le h^0$, $\forall \Delta t \le \Delta t^0$, $x \in \Omega_h$, $t \in [0,T]$, $c(T)$ — константа,зависящая от v_0 и T, но не от h.

Доказательство. Предположим, что в соответствующих точках начальные значения ω_h, равные ω_{0h}, таковы, что имеет место оценка $|\omega_{0h} - \omega_0| \le c_1(h + \Delta t)$. Следствием уравнения (8) является оценка:

$$|\omega_h(x,t) - \omega(x,t)| \le |\omega_{0h}(X_h(\xi^{ij}(x), t^j(t); 0)) - \omega_0(X(x,t;0))| +$$
$$+ \int_0^t |f(X_h(\xi^{ij}, t^j; \sigma), \sigma) - f(X(x,t;\sigma),\sigma)| d\sigma,$$

или

$$|\omega_h(\cdot,t)-\omega(\cdot,t)|_\infty \le c_1(h+\Delta t)+$$
$$+\sup_{x\in\Omega}[|\nabla\omega_0|_\infty|X_h(\xi^{ij}(x),t^j(t);0)-X(x,t;0)|+$$
$$+M_1\int_0^t|X_h(\xi^{ij}(x),t^j(t);\sigma)-X(x,t;\sigma)|d\sigma], \qquad (23)$$

где

$$M_1=\sup_{x\in\Omega,\ 0\le t\le T}|f'_x(x,t)|.$$

Здесь $\xi^{ij}(x)$ — точка, построенная по алгоритму для временного промежутка $[j\Delta t,(j+1)\Delta t]$ и принадлежащая тому же треугольнику τ_i, что и x; j определяется условиями $j\Delta t\le t<(j+1)\Delta t$, $t^j=j\Delta t$. По построению X_h и X имеем:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau}(X_h(\xi^{ij},t^j;\tau)-X(x,t;\tau))\right|=|v_h(X_h(\xi^{ij},t^j;\tau))-v(X(x,t;\tau))|\le$$
$$\le|v_h(\cdot,\tau)-v(\cdot,\tau)|_{\infty,\Omega_h}+|\nabla v|_{\infty,\Omega_h}|X_h(\xi^{ij},t^j;\tau)-X(x,t;\tau)|. \qquad (24)$$

Ниже ω_h продолжается как нулевая функция с Ω_h на Ω; $\widetilde{\psi}_h$ — решение вариационного уравнения из леммы 3. Оценим первое слагаемое в правой части неравенства (24):

$$|v_h(\cdot,\tau)-v(\cdot,\tau)|_{\infty,\Omega_h}\le$$
$$\le|\mathrm{rot}\psi_h(\cdot,\tau)\overline{k}-\mathrm{rot}\widetilde{\psi}_h(\cdot,\tau)\overline{k}|_{\infty,\Omega^h}+$$
$$+|\mathrm{rot}\widetilde{\psi}_h(\cdot,\tau)\overline{k}-\mathrm{rot}\widetilde{\psi}(\cdot,\tau)\overline{k}|_{\infty,\Omega_h}+|\mathrm{rot}\widetilde{\psi}(\cdot,\tau)\overline{k}-\mathrm{rot}\psi(\cdot,\tau)\overline{k}|_{\infty,\Omega_h}\le$$
$$\le c_2h^\beta|\omega_h(\cdot,\tau)|_{\infty,\Omega_h}+c_3|\omega_h(\cdot,\tau)-\omega(\cdot,\tau)|_{\infty,\Omega_h}. \qquad (25)$$

Второе слагаемое, содержащее rot, оценивается согласно лемме 2, ибо оно есть сумма разностей первых производных $\widetilde{\psi}_h$ и $\widetilde{\psi}$. При этом ε подбирается так, чтобы степень h из леммы была положительной и равнялась β. Оценка третьего слагаемого есть следствие интегрального представления решения ψ уравнения $-\nabla\psi=\omega,\ \psi|_\Gamma=0$ с использованием функции Грина и свойств объемного потенциала, c_3 зависит только от области Ω.

