УДК 519.853

МЕТОД ОТСЕЧЕНИЙ И ПОСТРОЕНИЕ НА ЕГО ОСНОВЕ СМЕШАННЫХ АЛГОРИТМОВ МИНИМИЗАЦИИ

И.Я. Заботин, О.Н. Шульгина, Р.С. Яруллин

Аннотация

Предложен метод отсечений для условной минимизации выпуклых функций. Показано, как на основе этого метода с привлечением других методов выпуклого программирования можно строить смешанные алгоритмы минимизации с сохранением сходимости таких алгоритмов. Введенная и использованная в методе оценка качества аппроксимирующего множества позволяет заложить в метод и, соответственно, в смешанные алгоритмы возможность периодического обновления аппроксимирующих множеств с целью упрощения задач построения итерационных точек.

Ключевые слова: аппроксимирующее множество, отсекающая гиперплоскость, последовательность приближений, сходимость, условная минимизация, смешанные алгоритмы.

При решении оптимизационных задач на практике довольно часто используются так называемые смешанные алгоритмы минимизации (см., например, [1, с. 119]). Эти алгоритмы получаются на основе двух (а иногда и более) известных методов следующим образом. В смешанном алгоритме первые несколько итерационных точек строятся одним из выбранных методов. Далее определенное число приближений находится другим методом. Затем снова для построения итерационных точек привлекается первый метод, и так далее. При этом для каждого смешанного алгоритма возникает вопрос о сходимости несмотря на то, что сходимость составляющих его методов обоснована.

В настоящей работе показано, как можно строить смешанные алгоритмы условной минимизации на основе предлагаемого здесь метода отсечений и любых релаксационных методов выпуклого программирования. При этом сходимость всех таких смешанных алгоритмов будет гарантирована сходимостью предлагаемого метода отсечений, причем даже в том случае, когда упомянутые релаксационные методы являются эвристическими.

Одна из основных проблем методов отсечений (см., например, [2–5]) заключается в том, что при их использовании от шага к шагу растет трудоемкость вспомогательных задач построения итерационных точек за счет увеличения числа отсекающих плоскостей, которые формируют аппроксимирующие множества. Ранее авторами был предложен подход к построению методов отсечений, в которых допускается периодическое отбрасывание накапливающихся отсекающих плоскостей. В [6, 7] этот подход использован для методов с погружением области ограничений задачи, а в [8] он применен при построении метода отсечений с погружением надграфика целевой функции.

В предлагаемом здесь методе, использующем аппроксимацию надграфика некоторой вспомогательной функции, тоже заложена процедура освобождения от накапливающихся отсечений. Эта процедура основана на введенном критерии качества аппроксимации погружаемого множества в окрестности итерационной точки, который отличается от использованного ранее в [8]. На тех итерациях, где качество аппроксимации становится достаточно хорошим, при желании происходит обновление погружающих множеств. Кроме того, на тех же итерациях фиксируются с условием релаксации и основные итерационные точки. Причем для построения этих точек допустимо использование любых, в том числе новых, релаксационных методов минимизации. За счет этого и обеспечивается указанная выше возможность комбинирования построенного метода отсечений с другими методами с целью построения сходящихся смешанных алгоритмов. Заметим также, что заложенная в методе отсечений процедура обновления погружающих множеств будет перенесена таким образом и в смешанные алгоритмы.

Пусть D – выпуклое замкнутое множество из n-мерного евклидова пространства R_n, $f(x)$ – выпуклая достигающая на множестве D своего минимального значения функция, $f^* = \min\{f(x) : x \in D\}$, $X^* = \{x \in D : f(x) = f^*\}$, $X^*(\varepsilon) = \{x \in D : f(x) \le f^* + \varepsilon\}$, где $\varepsilon \ge 0$.

Предлагаемый ниже метод решения задачи

$$\min\{f(x) : x \in D\} \tag{1}$$

позволяет в случае $\varepsilon > 0$ за конечное число шагов получить итерационную точку, принадлежащую множеству $X^*(\varepsilon)$, то есть найти ε-решение задачи (1). Если после нахождения ε-решения процесс построения приближений не заканчивается, то, как показано ниже, предельные точки построенной методом последовательности приближений принадлежат множеству X^*.

Введем вспомогательную функцию

$$g(x) = f(x) + \varepsilon, \quad \varepsilon \ge 0. \tag{2}$$

Так как по условию $X^* \ne \emptyset$, то легко видеть, что и функция $g(x)$ достигает на множестве D минимального значения. Положим $g^* = \min\{g(x) : x \in D\}$, $X_g^* = \{x \in D : g(x) = g^*\}$. Пусть, кроме того, $\operatorname{epi}(g, G) = \{(x, \gamma) \in R_{n+1} : x \in G, \gamma \ge g(x)\}$, где $G \subset R_n$, $\operatorname{int} Q$ – внутренность множества $Q \subset R_{n+1}$, $W(u, Q) = \{a \in R_{n+1} : \langle a, v - x\rangle \le 0 \ \forall v \in Q\}$ – множество обобщенно-опорных к Q в точке $u \in R_{n+1}$ векторов, $W^1(u, Q) = \{a \in W(u, Q) : \|a\| = 1\}$, $K = \{0, 1, \ldots\}$, $J = \{1, \ldots, m\}$, где $m \ge 1$, $x^* \in X^*$.

