ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 54

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Материалы Тринадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 21 - 27 августа 2017 г.)

Казанское математическое общество
2017

Институт математики и механики им. Н. И. Лобачевского Казанского (Приволжского) федерального университета

Казанское математическое общество

N. I. Lobachevsky Institute of Mathematics and Mechanics, Kazan (Volga region) Federal University

Kazan Mathematical Society

Российский фонд фундаментальных исследований

Издание осуществлено при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-20392)

УДК 517:531
ББК 22.1:22.2
Т78

Печатается по рекомендации Редакционно-издательского совета Казанского математического общества

Научный редактор – С. Р. Насыров
Составитель – А.А. Агафонов

Т78 Труды Математического центра имени Н. И. Лобачевского / Казанское математическое общество. *Теория функций, ее приложения и смежные вопросы // Материалы Тринадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции.* – Казань: Издательство Казанского математического общества, Изд-во Академии наук РТ, 2017. – Т. 54 – 422 с.

Сборник содержит материалы Тринадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции «Теория функций, ее приложения и смежные вопросы», организованной Казанским (Приволжским) федеральным и Московским государственным университетами, Математическим институтом им. В. А. Стеклова РАН при содействии Академии наук Республики Татарстан. Школа-конференция проведена с 21 августа по 27 августа 2017 года при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований.

Предназначен для научных работников, преподавателей, аспирантов и студентов, специализирующихся в различных областях математики, механики и их приложений.

УДК 517:531
ББК 22.1:22.2

ISBN 978-5-9690-0379-8

© Казанское математическое общество, 2017
© Казанский (Приволжский) федеральный университет, 2017
©Издательство Академии наук РТ, 2017

ФАРИТ ГАБИДИНОВИЧ АВХАДИЕВ

(к семидесятилетию со дня рождения)

Двадцатого августа 2017 г. одному из ведущих российских математиков заслуженному деятелю науки Республики Татарстан Фариту Габидиновичу Авхадиеву исполнилось 70 лет.

Фарит Габидинович родился в деревне Чембулат Кзыл–Юлского района Татарской АССР в семье учителей. В 1964 г. он поступил на механико–математический факультет Казанского государственного университета (КГУ), который окончил с отличием в 1969 г. В том же году он поступает в аспирантуру к профессору Л. А. Аксентьеву и в 1972 г. блестяще защищает кандидатскую диссертацию.

После защиты он начинает работать в НИИ математики и механики (НИИММ) им. Н. Г. Чеботарева КГУ. В 1990 г. защищает докторскую диссертацию в совете при Институте математики им. С. Л. Соболева СО АН СССР. В середине 90-х годов создает отдел математического анализа НИИММ, становится заведующим отделением математики этого института. В 2008 г. Фарит Габидинович переходит на работу на механико-математический факультет КГУ, избирается на должность заведующего кафедрой теории функций и приближений. В том же году его назначают главным редактором журнала «Известия вузов. Математика».

Области научных исследований Фарита Габидиновича весьма разнообразны: теория краевых задач для аналитических функций и их обобщений, задачи математической физики, геометрическая теория функция комплексного переменного, интегральные неравенства в соболевских пространствах, прикладные задачи и многое другое. Ему удалось получить блестящие результаты по достаточным условиям однолистности аналитических функций, условиям однолистности внутренних по Стоилову отображений, оценкам коэффициентов однолистных функций, интегральным неравенствам типа Харди в плоских и пространственных областях. Опишем некоторые их его ярких достижений.

Развивая нетривиальную идею американского математика Нехари о связи однолистности мероморфных в единичном круге функций с неколеблемостью решений

дифференциальных уравнений, Фарит Габидинович предложил как глубокие обобщения самого результата Нехари, так и эффективные его приложения. Еще один подход к доказательству условий однолистности, успешно применяемый Ф. Г. Авхадиевым, основан на развитии идеи Альфорса и Вейля об использовании функционала из доказываемого условия для построения локально гомеоморфного отображения плоскости на себя с возможностью применения теоремы Адамара.

Фаритом Габидиновичем разработан общий подход к достаточным условиям однолистности и p-листности внутренних по Стоилову отображений в $\mathbb{R}^n$, основанный на понятии p-допустимого функционала.

Ф. Г. Авхадиевым, Л. А. Аксентьевым и Г. Г. Бильченко найдены алгоритмы построения однолистных и многолистных многоугольников по заданным внутренним углам и дано приложение этих алгоритмов к однолистной разрешимости обратных краевых задач и к исследованию геометрических свойств решений краевой задачи Гильберта. Доказано, что изменением длин сторон при сохранении внутренних углов можно превратить почти-выпуклый многоугольник в звездообразный.

Фаритом Габидиновичем совместно С. Р. Насыровым получены некоторые необходимые и достаточные условия разрешимости задачи о построения римановой поверхности над сферой по проекции края. Эта проблема, носящая топологический характер, ставилась в работах Пикара, Левнера и Хопфа. На важные ее приложения в теории обратных краевых задач указывалось в работах Ф. Д. Гахова и Ю. М. Крикунова.

Ф. Г. Авхадиев и Д. В. Маклаков поставили и решили принципиально новую обратную краевую задачу о восстановлении аэродинамического профиля по заданной кавитационной диаграмме.

В начале девяностых годов Фарит Габидинович совместно со своим учеником И. Р. Каюмовым решил одну из известных проблем, поставленных в 1974 г. Дж. М. Андерсоном, Дж. Клуни и Х. Поммеренке.

Совместно с К.-Й. Виртсом, ему удалось получить ряд точных оценок в некоторых банаховых пространствах аналитических функций. Также Фариту Габидиновичу принадлежат лучшие оценки гладкости однолистных отображений канонической области на области, не принадлежащие классу В. И. Смирнова. Данной задачей занимались многие видные математики, в том числе А. Зигмунд, Е. М. Стейн, П. Л. Дюрен, М. С. Шапиро, А. Л. Шилдс. Частично исследования этих авторов перенесены Ф. Г. Авхадиевым и П. Л. Шабалиным на многосвязные круговые области.

В 2005 г. Ф. Г. Авхадиву удалось доказать многомерное неравенство типа Харди с точной константой. Им были также доказаны новые весовые одномерные неравенства типа Харди с точными константами и описаны их применения к неравенствам в многомерных областях. Эти результаты были процитированы в престижных монографиях по многомерному анализу.

Отдельно стоит остановиться на решении проблемы Сен–Венана. Фаритом Габидиновичем была исследована хорошо известная задача математической теории упругости о жесткости кручения балки с заданным поперечным сечением для произвольных односвязных областей. Им было показано, что жестокость кручения эквивалентна моменту инерции области относительно своей границы. Таким образом, путем новой интерпретации известной формулы Кулона было получено поло-

жительное решение задачи, возникшей в работах Коши и Сен-Венана: найти геометрический параметр, эквивалентный коэффициенту жесткости кручения упругих балок с односвязными сечениями. Эти исследования были продолжены Ф. Г. Авхадиевым совместно с его учеником Р. Г. Салахудиновым.

Фарита Габидинович является прекрасным педагогом, воспитавшим немало учеников. Под его руководством защищено 7 кандидатских диссертаций, он является научным консультантом по двум докторским диссертациям. Ф. Г. Авхадиев руководит еженедельным семинаром по теории функций, участниками которого готовится еще несколько кандидатских диссертаций.

Отдельно стоит отметить заслуги Фарита Габидиновича на посту главного редактора журнала «Известия вузов. Математика». Ему удалось добиться вхождения журнала в хорошо известную международную базу данных «Скопус». Кроме того, в 2015 г. возглавляемый им журнал вошел в российскую часть престижной базы данных «Сеть науки».

Начиная с 1996 г., Фарит Габидинович руководит выполнением инициативных грантов Российского Фонда Фундаментальных Исследований. В 2009 г. им создан научно-образовательный центр «Экстремальные проблемы комплексного анализа», который он возглавляет и в настоящее время.

Мы хорошо знаем Фарита Габидиновича не только, как яркого ученого, но и как прекрасного человека, и от чистого сердца желаем ему новых успехов в науке, крепкого здоровья и счастья ему и его замечательной семье.

И.Р. Каюмов, С.Р. Насыров, П.Л. Шабалин

Литература

1. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций* // Успехи матем. наук. – 1975. – Т. 30, вып. 4. – С. 3–60.

2. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Елизаров А.М. *Достаточные условия конечнолистности аналитических функций и их приложения* / Итоги науки и техники. ВИНИТИ. Серия Математический анализ. Т. 25. – Москва, 1987. – С. 3–121.

3. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А., Елизаров А.М., Насыров С.Р. *Научный семинар по геометрической теории функций: основные результаты двух последних десятилетий* // Тр. Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. – Казань: КМО, 2002, т. 14, – С. 7–38.

4. Авхадиев Ф.Г. *Геометрическая теория функций* / В кн.: «История науки в Казанском университете, 1980–2003». – Казань: Изд-во КГУ, 2005. – С. 15–20.

5. Авхадиев Ф.Г., Каюмов И.Р., Салахудинов Р.Г. *Исследования по теории функций и изопериметрическим задачам* / В кн.: «На рубеже веков. НИИММ Казанского университета». – Казань: Изд-во Казан. матем. общества, 2003. – С. 37–50.

6. Авхадиев Ф.Г. *Экстремальные проблемы, связанные с интегральными характеристиками* / В кн.: «НИИММ им. Н.Г. Чеботарева КГУ. 2003-2007 годы». – Казань, Изд-во КГУ, 2008. – С. 36–53.

7. Авхадиев Ф.Г. *Конформные отображения и краевые задачи.* – Казань: Изд-во Казанский фонд «Математика», 1996. – 216 с.

8. Авхадиев Ф.Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сб. – 1998. – Т. 189, № 12. – С. 3–12.

9. Avkhadiev F.G. *Hardy type inequalities in higher dimensions with explicit estimate of constants* // Lobachevskii J. Math. – 2006. – V. 21. – P. 3–31.

10. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *Unified Poincare and Hardy inequalities with sharp constants for convex domains* // Z. Angev. Math. Mech. – 2007. – V. 14, No. 8–9. – P. 532–542.

11. Avkhadiev F.G., Wirths K.-J. *Schwarz-Pick Type Inequalities.* – Basel-Boston-Berlin: Birkhauser Verlag, 2009. – 156 p.

12. Авхадиев Ф.Г. *Кафедра теории функций и приближений* / В кн.: «Механико-математический факультет Казанского университета: Очерки истории». Изд. 3-е, перераб. и доп. / Под ред. С.Р. Насырова. – Казань: Казан. ун-т, 2011. – С. 104–113.

13. Авхадиев Ф.Г. *Геометрическое описание областей, для которых константа Харди равна* 1/4 // Изв. РАН. Сер. Матем. – 2014. – Т. 78, № 5. – С. 3–26.

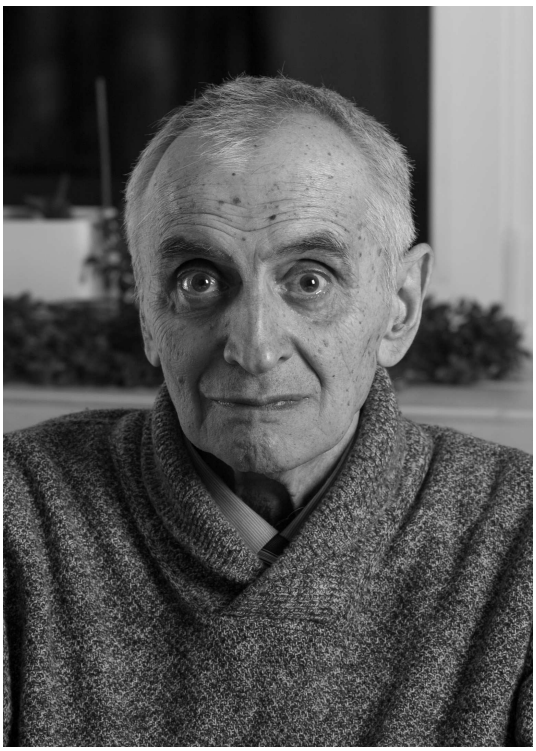
14. Авхадиев Ф.Г. *Интегральные неравенства в областях гиперболического типа и их применения* // Матем. сборник. – 2015. – Т. 206, № 12. – С. 3–28.

15. Авхадиев Ф.Г. *Неравенства для интегральных характеристик областей: учебное пособие.* – Казань: Изд-во КГУ, 2006. – 142 с.

16. Авхадиев Ф.Г. *Введение в геометрическую теорию функций: учебное пособие.* – Казань: Казан. ун-т, 2012. – 127 с.

СУРЕН АРШАКОВИЧ ГРИГОРЯН

(к семидесятилетию со дня рождения)



17 августа 2017 г. исполнилось 70 лет со дня рождения известного математика, доктора физико-математических наук, профессора, заведующего кафедрой высшей математики Казанского государственного энергетического университета, иностранного члена Национальной Академии наук Армении, заслуженного деятеля науки Республики Татарстан Сурена Аршаковича Григоряна.

С. А. Григорян родился в 1947 г. в Тбилиси в семье служащих (отец — инженер, мать — медсестра). В 1966 г. окончил школу № 20 г. Еревана и в этом же году поступил на I курс мехмата Ереванского университета. Окончив университет в 1971 г., поступил в аспирантуру Математического института им. В. А. Стеклова АН СССР (научный руководитель — проф. М. А. Наймарк). В 1977 г. в диссертационном совете этого института он успешно защитил кандидатскую диссертацию на тему «Теория равномерных алгебр».

В 1975-1980 гг. Сурен Аршакович работал в ВЦ Госплана Армении, с 1980 по 1995 гг. — младшим, старшим, а затем и ведущим научным сотрудником Института математики Армении. В 1986-1987 гг. обучался в докторантуре в отделе теории функций МИАН СССР под руководством академика С. М. Никольского. В 1993 г. успешно защитил докторскую диссертацию «Обобщенные аналитические (по Аренсу-Зингеру) функции» в совете МИ РАН. Основные положения диссертации опубликованы в работе [3].

В 1998 г. С. А. Григорян возглавил кафедру математики и механики Зеленодольского филиала Казанского университета, а в 2003 г. перешел в Казанский государственный энергетический университет (КГЭУ) на должность заведующего кафедрой высшей математики.

По приезду в Казань Сурен Аршакович активно включился в работу межвузовского семинара «Операторные алгебры и их приложения» (научн. рук. — проф. А. Н. Шерстнев), на заседаниях которого он выступал с изложением своих результатов и постановками новых интересных задач. Широко эрудированный ученый, он легко переключался на проблемы, решаемые другими участниками семинара,

и часто становился соавтором в публикациях, совместных с коллегами по семинару. Например, с Р. Н. Гумеровым он занимался исследованиями по топологическим группам, совместно с Д. Х. Муштари и П. Г. Овчинниковым им была написана работа [4] по квантовым логикам идемпотентов C*-алгебр, в которой Сурен Аршакович построил тонкий контрпример, дав тем самым отрицательный ответ на давно стоявшую известную гипотезу.

В 90-х годах С. А. Григорян организовал свой семинар по функциональному анализу и его приложениям, который впоследствии стал межвузовским; этот семинар регулярно работает и по сей день в стенах КГЭУ. С докладами на нем выступают известные специалисты из других городов России, ближнего и дальнего зарубежья. Активное участие в работе семинара принимают студенты и аспиранты.