Из соотношений (23)–(25) приходим к основному неравенству:

$$\left|\frac{\partial}{\partial\tau}(X_h(\xi^{ij}(x),t^j(t);\tau)-X(x,t;\tau))\right|\le c_4(h^\beta+\Delta t)+$$

$$+\sup_{x\in\Omega}[c_3|\nabla\omega_0|_\infty|X_h(\xi^{ij}(x),t^j(\tau);0)-X(x,\tau;0)|+$$

$$+M_1\int_0^\tau|X_h(\xi^{ij}(x),t^j(\tau);\sigma)-X(x,\tau;\sigma)|d\sigma]+$$

$$+|\nabla v|_{\infty,\Omega}|X_h(\xi^{ij}(x),t^j(t);\tau)-X(x,t;\tau)|. \tag{26}$$

По лемме 1, примененной к (26), получаем

$$|X_h(\xi^{ij}(x),t^j(t);\tau)-X(x,t;\tau)|\le c_5(h^\beta+\Delta t) \tag{27}$$

для всех $x\in\Omega_h$ и всех $t,\tau\le T_1$, где T_1 зависит только от параметров "точной" задачи (6)–(9). В качестве функции $t_0(t)$ леммы 1 можно взять $t_0=t^j(t)$. Действительно, $t^j(t)\le t$ и далее

$$|X_h(\xi^{ij}(x),t^j(t);t^j)-X(x,t;t^j)|=|\xi^{ij}(x)-X(x,t;t^j)|\le$$

$$\le|\xi^{ij}(x)-X(x,t;t)|+|X(x,t;t)-X(x,t;t^j)|\le$$

$$\le|\xi^{ij}(x)-x|+|X(t)-X(t^j)|.$$

Первое слагаемое меньше $h_i\le h$, поскольку ξ^{ij} и x принадлежат одному и тому же треугольнику второе слагаемое оцениваем следующим образом:

$$|X(t)-X(t^j)|\le|t-t^j|\sup_{0\le\theta\le1}|X'_\tau(t^j+\theta(t-t^j))|\le$$

$$\le\Delta t\sup_{x\in\Omega,t\in[0,T]}|v(x,t)|.$$

Поэтому с некоторой постоянной c_6, опять зависящей только от задачи (6)– (9),

$$|X_h(\xi^{ij}(x),t^j(t);t^j)-X(x,t;t^j)|\le c_6(h+\Delta t).$$

Итак, на интервале $[0,T_1]$ оценка (22) получена. Все рассуждения можно повторить, принимая за начальный момент времени T_1. Функция ω_0 на новом этапе есть кусочно-постоянная, уже отличная от $\omega(\xi^{ij},T_1)$, а

именно ω_{0h} в каждой точке ξ^{ij} есть значение завихренности, полученной переносом ее вдоль траектории, рассмотренной на предыдущем этапе; j определяется по T_1.

В неравенстве (26) меняется только константа c_4. Поэтому новый интервал, на котором справедлива оценка (22), будет равным $[0, 2T_1]$. Повторяя необходимое число раз рассуждения, получим доказательство теоремы.

Литература

1. Абдюшева Г.Р., Серазетдтнов З.Г., Шагидуллин Р.Р. Алгоритм численного расчета отрывного обтекания замкнутого контура с использованием сплайнов// Исследования по прикладной математике. Изд-во Казанского Университета, Казань, 1989, с. 3–16.

2. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л. Оценки решений эллиптических уравнений вблизи границы. Москва. Издательство ИЛ. 1962, 206 с.

3. Алексеев С.А. Мягкие нерастяжимые оболочки (осесимметричная задача)// В сб.: Научно-техническая конференция 1952 года по расчету гибких пластин и оболочек. Изд-во ВВИА, 1952, с. 73–98.

4. Алексеев С.А. Одноосные мягкие оболочки//Изв. АН СССР, МТТ, 1971, №6, с. 89–94.

5. Алексеев С.А. Основы общей теории мягких оболочек//Расчет пространственных конструкций. Вып. 10. М.: Стройиздат, 1966, с. 31–52.