С учетом (2) легко доказать равенства

$$X^* = X_g^*, \tag{3}$$

$$g^* = f^* + \varepsilon. \tag{4}$$

Сформулируем критерий принадлежности точки множеству $X^*(\varepsilon)$.

Лемма 1. *Пусть $\varepsilon > 0$, $(y, \gamma) \in \operatorname{epi}(f, D)$, причем*

$$\gamma \le g^*. \tag{5}$$

Тогда имеет место включение

$$y \in X^*(\varepsilon).$$

Доказательство. Так как по условию $f(y) \le \gamma$, из (4), (5) следует, что $f(y) \le f^* + \varepsilon$. Отсюда с учетом включения $y \in D$ вытекает утверждение леммы. □

Предлагаемый метод решения задачи (1) вырабатывает вспомогательную последовательность приближений y_i, $i \in K$, и основную последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, и заключается в следующем.

Выбираются точки $v^j \in \operatorname{int} \operatorname{epi}(g, R_n)$ для всех $j \in J$ и выпуклое ограниченное замкнутое множество $G_0 \subset D$, содержащее точку x^*. Строится выпуклое замкнутое множество $M_0 \subseteq R_{n+1}$ такое, что $\operatorname{epi}(g, R_n) \subset M_0$. Задаются числа $\varepsilon > 0$, $\delta_0 > 0$, $\overline{\gamma}_0 \le g^*$. Полагается $i = 0$, $k = 0$. Затем выполняются следующие шаги.

1. Отыскивается точка $u_i = (y_i, \gamma_i)$, где $y_i \in R_n$, $\gamma_i \in R_1$, как решение задачи

$$\gamma \to \min \tag{6}$$

$$(x, \gamma) \in M_i, \quad x \in G_i, \quad \gamma \ge \overline{\gamma}_i. \tag{7}$$

Если

$$\gamma_i = g(y_i), \tag{8}$$

то $y_i \in X^*$, и процесс завершается.

2. Если

$$\gamma_i \ge f(y_i), \tag{9}$$

то $y_i \in X^*(\varepsilon)$.

3. Для каждого $j \in J$ в интервале (v^j, u_i) выбирается точка $\overline{u}_i^j \in R_{n+1}$ так, чтобы $\overline{u}_i^j \notin \operatorname{int} \operatorname{epi}(g, R_n)$ и при некотором $q_i^j \in [1, q]$, $q < +\infty$, для точки

$$\overline{v}_i^j = u_i + q_i^j(\overline{u}_i^j - u_i) \tag{10}$$

выполнялось включение $\overline{v}_i^j \in \operatorname{epi}(g, R_n)$.

4. Если

$$\|\overline{u}_i^j - u_i\| > \delta_k \quad \forall\, j \in J, \tag{11}$$

то выбирается выпуклое замкнутое множество $Q_i \subset R_{n+1}$ такое, что

$$Q_i \subseteq M_i, \tag{12}$$

$$\operatorname{epi}(g, R_n) \subset Q_i, \tag{13}$$

и следует переход к п. 6. В противном случае выполняется п. 5.

5. Выбирается выпуклое замкнутое множество $Q_i \subseteq R_{n+1}$ так, чтобы выполнялось включение (13). Полагается $i = i_k$,

$$\sigma_k = \gamma_{i_k}, \tag{14}$$

выбирается точка $x_k \in G_{i_k}$, удовлетворяющая неравенству

$$g(x_k) \le g(y_{i_k}). \tag{15}$$

Задается $\delta_{k+1} > 0$, значение k увеличивается на единицу.

6. Для каждого $j \in J$ выбирается конечное множество $A_i^j \subset W^1(\overline{u}_i^j, \operatorname{epi}(g, R_n))$, и полагается

$$M_{i+1} = Q_i \bigcap T_i, \tag{16}$$

где $T_i = \bigcap\limits_{j \in J} \{u \in R_{n+1} : \langle a, u - \overline{u}_i^j \rangle \le 0 \ \forall a \in A_i^j\}$.

7. Выбирается выпуклое замкнутое множество $G_{i+1} \subseteq G_0$, содержащее точку x^*. Задается число $\overline{\gamma}_{i+1}$ из условия

$$\overline{\gamma}_0 \le \overline{\gamma}_{i+1} \le g^*. \tag{17}$$

Значение i увеличивается на единицу, и следует переход к п. 1.