С. А. Григорян является известным активно работающим математиком, его достижения хорошо известны как в нашей стране, так и за рубежом. Им написано более 100 научных работ и 2 монографии, в том числе совместная с Т. Тоневым (США) книга [8], которая была издана Польской академией наук на английском языке в той же самой серии, в которой появилась знаменитая монография Стефана Банаха. Он приглашался на месячные сессии в Обервольфах (Германия) в 1998 г. и в Центр Банаха (Польша) в 2000 г; в 2004 г. прошел годичную научную стажировку в США в Университете штата Монтана.

Сурен Аршакович является прекрасным руководителем и педагогом, основателем признанной научной школы. Под руководством С. А. Григоряна защищено 12 кандидатских диссертаций.

Отметим некоторые наиболее значимые результаты, полученные Суреном Аршаковичем. Им был предложен новый подход к изучению почти периодических аналитических функций [1]. В частности, было начато исследование обобщённых мероморфных функций [2]. В соавторстве с доцентом Р. Н. Гумеровым им получен яркий результат о накрытиях компактных групп, обобщающий классическую теорему Понтрягина о поднятии групповой структуры на накрывающее пространство [7, 9]. Из него, в частности, вытекает критерий разрешимости алгебраических уравнений с функциональными коэффициентами в терминах спектральных когомологий. Совместно с А. Ю. Кузнецовой [11] было начато исследование C^*-алгебр, порождённых отображениями. Простейшей из таких алгебр является алгебра Теплица, имеющая приложение в квантовой теории поля [10]. Было показано (совм. с М. А. Аухадиевым и Е. В. Липачевой) [12], что на полугрупповой алгебре, порождённой абелевой полугруппой, можно задать структуру квантовой полугруппы. Это позволило получить некоммутативный аналог теории рядов Фурье.

Коллеги знают Сурена Аршаковича как обаятельного человека, доступного к обсуждению широкого спектра математических задач в любое время суток. В круг его научных интересов входят вопросы теории функций, топологической алгебры, квантового функционального анализа, некоммутативной топологии и их приложений в теоретической физике.

Свой юбилей Сурен Аршакович встречает полным творческих планов и идей, которыми он щедро делится со своими учениками и коллегами.

Мы желаем юбиляру крепкого здоровья и дальнейших успехов!

А. М. Бикчентаев, Р. Н. Гумеров, С. Р. Насыров

Литература

1. Григорян С. А. *Об одном свойстве почти-периодических аналитических функций* // Матем. заметки. – 1989. – Т. 45, No 4. – С. 13–18.

2. Григорян С.А. *Обобщенные мероморфные функции* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1993. – Т. 57, No 1. – С. 147–166.

3. Григорян С.А. *Обобщенные аналитические функции* // УМН. – 1994. – Т. 49, No 2(296). – С. 3–42.

4. Grigoryan S.A., Mushtari D.H., Ovchinnikov P.G. *Disjunctivity and alternativity in projection logics* // Internat. J. Theoret. Phys. – 2000. – V. 39, No 3. – P. 705–709.

5. Grigoryan S.A., Tonev T.V. *Blaschke inductive limits of uniform algebras* // Int. J. Math. Math. Sci. – 2001. – V. 27, No 10. – P. 599–620.

6. Grigoryan S.A., Pankrateva T.N., Tonev T.V. *The validity range of two complex analysis theorems* // Complex Var. Theory Appl. – 2002. – V. 47, No 12. – P. 1085–1095.

7. Grigorian S.A., Gumerov R.N. *On a covering group theorem and its applications* // Lobachevskii J. Math. – 2002. – V. 10. – P. 9–16.

8. Grigoryan S.A., Tonev T.V. *Shift-invariant uniform algebras on groups.* – Math. Inst. of the Polish Academy of Sci. Math. Monographs (New Series), 68. – Basel: Birkhauser Verlag, 2006. – 284 p.

9. Grigorian S.A., Gumerov R.N. *On the structure of finite coverings of compact connected groups* // Topology and its Applications. – 2006. – V. 153(18). – P. 3598–3614.

10. Григорян С.А., Салахутдинов А.Ф. *C^*-алгебры, порожденные полугруппами с сокращением* // Сиб. матем. журнал. – 2010. – Т. 51, No 1. – С. 16–25.

11. Григорян С.А., Кузнецова А.Ю. *C^*-алгебры, порожденные отображениями* // Матем. заметки. – 2010. – Т. 87, No 5. – С. 694–703.

12. Аухадиев М.А., Григорян С.А., Липачева Е.В. *Операторный подход к квантованию полугрупп* // Матем. сб. – 2014. – Т. 205, No 3. – С. 15–40.

UDC 517.5

POLYNOMIAL INEQUALITIES IN REGIONS WITH CUSPS

F.G. Abdullayev[1], G.A. Abdullayev[2]

1 *fabdul@mersin.edu.tr*; KT Manas University, Mersin University
2 *gulnareaddullah@mersin.edu.tr*; KT Manas University, Mersin University

In this talk, we investigate the order of growth of the modulus of an arbitrary algebraic polynomials in the weighted Lebesgue space, where the contour and the weight functions have some singularities. In particular, we obtain pointwise Berstein-Walsh-type estimation for algebraic polynomials in the bounded and unbounded regions with piecewise smooth and quasi-smooth boundary having exterior and interior zero angles at the finite number boundary of points.

Keywords: algebraic polynomials, weighted Lebesgue space, Berstein-Walsh-type estimation.

UDC 517

APPROXIMATION INEQUALITIES IN WEIGHTED ORLICZ SPACES

R. Akgün[1]

1 *rakgun@balikesir.edu.tr*; Balıkesir

In this work some Jackson-Stechkin type direct theorems of trigonometric approximation are proved in Orlicz spaces, generated by a quasiconvex function, with weights satisfying some Muckenhoupt's Ap condition. To obtain a refined version of the Jackson type inequality we prove an extrapolation theorem, Marcinkiewicz multiplier theorem and Littlewood-Paley type results. By means of a realization result we find an equivalence between the fractional order weighted modulus of smoothness and the classical weighted Peetre's K-functional.

Keywords: approximation inequalities, Orlicz spaces.

References

1. Akgün R. *Approximating polynomials for functions of weighted Smirnov-Orlicz spaces* // J. Funct. Spaces Appl. – 2012. – V. 2012. – P. 1–41.

UDC 517

VARIABLE LEBESGUE SPACES AND APPROXIMATION

R. Akgün[1]

1 *rakgun@balikesir.edu.tr*; Balıkesir

A Jackson type inequality of trigonometric approximation and its refinement are obtained for the modulus of smoothness of fractional order in variable exponent Lebesgue spaces $L^{p(x)}$ with $1 < essinf_{x\in[0,2\pi]} p(x)$, $esssup_{x\in[0,2\pi]} p(x) < \infty$.

Keywords: approximation, Lebesgue spaces.

References

1. Akgün R. *Trigonometric approximation of functions in generalized Lebesgue spaces with variable exponent* // Ukrainian Math. J. – 2011. – V. 63, № 1. – P. 1–26.

2. Sharapudinov I.I. *Approximation of functions in $L_{2\pi}^{p(\cdot)}$ by trigonometric polynomials* // Izv. RAN. Ser. Mat. – 2013. – V. 77. – № 2. – P. 197–224.

UDC 517.53

HERMITE-PADÉ APPROXIMANTS FOR A PAIR OF CAUCHY TRANSFORMS WITH INTERLACING SUPPORTS

A.I. Aptekarev[1]

1 *aptekaa@keldysh.ru*; Keldysh Institute of Applied Mathematics, Russian Academy of Science, Moscow, Russian Federation

Hermite-Padé approximants of type II are vectors of rational functions with common denominator that interpolate a given vector of power series at infinity with maximal order. We are interested in the situation when the approximated vector is given by a pair of Cauchy transforms of smooth complex measures supported on the real line. The convergence properties of the approximants are rather well understood when the supports consist of two disjoint intervals (Angelesco systems) or two intervals that coincide under the condition that the ratio of the measures is a restriction of the Cauchy transform of a third measure (Nikishin systems). In this talk we consider the case where the supports form two interlacing symmetric intervals and the ratio of the measures extends to a holomorphic function in a region that depends on the size of interlacing. This problem was posed and studied by Herbert Stahl at 80-ties, however the detailed proof for the asymptotics of Hermite-Padé approximants has never been published. We shall speak about algebraic functions (of genus 1 and 2) and their abelian integrals (with purely imaginary periods) which defines the main term of asymptotics for this problem.

Keywords: Hermite-Padé approximation, simultaneous interpolation with free poles, non-Hermitian orthogonality, multiple orthogonal polynomials, strong asymptotics.

The talk is based on the joint work [1].

References

1. Aptekarev A.I., Van Assche W., Yattselev M.L., *Hermite-Padé Approximants for a Pair of Cauchy Transforms with Overlapping Symmetric Supports* // Communications on Pure and Applied Mathematics. – 2017. – V. 70, № 3. – P. 444-510.

UDC 517.544.8

DIRICHLET PROBLEM SOLUTION FOR SIMPLY AND DOUBLY CONNECTED DOMAINS WITH SMOOTH BOUNDARIES

A. Elshenawy[1], E.A. Shirokova[2]

1 *atallahtm@yahoo.com*; Kazan Federal University
2 *elena.shirorova@kpfu.ru*; Kazan Federal University

In this paper we propose a new method for solving the 2D Laplace equation with Dirichlet boundary conditions in simply and doubly connected domains. The method is based on reduction of the problem to the Fredholm integral equation of the second kind. The numerical algorithm connected with truncated Fourier series is applied to convert the Fredholm equation to a finite system of linear equations.

Keywords: Cauchy integral, Fourier polynomial, Dirichlet problem, Fredholm integral equation, simply connected domain, doubly connected domain.

Here we present Cauchy integral method of 2D Dirichlet problem solution for simply and doubly connected domain with smooth boundary. The method is based on reduction of the problem to the Fredholm integral equation of the second kind for the boundary values of the conjugate harmonic function and further conversion of the integral equation to the truncated linear system. The solution of the integral equation has the form of truncated Fourier series. Finally, the solution of the Dirichlet problem has the form of the real part of the Cauchy integral.

The case of simply connected domain

We denote the function to be found as $u(x,y) = \Re B(z)$, where $B(z)$ is analytic in a given simply connected domain Ω. So the problem follows: given the function $f_0(t) = u(x,y)|_{\{x(t),y(t)\}\in\partial\Omega}$, $t \in [0,2\pi]$, while the boundary smooth curve $\partial\Omega$ of the domain Ω passing in a counterclockwise direction, it is necessary to find the function $u(x,y)$, $(x,y) \in \Omega$.

By denoting $g_0(t) = \Im B(z(t))|_{z(t)=x(t)+iy(t)\in\partial\Omega}$, $t \in [0,2\pi]$, and separating the imaginary parts in both the sides of the criterion of the function $f_0(t) + ig_0(t)$ to be the boundary values of the function analytic in Ω, as in [2], the following Fredholm integral equation of the second kind is obtained:

$$g_0(t) = -\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f_0(\tau)\left(\log[z(\tau)-z(t)]\right)'_\tau d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_0(\tau)\left(\arg[z(\tau)-z(t)]\right)'_\tau d\tau. \qquad (1)$$

The integral equation (1) is similar to that appeared in [4] when the problem was solved applying the potential theory. The factor $(e^{i\tau}-e^{it})$ is extracted from the expression $(z(\tau)-z(t))$ in order to separate the improper VP integral in the Fredholm equation.

The solution is obtained in the form of truncated Fourier series $g_0(t) = \alpha_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n \cos(nt) + \beta_n \sin(nt)$ by solving the following linear system:

$$\begin{pmatrix} AA & AB \\ BA & BB \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} p \\ q \end{pmatrix} \tag{2}$$

according to the following

Lemma. [1] *Let numbers $j, p > 1$ and a constant $U > 0$ exist such that $|\partial^{j+p} G(\tau, t)/\partial t^j \partial \tau^p| \le U$ and the function $Y(t)$ possess the bounded second derivative: $Y''(t) < T$. Then, the approximate solution of the uniquely resolvable Fredholm integral equation of the second kind*

$$X(t) = \int_0^{2\pi} G(\tau, t) X(\tau) d\tau + Y(t),$$

where $Y(t)$ is 2π periodic and $G(\tau, t)$ is 2π periodic with respect to both variables, can be reduced to solution of finite linear system with error estimated by $\mathcal{O}\left(1/N^2\right)$ where N is the system rank.

After finding $g_0(t)$ we restore the Dirichlet problem solution as

$$u(x, y) = \Re \frac{1}{2\pi i} \int_0^{2\pi} \frac{f_0(t) + i g_0(t)}{z(t) - x - iy} z'(t) dt.$$

The case of doubly connected domain

For the case of doubly connected domain Ω with boundary $\partial\Omega$, we assume that the boundary is composed of the outer smooth curve $L_0 : z_0(t), t \in [0, 2\pi]$, passed in counterclockwise direction and the inner smooth curve $L_1 : z_1(t), t \in [0, 2\pi]$, passed in clockwise direction. The Dirichlet problem follows: given the functions $f_j(t), j = 0, 1$, it is necessary to find $u(x, y), (x, y) \in \Omega$, such that $f_j(t) = u(x, y)|_{\{x(t), y(t)\} \in L_j}$, $j = 0, 1$, $t \in [0, 2\pi]$. Assume that the solution of the Dirichlet problem, according to [2], is presented in the form $u(x, y) = \Re B(z) + A \log|z|, z = x + iy$, where A is a real-valued parameter which will be calculated later. So we have the boundary values of the analytic function $B(z)$ represented in the parametric form as follows:

$$B(z(t))|_{\partial\Omega} = \begin{cases} f_0(t) - A \log|z_0(t)| + i g_0(t), & z(t) \in L_0, \\ \\ f_1(t) - A \log|z_1(t)| + i g_1(t), & z(t) \in L_1. \end{cases} \tag{3}$$

Here $\{g_j(t)\}_{j=0}^{1} = \Im B(z(t))|_{z(t)=x(t)+iy(t)\in L_j}$, $t \in [0, 2\pi]$. By separating the imaginary parts of the corresponding integral equation as above, the following system of Fredholm inte-

gral equations is obtained:

$$g_0(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_0(\tau)\left[\arg(z_0(\tau)-z_0(t))\right]'_\tau d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\tau)\left[\arg(z_1(\tau)-z_0(t))\right]'_\tau d\tau$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f_0(\tau)-A\log|z_0(\tau)|\right)\left[\log(z_0(\tau)-z_0(t))\right]'_\tau d\tau$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f_1(\tau)-A\log|z_1(\tau)|\right)\left[\log(z_1(\tau)-z_0(t))\right]'_\tau d\tau \quad (4)$$

$$g_1(t) = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_0(\tau)\left[\arg(z_0(\tau)-z_1(t))\right]'_\tau d\tau + \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} g_1(\tau)\left[\arg(z_1(\tau)-z_1(t))\right]'_\tau d\tau$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f_0(\tau)-A\log|z_0(\tau)|\right)\left[\log(z_0(\tau)-z_1(t))\right]'_\tau d\tau$$
$$-\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}\left(f_1(\tau)-A\log|z_1(\tau)|\right)\left[\log(z_1(\tau)-z_1(t))\right]'_\tau d\tau \quad (5)$$

The solution of the system with truncated Fourier series is obtained as a linear function of the constant A. Due to the properties of Cauchy integral, the parameter A can be easily calculated from the following formula:

$$\sum_{s=0}^{1}\left(\int_0^{2\pi}\left[f_s(t)-A\log|z_s(t)|+ig_s(t)\right]\frac{\acute{z}_s(t)}{z_s^{k+1}(t)}dt\right)=0, \qquad k=0,1,\ldots \quad (6)$$

Finally, the Dirichlet problem solution $u(x,y)$ in the doubly connected domain Ω as a function of $z=(x+iy)$ can be expressed in the form

$$u(z)=\Re\left(\sum_{j=0}^{1}\frac{1}{2\pi i}\int_0^{2\pi}\frac{f_j(t)-A\log|z_j(t)|+ig_j(t)}{z_j(t)-z}\acute{z}_j(t)dt\right)+\frac{A}{2}\log\left(x^2+y^2\right) \quad (7)$$

The Cauchy integral method, applied to several examples, gave highly accurate results for irregular simply and doubly connected domains, it is also applicable for the domains with boundary components that are not star-like with respect to the origin [3], as presented in figure (1), for harmonic function with constant boundary values.