6. Алексеев С.А. Условия существования двухосного напряженного состояния мягких оболочек//Изв. АН СССР. Механика, 1965, 5, с. 81–84.

7. Альтенбах Х., Жилин П.А. Общая теория упругих простых оболочек//Успехи механики, 1988, т. 11, в. 4, с. 107–148.

8. Асимптотическая теория отрывных течений. Под ред. Сычева В.В., М.: Наука 1987, 256 с.

9. Ахиезер Н.И., Глазман И.М. Теория операторов в гильбертовом пространстве. М.: Наука, 1966, 544 с.

10. Бадриев И.Б., Панкратова О.В., Шагидуллин Р.Р. Итерационные методы решения задач фильтрации с разрывным законом с предельным градиентом//Дифференц. уравнения, 1997, т. 33, №3, с. 396 - 399.

11. Бадриев И.Б., Шагидуллин Р.Р. Исследование одномерных уравнений статического состояния мягкой оболочки и алгоритма их решения//Изв. вузов. Математика, 1992, №1, с. 8–16.

12. Бадриев И.Б., Шагидуллин Р.Р. Классические и обобщенные решения уравнений одноосного состояния мягкой оболочки I.//Сеточн. методы решения дифференц. уравнений, Казань.: Изд-во КГУ, 1986, с. 14–28.

13. Балабух Л.И., Усюкин В.И. Приближенная теория мягких оболочек вращения//Теория оболочек и пластин. М.: Наука, 1973, с. 230–235.

14. Белоцерковский О.М., Давыдов Ю.М. Метод крупных частиц в газовой динамике. М.: Наука. 1982, 392 с.

15. Белоцерковский С.М., Котовский В.Н., Ништ М.И., Федоров Р.М. Математическое моделирование плоскопараллельного отрывного обтекания тел. М.: Наука, 1988, 232 с.

16. Белоцерковский С.М., Ништ М.И., Пономарев А.Т., Рысев О.В. Исследование парашютов и дельтапланов на ЭВМ. М.: Машиностроение, 1987, 260 с.

17. Берже М. Геометрия, т. 1. М.: Мир, 1984, 560 с.

18. Биркгоф Г., Сарантонелло Э. Струи, следы и каверны. М.: Мир, 1964, 466 с.

19. Бураго Ю.Д., Залгаллер В.А. Геометричесике неравенства. Л.: Наука, 1980, 288 с.

20. Ворович И.И. Математические проблемы нелинейной теории пологих оболочек. М. : Наука, 1989, 373 с.

21. Ву Т. Яо-Цзу Кавитационные и спутные течения//Сб. перев. Механика, 1973, в. 5 (141), с. 48–87.

22. Гаевский Х., Грегер К., Захариас К. Нелинейные операторные уравнения и операторные дифференциальные уравнения. М.: Мир, 1978, 336 с.

23. Гахов Ф.Д. Краевые задачи, М.: ГИ ФМЛ, 1963, 640 с.

24. Гельбаум Б., Олмстед Дж. Контрпримеры в анализе. М.: Мир, 1967, 252 с.

25. Гильманов А.Н. Методы адаптивных сеток в задачах газовой динамики. М.: Физматлит, 2000, 248 с.

26. Гимадиев Р.Ш., Гулин Б.В., Шихранов Н.Н.. Прочность мягких оболочек. Статика. Обзор//Прочность и устойчивость оболочек. Труды семинара КФТИ КФАН СССР. В. 9. Казань, 1977, с. 89–115.

27. Гимадиев Р.Ш. Математическое моделирование взаимодействия мягких оболочек со средой//Докт. дисс. Казанский государ. технич. ун-т. 1998, 275 с.

28. Гогиш Л. В., Степанов Г.Ю. Турбулентные отрывные течения. М.: Наука, 1979, 368 с.

29. Гольденвейзер А.Л. Теория упругих тонких оболочек. М.: Наука, 1976, 512 с.