Сделаем относительно этого метода некоторые замечания. Покажем сначала, что множество ограничений вспомогательной задачи (6), (7) непусто.

Лемма 2. *Точка* (x^*, g^*) *для всех* $i \in K$ *удовлетворяет условиям* (7).

Доказательство. Согласно выбору множеств G_i и условию (17) для всех $i \in K$ выполняются включения $x^* \in G_i$ и неравенство $g^* \geq \overline{\gamma}_i$. Поэтому для обоснования леммы достаточно показать, что

$$(x^*, g^*) \in M_i \tag{18}$$

для всех $i \in K$.

Заметим, что при $i = 0$ включение (18) выполняется по условию выбора множества M_0. Зафиксируем произвольно номер $i = l \geq 0$ и покажем, что

$$(x^*, g^*) \in M_{l+1}. \tag{19}$$

Действительно, во-первых, $(x^*, g^*) \in Q_l$ ввиду условия (13) на множества Q_i, $i \in K$. Во-вторых, так как $(x^*, g^*) \in \operatorname{epi}(g, R_n)$, то $\langle a, (x^*, g^*) - \overline{u}_l^j \rangle \leq 0$ для всех $a \in A_l^j$, $j \in J$, а значит, $(x^*, g^*) \in T_l$. Отсюда и из (16) имеем (19). Лемма доказана. □

Обоснуем далее критерий остановки, заложенный в п. 1 метода.

Лемма 3. *При каждом* $i \in K$ *справедливо неравенство*

$$\gamma_i \leq g^*. \tag{20}$$

Доказательство. Согласно (6), (7) для каждой точки (x, γ), удовлетворяющей условиям (7), выполняется неравенство $\gamma_i \leq \gamma$. Но по лемме 2 точка (x^*, γ^*) является допустимым решением задачи (6), (7) при любом $i \in K$. Отсюда следует (20). Лемма доказана. □

Сразу отметим, что лемма 3 позволяет выбирать числа $\overline{\gamma}_{i+1}$ в п. 7 метода следующим образом. Можно положить $\overline{\gamma}_{i+1} = \gamma_l$, где $0 \leq l \leq i$, в частности $\overline{\gamma}_{i+1} = \max\limits_{0 \leq j \leq i} \gamma_j$.

Теорема 1. *Пусть при некотором* $i \in K$ *выполняется равенство* (8). *Тогда* $y_i \in X^*$.

Доказательство. В силу (8), (20) $g(y_i) \leq g^*$. С другой стороны,

$$g(y_i) \geq g^* \quad \forall\, i \in K, \tag{21}$$

поскольку $y_i \in D$ для всех $i \in K$. Таким образом, $g(y_i) = g^*$, а значит, $y_i \in X_g^*$. Отсюда с учетом (3) следует утверждение теоремы. □

Далее, предположим, что для точки (y_i, γ_i) выполнилось неравенство (9). Тогда по лемме 1 с учетом (20), как и отмечено в п. 2 метода, точка y_i является ε-решением исходной задачи.

Следующая теорема дает способ построения в точках $\overline{u}_i^j$ обобщенно-опорных к множеству $\operatorname{epi}(g, R_n)$ векторов в п. 6 метода.

Теорема 2. *Пусть* $\varphi(x)$ – *выпуклая в* R_n *функция, точка* $\overline{x} \in R_n$ *и число* $\overline{\gamma}$ *таковы, что*

$$\varphi(\overline{x}) \geq \overline{\gamma}, \tag{22}$$

а c_φ – *субградиент функции* $\varphi(x)$ *в точке* $\overline{x}$. *Тогда вектор* $c = (c_\varphi, -1)$ *является обобщенно-опорным к множеству* $\operatorname{epi}(\varphi, R_n)$ *в точке* $\overline{u} = (\overline{x}, \overline{\gamma})$.

Доказательство. Для обоснования утверждения зафиксируем точку $u = (x,\gamma) \in \mathrm{epi}\,(\varphi, R_n)$ и покажем, что

$$\langle c, u-\overline{u}\rangle \le 0. \tag{23}$$

Так как $\langle c, u-\overline{u}\rangle = \langle (c_\varphi, -1), (x-\overline{x}, \gamma-\overline{\gamma})\rangle = \langle c_\varphi, x-\overline{x}\rangle - \gamma + \overline{\gamma}$ и по определению субградиента $\varphi(x) - \varphi(\overline{x}) \ge \langle c_\varphi, x-\overline{x}\rangle$, то

$$\langle c, u-\overline{u}\rangle \le \varphi(x) - \varphi(\overline{x}) - \gamma + \overline{\gamma}.$$

Отсюда с учетом неравенства (22) и неравенства $\varphi(x) \le \gamma$, вытекающего из условия $\mathrm{epi}\,(\varphi, R_n)$, следует (23). Теорема доказана. □

Заметим, что задание точек $\overline{u}_i^j$, $j \in J$, не представляет особого труда. Их можно выбирать в виде точек пересечения лучей $v^j + \alpha(u_i - v^j)$, $\alpha \ge 0$, $j \in J$, с границей множества $\mathrm{epi}\,(g, R_n)$. Условие (10) позволяет находить эти точки пересечения приближенно.