References

1. Ivanshin P.N., Shirokova E.A. *Approximate conformal mappings and elasticity theory* // Journal of Complex Analysis. – 2016. — V. 2016. – 8 p.

2. Gakhov F.D. *Boundary Value Problems*. – Moscow: Nauka, 1977.

3. Abzalilov D.F., Shirokova E.A. *The approximate conformal mappings onto simply and doubly connected domains* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2017. – V. 62(4). – P. 554-565.

4. Tricomi F.G. *Integral Equations*. – New York-London: Int. Publ., 1957.

5. Shirokova E.A. *On the approximate conformal mapping of the unit disk on simply connected domain* // Russia Mathematics (IZ VUZ). – 2014. – V. 58(3). – P. 47-56.

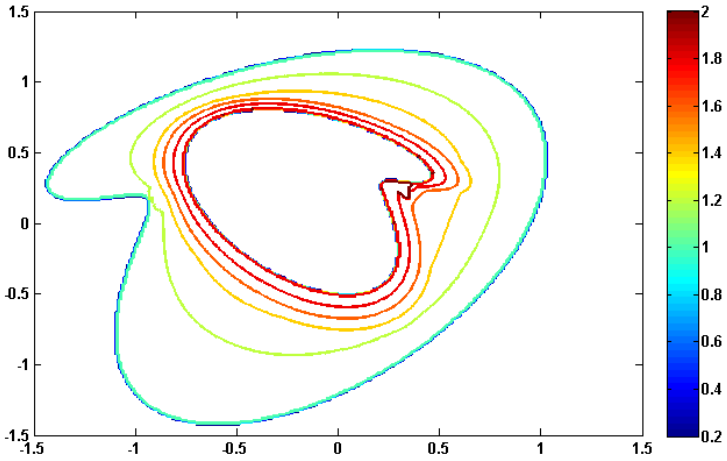


Fig. 1. The contour plot of the solution of the 2D Laplace equation in a domain with not star-like boundaries

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ ДИРИХЛЕ ДЛЯ ОДНОСВЯЗНЫХ И ДВУСВЯЗНЫХ ОБЛАСТЕЙ С ГЛАДКИМИ ГРАНИЦАМИ

А. Эльшенави, Е.А. Широкова

В статье обсуждается новый метод решения двумерного уравнения Лапласа с граничными условиями Дирихле в односвязной и двусвязной области. Метод основан на сведении задачи к интегральному уравнению Фредгольма второго рода и применен численный алгоритм, связанный с усечением бесконечной системи линейных уравнений.

Ключевые слова: интеграл Коши, полином Фурье, задача Дирихле, интегральное уравнение Фредгольма, односвязная область, двусвязная область.

UDC 517.98

CONTINUOUS ATOMIC SYSTEM FOR SUBSPACE

A. Fattahi[1]

1 *abdolmajidfattahi@gmail.com*; Razi University, Kermanshah, Iran

In this talk we give a new contributions to atomic systems theory in Hilbert spaces. More precisely, we introduce and explain the concept of continuous atomic systems for subspaces, and give some examples to show differences between this and the discrete version.

Keywords: Hilbert space, continuous atomic systems, subspace.

UDC 517.54

INTEGRAL MEANS OF HARMONIC MAPPINGS

A.S. Kaliraj[1]

1 *sairamkaliraj@gmail.com*; Indian Statistical Institute, Chennai, India

In this talk, we are interested to explore more on locally univalent harmonic functions in the perspective of h^p-spaces, which will be helpful in understanding the boundary behaviour and other important aspects of harmonic functions.

Keywords: integral means, locally univalent functions, Hardy spaces.

A function f analytic in the unit disk is said to belong to the Hardy space H^p if the integral means

$$M_p(r,f)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta$$

is bounded in the unit disk. The finiteness of $M_p(r,f)$ and $M_p(r,f')$ play a crucial role in the classical theory of univalent functions and its upper bound estimate of the following integrals

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta \text{ and } \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}|f'(re^{i\theta})|^p\,\mathrm{d}\theta$$

got special attention when $p=-2,1,2$ as it has some applications in free boundary problems in fluid dynamics, and related with the growth of the Taylor coefficients of f. The harmonic Hardy space h^p is the space of functions harmonic on the unit disk that obey the similar integral growth condition for the corresponding Hardy spaces H^p of analytic functions. Until recently, only a few results were known in the literature on h^p- spaces (See [1-3]). In this talk, we are interested to explore more on locally univalent harmonic functions in the perspective of h^p- spaces, which will be helpful in understanding the boundary behaviour and other important aspects of harmonic functions.

This is a joint work with Prof. S. Ponnusamy.

References

1. Duren P. *Harmonic mappings in the plane,* Cambridge Tracts in Mathematics, V. 156. – Cambridge: Cambridge Univ. Press, 2004.

2. Nowak M. *Integral means of univalent harmonic maps* // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sect. A. – 1996. – V. 16 (50). – P. 155–162.

3. Ponnusamy S., Sairam Kaliraj A. *On the coefficient conjecture of Clunie and Sheil-Small on univalent harmonic mappings* // Proc. Indian Acad. Sci. Math. Sci. – 2015. – V. 125 (3). – P. 277–290.

UDC 517.5

COMPOSITION OPERATORS ON FUNCTION SPACES OF A GRAPH

P. Muthukumar[1]

1 *pmuthumaths@gmail.com*; Indian Statistical Institute, Chennai, India

We discuss some necessary and sufficient condition of boundedness and compactness of composition operators in various analytic function spaces.

Keywords: Bloch space, Lipschitz space, graph, composition operators.

The study of composition operators on various analytic function spaces defined on the open unit disk is well-known. Recently, Colonna et al. defined the Lipschitz space of a infinite tree as discrete analogue of classical Bloch space and study the composition operator on them. Since infinite trees are widely regarded as discrete version of Hyperbolic disk in complex plane, studying composition operators on trees becomes interesting and it opens up the door for studying composition operators from analytic function spaces to discrete function spaces.

We have defined a discrete analogue of generalized Hardy spaces on a homogeneous rooted tree and studied the basic properties such as boundedness and compactness of composition operators on them. Also, we calculated the operator norm of the composition operator when the inducing symbol is an automorphism of a homogenous tree.

In this presentation, we first recall some basic issues concerning composition operators on Lipschitz space of a infinite tree graph and we continue the discussion about composition operators on the discrete analogue of Hardy spaces. We mainly discuss some necessary and sufficient condition on the symbol ϕ so that the composition operator C_ϕ induced by ϕ is bounded and compact operator.

This is a joint work with Prof. S. Ponnusamy.

References

1. Allen R.F., Colonna F., Easley G.R. *Composition operators on the Lipschitz space of a tree* // Mediterr. J. Math. – 2014. – V. 11. – P. 97–108.

2. Muthukumar P., Ponnusamy S. *Composition operators on the discrete analogue of generalized Hardy space on homogenous trees* // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2016.

3. Shapiro J.H. *Composition operators and classical function theory*. – New York: Springer, 1993.

UDC 517.518.23+517.972

QUASICONFORMAL ANALYSIS AND NON-LINEAR THEORY OF ELASTICITY

S.K. Vodopyanov[1]

1 *vodopis@math.nsc.ru*; Sobolev Institute of Mathematics of the Siberian Branch of the Russian Academy of Sciences

We define a two-index scale of mappings with θ-weighted (q,p)-distortion. The qoal of the paper is to show that the mappings of a new class inherit many properties of mappings with bounded distortion. In addition, homeomorphic maps of this class for $\theta \equiv 1$, $n-1 \le q < p = n$ can be considered as admissible deformations in problems of the non-linear theory of elasticity.

Keywords: outer and inner distortion, pullback operator of differential forms, mapping with bounded θ-weighted (q,p)-distortion, Poleckiĭ function, capacity.

1. It is known that in the theory of mappings with bounded distortion both outer and inner distortion coefficients are used. In some cases, it does not matter which one to apply (see, for instance, [1, Corollary 3]). However, it should be borne in mind that the outer distortion characterises the geometric properties of the direct mapping, while the behaviour of the inner distortion reflects the geometric properties of the inverse mapping.

Relationship between these values is set in the following theorem. To formulate it we introduce the following objects:

1) non-negative locally integrable functions $\theta, \omega : \mathbb{R}^n \to (0,\infty)$ (referred to be *weighted*);

2) for $n \times n$-matrix A, the symbol $\operatorname{adj} A$ denotes an adjoint matrix, defined by the condition $A \operatorname{adj} A = I \det A$ if the determinant of A is different of zero, and by the continuity in the topology of $\mathbb{R}^{n\times n}$ otherwise;

3) for numbers $n-1 \le q \le p < \infty$ and a mapping $\varphi : \Omega \to \mathbb{R}^n$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, of Sobolev class $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega)$, we define the (inner) operator distortion function:

$$\Omega \ni x \mapsto \mathscr{K}^{\theta,1}_{q,p}(x,\varphi) = \begin{cases} \dfrac{\theta^{\frac{n-1}{q}}(x)|\operatorname{adj} D\varphi(x)|}{|J(x,\varphi)|^{\frac{n-1}{p}}} & \text{at } x \in \Omega \setminus Z, \\ 0 \quad \text{otherwise.} \end{cases} \tag{1}$$

Hereinafter, $Z = \{x \in \Omega : J(x,\varphi) = 0\}$;

4) for a mapping $\psi : \Omega' \to \mathbb{R}^n$, $\Omega' \subset \mathbb{R}^n$, of Sobolev class $W^1_{1,\mathrm{loc}}(\Omega')$ we define the (outer) operator distortion function:

$$\Omega' \ni y \mapsto K^{1,\omega}_{s,r}(y,\psi) = \begin{cases} \dfrac{|D\psi(y)|}{\omega(y)^{\frac{1}{r}}|J(y,\psi)|^{\frac{1}{r}}} & \text{at } y \in \Omega' \setminus Z', \\ 0 \quad \text{otherwise,} \end{cases} \tag{2}$$

here $n-1 < s \le r \le \infty$.

The value (1) is a generalisation of the inner distortion coefficient well-known in the quasiconformal analysis, and (2) generalises the outer distortion coefficient.

From [1, Theorem 3] and [2, Theorem 1.2] we deduce the following result:

Theorem 1. *Let the homeomorphism $\varphi : \Omega \to \Omega'$ have the following properties:*

1) $\varphi \in W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$, $n-1 \le q < \infty$,

2) φ *has the finite codistortion:* $\operatorname{adj} D\varphi(x) = 0$ *a. e. on the set* Z,

3) $\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,\varphi) \in L_\varrho(\Omega)$ *where* $\frac{1}{\varrho} = \frac{n-1}{q} - \frac{n-1}{p}$, $n-1 < q < p < \infty$.

Then

4) *the mapping* $\varphi : \Omega \to \Omega'$ *induces a bounded pull-back operator* $\varphi^* : \mathscr{L}_{\frac{p}{n-1}}(\Omega', \Lambda^{n-1}) \to \mathscr{L}_{\frac{q}{n-1},\theta}(\Omega, \Lambda^{n-1})$ *of* $\mathscr{L}_{\frac{p}{n-1}}$*-forms of degree* $n-1$ *into the weighted space* $\mathscr{L}_{\frac{q}{n-1},\theta}(\Omega, \Lambda^{n-1})$ *of forms of degree* $n-1$*;*

5) *the inverse homeomorphism* $\varphi^{-1} \in W^1_{s,\mathrm{loc}}(\Omega')$ *where* $s = \frac{p}{p-n+1}$,

6) φ^{-1} *has the finite distortion:* $D\varphi^{-1}(y) = 0$ *a. e. on* Z',

7) $K^{1,\omega}_{s,r}(\cdot,\varphi^{-1}) \in L_\varrho(\Omega')$ *where* $r = \frac{q}{q-n+1}$, $s = \frac{p}{p-n+1}$, $\omega = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}} \circ \varphi^{-1}$.

8) *the homeomorphism* φ^{-1} *induces a bounded operator* $\varphi^{-1*} : L^1_r(\Omega';\omega) \cap W^1_{\infty,\mathrm{loc}} \to L^1_s(\Omega)$ *by the composition rule.*

Furthermore, $\|\varphi^{-1*}\| \le \|K^{1,\omega}_{s,r}(\cdot,\varphi^{-1}) \mid L_\varrho(\Omega')\| = \|\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,\varphi) \mid L_\varrho(\Omega)\|$.

2. The last assertion motivates the definition of the next class of mappings.

Definition 1. A mapping $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ is called the *mapping with bounded* θ*-weighted* (q,p)*-distrotion* (belongs to the class $\mathscr{ID}(\Omega; q, p; \theta, 1)$) $n-1 \le q \le p < \infty$, if:

1) f is continuous, open and discrete;

2) f belongs to Sobolev class $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega)$;

3) the Jacobian $J(x,f) \ge 0$ in Ω almost everywhere;

4) the mapping f has the finite codistortion;

5) the function of the local θ-weighted (q,p)-distortion

$$\Omega \ni x \mapsto \mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(x,f) = \begin{cases} \dfrac{\theta^{\frac{1}{q}}(x)\,|\operatorname{adj} Df(x)|}{J(x,f)^{\frac{n-1}{p}}}, & \text{if } J(x,f) \ne 0, \\ 0 & \text{otherwise} \end{cases} \tag{3}$$

belongs to $L_\varrho(\Omega)$ where ϱ is found from the condition $\frac{1}{\varrho} = \frac{n-1}{q} - \frac{n-1}{p}$ ($\varrho = \infty$ at $q = p$).

We introduce the following notation $\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(f;\Omega) = \left\|\mathcal{K}^{\theta,1}_{q,p}(\cdot,f) \mid L_\varrho(\Omega)\right\|$.

We note that condition 2 of this definition can be relaxed.

Following the paper [3, P. 265] by E. Poleckiĭ, for continuous open and discrete mapping $f : \Omega \to \mathbb{R}^n$ preserving orientation, and normal domain $D \Subset \Omega$, on the image $V = f(D)$ we define Poleckiĭ function $g_D : V \to \mathbb{R}^n$ as

$$V \ni y \mapsto g_D(y) = \Lambda \sum_{x \in f^{-1}(y) \cap D} i(x,f)\,x \quad \text{where } \Lambda \in (0,\infty). \tag{4}$$

The function of the form (4) was introduced by E. Poletskiĭ in [3] for the mappings with bounded distortion.

Properties Poletskiĭ function are formulated in the following statement.

Theorem 2 [4]. *Suppose that a continuous open and discrete mapping* f *belongs* $W^1_{q,\mathrm{loc}}(\Omega;\mathbb{R}^n)$, $q > n-1$, $\det Df(x) \ge 0$, *and* f *has the finite codistortion:* $\operatorname{adj} Df(x) = 0$ *on* $Z = \{x \in \Omega : J(x,f) = 0\}$ *almost everywhere* (*or* $f \in \mathscr{ID}(\Omega; n-1, n; 1, 1)$). *Then*

1) *f is sense-preserving,*

2) *function g_D, defined by the equality* (4)*, belongs to Sobolev class $W_1^1(V)$ and has the finite distortion, i. e. $Dg_D(y) = 0$ on the set of zeros of the Jacobian $\det Dg_D(y)$ almost everywhere.*

Furthermore, $f(B_f \cap D) \subset \{y \in V : Dg_D(y) = 0\}$.