30. Григорьев А.С. Напряженное состояние безмоментных цилиндрических оболочек при больших деформациях//Прикладная математика и механика, 1957, т.21, №6, с. 827–832.

31. Григорьев А.С. О теории и задачах равновесия оболочек при больших деформациях//Изв. АН СССР. МТТ, 1970, 1,

32. Гулин Б.В. Взаимодействие тонких оболочек со средой//Докт. дисс. Казанский гос. университет, 1984, 323 с.

33. Гулин Б. В., Давыдов Р. И., Ридель В. В. Численное исследование динамики мягкой оболочки в одноосном состоянии//Нелинейные проблемы аэроупругости. Тезисы семинара, вып. 11, Казань: КФАН, 1979, с. 44–58.

34. Гулин Б. В., Ридель В. В. Пространственные задачи динамики мягких оболочек//Статика и динамика оболочек. Труды семинара. вып. 12. Казань: КФАН, 1979, с. 202–214.

35. Гулин Б.В., Ридель В.В., Шагидуллин Р.Р. Отрывное обтекание мягкой оболочки//Шестая Дальневосточная конференция по мягким оболочкам, Владивосток, 1979, с. 123–127.

36. Гуревич М. И. Теория струй идеальной жидкости. М.: Наука, 1978.

37. Гювен, Пател, Фарелл. Модель обтекания круговых цилиндров с шероховатой поверхностью при высоких числах Рейнольдса//Теоретические основы инженерных расчетов, 1977, №3, с. 144–154.

38. Даутов Р.З., Павлова М.Ф., Шагидуллин Р.Р. Теорема существования для нелинейной нестационарной задачи теории мягких оболочек//Сеточные методы решения дифференциальных уравнений. Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1986. с.50–57.

39. Деффенбах Р., Маршалл А. Развитие течения около цилиндра, внезапно приведенного в движение//Ракетная техника и космонавтика, 1976, т.14, №7.

40. Днепров И.В., Пономарев А.Т., Радченко А.В., Рысев О.В. К определению напряженно-деформированного состояния мягкой несущей системы//Изв. АН СССР. МТТ, 1991, №2, с. 140–148.

41. Днепров И.В., Пономарев А.Т., Ррысев О.В., Семушин С.А. Исследование процессов нагружения и деформирования парашитов//Математическое моделирование, 1993, т. 5, №3, с. 91–109.

42. Друзь Б.И. Нелинейные уравнения теории колебаний мягких оболочек// Сообщения ДВВИМУ по судовым мягким оболочкам, вып. 24. Владивосток, 1973, с.34–50.

43. Ермолов В.В. Воздухоопорные здания и сооружения. М.: Стройиздат, 1980, 304 с.

44. Ильгамов М.А. Введение в нелинейную гидроупругость. М.: Наука, 1991, 200 с.

45. Ильгамов М.А. Общая постановка задачи взаимодействия идеальной сжимаемой жидкости и проницаемой оболочки при ее конечных перемещениях и деформациях//Труды XII Всесоюзной конференции по теории оболочек и пластин. т.2, Ереван.: Изд-во Ереванского университета, 1980, с. 177–183.

46. Ильгамов М.А. Статические задачи гидроупругости//Казань.: ИММ РАН, 1994, 208 с.

47. Ильичев К.П., Постоловский С.Н. Расчет нестационарного отрывного обтекания тел плоским потоком невязкой жидкости//Изв. АН СССР. МЖГ, 1972, с. 72–82.

48. Карчевский М.М. Математические модели и разностные методы в нелинейной теории фильтрации и теории оболочек. Докт. дисс. Казанский гос. университет, Казань, 1987, 308 с.

49. Кейпер Н.Х. О изометрических вложениях// Математика (сб. переводов), 1957, т. 1:2, с. 17–28.

50. Киселев О.М. К задаче обтекания наполненной газом оболочки плоским потоком идеальной жидкости//Изв. АН СССР, МЖГ, 1971, №3.

51. Киселев О.М., Рапопорт Э.Ф. К задаче о струйном обтекании упругой оболочки//Изв. вузов. Математика, 1976, №10, с. 97–100.