Задание начального аппроксимирующего множества M_0 также не вызывает затруднений. Его легко задать линейными неравенствами так, чтобы выполнялось включение $\mathrm{epi}\,(g, R_n) \subset M_0$. Если положить $M_0 = R_{n+1}$, то точка (y_0, γ_0), где $y_0 \in G_0$, $\gamma_0 = \overline{\gamma}_0$, может быть принята за решение задачи (6), (7) при $i = 0$.

Как было отмечено во введении, предлагаемый метод обладает важной практической особенностью — возможностью периодического обновления аппроксимирующих надграфик множеств M_i за счет отбрасывания отсекающих плоскостей. Поясним, как такие обновления можно проводить за счет выбора множеств Q_i на итерациях с номерами $i = i_k$.

Пусть i, k таковы, что для точки $u_i = (y_i, \gamma_i)$ хотя бы при одном $j \in J$ выполняется неравенство

$$\|\overline{u}_i^j - u_i\| \le \delta_k. \tag{24}$$

Тогда согласно п. 5 метода выпуклое замкнутое множество $Q_i = Q_{i_k}$ выбирается в R_{n+1} лишь с одним условием (13). Если положить, например, $Q_{i_k} = R_{n+1}$ или $Q_{i_k} = M_0$, то согласно (16) $M_{i_k+1} = T_{i_k}$ или $M_{i_k+1} = M_0 \bigcap T_{i_k}$ соответственно. В таком случае ни одна из построенных к шагу $i = i_k$ отсекающих плоскостей принимать участие в построении M_{i_k+1} не будет, то есть произойдет полное обновление множества M_{i_k+1}. Если с учетом справедливости (24) положить

$$Q_{i_k} = M_{r_i},$$

где $0 < r_i < i_k$, то при построении M_{i_k+1} отбросится лишь часть накопленных к шагу i_k отсечений и будет иметь место частичное обновление аппроксимирующего множества.

Как показано ниже, для каждого $k \in K$ найдется точка $u_i = u_{i_k}$ строящейся последовательности $\{u_i\}$, для которой выполнится условие (24), а значит, представится возможность полного или частичного обновления аппроксимирующего множества M_{i_k+1}. Условия (11), (24) фактически определяют качество аппроксимации надграфика $\mathrm{epi}\,(g, R_n)$ множеством M_i в окрестности точки (y_i, γ_i). При выполнении для текущего номера $k \in K$ условия (24) качество аппроксимации считается достаточным для фиксирования числа σ_k вида (14) и выбора точки x_k из условия (15), в частности, можно положить $x_k = y_{i_k}$.

Прокомментируем теперь возможность построения смешанных алгоритмов на основе предложенного метода отсечений и других известных или новых алгоритмов выпуклого программирования. Эта возможность обеспечивается условием (15) выбора точек x_k, если

$$x_k \ne y_{i_k}. \tag{25}$$

А именно, в зависимости от свойств целевой функции задачи (1) на итерации $i = i_k$ выбираем некоторый релаксационный метод Γ_i, пригодный для минимизации функции $g(x)$ на множестве G_i (см., например, [5, 9, 10]). Методом Γ_i делаем p_i шагов, считая y_i точкой начального приближения, и найденная на шаге p_i итерационная точка принимается за x_k. Таким образом будет построен новый алгоритм решения задачи (1), причем сходимость этого комбинированного алгоритма уже гарантирована обоснованной ниже сходимостью предложенного метода отсечений.

Перейдем к исследованию сходимости метода.

Так как выполняются включения $y_i \in G_i \subset G_0$, $i \in K$, множество G_0 по условию ограничено, а для чисел γ_i, $i \in K$, имеют место неравенства $\overline{\gamma}_0 \le \gamma_i \le g^*$, то последовательность $\{u_i\}$, $i \in K$, ограничена. Кроме того, поскольку $\|\overline{u}_i^j - u_i\| \le$ $\le \|v^j - u_i\|$ для всех $i \in K$, $j \in J$, то с учетом (10) последовательность $\{\overline{v}_i^j\}$, $i \in K$, также является ограниченной при каждом $j \in J$.