3. These results serve as a basis for finding estimates for the norms of the push-forward functions, generalising the results of [5, Section 1.2] on the mappings of the class $\mathscr{ID}(\Omega; q, p; \theta, 1)$. Using estimates for the norms of the push-forward functions, one can obtain estimates for a capacity similar to that of the work [5, Section 1.3]. Here we formulate only one result.

Theorem 3. *Let $f \in \mathscr{ID}(\Omega; q, p; \theta, 1)$, $n-1 < q \le p < \infty$, and a weighted function $\omega(x) = \theta^{-\frac{n-1}{q-(n-1)}}(x)$ be locally integrable. If $E = (A, C)$ is a condenser in Ω, and $A \Subset \Omega$, and $C \subset A$ is a compact, then*

$$\left(\operatorname{cap}_s f(E)\right)^{1/s} \le \mathscr{K}_{q,p}^{\theta,1}(f; \Omega)\left(\operatorname{cap}_r^{\omega} E\right)^{1/r}, \tag{5}$$

where $s = \frac{p}{p-(n-1)}$ and $r = \frac{q}{q-(n-1)}$.

Recall

Definition 2. An ordered triple $E = (F_0, F_1; D)$ of non-empty sets, where D is an open set in $\mathbb{R}^n$, and F_1, F_0 are closed subsets of $\overline{D}$, is called the *condenser* in $D \subset \mathbb{R}^n$. The value

$$\operatorname{cap}_p^{\omega}(E) = \operatorname{cap}_p^{\omega}(F_0, F_1; D) = \inf \int\limits_D |\nabla v|^p(x)\omega(x)\, dx$$

where the infimum is taken over all functions $v \in C(D) \cap W_{\infty}^1(D) \cap L_p^1(D, \omega)$ such that $v \ge 1$ ($v \le 0$) in a neighbourhood of F_1 (F_0), is called *ω-weighted p-capacity of the condenser* $E = (F_0, F_1; D)$.

If U is an open set, C is a compact in U, then the condenser $E = (\partial U, C; U)$ will be denoted by $E = (U, C)$.

If $\omega \equiv 1$ we consider a wider class of admissible functions: $v \in C(D) \cap L_p^1(D)$, for the definition of the capacity of the condenser.

By means of inequality (5) we prove many properties of mappings belogning to the class $\mathscr{ID}(\Omega; q, p; \theta, 1)$.

4. The collection of homeomorphisms $f : \Omega \to \Omega'$ of the $\mathscr{ID}(\Omega; q, n; 1, 1) \cap W_n^1(\Omega)$ where the domains Ω and Ω' have Lipschitz boundaries, can be considered as a class of admissible deformations in the non-linear elasticity theory. Note that the class of admissible deformations of the paper [6] is contained in the intersection $\mathscr{ID}(\Omega; q, n; 1, 1) \cap W_n^1(\Omega)$ for some $q > n-1$, and class deformations of [7] coincides with $\mathscr{ID}(\Omega; n-1, n; 1, 1) \cap W_n^1(\Omega)$. The new class of admissible deformations is a scale of families, depending on a continuous parameter $q \in [n-1, \infty]$. These families are naturally ordered by inclusion: a class with bigger q is contained in a class with less q. For a given material, this hierarchy allows us to choose an appropriate class class of deformations. In paper [8] we prove the existence of an extreme strain of $\mathscr{ID}(\Omega; q, n; 1, 1) \cap W_n^1(\Omega)$ in a variational problem with some natural conditions on the growth of integrant.

The research was supported by the Russian Science Foundation, grant № 16–41–02004.

References

1. Vodopyanov S. K. *Regularity of mappings inverse to Sobolev mappings* // Sbornik: Mathematics, 2012. – V. 203. – № 10. – P. 1383–1410.

2. Vodopyanov S. K. *Spaces of differential forms and maps with controlled distortion* // Izvestiya: Mathematics. – 2010. – V. 74. –№ 4. – P. 663–689.

3. Poleckiĭ E. *The modulus method for nonhomeomorphic quasiconformal mappings* // Mathematics of the USSR-Sbornik. – 1970. – V. 12. – № 2. – P. 260–270.

4. Vodopyanov S. *On the regularity of the Poletskiĭ function under weak analytic assumptions on the Given Mapping* // Doklady Mathematics. – 2014. – V. 89. – № 2. – P. 157–161.

5. Baykin A., Vodop'yanov S. *Capacity estimates, Liouville's theorem, and singularity removal for mappings with bounded* (p,q)*-distortion* // Sib. Math. J. – 2015. – V. 56. – № 2. – P. 237–261.

6. Ball J. *Global invertibility of Sobolev functions and the interpretation of matter* // Proc. Royal Soc. Edinburgh. – 1981. – V. 88A. – P. 315–328.

7. Iwaniec T., Onninen J. *Hyperelastic deformations of smallest total energy* // Arch. Rational Mech. Anal. – 2009. – V. 194. – № 3. – P. 927–986.

8. Molchanova A., Vodopyanov S. *Injectivity almost everywhere and mappings with finite distortion in nonlinear elasticity* // ArXiv:1704.08022v4.

КВАЗИКОНФОРМНЫЙ АНАЛИЗ И ЗАДАЧИ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

С.К. Водопьянов

Мы определяем двухиндексную шкалу отображений с θ*-весовым* (q,p)*-ограничением искажением. Цель работы — показать, что отображения нового класса наследуют многие свойства отображений с ограниченным искажением. Кроме того, гомеоморфные отображения этого класса при* $\theta \equiv 1$*,* $n-1 \le q < p = n$ *можно рассматривать в качестве допустимых деформаций в задачах нелинейной теории упругости.*

Ключевые слова: внешний и внутренний коэффициенты искажения, оператор переноса дифференциальных форм, отображение с ограниченным θ-весовым (q,p)-искажением, функция Полецкого, емкость.

УДК 519.853

О ВНУТРЕННЕЙ ОЦЕНКЕ МНОГОГРАННИКА ЛЕБЕГОВЫМ МНОЖЕСТВОМ ВЫПУКЛОЙ ФУНКЦИИ

В.В. Абрамова[1], С.И. Дудов[2]

1 *veronika0322@rambler.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

2 *dudovsi@info.sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н. Г. Чернышевского

Рассматривается задача о вложении в заданный многогранник наибольшего по включению лебегова множества выпуклой функции. Установлены формула производной по направлениям целевой функции данной экстремальной задачи и критерий ее решения.

Ключевые слова: многогранник, внутренняя оценка, производная по направлениям.

Пусть $M = \{x \in \mathbb{R}^p : < A_i, x > + b_i \le 0, i = \overline{1, m}\}$ – многогранник, где $A_i \in \mathbb{R}^p, b_i \in \mathbb{R}$; $\Omega = \overline{\mathbb{R}^p \setminus M}$; $f(x)$ – выпуклая конечная на $\mathbb{R}^p$ функция, имеющая единственную точку минимума $x^* = 0_p$.

Рассматривается задача

$$\varphi(x) \equiv \min_{y \in \Omega} f(y - x) \to \max_{x \in M}. \tag{1}$$

Для фиксированной точки $x \in M$ величина $\alpha = \varphi(x)$ является максимальной, при которой имеет место включение $x + \{y \in \mathbb{R}^p : f(y) \le \alpha\} \subset M$. Таким образом, задача (1) требует вложить в многогранник M наибольшее по включению нижнее лебегово множество функции $f(x)$.

Теорема 1. *Пусть $i \in [1 : m]$. Функция $\varphi_i(x) = \min_{x \in \Omega_i} f(y - x)$, где $\Omega_i = \{y \in \mathbb{R}^p : < A_i, y > + b \ge 0\}$, является выпуклой на $\mathbb{R}^p$, а ее субдифференциал в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$ можно выразить формулой:*

$$\partial\varphi_i(x) = -\{\partial f(z - x) \cap K(A_i)\}, \tag{2}$$

где $\partial f(x)$ – субдифференциал функции $f(\cdot)$ в точке x, $K(A_i) = \{v = \alpha A_i : \alpha \ge 0\}$, z– любая точка из $Q_i(x) = \{z \in \Omega_i : \varphi_i(x) = f(z - x)\}$.

Теорема 2. *Функция $\varphi(x)$ непрерывна и дифференцируема по любому направлению $g \in \mathbb{R}^p$ в любой точке $x \in \mathbb{R}^p$, причем*

$$\varphi'(x, g) \equiv \lim_{\alpha \downarrow 0} \alpha^{-1}[\varphi(x + \alpha g) - \varphi(x)] = \begin{cases} 0, & \text{если } x \ne M, \\ \min\limits_{i \in I(x)} \max\limits_{v \in \partial\varphi_i(x)} < v, g >, & \text{если } x \in M, \end{cases}, \tag{3}$$

где $I(x) = \{i \in [1 : m] : \varphi(x) = \varphi_i(x)\}$, а $\partial\varphi_i(x)$ определены формулой (2).

Теорема 3. *Для того чтобы точка $x^* \in intM$ была точкой максимума функции $\varphi(x)$ на M, необходимо и достаточно, чтобы $0_p \in co\{A_i : i \in I(x^*)\}$. Здесь coB – выпуклая оболочка множества B.*

Замечание 1. *Если функция $f(\cdot)$ является нормой, то задача (1) представляет собой задачу о вписанном шаре, и при этом функция $\varphi(x)$ является вогнутой на M (см., например, [1]). Примеры показывают, что функция $\varphi(x)$ может не быть вогнутой на M.*

Замечание 2. *Из формулы (3) вытекает, что семейство множеств $\{\partial\varphi_i(x) : i \in I(x)\}$ является верхним экзостером функции $\varphi(x)$ в точке $x \in M$ (см. [2]).*

Литература

1. Дудов С. И. *Внутренняя оценка выпуклого множества телом нормы* // ЖВМ и МФ. – 1996. – Т. 36. – № 5. – С. 153–159.

2. Демьянов В. Ф., Рощина В. А. *Обобщенные субдифференциалы и экзостеры* // Владикавк. матем. журн. – 2006. – Т. 8. – № 4. – С. 19–31.

ON INNER BOUND OF POLYTOPE BY LEBESQUE SET OF CONVEX FUNCTION

V.V. Abramova, S.I. Dudov

The problem of embedding the largest (by inclusion) of Lebesgue sets of a convex function into a given polyhedron is considered. A formula for the directional derivative of the objective function of this extremal problem and a criterion of its solution are established.

Keywords: polytope, inner bound, directional derivative.

УДК 517.956

ПРЯМЫЕ И ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ЛОГАРИФМИЧЕСКОГО ПОТЕНЦИАЛА С КОНЕЧНЫМ ЧИСЛОМ ПАРАМЕТРОВ

Н.Р. Абубакиров[1], Л.А. Аксентьев[2]

1 *nail.abubakirov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *leonid.aksentev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В прямых задачах известна область D и требуется определить градиент потенциала вне или внутри этой области. В обратных же задачах известен градиент потенциала в окрестности ∞ и нужно определить область D. Следуя В.К.Иванову [1], продолжим выделение классов областей с конечным числом параметров, которыми характеризуется функция, отображающая единичный круг $E = \{|\zeta| < 1\}$ на область D. Также рассмотрим прямые и обратные задачи для градиента логарифмического потенциала простого слоя с различными типами контуров.

Ключевые слова: логарифмический потенциал, градиент, интегральное уравнение.

§1. Прямые и обратные задачи для градиента потенциала простого слоя

1.1 Градиентом потенциала простого слоя по кривой L будем называть функцию

$$u(z) = \int_L \frac{ds(\tau)}{\tau - z},$$

где $\tau \in L$, z лежит вне L и если L ограничивает односвязную область D, то при $z \in D$ получаем внутренний потенциал $u^+(z)$, при z вне D получаем внешний потенциал $u^-(z)$.

Рассмотрим дугу окружности $|t| = R$ с концами в точках R и $Re^{i\alpha}$ и вычислим для нее

$$u(\alpha, z) = \int_0^\alpha \frac{Rd\theta}{Re^{i\theta} - z} = \frac{1}{i}\int_0^\alpha \frac{Rde^{i\theta}}{(Re^{i\theta} - z)e^{i\theta}} =$$

$$= \frac{R}{iz}\left[\ln(Re^{i\theta} - z) - i\theta\right]\Big|_0^\alpha = \frac{R}{iz}\left(\ln\frac{Re^{i\alpha} - z}{R - z} - i\alpha\right) = -\frac{\alpha R}{z} + \frac{R}{iz}\ln\frac{Re^{i\alpha} - z}{R - z}.$$

Докажем, что при любом $\alpha \in (0, 2\pi]$, функция $u(\alpha, z)$ не будет иметь особенности в 0. Действительно,

$$u(\alpha, z) = -\frac{\alpha R}{z} + \frac{R}{iz}\left[\ln e^{i\alpha} + \ln\left(1 - \frac{z}{R}e^{-i\alpha}\right) - \ln\left(1 - \frac{z}{R}\right)\right] =$$

$$= -\frac{\alpha R}{z} + \frac{\alpha R}{z} + \frac{R}{iz}\left[\frac{z}{R}(1 - e^{-i\alpha}) + \frac{z^2}{2R^2}(1 - e^{-2i\alpha}) + \ldots + \frac{z^n}{nR^n}(1 - e^{-ni\alpha}) + \ldots\right] \to 0 \text{ при } \alpha \to 2\pi.$$

Поэтому $u(\alpha, z) + i(1 - e^{-i\alpha}) = O(z)$ около $z = 0$ при любом $\alpha \in (0, 2\pi)$ и $u(2\pi, z) \equiv 0$ при $|z| < R$. В окрестности ∞ получим

$$u(\alpha, z) = -\frac{\alpha R}{z} + \frac{R}{iz}\ln\frac{1 - Re^{i\alpha}/z}{1 - R/z} = -\frac{\alpha R}{z} + \frac{R}{iz}\left[\ln\left(1 - \frac{Re^{-i\alpha}}{z}\right) - \ln\left(1 - \frac{R}{z}\right)\right] =$$

$$= -\frac{\alpha R}{z} + \frac{R}{iz}\left[\frac{1}{z}(1 - e^{i\alpha}) + \frac{R^2}{2z^2}(1 - e^{2i\alpha}) + \ldots + \frac{R^n}{nz^n}(1 - e^{ni\alpha}) + \ldots\right] \to -\frac{2\pi R}{z} \text{ при } \alpha \to 2\pi.$$

Следовательно, для градиента потенциала простого слоя на окружности $|z| = R$ справедливы две формулы: $u^-(z) = -2\pi R/z$ при $|z| > R$ и $u^+(z) \equiv 0$ при $|z| < R$.

1.2 Для градиента потенциала простого слоя в форме прямоугольника по сравнению с окружностью картина усложняется. Подтвердим это соответствующими вычислениями для прямоугольника L_{ab} с вершинами в точках $\pm a \pm ib$ со всеми комбинациями знаков и с положительными параметрами a, b.

$$u(z) = \int_{L_{ab}} \frac{ds(t)}{t - z} = \int_{-a}^{a} \frac{dx}{x - ib - z} + \frac{1}{i}\int_{-b}^{b} \frac{idy}{a + iy - z} - \int_{a}^{-a} \frac{dx}{x + ib - z} - \frac{1}{i}\int_{b}^{-b} \frac{idy}{-a + iy - z} =$$

$$= (1 + i)\ln\frac{z - (a - ib)}{z - (-a + ib)} + (1 - i)\ln\frac{z - (a + ib)}{z - (-a - ib)}, \tag{1}$$

причем $u(-z) = -u(z)$, т.е. $u(z)$ – нечетная функция. В окрестности ∞ отсюда получим

$$u^-(z) = -\frac{4(a + b)}{z} + \frac{4\mathrm{Re}[(1 + i)(-a + ib)^3]}{3z^3} + \ldots$$

– разложение по нечетным степеням $1/z$. Областью сходимости этого ряда будет $|z| > \sqrt{a^2 + b^2}$.