52. Киселев О. М., Рапопорт Э.Ф. О струйном обтекании упругой пластины//Изв. АН СССР. МЖГ, 1976, №4, с. 35–42.

53. Киселев О.М., Рапопорт Э.Ф. О струйном обтекании упругой оболочки/Изв. АН СССР, МЖГ, 1977, №2, с. 24–32.

54. Киселев О.М., Федяев В.Л. О струйном течение жидкости при наличии гибкого ограждения//Труды семинара по краевым задачам. Казань, КГУ, 1974, вып.II, с. 73–82.

55. Клабукова Л.С., Пшеничнов Г.И. Решение краевых задач моментных сетчатых оболочек вращения как безмоментных с поправками типа погранслоя//Журнал выч. матем. и мат. физ. 1995, т.35, №12, с. 1854–1871.

56. Кочин Н.Е. Векторное исчисление и начала тензорного исчисления. М.: Изд-во АН СССР 1961, 426 с.

57. Кошелев А.И. Регулярность решений эллиптических уравнений и систем. М.: Наука, 1986, 240 с.

58. Кошляков Н.Е., Глинер Э.Б., Смирнов М.М. Основные дифференциальные уравнения математической физики. М.: Физматгиз, 1962, 768 с.

59. Красносельский М.А., Забрейко П.П. Геометрические методы нелинейного анализа. М: Наука, 1975, 512 с.

60. Красносельский М.А. Топологические методы в теории нелинейных интегральных уравнений. М.: ГИТТЛ, 1956 392 с.

61. Курант Р. Уравнения с частными производными. М.: Мир, 1964, 830 с.

62. Лаврентьев М.А., Шабат Б.В. Методы теории функций комплексного переменного. М.: Физматгиз, 1958, 678 с.

63. Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач. М.: Мир, 1972, 587 с.

64. Лурье А.И. Нелинейная теория упругости. М.: Наука, 1980, 512 с.

65. Магарил-Ильяев Г.Г., Тихомиров В.М. Выпуклый анализ и его приложения. М.: Эдиториал УРСС, 2000, 176 с.

66. Магула В.Э. Основные зависимости теории мягких оболочек//Труды НКИ, 1973, в. 78, с. 3–15.

67. Магула В.Э. Особенности связи между упругим потенциалом, напряжениями и деформациями изотропных тел//Сообщения лаборатории мягких оболочек ДВ ВИМУ, в. 14, 1971, с. 3–19.

68. Магула В.Э. Судовые эластичные конструкции. Л.: Судостроение, 1978, 264 с.

69. Майоров Ю.И. Обобщение модели Паркинсона на случай несимметричных плоских течений//Труды ЦАГИ, в. 1925, с. 13–24.

70. Маршалл А., Олкин И. Неравенства: теория мажоризации и ее приложения. М.: Мир, 1983, 576 с.

71. Михлин С.Г. Линейные уравнения в частных производных Москва.: Высшая школа, 1977, 432 с.

72. Моди, Эль - Шарбини Теоретическая модель свободной линии тока для плохообтекаемых тел в ограниченном потоке//Теоретические основы инженерных расчетов, 1977, №3, с. 248–256.

73. Мусхелишвили Н.И. Курс аналитической геометрии. М.-Л.: ГИЗТТЛ, 1947, 644 с.

74. Муштари Х.М., Галимов К.З. Нелинейная теория упругих оболочек. Казань.: Таткнигоиздат, 1957, 431 с.

75. Нэш Дж. Изометричные вложения//Математика (сб. переводов).– 1957, т. 1:2, с. 3–16.

76. Обен Ж. - П., Экланд И. Прикладной нелинейный анализ. М.: Мир, 1988. 510 с.

77. Отто Ф., Тростель Р. Пневматические строительные конструкции. М.: Изд-во литературы по строительству, 1967, 320 с.

78. Паркинсон Г., Яндали Т. Модель следа с источниками за плохообтекаемым телом в потенциальном потоке//Сб. перев. Механика, 1971, 2(126), с. 86–102.