Заметим, что ввиду п.п. 4, 5 метода, независимо от условий (11) или (24), множества Q_i при всех $i \in K$ могут выбираться согласно (12), например $Q_i = M_i$. В таком случае в силу (16)

$$M_{i+1} \subset M_i, \quad i \in K. \tag{26}$$

Кроме того, отметим, что наряду с последовательностью $\{y_i\}$, $i \in K$, будет построена и последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, так как $y_i \notin X_g^*$, $i \in K$. С учетом этих замечаний сформулируем следующее вспомогательное утверждение.

Лемма 4. *Пусть последовательность $\{u_i\}$, $i \in K$, построена с условием, что для всех $i \in K$, начиная с некоторого номера $i' \ge 0$, множества Q_i были выбраны согласно* (12). *Тогда для каждого $j \in J$ выполняется равенство*

$$\lim_{i \in K} \|\overline{u}_i^j - u_i\| = 0. \tag{27}$$

Доказательство. Зафиксируем номер $j \in J$ и докажем для него равенство (27). Предположим, что (27) не выполняется. Тогда найдутся бесконечное подмножество K' множества K и число $\Delta > 0$ такие, что

$$\|\overline{u}_i^j - u_i\| \ge \Delta \quad \forall\, i \in K'. \tag{28}$$

Выделим из последовательности $\{u_i\}$, $i \in K'$, сходящуюся подпоследовательность $\{u_i\}$, $i \in K'' \subset K'$.

Согласно выбору точек $\overline{u}_i^j$ для каждого $i \in K$ найдется такое число $\tau_i^j \in (0,1)$, что

$$\overline{u}_i^j = u_i + \tau_i^j (v^j - u_i). \tag{29}$$

Заметим также, что по условию леммы для всех $i \ge i'$, $i \in K$, справедливо включение (26). Зафиксируем теперь номера i, $p_i \in K''$, удовлетворяющие неравенствам $p_i > i \ge i'$. Тогда $M_{p_i} \subset M_i$. Так как по построению $u_{i_p} \in M_{i_p}$, а любой элемент $a \in A_i^j$ является обобщенно-опорным к множеству M_{p_i} в точке $\overline{u}_i^j$, то

$$\langle a, u_{i_p} - \overline{u}_i^j \rangle \le 0 \quad \forall\, a \in A_i^j,$$

а с учетом (29)

$$\langle a, u_i - u_{i_p} \rangle \ge \tau_i^j \langle a, u_i - v^j \rangle \quad \forall\, a \in A_i^j.$$

В силу леммы 1 из [3] найдется такое число $\beta^j > 0$, что $\langle a, u_i - v^j \rangle \ge \beta^j$ для всех $a \in A_i^j$. В связи с этим $\langle a, u_i - u_{i_p} \rangle \ge \tau_i^j \beta_i^j$ для всех $a \in A_i^j$, а так как $\|a\| = 1$, для выбранных номеров i, $p_i \in K''$ имеем

$$\|u_i - u_{i_p}\| \ge \tau_i^j \beta_i^j. \tag{30}$$

Поскольку последовательность $\{u_i\}$, $i \in K''$, сходится, то согласно (30) $\tau_i^j \to 0$ при $i \to \infty$, $i \in K''$. Значит, из (30) с учетом ограниченности последовательности $\{\|v^j - u_i\|\}$, $i \in K''$, следует, что $\|\overline{u}_i^j - u_i\| \to 0$, $i \to \infty$, $i \in K''$. Это предельное соотношение противоречит неравенствам (28). Лемма доказана. □

Лемма 5. *Пусть выполняются условия леммы* 4, *и, кроме того,* $\{u_i\}$, $i \in K' \subset K$, *– сходящаяся подпоследовательность последовательности* $\{u_i\}$, $i \in K$, *а* $\overline{u} = (\overline{y}, \overline{\gamma})$ *– предельная точка этой подпоследовательности. Тогда*

$$g(\overline{y}) = \overline{\gamma}. \tag{31}$$

Доказательство. Зафиксируем $r \in J$ и выделим из последовательности $\{\overline{v}_i^r\}$, $i \in K'$, сходящуюся подпоследовательность $\{\overline{v}_i^r\}$, $i \in K_r \subset K'$. Пусть $\widetilde{v}^r$ – ее предельная точка. Отметим, что

$$\widetilde{v}^r \in \mathrm{epi}\,(g, R_n) \tag{32}$$

в силу замкнутости множества $\mathrm{epi}(g, R_n)$. Перейдем в равенстве (10), где $j = r$, к пределу при $i \to \infty$, $i \in K_r$, с учетом утверждения (27). Тогда $\overline{u} = \widetilde{v}^r$, и ввиду (32) выполняется включение $\overline{u} \in \mathrm{epi}\,(g, R_n)$. Следовательно,

$$\overline{\gamma} \geq g(\overline{y}). \tag{33}$$

С другой стороны, для всех $i \in K$ согласно (20) выполняются неравенства $\gamma_i \leq g(y_i)$, а значит, $\overline{\gamma} \leq g(\overline{y})$. Отсюда и из (33) вытекает равенство (31). Лемма доказана. □