Около 0 разложение по нечетным степеням z имеет вид

$$u^+(z) = z\left(-4\mathrm{Re}\frac{1 + i}{a - ib}\right) + z^3\left(-\frac{4}{3}\mathrm{Re}\frac{1 + i}{(a - ib)^3}\right) + \ldots$$

с кругом сходимости $|z| < \sqrt{a^2 + b^2}$.

1.3 Обозначим через L_n контур конечного n-угольника, содержащего внутри начало координат, с заданными вершинами a_k и внутренними углами α_k $(0 < \alpha_k < 2\pi)$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Пусть γ_k – угол наклона касательной к стороне $a_k a_{k+1}$ и $\beta_k = \sum_{j=2}^{k} \alpha_j$, $2 \le k \le n$. По аналогии с формулой (1) получим

$$u(z) = (-1)^{\alpha_1 + 1}(1 + e^{i\alpha_1}) \ln(z - a_1) + \sum_{k=2}^{n} (-1)^{k-1-\beta_k/\pi}(1 + e^{i\alpha_k}) \ln(z - a_k). \qquad (2)$$

Данная функция в общем случае не будет ни четной, ни нечетной. С учетом представления (2) сформулируем утверждение и недоказанную гипотезу.

Теорема 1. *Если градиенту потенциала простого слоя в форме (2) соответствует многоугольный контур $\partial D\{\alpha_k\}_1^n$ с набором угловых точек $\{a_k\}_1^n$ и внутренними углами $\{\alpha_k\}_1^n$, причем форма (2) снята с существующего контура, то, по крайней мере, одно решение обратной задачи всегда существует.*

Гипотеза. *Решение задачи из теоремы 1 будет единственным в классе выпуклых контуров.*

Как показано И.М. Рапопортом [2], звездообразные области не образуют класс единственности в обратной задаче для потенциала простого слоя.

§2. Прямые и обратные задачи для градиента потенциала по области

2.1 Градиент потенциала простого слоя, построенный для четырех сторон прямоугольника, тесно связан с градиентом логарифмического потенциала для области в виде прямоугольника D_{ab} с границей L_{ab}. Для любого z вне D_{ab} получим

$$u^-(z) = \int\int_{D_{ab}} \frac{dxdy}{t - z} = -i(-[\zeta - (a + ib)] \ln[\zeta - (a + ib)] + [\zeta - (a - ib)] \ln[\zeta - (a - ib)] +$$
$$+ ([\zeta - (-a + ib)] \ln[\zeta - (-a + ib)] - [\zeta - (-a - ib)] \ln[\zeta - (-a - ib)])|_{\infty}^{z}.$$

В окрестности бесконечно удаленной точки

$$u^-(z) = -\frac{4ab}{z} + O\left(\frac{1}{z^3}\right).$$

Отметим, что в работе [3] прямым вычислением получены внутренний $v^+(z)$ и внешний $v^-(z)$ логарифмический потенциал для внутренности эллипса и области, ограниченной лемнискатой Бернулли.

2.2 Найдем поведение градиента логарифмического потенциала в угловых точках многоугольной области. Его дадут вычисления по отношению к области $G_\alpha = \{z : 0 < |z| < R, 0 < \arg z < \alpha\}$, $0 < \alpha < 2\pi$, в угловой точке $z = 0$. Имеем

$$u(\alpha, z) = \frac{-\alpha R^2}{2z} + \frac{R^2}{2iz} \ln \frac{Re^{i\alpha} - z}{R - z} - \frac{R}{2i}(e^{-i\alpha} - 1) -$$
$$- \frac{z}{2i}\left[e^{-2i\alpha} \ln(Re^{i\alpha} - z) - \ln(R - z)\right] + \frac{e^{-2i\alpha} - 1}{2i} z \ln(-z).$$

Поведение $u(\alpha, z)$ около 0 будет даваться выражением

$$u(\alpha, z) \sim -\frac{\alpha R^2}{2z} + \frac{R^2}{2iz} i\alpha + \frac{e^{-2i\alpha} - 1}{2i} z \ln z = -\sin\alpha e^{-i\alpha} z \ln z.$$

В общем случае, когда угловой точкой с внутренним углом α_k оказывается a_k и отрезок $[a_k, a_k + R]$ ориентирован под любым заданным углом, будем иметь такое поведение в окрестности a_k

$$u(\alpha_1, ..., \alpha_n; z) \sim \sin \alpha_k e^{i\beta_k} (z - a_k) \ln(z - a_k).$$

С учетом найденного поведения можно сформулировать такое утверждение

Теорема 2. *Если градиенту логарифмического потенциала в форме*

$$u(\alpha_1, ..., \alpha_n; z) = \sum_{k=1}^{n} \sin \alpha_k e^{i\beta_k} (z - a_k) \ln(z - a_k) \tag{3}$$

соответствует многоугольная область D_n с набором угловых точек a_k и с внутренними углами α_k, то по градиенту (3) область D_n определяется единственным образом, если контур ∂D_n будет звездообразным [4] или выпуклым в фиксированном направлении [5].

2.3 В.К. Ивановым доказана

Теорема [6]. *Пусть $u(z)$ является рациональной функцией, имеющей полюсы $z_1, z_2, ..., z_s$ порядков $k_1, k_2, ..., k_s$ с суммой $k_1 + k_2 + ... + k_s = n$, и для нее существует решение обратной задачи. Тогда*

$$z^*(\omega) = \frac{p(\omega)}{(\omega - \omega_1)^{k_1} ... (\omega - \omega_s)^{k_s}},$$

где $p(\omega)$– полином степени $(n-1)$, а $\omega_1, \omega_2, ..., \omega_s$ – прообразы точек $z_1, z_2, ..., z_s$ при конформном отображении $z(\omega)$.

Идея В.К. Иванова приложима к новому классу решений обратной задачи логарифмического потенциала. Справедлива

Теорема 3. *Пусть дана функция*

$$u(z) = A_0 \ln \frac{P_n(z)}{Q_n(z)} = -\frac{\alpha_0}{\sum\limits_{k=1}^{n} (a_k - b_k)} \ln \prod_{k=1}^{n} \frac{z - a_k}{z - b_k} \sim \frac{\alpha_0}{z} \text{ около } \infty$$

и для этой функции существует решение обратной задачи. Тогда $z^*(\zeta)$ имеет вид $A_0 \ln[P_{n1}(z)/Q_{n1}(z)]$, где $P_{n1}(z)$ и $Q_{n1}(z)$ – полиномы степени n, причем нулями этих полиномов являются прообразы точек a_k, b_k, $k = 1, ..., n$, при отображении $z(\omega) = \overline{z^*(1/\overline{\omega})}$.

Некоторые другие классы функции $u(z)$ рассмотрены в монографии [7]. Основные результаты работы в кратком изложении опубликованы в статье [8].

Литература

1. Иванов В. К. *О разрешимости обратной задачи логарифмического потенциала в конечном виде*// Доклады АН СССР. – 1956. – Т. 106. – № 4. – С. 598–599.

2. Рапопорт И. М. *Об одной задаче теории потенциала* // Укр. матем. журн. – 1950. – Т. 2. – № 2. – С. 48–55.

3. Кондратьев Б. *Теория потенциала. Новые методы и задачи с решениями*. – М.: Мир, 2007. – 506 с.

4. Новиков П. С. *О единственности решения обратной задачи теории потенциала*// Доклады АН СССР. – 1938. – Т. 18. – № 4. – С. 165–168.

5. Сретенский Л. Н. *О единственности определения формы притягивающего тела по значениям его внешнего потенциала*// Доклады АН СССР. – 1954. – Т. 99. – № 1. – С. 21–22.

6. Иванов В. К. *Интегральное уравнение обратной задачи логарифмического потенциала*// Доклады АН СССР. – 1955. – Т. 105. – № 3. – С. 409–412.

7. Цирульский А. *Функции комплексного переменного в теории и методах потенциальных геофизических полей*. – Свердловск: УрО АН СССР, 1990. – 258 с.

8. Абубакиров Н. Р., Аксентьев Л. А. *О конечных решениях обратной задачи логарифмического потенциала* // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 10. – С. 65–69.

DIRECT AND INVERSE PROBLEMS OF THE LOGARITHMIC POTENTIAL WITH A FINITE NUMBER OF PARAMETERS

N.R. Abubakirov, L.A. Aksentev

In the direct problems we know a domain D and find the gradient of the potential inside or outside of this domain. In the inverse problems we know the gradient of the potential near infinity and find a domain D. Also we consider direct and inverse problems for the gradient of the logarithmic potential of the simple layer with different types of the contours and new class of the gradient functions.

Keywords: logarithmic potential, gradient, integral equation.

УДК 517.5

ОБОБЩЕНИЯ НЕРАВЕНСТВА РЕЛЛИХА С ВЕСАМИ

Ф.Г. Авхадиев[1]

1 *avkhadiev47@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Мы определяем специальные функционалы как точные константы в интегральных неравенствах для пробных функций, заданных в областях на плоскости. Получены аналоги и обобщения классического результата Ф. Реллиха для двумерного случая, когда требуются дополнительные условия на коэффициенты Фурье пробной функции.

Ключевые слова: неравенство Реллиха, конформные отображения, равномерно совершенное множество.

Рассматриваются области $\Omega \subset \mathbb{C}$, $\Omega \neq \mathbb{C}$. Пусть $\operatorname{dist}(z, \partial\Omega)$ — расстояние от точки $z = x + iy \in \Omega$ до границы области. Через $C_0^\infty(\Omega)$ обозначим множество гладких комплекснозначных функций, имеющих компактные носители в области $\Omega \neq \mathbb{C}$. Во многих работах изучалось следующее вариационное неравенство типа Реллиха

$$\iint_\Omega \frac{|\Delta f(z)|^2}{(\operatorname{dist}(z,\partial\Omega))^{-2+2n}}\,dx\,dy \geq c_{2n}(\Omega) \iint_\Omega \frac{|f(z)|^2}{(\operatorname{dist}(z,\partial\Omega))^{2+2n}}\,dx\,dy \quad \forall f \in C_0^\infty(\Omega), \qquad (1)$$

где $z = x + iy \in \Omega$, Δ — оператор Лапласа, n — фиксированное вещественное число, константа $c_{2n}(\Omega) \in [0, \infty)$ предполагается наибольшей из возможных, т.е. она определяется формулой

$$c_{2n}(\Omega) = \inf_{f \in C_0^\infty(\Omega), f \neq 0} \frac{\iint_\Omega |\Delta f(z)|^2 (\operatorname{dist}(z, \partial\Omega))^{2-2n} dx\, dy}{\iint_\Omega |f(z)|^2 (\operatorname{dist}(z, \partial\Omega))^{-2-2n} dx\, dy}.$$

Отметим, что $c_{2n}(\Omega)$ — инвариант линейных конформных преобразований, т.е. $c_{2n}(\Omega) = c_{2n}(a\Omega + b)$, где $a\Omega + b = \{w \in \mathbb{C} : w = az + b, z \in \Omega\}$, $a, b \in \mathbb{C}$, $a \neq 0$.

Неравенство (1) хорошо изучено для случая, когда область $\Omega = \mathbb{C} \setminus \{0\}$ и, очевидно, $\operatorname{dist}(z, \partial(\mathbb{C} \setminus \{0\})) = |z|$. В частности, Ф. Реллих доказал (см. [1]), что $c_{21}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = 0$, но для любой функции $f \in C_0^\infty(\mathbb{C} \setminus \{0\})$, удовлетворяющей условию

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \sin\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cos\theta\, d\theta = 0 \quad (\forall r \in (0, \infty)),$$

справедливо неравенство

$$\iint_{\mathbb{C}} |\Delta f(z)|^2\, dx\, dy \geq \iint_{\mathbb{C}} \frac{|f(z)|^2}{|z|^4}\, dx\, dy$$

с точной константой 1 вместо $c_{21}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = 0$.

Кроме того, в статье [2] П. Калдироли и Р. Мусина доказали, что $c_{2n}(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = 0$ для любого целого числа n. Мы дополняем эти результаты следующим утверждением.

Теорема 1. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$, и пусть функция $f \in C_0^\infty(\mathbb{C} \setminus \{0\})$ удовлетворяет условию*

$$\int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \sin n\theta\, d\theta = \int_0^{2\pi} f(re^{i\theta}) \cos n\theta\, d\theta = 0 \quad (\forall r \in (0, \infty)).$$

Тогда справедливо неравенство

$$\iint_{\mathbb{C}} |\Delta f(z)|^2 \frac{dx\, dy}{|z|^{-2+2n}} \geq (2|n| - 1)^2 \iint_{\mathbb{C}} |f(z)|^2 \frac{dx\, dy}{|z|^{2+2n}}. \tag{2}$$

Постоянная $(2|n| - 1)^2$ является точной, т.е. максимальной из возможных в неравенстве (2) для указанного класса функций.

Предположим теперь, что область $\Omega \subset \mathbb{C}$ имеет не менее двух граничных компонент. Через $M(\Omega)$ обозначим точную верхнюю границу конформных модулей двусвязных областей, лежащих в области Ω и разделяющих границу Ω. Если область Ω односвязна и $\Omega \neq \mathbb{C}$, то полагаем $M(\Omega) = 0$ по определению.

Очевидно, $0 \leq M(\Omega) \leq \infty$ и $M(\mathbb{C} \setminus \{0\}) = \infty$. Отметим также, что область с конечным максимальным модулем $M(\Omega)$ имеет равномерно совершенную границу. Справедливо и обратное утверждение. Ряд примеров таких областей и нетривиальные критерии конечности $M(\Omega)$ можно найти в работах [3] и [4].

В монографии [5], опубликованной в 2015 году, читатель может найти базовые результаты по неравенствам типа Харди и Реллиха с полными доказательствами. Несколько утверждений о функционалах $c_{20}(\Omega)$ и $c_{21}(\Omega)$ получены нами в 2016 году. В частности, в [6] доказано, что

$$c_{20}(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow c_{21}(\Omega) > 0 \Longleftrightarrow M(\Omega) < \infty.$$

Кажется вероятным, что этот результат можно распространить на функционалы $c_{2n}(\Omega)$ для произвольного $n \in \mathbb{Z}$. Но к настоящему времени удалось подтвердить эту гипотезу лишь частично. А именно, нами доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть $n \in \mathbb{Z}$, и пусть $\Omega \subset \mathbb{C}$ — область с максимальным модулем $M(\Omega)$. Если $M(\Omega) = \infty$, то $c_{2n}(\Omega) = 0$.*

Работа выполнена при поддержке РФФИ, грант № 17–01–00282.

Литература

1. Rellich F. *Perturbation theory of eigenvalue problems.* – New York-London-Paris: Gordon and Breach, 1969.

2. Caldiroli P., Musina R. *Rellich inequalities with weights* // Calc. Var. – 2012. – V. 45. – P. 147-164.

3. Carleson L., Gamelin T. W. *Complex dynamics.* – New-York: Springer, 1993.

4. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Schwarz-Pick type inequalities* – Basel-Boston-Berlin: Birkhäuser Verlag, 2009.

5. Balinsky A. A., Evans W. D., Lewis R. T. *The Analysis and Geometry of Hardy's Inequality.* – Universitext, Heidelberg - New York - Dordrecht - London: Springer, 2015.