79. Парлетт Б. Симметричная проблема собственных значений. М.: Мир, 1983, 382 с.

80. Рахматуллин Х.А. Теория осесимметричного парашюта. ч. I//Научные труды института механики МГУ, вып. 35. М.: Изд-во МГУ, 1975, с. 3–35.

81. Рахматуллин Х.А. Теория осесимметричного парашюта ч. II// Парашюты и проницаемые тела. М.: Изд. МГУ, 1980, с. 5–23.

82. Рейснер Е. Линейная и нелинейная теория оболочек. с 55-69; Тонкостенные оболочечные конструкции. М.: Машиностроение, 1980, 696 с.

83. Ридель В.В., Гулин Б.В. Динамика мягких оболочек. М.: Наука, 1990, 206 с.

84. Сарпкайя Т., Шоаф Р.Л.. Невязкая модель образования двумерных вихрей за круговым цилиндром//Ракетная техника и космонавтика, т.17, №11, 1979.

85. Серазетдинов З.Г. Разработка методики и алгоритма, программная реализация, получение и анализ результатов исследования нестационарного отрывного обтекания некруговых контуров. Отчет о научно-исследовательской работе "Численные и экспериментальные исследования динамики мягких оболочек, взаимодействующих с потоком газа". КФТИ КФАН СССР, Казань, 1985, с. 132–161.

86. Серазетдинов З.Г., Шагидуллин Р.Р. Модель нестационарного отрывного обтекания кругового цилиндра без использования уравнений пограничного слоя// Исследования по прикладной математике, вып. 13. Казань.: Изд-во КГУ, 1985, с. 90–99.

87. Серрин Д. Математические основы классической механики жидкости. М.: ГИИЛ, 1963, 256 с.

88. Скрыпник И.В. Нелинейные эллиптические уравнения высшего порядка//Итоги науки и техники ВИНИТИ. Современ.пробл.матем. Новейшие достижения. М.: Наука, 1990, т. 37, с. 3–87.

89. Соболев С.Л. Уравнения математической физики. М.: ГИТТЛ, 1954, 444 с.

90. Сычев М.А. Необходимые и достаточные условия в теоремах полунепрерывности и сходимости с функционалом //Матем. сб., 1995, т. 186, №6. с. 77–108.

91. Сьярле Ф. Метод конечных элементов для эллиптических задач. М.: Мир, 1980, 512 с.

92. Сьярле Ф. Математическая теория упругости. М.: Мир, 1992, 472 с.

93. Таджибахш И. Формы изгиба упругих колец. - В кн. "Теория ветвления и нелинейные задачи на собственные значения". М.: Мир, 1974, с. 46–62

94. Терегулов И.Г. Определяющие соотношения для физически нелинейных анизотропных и композитных оболочек при конечных деформациях. 1//Известия вузов. Математика, 1985, №5, с. 33–41. ч. II: Известия вузов. Математика, 1985. №6. с. 54–62.

95. Терегулов И.Г. Термодинамика необратимых процессов и теоретические основы построения определяющих соотношений для сплошных сред//Известия вузов. Математика, 1995. №4, с. 82–95.

96. Усюкин В.И. Об уравнениях теории больших деформаций мягких оболочек//Изв. АН СССР. МТТ, 1976, №1, с. 70–75.

97. Федорчук В.В., Филиппов В.В. Общая топология. Основные конструкции. М.: Изд-во МГУ, 1988, 254 с.

98. Харди Г.Г., Литлвуд Д.Е., Полиа Г. Неравенства. М.: Ин. лит., 1948, 456 с.

99. Челкак С.И. Дифференцируемость решений квазилинейных эллиптических систем второго порядка//Известия вузов. Математика, 1986, №4, с. 56–62.

100. Черных К.Ф., Литвиненкова З.Н. Теория больших упругих деформаций. Ленинград: Изд-во ЛГУ, 1988, 254 с.

101. Черных К.Ф. О нелинейной теории тонких упругих оболочек из эластомеров. Деформация сплошных сред и управление движением// Вопросы механики и процессов управления. в. 6. Л.: Изд-во ЛГУ, 1984, с. 3–25.