Лемма 6. *Пусть выполняются условия леммы* 4. *Тогда*

$$\lim_{i \in K} (g(y_i) - \gamma_i) = 0. \tag{34}$$

Доказательство. Отметим, что $g(y_i) - \gamma_i > 0$ для всех $i \in K$. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда найдется подпоследовательность $\{u_i\}$, $i \in K' \subset K$, $i \geq i'$, последовательности $\{u_i\}$, $i \in K$, и число $\Delta > 0$ такие, что

$$g(y_i) - \gamma_i \geq \Delta \quad \forall\, i \in K', \quad i \geq i'. \tag{35}$$

Пусть $\{u_i\}$, $i \in K'' \subset K'$, – сходящаяся подпоследовательность, выделенная из точек u_i, $i \in K'$, $i \geq i'$, а $\overline{u} = (\overline{y}, \overline{\gamma})$ – предельная точка этой подпоследовательности. Тогда, с одной стороны, по лемме 5 имеет место равенство (31), а с другой стороны, в силу предположения (35) выполняется неравенство $g(\overline{y}) - \overline{\gamma} \geq \Delta$. Полученное противоречие доказывает утверждение леммы. □

Теорема 3. *Если для последовательности* $\{u_i\}$, $i \in K$, *выполняются условия леммы* 4, *то справедливы равенства*

$$\lim_{i \in K} g(y_i) = g^*, \quad \lim_{i \in K} \gamma_i = g^*. \tag{36}$$

Доказательство. В силу (20) $0 \leq g(y_i) - g^* \leq g(y_i) - \gamma_i$, $i \in K$. Отсюда и из (34) следует первое из равенств (36). Тогда в силу того же предельного соотношения (34) справедливо и второе из утверждение (36). □

Заметим, что согласно теореме 3 и известной теореме (см., например, [9, с. 62]) при выполнении условий леммы 4 последовательность $\{y_i\}$, $i \in K$, сходится с учетом (3) к множеству X^*.

Перейдем к исследованию последовательностей $\{(x_k, \sigma_k)\}$. Прежде всего докажем, что наряду с $\{(y_i, \gamma_i)\}$, $i \in K$, будет построена и последовательность $\{(x_k, \sigma_k)\}$, $k \in K$.

Лемма 7. *Если последовательность* $\{(y_i, \gamma_i)\}$, $i \in K$, *построена предложенным методом, то для каждого* $k \in K$ *существует точка* (x_k, σ_k), *полученная согласно* (14), (15).

Доказательство. 1) Пусть $k = 0$. Если допустить, что $\|\overline{u}_0^j - u_0\| \le \delta_0$ для некоторого $j \in J$, то согласно п. 5 метода $i_0 = 0$, $\sigma_0 = \gamma_0$, и найдена точка $x_0 \in G_0$, удовлетворяющая неравенству $g(x_0) \le g(y_0)$, то есть пара (x_0, σ_0) построена. Поэтому будем предполагать, что $\|\overline{u}_0^j - u_0\| > \delta_0$ для всех $j \in J$. Докажем тогда существование номера $i = i_0 > 0$, для которого выполняется неравенство

$$\|\overline{u}_{i_0}^j - u_{i_0}\| \le \delta_0 \tag{37}$$

при некотором $j \in J$.

Предположим противное, то есть допустим, что

$$\|\overline{u}_i^j - u_i\| > \delta_0 \quad \forall\, i > 0, \quad j \in J. \tag{38}$$

Пусть $\{u_i\}$, $i \in K' \subset K$, – сходящаяся подпоследовательность, выделенная из множества точек u_i, $i \in K$, $i > 0$, а $\widetilde{u}$ – ее предельная точка. Выберем теперь из множества K' такое бесконечное подмножество K'', что для каждого $j \in J$ последовательность $\{\overline{u}_i^j\}$, $i \in K''$, окажется сходящейся. Пусть при каждом $j \in J$ точка $\widetilde{u}^j$ является предельной для последовательности $\{\overline{u}_i^j\}$, $i \in K''$. Тогда из неравенств (38) следует, что

$$\|\widetilde{u}^j - \widetilde{u}\| \ge \delta_o \quad \forall\, j \in J. \tag{39}$$

С другой стороны, в силу предположения (38) при построении последовательности $\{u_i\}$, $i \in K$, $i > 0$, для всех $i > 0$ множества Q_i были выбраны согласно условию (12). По лемме 4 для всех $j \in J$ имеют место равенства $\|\widetilde{u}^j - \widetilde{u}\| = 0$, противоречащие (39). Таким образом, доказано существование номера $i_0 > 0$, для которого справедливо (37), а следовательно, доказано наличие точки (x_0, σ_0), полученной в ходе построения последовательности $\{(y_i, \gamma_i)\}$, $i \in K$.