6. Avkhadiev F. G. *Hardy-Rellich inequalities in domains of the Euclidean space* // J. Math. Anal. Appl. – 2016. – V. 442. – P. 469-484.

GENERALIZATIONS OF A RELLICH INEQUALITY WITH WEIGHTS

F.G. Avkhadiev

We determine some special functionals as sharp constants in integral inequalities for test functions, defined on plane domains. We prove analogs and generalizations of a classical Rellich result for two dimensional case, when there is an additional restriction on Fourier coefficients of the test functions.

Keywords: Rellich inequality, conformal mapping, uniformly perfect sets.

УДК 517.968

ОБ ОПТИМАЛЬНЫХ ПРОЕКЦИОННЫХ МЕТОДАХ РЕШЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ДРОБНО–ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Р. Агачев[1], А.Ф. Галимянов[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *anis_59@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье решается задача оптимизации полиномиальных проекционных методов решения периодических уравнений с дробно-интегральным оператором Вейля в главной части. Для класса регуляризованных интегральных уравнений дробного порядка, задаваемых принадлежностью коэффициентов фиксированному классу Гельдера, в паре пространств гельдеровых функций доказана оптимальность по порядку точности известных методов: Галеркина по тригонометрической системе функций, коллокации

и подобластей по равноотстоящим узлам. Отсюда, как следствие, вытекает оптимальность указанных методов и в соответствующем классе интегральных уравнений с дробно-интегральным оператором Вейля в главной части.

Ключевые слова: дробно–интегральное уравнение, проекционный метод, полиномиальное приближение, оптимизация по порядку точности.

К настоящему времени задача оптимизации по порядку точности прямых и проекционных методов [1] решена для ряда классов регулярных и сингулярных интегральных уравнений. Однако, в случае дробно–интегральных уравнений такая задача до сих пор еще не исследовалась. Причиной, по-видимому, является некорректная постановка по Адамару задачи решения таких уравнений. Мы здесь даем решение задачи оптимизации по порядку точности для одного класса периодических интегральных уравнений с дробным интегралом Вейля в главной части.

Рассматривается задача оптимизации полиномиальных проекционных методов решения класса периодических дробно–интегральных уравнений вида

$$K\varphi \equiv \gamma + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi_{\pm}^{\alpha}(x-t)\varphi(t)\,dt + \int_0^{2\pi} g(x,t)\varphi(t)\,dt = f(x), \quad -\infty < x < \infty, \tag{1}$$

где α $(0<\alpha<1)$ – заданное число, $f(x), g(x,t)$ – известные 2π-периодические функции, $\gamma \in \mathbb{R}^1$ и φ – искомые числовой параметр и 2π-периодическая функция. Функция

$$\Psi_{\pm}^{\alpha}(t) = 2\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos(kt \mp \alpha\pi/2)}{k^{\alpha}}$$

задает дробно–интегральный оператор J, определяемый дробным интегралом Вейля (см., напр., [2, с. 264]) порядка α:

$$J\varphi \equiv \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \Psi_{\pm}^{\alpha}(x-t)\varphi(t)\,dt.$$

Пусть $C \equiv C_{2\pi}$ есть пространство непрерывных 2π–периодических функций с обычной max-нормой $\|\cdot\|_C$. Обозначим через H_δ $(0<\delta\le 1)$ пространство 2π–периодических функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем $\delta>0$, с нормой

$$\|\varphi\|_\delta = \|\varphi\|_C + H(\varphi;\delta),$$

где $H(\varphi;\delta)$ – наименьшая постоянная Гельдера. Через $H_{0,\delta}$ будем обозначать подпространство пространства H_δ функций $f(x)$, для которых

$$\int_0^{2\pi} f(x)\,dx = 0.$$

Как известно (см., напр., [2, с. 275]), при $0<\beta<1-\alpha$ оператор J изоморфно отображает $H_{0,\beta}$ на $H_{0,\alpha+\beta}$. Поэтому далее будем считать, что $\beta>0$ удовлетворяет условию $\alpha+\beta<1$.

Класс $\mathbb{E}$ однозначно разрешимых уравнений (1) будем задавать классами: $\mathbb{F} = \{f\}$ функций из $H_\lambda, \alpha + \beta < \lambda \le 1$ и $\mathbb{G} = \{g\}$ функций из $H_\lambda \times L_1$, ограниченных в метрике $C \times L_1$ абсолютной положительной постоянной M.

Введем в рассмотрение два пространства: $\Phi = H_{0,\beta} \times \mathbb{R}^1, F = H_{\alpha+\beta}$. Норму в Φ зададим формулой $\|\overline{\varphi}\|_\Phi = |\gamma| + \|\varphi\|_\beta$, где $\overline{\varphi} = (\varphi;\gamma) \in \Phi$. Введем в рассмотрение оператор $\overline{J}$, определяемый по формуле

$$\overline{J}\overline{\varphi} \equiv \gamma + J\varphi, \quad \overline{\varphi} = (\varphi;\gamma) \in \Phi.$$

Тогда уравнение (1) в паре пространств (Φ, F) можно записать в операторной форме

$$\overline{K}\overline{\varphi} \equiv \overline{J}\overline{\varphi} + G\varphi = f \quad (\overline{\varphi} = (\varphi;\gamma) \in \Phi,\ f \in F). \tag{1'}$$

В [3] доказано, что в паре пространств (Φ, F) уравнение $(1')$ корректно поставлено по Адамару.

Пусть P_n есть произвольно фиксированный оператор из множества $\mathbb{P}_n$ операторов проектирования F на $F_n = \mathbf{H}_n^T$, где $\mathbf{H}_n^T$ – множество тригонометрических полиномов порядка не выше n, а $\Phi_n = \{\overline{\varphi}_n = (\varphi_n;\gamma_n) \in F_n \times \mathbb{R}^1\}$. Тогда проекционный метод решения уравнения $(1')$ из класса $\mathbb{E}$, определяемый оператором P_n, задается уравнением

$$\overline{K}_n\overline{\varphi}_n \equiv P_n\overline{K}\overline{\varphi}_n = P_n f \quad (\overline{\varphi}_n \in \Phi_n, P_n \in \mathbb{P}_n). \tag{2}$$

Решение $(\varphi^*, \gamma^*) \in \Phi$ уравнения $(1')$ из класса $\mathbb{E}$ будем аппроксимировать решениями $(\varphi_n^*, \gamma_n^*) \in \Phi_n \subset \Phi$ уравнений (2) из класса $\mathbb{E}_n$, определяемого множеством $\mathbb{P}_n$. При этом за оптимальную оценку погрешности класса $\mathbb{E}_n$ проекционных методов (2) на классе $\mathbb{E}$ уравнений $(1')$ примем величину [1, с. 40]

$$V_n(\mathbb{E}) = \inf_{P_n \in \mathbb{P}_n} \sup_{e \in \mathbb{E}} \|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^*\|_\Phi.$$

Рассмотрим уравнение

$$\overline{K}_n^\circ\overline{\varphi}_n^\circ \equiv P_n^\circ\overline{K}\overline{\varphi}_n^\circ = P_n^\circ f \quad (\overline{\varphi}_n^\circ \in \Phi_n, P_n^\circ \in \mathbb{P}_n). \tag{2°}$$

Определение [1, с. 40]. *Если элемент $\overline{\varphi}_n^\circ = (P_n^\circ\overline{K})^{-1}P_n^\circ f$, где $P_n^\circ \in \mathbb{P}_n$, удовлетворяет условию*

$$\sup\{\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^\circ\|_\Phi : e \in \mathbb{E}\} \asymp V_n(\mathbb{E}),$$

то проекционный метод (2°) *называется оптимальным по порядку среди всех проекционных методов вида (2) на классе* $\mathbb{E}$ *уравнений* $(1')$.

Справедливы следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть $\mathbb{P}_n$ есть множество проекционных операторов P_n. Тогда для оптимальной оценки погрешности на классе* $\mathbb{E}$ *уравнений* $(1')$ *верна порядковая оценка*

$$V_n(\mathbb{E}) \asymp \frac{\ln n}{n^{\lambda-\alpha-\beta}}.$$

Теорема 2. *Пусть $\mathbb{P}_n$ есть множество проекционных операторов, $P_n^\circ \in \mathbb{P}_n$ обладает свойством $\|P_n\|_{C\to C} = O(\ln n)$. Тогда решение $\overline{\varphi}_n^\circ = (P_n^\circ\overline{K})^{-1}P_n^\circ f$ уравнения* (2°) *обладает свойством:*

$$\sup\{\|\overline{\varphi}^* - \overline{\varphi}_n^\circ\|_\Phi : e \in \mathbb{E}\} \asymp \frac{\ln n}{n^{\lambda-\alpha-\beta}}.$$

Следствие. В условиях теоремы 2 среди всевозможных полиномиальных проекционных методов вида (2) метод (2°) оптимален по порядку точности на классе $\mathbb{E}$ уравнений (1′).

Теорема 3. *На классе* $\mathbb{E}$ *однозначно разрешимых в паре пространств* (Φ, F) *уравнений* (1′) *оптимальными по порядку точности методами являются:*

1) метод Галеркина, построенный по тригонометрической системе функций;

2) метод коллокации, построенный по узлам $x_k = 2k\pi/(2n+1)$, $k = \overline{0, 2n}$;

3) метод подобластей, построенный по точкам $x_k = 2k\pi/(2n+1)$, $k = \overline{0, 2n+1}$.

Замечания. 1. Следует отметить, что эти результаты сохраняются, если пространство Ф задается условием $\int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx = d$, где d – фиксированное вещественное число.

2. Теоремы 1–3 на классе однозначно разрешимых в паре (Φ, F) дробно–интегральных уравнений (1) позволяют построить полиномиальные проекционные методы (в частности, вычислительные схемы методов Галеркина, коллокации и подобластей), обладающие соответствующим свойством оптимальности по порядку точности.

Литература

1. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

2. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

3. Agachev J. R., Galimyanov A. F. *On Justification of General Polynomial Projection Method for Solving Periodic Fractional Integral Equations* // Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 36, No. 2. – P. 97–102.

ON OPTIMAL PROJECTION METHODS FOR SOLVING PERIODIC FRACTIONAL-INTEGRAL EQUATIONS

J.R. Agachev, A.F. Galimjanov

We consider the solution for the problem of polynomial projection methods for solving periodic equations with a fractional-integral Weyl operator in the principal part. The optimality is proved in the order of accuracy for a class of regularized integral equations of fractional order. In this case the coefficients belong to a fixed Hoelder class in a pair of spaces of Hoelder functions. The optimality is proved on the trigonometric system of functions for the Galerkin method and on equidistant nodes for the methods of collocation and subdomains. Hence, as a consequence, the optimality of these methods also follows in the corresponding class of integral equations with a fractional-integral Weyl operator in the principal part.

Keywords: fractional-integral equation, projection method, polynomial approximation, optimization in order of accuracy.

УДК 517.968

ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ УСЛОВНО КОРРЕКТНЫХ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Р. Агачев[1], М.Ю. Першагин[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *mpershagin@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье дается теоретико–функциональное обоснование общего полиномиального проекционного метода решения краевых задач для одного класса условно корректных интегро–дифференциальных уравнений. Уравнения характеризуются положительностью разности порядков внутреннего и внешнего дифференциальных операторов. Как следствие, устанавливается сходимость методов Галеркина и коллокации.

Ключевые слова: пространство Соболева, интегро–дифференциальное уравнение, общая краевая задача, проекционный метод, полиномиальное приближение, сходимость метода.

Рассматривается общая линейная краевая задача

$$R_i(x) = 0,\ i = \overline{1,m}, \tag{1}$$

для интегро–дифференциального уравнения

$$Kx \equiv x^{(m)}(t) + \sum_{k=1}^{m} g_k(t)x^{(m-k)}(t) + \sum_{j=0}^{r}\int_{-1}^{+1} h_j(t,s)x^{(j)}(s)\,ds = y(t), \quad -1 \leqslant t \leqslant 1, \tag{2}$$

где $\{R_i\}$ — линейно–независимые функционалы на пространстве $(m-1)$-раз непрерывно дифференцируемых на сегменте $[-1,1]$ функций, $y(t)$, $g_k(t)$, $k = \overline{1,m}$, и $h_j(t,s)$, $j = \overline{0,r}$, – известные функции в своих областях определения.

Пусть $W^pL_q \equiv W^pL_q[-1,1]$, $p \in \mathbb{N}$, $1 \leqslant q \leqslant \infty$, суть пространства Соболева функций, имеющих абсолютно непрерывную производную порядка $p-1$, p-тая производная которых принадлежит пространству Лебега $L_q \equiv L_q(-1,1)$ ($L_\infty \equiv C$).

Задачу (1), (2) будем рассматривать в паре пространств (X,Y), где $X = \overset{\circ}{W}{}^rL_q$ – подпространство функций из W^rL_q, удовлетворяющих краевым условиям (1), а $Y = W^pL_q$, где $p = r - m \geqslant 1$.

В пространстве Y норму задаем формулой

$$\|f\|_{p;q} \equiv \|f\|_{W^pL_q} = \|f\|_q + \|f^{(p)}\|_q,\ f \in W^pL_q,$$

а в пространстве X – формулой:

$$\|x\|_X = \|x^{(m)}\|_q + \|x^{(r)}\|_q,\ x \in X.$$

Корректная постановка задачи (1), (2) в паре пространств (X,Y) изучена в [1].

Запишем исходную задачу в операторном виде:

$$Kx \equiv Dx + Gx + Hx = y \quad (x \in X,\ y \in Y),$$

где

$$Dx \equiv x^{(m)}(t), \quad Gx \equiv (Gx)(t) = \sum_{k=1}^{m} g_k(t) x^{(m-k)}(t),$$

$$Hx \equiv (Hx)(t) = \sum_{j=0}^{r} \int_{-1}^{+1} h_j(t,s) x^{(j)}(s)\, ds.$$

Пусть $X_n = \boldsymbol{H}_{n+m} \subset X$, $Y_n = \boldsymbol{H}_n$, $P_n : Y \longrightarrow Y_n$ – фиксированный оператор проектирования.

Согласно общему проекционному методу приближенное решение $x_n \in X_n$ задачи (1), (2) будем искать как точное решение уравнения

$$K_n x_n \equiv Dx_n + P_n G x_n + P_n H x_n = P_n y \quad (x_n \in X_n). \tag{3}$$

Имеют место следующая

Теорема 1. *Пусть выполнены предположения:*
1) $y \in Y$;
2) $G + H : X \to Y$ – вполне непрерывный оператор;
3) исходная задача имеет единственное решение при любой правой части из Y;
4) $P_n^2 = P_n$ и $\|P_n\|_{Y \to Y} = O(M_n)$, $n \to \infty$.
Если y и H таковы, что

$$M_n \cdot [E_n(y)_Y + E_n(Gx^*) + E_n(Hx^*)_Y] \to 0,\ n \to \infty,$$

то для достаточно больших n уравнение (3) *имеет единственное решение. При этом приближенные решения сходятся к точному по норме пространства X со скоростью:*

$$\|x_n^* - x^*\|_X = O(M_n \cdot [E_n(y)_Y + E_n(Gx^*)_Y + E_n(Hx^*)_Y]).$$

Далее, без ограничения общности, функционалы $\{R_i\}$ будем считать дискретными, а именно,

$$R_i(x) = x^{(i-1)}(-1),\ i = \overline{1, m}.$$

Это сделано лишь для наглядности нижеприведенных вычислительных схем конкретных методов.