102. Черных К.Ф. Теория тонких оболочек из эластомеров (резиноподобных материалов)//Успехи механики, т.6, №1/2, 1983, с. 111–147.

103. Шагидуллин Р.Р. Исследование задачи обтекания оболочки по модели следа Паркинсона–Яндали//Статика и динамика оболочек. Труды семинара. Казань, КФТИ КФАН СССР, 1977, в. VIII, с. 130–137.

104. Шагидуллин Р.Р. Исследование нелинейного уравнения изгиба замкнутой цилиндрической оболочки в плоской задаче гидроупругости//Известия вузов. Математика, 1981, №6, с. 82–84.

105. Шагидуллин Р.Р. Исследование одномерных уравнений статического состояния мягкой оболочки//Известия ВУЗов. Математика, 1999, №5, с. 73–80.

106. Шагидуллин Р.Р. Исследование положительных по кривизне решений системы уравнений равновесия мягкой замкнутой цилиндрической оболочки//Известия вузов. Математика, 2000, №11, с. 85–96.

107. Шагидуллин Р.Р. Математические проблемы теории мягких оболочек. Труды международной конференции "Актуальные проблемы механики оболочек", Казань, 26–30 июня 2000 г. с. 424–427.

108. Шагидуллин Р.Р. Математические проблемы теории мягких оболочек//Тезисы докладов международной конференции. Казань: Изд-во "Олитех", 2000, с. 82–83.

109. Шагидуллин Р.Р. Математическое моделирование мягких оболочек в рамках общей теории упругости. Тр. Межд. конф. "Применение математического моделирования для решения задач в науке и технике", 1996, Ижевск: Издательство ИРМУ РО РАН с. 301–313.

110. Шагидуллин Р.Р. Минимизация функционала полной энергии для мягкой оболочки//Известия ВУЗов. Математика, 1998, №3, с. 65–73.

111. Шагидуллин Р.Р. Решение задач отрывного обтекания с помощью метода конечных элементов//Известия ВУЗов. Математика, 1985, №10, с. 74–83.

112. Шагидуллин Р.Р. Численный метод дискретных вихрей. Учебное пособие. Казань: Изд-во Казанского Университета. Казань. 1986, 108 с.

113. Шилов Г.Е. Математический анализ. Функции нескольких вещественных переменных. М.: Наука, 1972, 624 с.

114. Шлихтинг Г. Теория пограничного слоя. М.: Наука, 1974, 712 с.

115. Штеттер Х. Анализ методов дискретизации для обыкновенных дифференциальных уравнений. М.: Мир, 1978, 464 с.

116. Экланд И., Темам И. Выпуклый анализ и вариационные проблемы. М.:Мир, 1979, 399 с.

117. Яглом И.М., Болтянский В.Г. Выпуклые фигуры. - М.-Л.: ГИЗТТЛ, 1951, 344 с.

118. Яковлев Г.Н. Свойства решений одного класса квазилинейных уравнеий второго порядка//Тр. Матем. ин-та АН СССР, 1974, т. 131, с. 232–242.

119. Bardos C., Bercovier M., Pironneau O. The vortex method with finite elements// Rapports de Recherche INRIA, 1980. N 15, 28 p.

120. Bassanini P. A note on a Nonlinear Functional Equation of Fluid Mechanics// Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena, 1973, v. XXII, N 2, p. 359–368.

121. Bassanini P. On a variational operator in fluid Mechanics// SIAM Journal of Appl. Math., 1973, v. 24, N 1, p. 81–87.

122. Bearman P.W., Fackrell I.E. Calculations of two-dimensional and axisymmetric bluff-body potential flow//Journ. Fluid Mech., 1975, v. 72, N 2, p. 229–241.

123. Bluston H.S., Paulson R.W. A second order boundary layer solution for a separated flow past a bluff body//ZAMP, v. 24, N 4, 1973.