2) Допустим теперь, что при некотором фиксированном $k \ge 0$ точка (x_k, σ_k) построена, то есть существует номер $i = i_k$, для которого выполняется неравенство $\|\overline{u}_{i_k}^j - u_{i_k}\| \le \delta_k$ хотя бы для одного $j \in J$. Покажем при этом предположении существование такого номера $i_{k+1} > i_k$, что

$$\|\overline{u}_{i_{k+1}}^j - u_{i_{k+1}}\| \le \delta_{k+1} \tag{40}$$

при некотором $j \in J$. Тогда $\sigma_k = \gamma_{i_{k+1}}$, точка $x_{k+1} \in G_{i_{k+1}}$ с условием, что $g(x_k) \le g(y_{i_{k+1}})$, существует, и лемма будет доказана.

Допустим противное, то есть пусть для всех $i > i_k$ и всех $j \in J$

$$\|\overline{u}_i^j - u_i\| > \delta_{k+1}. \tag{41}$$

Как и в первой части доказательства леммы, выделим из множества точек u_i, $\overline{u}_i^j$, $j \in J$, с номерами $i \in K$, $i > i_k$ сходящиеся подпоследовательности $\{u_i\}$, $\{\overline{u}_i^j\}$,

$j \in J$, $i \in \overline{K}$, и пусть $\overline{u}$, $\overline{u}^j$ – их предельные точки соответственно. Тогда из неравенств (41) следует, что $\|\overline{u}^j - \overline{u}\| \ge \delta_{k+1}$ для всех $j \in J$, а с другой стороны, с учетом леммы 4 для каждого $j \in J$ имеет место равенство $\|\overline{u}^j - \overline{u}\| = 0$. Полученное противоречие доказывает наличие номера $i_{k+1} > i_k$, удовлетворяющего при некотором $j \in J$ неравенству (40). Лемма доказана. □

Согласно лемме 7 для каждого $k \in K$ найдутся номера $i = i_k$ и $j_k \in J$ такие, что выполняется неравенство $\|\overline{u}_{i_k}^{j_k} - u_{i_k}\| \le \delta_k$. Значит, наряду с последовательностью $\{u_i\}$, $i \in K$, предложенным методом будет построена и последовательность $\{u_{i_k}\}$, $k \in K$. С учетом этого замечания сформулируем следующее утверждение.

Лемма 8. *Пусть последовательность $\{u_i\}$, $i \in K$, построена предложенным методом с условием, что*

$$\delta_k \to 0, \quad k \to \infty. \tag{42}$$

Тогда для последовательности $\{u_{i_k}\}$, $k \in K$, выполняется равенство

$$\lim_{k \in K} (g(y_{i_k}) - \gamma_{i_k}) = 0. \tag{43}$$

Доказательство. Заметим, что $g(y_{i_k}) - \gamma_{i_k} > 0$ для всех $k \in K$. Предположим, что утверждение леммы неверно. Тогда существуют подпоследовательность $\{(y_{i_k}, \gamma_{i_k})\}$, $k \in K_1 \subset K$, последовательности $\{(y_{i_k}, \gamma_{i_k})\}$, $k \in K$, и число $\Delta > 0$ такие, что

$$g(y_{i_k}) - \gamma_{i_k} \ge \Delta \quad \forall\, k \in K_1. \tag{44}$$

Пусть $\{(y_{i_k}, \gamma_{i_k})\}$, $k \in K_2 \subset K_1$, – сходящаяся подпоследовательность последовательности $\{(y_{i_k}, \gamma_{i_k})\}$, $k \in K_1$, и $\overline{u} = (\overline{y}, \overline{\gamma})$ – ее предельная точка, причем согласно (44)

$$g(\overline{y}) - \overline{\gamma} \ge \Delta. \tag{45}$$

Далее, существует такой номер $r \in J$, что для бесконечного числа номеров $k \in K_2$ имеет место неравенство

$$\|u_{i_k}^r - u_{i_k}\| \le \delta_k.$$

Отнесем к множеству K_3 все номера $k \in K_2$, для которых выполняется последнее неравенство. Тогда из этого неравенства с учетом (42) следует, что

$$\lim_{k \in K_3} \|u_{i_k}^r - u_{i_k}\| = 0. \tag{46}$$

Выделим теперь из последовательности $\{\overline{v}_{i_k}^r\}$, $k \in K_3$, сходящуюся подпоследовательность $\{\overline{v}_{i_k}^r\}$, $k \in K_4 \subset K_3$, и пусть $\widetilde{v}^{\,r}$ – ее предельная точка. Сразу отметим, что для нее справедливо включение (32) ввиду замкнутости множества $\mathrm{epi}\,(g, R_n)$. Поскольку согласно (10)

$$\overline{v}_{i_k}^r = u_{i_k} + q_{i_k}^r (\overline{u}_{i_k}^r - u_{i_k}), \quad k \in K_4,$$