Метод Галеркина. Приближенное решение задачи (1), (2) ищем в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=m}^{n+m} \alpha_k (t+1)^k, \tag{4}$$

а неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}_m^{n+m}$ определим из условий

$$\left(Kx_n - y, t^j\right) = 0,\ j = \overline{0, n},$$

где скалярное произведение вводится в пространстве L_2.

Эти условия эквивалентны системе линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$\sum_{k=m}^{n+m} \gamma_{kj} \alpha_k = y_j,\ j = \overline{0, n}, \tag{5}$$

где

$$\gamma_{kj} = \left(K(t+1)^k, t^j\right)_2, \quad y_j = \left(y, t^j\right)_2. \tag{6}$$

СЛАУ (5), (6) эквивалентна уравнению

$$K_n x_n \equiv D x_n + S_n G x_n + S_n H x_n = S_n y \left(x_n \in X_n\right),$$

в котором S_n – оператор Фурье, построенный по ортогональной системе полиномов в L_2, то есть системе полиномов Лежандра.

В пространстве $Y = W^p L_2$ введем класс $\widetilde{Y} = W^{2p} H_{2,\alpha}$ функций, $2p$-тая производная которых принадлежит классу Гельдера в пространстве L_2 с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$, при этом $p = r - m \geqslant 1$.

Теорема 2. *Пусть выполнены предположения:*

1) $g_k, k = \overline{1, m}, y \in \widetilde{Y}$;

2) $h_j \in \widetilde{Y} \times L_1$, $j = \overline{0, r-1}$;

3) $h_r \in \widetilde{Y} \times L_2$;

4) однородная задача, соответствующая (1), (2)*, имеет лишь нулевое решение.*

Тогда система (5), (6) *имеет единственное решение* $\{\alpha_k^*\}_{k=m}^{n+m}$ *(хотя бы для всех n, начиная с некоторого* n_0*). Приближенные решения* $x_n^*(t)$*, построенные по формуле* (4) *при* $\alpha_k = \alpha_k^*$*, сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *задачи* (1), (2) *в пространстве X со скоростью:*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left(n^{-\alpha}\right).$$

Метод коллокации. Приближенное решение задачи (1), (2) по-прежнему будем искать в виде (4). Неизвестные коэффициенты $\{\alpha_k\}_m^{n+m}$ определим по методу коллокации из условий:

$$(K x_n)(t_j) = y(t_j),\ j = \overline{0, n},$$

где $\{t_j\}_{j=0}^n \subset [-1, 1]$ – некоторая система различных точек. Эти условия относительно $\{\alpha_k\}_m^{n+m}$ дают СЛАУ вида (5), где

$$\gamma_{kj} = (K(t+1)^k)(t_j), \quad y_j = y(t_j). \tag{7}$$

В пространстве $Y = W^p L_2$ введем класс $\widetilde{Y} = W^{2p} H_\alpha$ функций, $2p$-тая производная которых принадлежит классу Гельдера в пространстве $C[-1, +1]$ с показателем $0 < \alpha \leqslant 1$.

Теорема 3. *Пусть выполнены предположения:*

1) $g_k, k = \overline{1, m}, y \in \widetilde{Y}$;

2) $h_j \in \widetilde{Y} \times L_1$, $j = \overline{0, r-1}$;

3) $h_r \in \widetilde{Y} \times L_2$;

4) однородная задача, соответствующая (1), (2)*, имеет лишь нулевое решение;*

5) $\{t_j\}_{j=0}^n \subset [-1, 1]$ *– узлы Чебышёва I-рода.*

Тогда система (5), (7) *имеет единственное решение* $\{\alpha_k^*\}_{k=m}^{n+m}$ *(хотя бы для всех n, начиная с некоторого* n_0*). Приближенные решения* $x_n^*(t)$*, построенные по формуле* (4)

при $\alpha_k = \alpha_k^*$*, сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *задачи* (1), (2) *в пространстве* X *со скоростью:*

$$\|x^* - x_n^*\|_{r;2} = O\left(n^{-\alpha}\right).$$

В следующей теореме приводятся достаточные условия сходимости метода, когда задача (1), (2) рассматривается в другой паре пространств (X, Y), а именно $X = \overset{\circ}{W}{}^r L_\infty$, $Y = W^p L_\infty$, $p = r - m \geqslant 1$. Как и выше, используется класс функций $\widetilde{Y} = W^{2p} H_\alpha$.

Теорема 4. *При выполнении предположений 1), 2), 4), 5) теоремы* 3 *и предположения* $h_r \in \widetilde{Y} \times L_1$ *приближенные решения* $x_n^*(t)$ *сходятся к точному решению* $x^*(t)$ *по норме пространства* $W^r L_\infty$ *со скоростью:*

$$\|x^* - x_n^*\|_{r;\infty} = O\left(\frac{\ln n}{n^\alpha}\right).$$

В заключение отметим, что доказательство этих теорем проводится с использованием предложенного Б.Г. Габдулхаевым варианта теории приближенных методов [2] и ряда результатов из теории приближения функций алгебраическими полиномами в пространствах Лебега (см., напр., [2, 3]).

Литература

1. Агачев Ю. Р., Першагин М. Ю. *Корректная постановка условно корректных интегро-дифференциальных уравнений в новой паре невесовых пространств Соболева* // Изв. вузов. Математика. – 2017. – № 8. – С. 80—85.

2. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

3. Буренков В. И. *О точных постоянных в неравенствах для норм промежуточных производных на конечном интервале* // Труды Матем. ин-та АН СССР. – 1980. – № 156. – С. 22–29.

POLYNOMIAL SOLUTION METHODS FOR CONDITIONALLY WELL-POSED INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

J.R. Agachev, M.Yu. Pershagin

The article provides a theoretical and functional justification for a general polynomial projective method for solving boundary value problems for a class of conditionally well-posed integro–differential equations. This equations are characterized by the positivity of the difference of orders of magnitude of internal and external differential operators. Consequently, the convergence of the Galerkin and collocation methods is established.

Keywords: Sobolev space, integro-differential equation, general boundary-value problem, projection method, polynomial approximation, convergence of the method.

УДК 517.9

К ОБОСНОВАНИЮ ОБЩЕГО ПРОЕКЦИОННОГО МЕТОДА РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ТИПА КОШИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДРОБНО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Ю.Р. Агачев[1], А.В. Савина[2]

1 *jagachev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *avsavina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье для решения задачи типа Коши для одного класса линейных дробно–дифференциальных уравнений применяется общий проекционный метод, основанный на аппарате приближения алгебраическими полиномами. Дано его теоретико–функциональное обоснование; в частности, доказана сходимость метода.

Ключевые слова: дробно–дифференциальное уравнение, задача типа Коши, общий проекционный метод, приближение обобщенными полиномами, сходимость метода.

Пусть m – фиксированное натуральное число, $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_m$ — заданные вещественные числа из промежутка $(0, 1]$. Введем вещественные числа $\{\sigma_k\}_{k=0}^{m}$, определяемые рекуррентной формулой $\sigma_k - \sigma_{k-1} = \alpha_k, k = \overline{0, m}$, $\sigma_{-1} = 0$.

Рассмотрим задачу типа Коши

$$(D_{a+}^{\sigma_k} x)(a) = 0, \quad k = \overline{0, m-1}, \tag{1}$$

для линейного дробно–дифференциального уравнения вида

$$Kx \equiv (D_{a+}^{\sigma_m} x)(t) + \sum_{k=1}^{m+1} g_k(t)(D_{a+}^{\sigma_{m-k}} x)(t) = y(t), \quad a < t \le b. \tag{2}$$

Здесь функции $g_k, k = \overline{1, m+1}, y$ – известные, x – искомая, определенные на $[a, b]$; $D_{a+}^{\sigma_k} x$ – дробная производная (левосторонняя) Римана–Лиувилля функции x порядка σ_k.

Задача (1), (2) при определенных условиях на известные функции имеет единственное решение (см., напр., [1, с. 603]). Там же получена формула для решения задачи (1), (2). Однако на практике это потребует вычисления дробных интегралов. Поэтому актуальна задача построения решения с определенной степенью точности, с использованием того или иного приближенного метода.

Как известно, дробная производная Римана–Лиувилля порядка $\alpha > 0$ задается формулой

$$(D_{a+}^{\alpha} x)(t) = \frac{1}{\Gamma(1 + [\alpha] - \alpha)} \frac{d^{1+[\alpha]}}{dt^{1+[\alpha]}} \int_a^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-[\alpha]}},$$

где $[\alpha]$ – целая часть числа α. При этом для существования этой производной достаточно выполнения условия

$$\int_a^t \frac{x(\tau)\, d\tau}{(t-\tau)^{\alpha-[\alpha]}} \in AC^{[\alpha]}[a, b].$$

Здесь $AC^{[\alpha]}[a,b]$ означает класс функций $f(t)$, имеющих на $[a,b]$ абсолютно непрерывную производную $f^{([\alpha])}(t)$ порядка $[\alpha]$ $(f^{([\alpha])} \in AC[a,b] \equiv AC^0[a,b])$.

Пусть $q = [\sigma_m] + 1$, β – произвольно фиксированное вещественное число из интервала $(0,1)$, $H_{0,\beta}[a,b]$ – пространство функций, удовлетворяющих на $[a,b]$ условию Гельдера с показателем β и обращающихся в нуль в точке a.

При условии $\beta + q - \sigma_m < 1$, т.е. $\beta < \{\sigma_m\}$, где $\{\sigma_m\} = \sigma_m - [\sigma_m]$, введем в рассмотрение два пространства: $Y = H_{0,\beta+q-\sigma_m}[a,b]$, $X = \widetilde{W}^q H_{0,\beta}[a,b]$ – пространство функций, удовлетворяющих условиям (2), имеющих на $[a,b]$ абсолютно непрерывную производную порядка $q-1$, q-ая производная которых принадлежит $H_{0,\beta}[a,b]$. Нормы в этих пространствах зададим следующим образом:

$$\|y\|_Y = \|y\|_C + H(y;\beta+q-\sigma_m),\ y \in Y;\ \|x\|_X = \|x^{(q)}\|_C + H(x^{(q)};\beta),\ x \in X.$$

Здесь $\|y\|_C$ – обычная max–норма в пространстве непрерывных на отрезке $[a,b]$ функций, $H(y;\beta)$ – наименьшая постоянная Гельдера функции $y \in Y$.

В паре пространств (X,Y) задачу (1), (2) можно записать в виде одного операторного уравнения

$$Kx \equiv Dx + Gx = y\ (x \in X, y \in Y), \tag{3}$$

где операторы D и G задаются первым и вторым слагаемыми в левой части уравнения (2):

$$(Dx)(t) = (D_{a+}^{\sigma_m}x)(t),\ (Gx)(t) = \sum_{k=1}^{m+1} g_k(t)(D_{a+}^{\sigma_{m-k}}x)(t).$$

В паре пространств (X,Y) оператор D дробного интегрирования совпадает с дробно–интегральным оператором Капуто:

$$(Dx)(t) = (J_{a+}^{q-\sigma_m}x^{(q)})(t) \equiv \frac{1}{\Gamma(q-\sigma_m)}\int_a^t \frac{x^{(q)}(\tau)\,d\tau}{(t-\tau)^{\sigma_m-q+1}}.$$

Поэтому оператор $D: X \to Y$ непрерывно обратим.

Заметим, что для дробной производной порядка α имеют место соотношения $(D_{a+}^{\alpha}x)(a) = 0$, если $x(t) = (t-a)^{\gamma}, \gamma > \alpha$. С учетом этого свойства для дробных производных, приближенное решение уравнения (3) (или задачи (1), (2)) будем искать в виде обобщенного полинома

$$x_n(t) = (t-a)^{\sigma_m}\sum_{i=0}^{n} c_i(t-a)^i, \tag{4}$$

Пусть H_n есть подпространство алгебраических полиномов степени не выше n. Во введенных выше пространствах введем подпространства $X_n = \{(4)\} \subset X, Y_n = H_n \subset Y$. Пусть $P_n: Y \to Y_n$ – произвольно фиксированный оператор проектирования Y на Y_n.

Будем определять неизвестные коэффициенты $\{c_k\}$ приближенного решения (4) из условия, что $x_n(t)$ является точным решением уравнения

$$K_n x_n \equiv Dx_n + P_n G x_n = P_n y\ (x_n \in X_n). \tag{5}$$

Уравнение (5) является уравнением общего проекционного метода решения задачи (1), (2), задаваемого оператором проектирования P_n. Этот оператор может быть проекционным, т. е. полиномы степени не выше n оставлять на месте, или же таким свойством не обладать. Отметим, что известные проекционные методы, такие как методы Галеркина, подобластей и коллокации, задаются проекционными операторами. Однако методы, построенные на основе суммирования рядов Фурье и интерполяционных полиномов, как правило, этим свойством не обладают.

Следующая теорема дает обоснование проекционного метода, определяемого уравнением (5).

Теорема. *Пусть выполнены предположения:*

1) $p_k, k = \overline{1, m+1}$, $y \in H_{0,\lambda}[a,b]$, $\beta - \{\sigma_m\} < \lambda - 1 \le 0$;

2) *задача (1), (2) имеет единственное решение при любой правой части из* Y;

3) *оператор* P_n *является проекционным и* $\|P_n\|_{C\to C} = O(\ln n)$.

Тогда уравнение (5), хотя бы начиная с некоторого натурального n_0, *также имеет единственное решение* x_n^*, *определяемое по формуле (4). При этом приближенное решение* x_n^* *при* $n \to \infty$ *сходится к точному решению* x^* *задачи (1), (2) в метрике пространства* X *со скоростью*

$$\|x^* - x_n^*\|_X = O\left(\ln n \cdot n^{\beta+1-\{\sigma_m\}-\lambda}\right).$$

Доказательство теоремы основано на следующем результате [2].

Лемма. *Пусть* $0 < \alpha < \mu < \infty$, *функция* $f \in C$ *и оператор* $P_n : C \to H_n$ *таковы, что*

$$\|f - P_n f\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^\mu}\right).$$

Тогда при $\alpha \le 1$

$$\|f - P_n f\|_\alpha = O\left(\frac{\ln n}{n^{\mu-\alpha}}\right).$$

Как следствие, из теоремы непосредственно вытекает обоснование следующих методов:

1) метода Галеркина, построенного по системе полиномов Чебышева первого рода;

2) метода подобластей, построенного по экстремальным точкам полинома Чебышева первого рода;

3) метода коллокации, построенного по узлам Чебышева первого или второго рода.

Литература

1. Самко С. Г., Килбас А. А., Маричев О. А. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения.* – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

2. Agachev J. R., Galimyanov A. F. *On Justification of General Polynomial Projection Method for Solving Periodic Fractional Integral Equations* // Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 36, No. 2. – P. 97–102.

TO THE JUSTIFICATION OF A GENERAL PROJECTION METHOD FOR SOLVING A CAUCHY-TYPE PROBLEM FOR LINEAR FRACTIONAL–DIFFERENTIAL EQUATIONS

J.R. Agachev, A.V. Savina

In the paper, a general projection method based on the approximation apparatus by algebraic polynomials is applied to solve a Cauchy–type problem for a class of linear fractional–differential equations. Its theoretical and functional justification is given; in particular, the convergence of the method is proved.

Keywords: fractional differential equation, Cauchy–type problem, general projection method, approximation by generalized polynomials, convergence of the method.

УДК 517.547

О НЕРАВЕНСТВЕ БОРА С ФИКСИРОВАННЫМ НУЛЕВЫМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

С.А. Алхалифах[1], И.Р. Каюмов[2], С. Поннусами[3]

1 *s.alkhaleefah@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *ikayumov@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

3 *samy@isichennai.res.in, samy@iitm.ac.in*; Индийский статистический институт (ISI), Ченнайский центр, SETS (Общество электронных транзакций и безопасности), Ченнай, Индия

В работе получена улучшенная версия неравенства Бора для аналитических функций, определенных в единичном круге $D = \{z \in C : |z| \le 1\}$.