124. Bluston H.S., Paulson R.W. A theoretical solution for laminar flow past a bluff body with a separated wake//Journal de Mecanique, 1972, v. 11, N 1, p. 161–181 .

125. Chorin A.J., Marsden J.E. A Mathematical Introduction to Fluid Mechanics. Springer-Verlag, 1979, 205 p.

126. Cisotti U. Rend. Accad. Lincei, 1932, v. 15, p. 165–173

127. Dugan J.P. A free streamline model of the two-dimensional sail// Journ. Fluid Mech., 1970, v.42, N 3, p. 433–446.

128. Dugundji J., Granas A. Fixed Point Theory. V. I. Warszawa, 1982. 210 p.

129. Finsterwalder S. Mechanische Beziechungen bei der Flachen-deformation//Jharesb. Deutsch. Math. Vereinigung, 1899, Bd. 6, H. 2.

130. Gaier D. Intergalgleichungen erster Art und konforme Abbildungen//Mathematische Zeitschrift, 1976, v. 147, s. 113–129.

131. Garabedian P.R., Royden H. A remark on Cavitational Flow//Proc. Nat. Acad. Sci. USA, 1952, v. 38, N 1, p. 57–61.

132. Geymonat G. Sui problemi ai limiti per i sistemi lineari ellitici//Annali di Matematica. Pura Appl., 1965, v. 69, p. 207–284.

133. Gilbarg B.D. Jets end Cavities. Handbuch der Physic, 1960, B. IX.

134. Goebel K., Kirk W.A. Topics in metric fixed point theory, Cambridge Universiti Press, 1990, 244 p.

135. Hald O.H. Convergence of vortex methods for Euler equations//SIAM Jour. Num. Anal., 1979, v. 16, N 5, p.

136. Hayes I.K., Kahaner D.K., Keller R.J. An Improved Method for Numerical Conformal Mapping//Mathematics of Computations, 1972, v. 26, N 118, p. 327–334.

137. Kiya M., Arie M. A free streamline theory for bluff bodies attached to a plane wall//Jour. Fluid Mech., 1972, v. 56, N 2, p. 201–219.

138. Kiya M., Arie M. An inviscid bluff body wake model with includes the far - wake displacement effect//Journal Fluid Mech., 1977, v. 81, N 3, p. 593–607.

139. Leonard J.W. State of art in inflatable shell research//Journal of Engineering mechanics division, ASCE, 100, EM 1, 1974, p. 17–25.

140. Miftakhov R. N., Abdusheva G. R., Christensen J. Numerical Simulation of Motility Patterns of the Small Bowel. I. Formulation of a Mathematical Model//Journal of Theoretical Biology, 1999, v. 197, N 1, p. 89–112.

141. Miftakhov R. N., Abdusheva G. R., Christensen J. Numerical Simulation of Motility Patterns of the Small Bowel. II. Comparative Pharmacological Validation of a Mathematical Model//Journal of Theoretical Biology, 1999, v. 200, N 3, p. 261–290.

142. Mitrinovic D.S. Analytic Inequalities. (In cooperation with P.M. Vasic). Die Grundlehren der mathematischen Wissenschften. Band 165. Springer-Verlag. 1970.

143. Pipkin A.C. Continuously distributed wrinkles in fabrics//Arch. Ration.Mech. and Anal., 1986, v. 95, N 2, p. 93–115.

144. Rokhlin N. Rapid solution of integral equations of classical potential theory//J. Comput. Phus., 1985, v. 60, N 2, p. 187–207.

145. Showalter R.E. Monotone operators in Banach space and nonlinear partial differential equations. Math. surveys and monographs AMS, 1997, v. 49, 278 p.

146. Zdzislaw N. On the Korn-type inequality in the theory of textile-type materials//Bull. Pol. Acad. Sci. Techn. Sci., 1986, v. 34, N 7–8, p. 393 – 401.

147. Zdzislaw N. On the cylindrical boundary value problem in the theory of textile-type materials//Bulletin Pol. Acad. Sci. Tech. Sci., 1986, v. 34, N 7–8, p. 403–413.