то с учетом равенства (46) и ограниченности $\{q_{i_k}^r\}$, $k \in K_4$, отсюда имеем $\widetilde{v}^{\,r} = \overline{u}$. Тогда в силу (32) $\overline{u} \in \mathrm{epi}\,(g, R_n)$, а значит, справедливо неравенство (33). Но с другой стороны, $\overline{\gamma} \le g(\overline{y})$, так как $\gamma_{i_k} \le g(y_{i_k})$, $k \in K$. Таким образом, получено равенство (31), противоречащее (45). Лемма доказана. □

Теорема 4. *Пусть последовательность $\{(x_k, \gamma_k)\}$, $k \in K$, построена предложенным методом с условием (42). Тогда*

$$\lim_{k \in K} g(x_k) = f^* + \varepsilon, \quad \lim_{k \in K} \sigma_k = f^* + \varepsilon, \quad \varepsilon > 0. \tag{47}$$

Доказательство. Так как $x_k \in D$, $k \in K$, и согласно (14), (20) $\sigma_k = \gamma_{i_k} \le g^*$, $k \in K$, то $0 \le g(x_k) - g^* \le g(y_{i_k}) - g^* \le g(y_{i_k}) - \sigma_k = g(y_{i_k}) - \gamma_{i_k}$ для всех $k \in K$. Отсюда с учетом (44), (4) следуют равенства (47). Теорема доказана. □

Согласно теореме 4 и упомянутой известной теореме [9, с. 62] последовательность $\{x_k\}$, $k \in K$, сходится к множеству X^*.

Отметим также, что в силу (44) найдется такой номер $l \in K$, что $g(y_l) - \gamma_l \le \varepsilon$. Тогда ввиду (2) имеем $f(y_l) \le \gamma_l$, то есть выполняется неравенство (9) при $i = l$, и точка y_l – ε-решение задачи (1).

Summary

I.Ya. Zabotin, O.N. Shulgina, R.S. Yarullin. A Cutting Method and Construction of Mixed Minimization Algorithms on Its Basis.

We propose a cutting method for conditional minimization of convex functions. We show that it is possible to construct mixed minimization algorithms without losing their convergence on the basis of this method with the assistance of other convex programming methods. The qualitative evaluation of an approximation set, involved in this method, allows us to periodically update the approximation sets in the proposed method and mixed algorithms with the purpose of simplifying the problems of construction of iteration points.

Keywords: approximation set, cutting plane, sequence of approximation, convergence, conditional minimization, mixed algorithms.

Литература

1. *Зангвилл У.И.* Нелинейное программирование. – М.: Сов. радио, 1973. – 312 с.
2. *Булатов В.П.* Методы погружения в задачах оптимизации. – Новосибирск: Наука, 1977. – 161 с.
3. *Заботин И.Я.* О некоторых алгоритмах погружений-отсечений для задачи математического программирования // Изв. Иркутского гос. ун-та. Сер. Матем. – 2011. – Т. 4, № 2. – С. 91–101.
4. *Нестеров Ю.Е.* Введение в выпуклую оптимизацию. – М.: МЦНМО, 2010. – 274 с.
5. *Поляк Б.Т.* Введение в оптимизацию. – М.: Наука, 1983. – 384 с.
6. *Заботин И.Я., Яруллин Р.С.* Об одном подходе к построению алгоритмов отсечений с отбрасыванием отсекающих плоскостей // Изв. вузов. Матем. – 2013. – № 3. – С. 74–79.
7. *Заботин И.Я., Яруллин Р.С.* Метод отсечений с обновлением погружающих множеств и оценки точности решения // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 2. – С. 54–64.
8. *Заботин И.Я., Яруллин Р.С.* Алгоритм отсечений с аппроксимацией надграфика // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. – 2013. – Т. 155, кн. 4. – С. 48–54.
9. *Васильев Ф.П.* Методы оптимизации: в 2 кн. – М.: МЦНМО, 2011. – Кн. 1. – 620 с.
10. *Коннов И.В.* Нелинейная оптимизация и вариационные неравенства. – Казань: Казан. ун-т, 2013. – 508 с.

Поступила в редакцию
28.09.14

Заботин Игорь Ярославич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры анализа данных и исследования операций, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.
E-mail: *IYaZabotin@mail.ru*

Шульгина Оксана Николаевна – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры анализа данных и исследования операций, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.
E-mail: *ONShul@mail.ru*

Яруллин Рашид Саматович – аспирант кафедры анализа данных и исследования операций, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.
E-mail: *YarullinRS@gmail.com*