Ключевые слова: неравенство Бора, аналитические функции.

Классический результат Х. Бора [1], который в окончательную форму привели М. Рисс, И. Шур и Ф. Винер, состоит в следующем: Предположим, что $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ является аналитической функцией в D и $|f(z)| \le 1$ для всех $z \in D$. Тогда

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k \le 1 \ \text{ для всех } \ r \le \frac{1}{3}, \tag{1}$$

где $r = |z|$, причем константа $1/3$ не может быть улучшена.
Нами получены следующие результаты.

Теорема 1. *Пусть* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *– аналитическая функция в* D *и* $|f(z)| \le 1$ *для всех* $z \in D$. *Тогда*

$$|a_0| + \frac{\frac{1}{4}(1-|a_0|^2)^2}{1-\frac{1}{4}(1-|a_0|^2)} + \sum_{k=1}^{\infty} |a_k| r^k \le 1 \ \textit{ для всех } \ r \le \frac{1}{3}, \tag{2}$$

где $r = |z|$, *причем константы* $1/3$, $1/4$ *(в числителе) и* $1/4$ *(в знаменателе) не могут быть улучшены.*

Теорема 2. *Предположим, что* $f(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k$ *является аналитической функцией в* D *и* $|f(z)| \le 1$ *для всех* $z \in D$. *Тогда*

$$|a_0| + \sum_{k=1}^{\infty} \left(|a_k| + \frac{\frac{1}{2}|a_k|^2}{1-\frac{1}{4}|a_k|} \right) r^k \le 1 \ \textit{ для всех } \ r \le \frac{1}{3}, \tag{3}$$

где $r = |z|$, причем константы $1/3$, $1/2$ и $1/4$ не могут быть улучшены.

Литература

1. Bohr H. *A theorem concerning power series* // Proc. London Math. Soc. – 1914. – V. 13, № 2. – P. 1–5.

ON THE BOHR INEQUALITY WITH A FIXED ZERO COEFFICIENT

S.A. Alkhaleefah, I.R. Kayumov, S. Ponnusamy

An improved version of the Bohr inequality for analytic functions defined on the unit disc $D = \{z \in C : |z| \le 1\}$ is obtained.

Keywords: Bohr inequality, analytic functions.

УДК 517.275, 517.517

КРИТЕРИЙ ПОЛНОЙ α–ДОСТИЖИМОСТИ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИ

К.Ф. Амозова[1], Е.Г. Ганенкова[2], С. Поннусами[3]

1 *amokira@rambler.ru*; Петрозаводский государственный университет
2 *g_ek@inbox.ru*; Петрозаводский государственный университет
3 *samy@isichennai.res.in*; Indian Statistical Institute, Chennai Centre SETS

В статье представлен критерий полной α–достижимости для полигармонических функций. Как следствие, отсюда получен критерий полной звездообразности (случай $\alpha = 0$) для полигармонических функций.

Ключевые слова: полигармоническая функция, вполне α–достижимая функция, α–достижимая область, звездообразная область.

В некоторых разделах математики (например, в теоремах вложения, в теории интегральных представлений функции, в вопросах граничного поведения функций, разрешимости задачи Дирихле) важно, чтобы область определения функции $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ удовлетворяла *условию конуса*, т. е. чтобы существовали универсальные для Ω числа $\alpha \in (0;1)$ и $H \in (0;\infty]$ такие, что для каждой точки $p \in \Omega$ прямой круговой конус $V(l(p), H)$ с вершиной в точке p, раствора $\alpha\pi$, высотой H, осью симметрии $l(p)$ лежал в Ω [1].

Обозначим через $\mathbb{B}^n[x, R]$ замкнутый евклидов шар в $\mathbb{R}^n$ с центром в точке x и радиуса R. В [2] были определены α–достижимые области:

Определение 1. [2] *Область $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $0 \in \Omega$, называется α–достижимой (относительно 0), $\alpha \in [0;1)$, если для каждой точки $p \in \partial\Omega$ существует такое число $r = r(p) > 0$, что конус*

$$K_+(p, \alpha, r) = \left\{ x \in \mathbb{B}^n[p, r] : \left(x - p, \frac{p}{\|p\|} \right) \ge \|x - p\| \cos\frac{\alpha\pi}{2} \right\} \subset \mathbb{R}^n \setminus \Omega.$$

В [2] было показано, что α–достижимые области являются областями с условием конуса, при этом $l(p) = -p$, и было доказано, что α–достижимые области являются

звездообразными. В случае $\alpha = 0$ класс 0–достижимых областей в $\mathbb{R}^n$ совпадает с классом областей, звездообразных относительно 0. Об α–достижимых областях см. также [3].

Эти области в плоском случае ($n = 2$) исследовали J. Stankiewicz [4–5], D.A. Brannan и W.E. Kirwan [6].

Так, например, в [4–5] J. Stankiewicz рассматривал класс $S_{1-\alpha}$, состоящий из $(1-\alpha)$–звездообразных, $\alpha \in [0;1]$, аналитических в единичном круге $\mathbb{B} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций вида $f(z) = a_1 z + a_2 z^2 + \ldots$, $a_1 \neq 0$, удовлетворяющих условию

$$\left|\arg \frac{zf'(z)}{f(z)}\right| < \frac{(1-\alpha)\pi}{2} \quad \forall z \in \mathbb{B},$$

и показал, что область $\Omega \neq \mathbb{C}$ α–достижима $\Longleftrightarrow \Omega = f(\mathbb{B})$, где f — некоторая функция из класса $S_{1-\alpha}$.

В [2] P. Liczberski и В. Старков обобщили этот результат на класс биголоморфных в открытом единичном евклидовом шаре $\mathbb{B}^N$, $N \geq 1$, функций $f : \mathbb{B}^N \longrightarrow \mathbb{C}^N$, таких, что $f(0) = 0$ и

$$\Re\{z^*(Df(z))^{-1} f(z)\} \geq \|z^*(Df(z))^{-1}\| \cdot \|f(z)\| \cdot \sin\frac{\alpha\pi}{2} \quad \forall z \in \mathbb{B}^N,$$

и доказали, что все такие функции, отображающие $\mathbb{B}^N$ на α–достижимые области, обладают *свойством наследственности* (наследуют α–достижимость), т. е. если $r \in (0;1)$, то каждая область $f(r\mathbb{B}^N)$ α–достижима, $\alpha \in (0;1)$.

Известно, что в классе гармонических функций $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$, $f(0) = 0$, сохраняющих ориентацию в $\mathbb{B}$, свойство выпуклости или звездообразности $f(\mathbb{B})$ не наследуется. В таких случаях, выделяют и рассматривают подкласс функций, которые обладают свойством наследственности (см. [7]).

Далее дадим определение p–гармонической функций.

Определение 2. [8] *Функция $f \in C^{2p}(\mathbb{B})$, $p \in \mathbb{N}$, называется p–гармонической (или полигармонической), если $\Delta^p f = 0$ в $\mathbb{B}$, где Δ — оператор Лапласа.*

Известно, что p–гармоническая сохраняющая ориентацию в $\mathbb{B}$ фунция, может быть представлена в виде

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} F_{p-k+1}(z), \tag{1}$$

где функции $F_{p-k+1} = h_{p-k+1} + \overline{g}_{p-k+1}$, $k = 1, \ldots, p$, являются гармоническими, h_{p-k+1} и g_{p-k+1} — аналитическими в $\mathbb{B}$. Заметим, что каждая гармоническая функция является p–гармонической.

В этом классе p–гармонических функций рассмотрим подкласс функций, наследующих α–достижимость.

Определение 3. [9] *Будем говорить, что p–гармоническая функция Φ, $\Phi(0) = 0$, $J_\Phi(z) > 0$, является вполне α–достижимой, $\alpha \in [0,1)$, если для каждого $r \in (0,1]$ функция Φ отображает $\mathbb{B}_r = \{z \in \mathbb{C} : |z| < r\}$ на α–достижимую область.*

Теорема 1. [9] *Пусть Φ является p–гармонической функцией в $\mathbb{B}$ вида (1), $\Phi(0) = 0$, и $J_\Phi(z) > 0$ в $\mathbb{B}$. Тогда Φ вполне α–достижима, $\alpha \in [0,1) \Longleftrightarrow$ для любого $z \in \mathbb{B}$ выполняется неравенство*

$$\sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} \Re\{z(h'_{p-k+1}\overline{\Phi} - g'_{p-k+1}\Phi)\} \geq \sin\tfrac{\alpha\pi}{2} \cdot |\Phi| \cdot L^{1/2},$$

$$\text{где } L = \Re^2\left\{z\sum_{k=1}^{p}|z|^{2k-2}(h'_{p-k+1} - g'_{p-k+1})\right\} + \Im^2\left\{z\sum_{k=1}^{p}|z|^{2k-2}(h'_{p-k+1} + g'_{p-k+1})\right\}.$$

Как следствие, отсюда получаем критерий полной α–достижимости для бигармонических ($p = 2$) функций.

Следствие 1. *Пусть* $\Phi(z) = |z|^2 F_1(z) + F_2(z)$ *— бигармоническая функция в* $\mathbb{B}$, *где* $\Phi(0) = 0$, $F_k = h_k + \overline{g}_k$ $(k = 1,2)$ *— гармонические функции в* $\mathbb{B}$. *Тогда* Φ *вполне* α*-достижима,* $\alpha \in [0,1) \Longleftrightarrow$ *для любого* $z \in \mathbb{B}$ *выполняется неравенство*

$$|z|^2 \mathrm{Re}\left\{z(h'_1\overline{\Phi} - g'_1\Phi)\right\} + \mathrm{Re}\left\{z(h'_2\overline{\Phi} - g'_2\Phi)\right\} \geq \sin\frac{\alpha\pi}{2} \cdot |\Phi| \cdot L, \tag{2}$$

$$\text{где } L^2 = |z|^6(|h'_1|^2 + |g'_1|^2) + |z|^2(|h'_2|^2 + |g'_2|^2) + 2|z|^4 \mathrm{Re}\left\{h'_1\overline{h}_2{}' + g'_1\overline{g}_2{}'\right\} -$$
$$-2\mathrm{Re}\left\{z^2(h'_2 g'_2 + |z|^4 h'_1 g'_1)\right\} - 2|z|^2 \mathrm{Re}\left\{z^2(h'_1 g'_2 + g'_1 h'_2)\right\}.$$

В случае $\alpha = 0$ мы получаем критерий полной звездообразности для p–гармонических функций.

Следствие 2. *Пусть* Φ *является* p*–гармонической функцией в* $\mathbb{B}$ *вида* (1), $\Phi(0) = 0$, *и* $J_\Phi(z) > 0$ *в* $\mathbb{B}$. *Тогда* Φ *вполне звездообразна* $\Longleftrightarrow$

$$\sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} \Re\left\{z h'_{p-k+1}\overline{\Phi}\right\} \geq \sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} \Re\left\{z g'_{p-k+1}\Phi\right\}$$

для любого $z \in \mathbb{B}$.

В случае $p = 1$ мы получаем критерий полной α–достижимости для гармонических функций.

Следствие 3. *Пусть* $\Phi(z) = h(z) + \overline{g(z)}$ *является гармонической функцией в* $\mathbb{B}$, $\Phi(0) = 0$, $J_\Phi(z) > 0$ *в* $\mathbb{B}$. *Тогда* Φ *вполне* α*–достижима,* $\alpha \in [0,1) \Longleftrightarrow$ *для любого* $z \in \mathbb{B}$

$$|h(z)|^2 \cdot \Re\left\{\frac{zh'(z)}{h(z)}\right\} - |g(z)|^2 \cdot \Re\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\} - \Re\left\{z(g'(z)h(z) - h'(z)g(z))\right\} \geq$$

$$\geq \sin\frac{\alpha\pi}{2}\sqrt{|z|^2(|h'|^2 + |g'|^2) - 2\Re\left\{h'(z)g'(z)z^2\right\}}\sqrt{|h(z)|^2 + |g(z)|^2 + 2\Re\left\{h(z)g(z)\right\}}.$$

Следствие 4. *В случае* $\alpha = 0$ *из следствия 3 мы получаем известное условие полной звездообразности для гармонических функций* [7]*:*

$$|h(z)|^2 \cdot \Re\left\{\frac{zh'(z)}{h(z)}\right\} \geq |g(z)|^2 \cdot \Re\left\{\frac{zg'(z)}{g(z)}\right\} + \Re\left\{z(g'(z)h(z) - h'(z)g(z))\right\}$$

для любого $z \in \mathbb{B}$.

Следствие 5. *Если в следствии 3 функция* $\Phi(z)$ *является аналитической в* $\mathbb{B}$, *то* Φ *вполне* α*–достижима,* $\alpha \in [0,1) \Longleftrightarrow$ *для любого* $z \in \mathbb{B}$

$$\Re\left\{\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right\} \geq \sin\frac{\alpha\pi}{2}\left|\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right|.$$

Последнее неравенство равносильно неравенству

$$\left|\arg\left(\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right)\right| \leq \frac{\pi}{2}(1-\alpha). \tag{3}$$

Но это условие известно, так как $\Phi(\mathbb{B})$ *является* α*–достижимой (*$\alpha \in [0,1)$*)* $\Leftrightarrow$ Φ *вполне* α*–достижима (см.* [2]*), и* $\Phi(\mathbb{B})$ α*–достижима* $\Leftrightarrow$ *выполняется неравенство* (3) *(см.* [4] – [6]*).*

Следствие 6. *Если* $\Phi(z)$ *— аналитическая, то в случае* $\alpha = 0$ *из Следствия 2 мы получаем известное условие звездообразности:*

$$\Re\left\{\frac{z\Phi'(z)}{\Phi(z)}\right\} \geq 0 \quad \forall z \in \mathbb{B}.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

Литература

1. *Математическая энциклопедия. Т. 2.* – М.: Сов. энцикл., 1979. – 552 с.

2. Liczberski P., Starkov V. V. *Domains in* $\mathbb{R}^n$ *with conical accessible boundary* // J. Math. Anal. Appl. – 2013. – V. 408. – № 2. – P. 547–560.

3. Амозова К. Ф. *Достаточные условия* α*–достижимости области в негладком случае* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2013. – Т. 2(20). – № 1. – С. 3–11.

4. Stankiewicz J. *Quelques problèmes extrémaux dans les classes des fonctions* α*–angulairement étoilées* // Ann. Univ. Mariae Curie-Sklodowska, Sectio A. – 1966. – V. XX. – P. 59–75.

5. Stankiewicz J. *Some remarks concerning starlike functions* // Bulletin de l'académie Polonaise des sciences. Série des sciences math., astr. et phys. – 1970. – V. XVIII. – № 3. – P. 143–146.

6. Brannan D. A., Kirwan W. E. *On some classes of bounded univalent functions* // J. London Math. Soc. – 1969. – V. 2. – № 1. – P. 431–443.

7. Chuaqui M., Duren P., Osgood B. *Curvature Properties of Planar Harmonic Mappings* // Computational Methods and Function Theory. – 2004. – V. 4. – № 1. – P. 127–142.

8. Балк М. Б. *Полианалитические функции и их обобщения* // Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. матем. Фундамент. направления. – 1991. – V. 85. – P. 187–246.

9. Amozova K. F. , Ganenkova E. G. , Ponnusamy S. *Criteria of univalence and fully* α*–accessibility for p–harmonic and p–analytic functions* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2017. – V. 62. – № 8. – P. 1165–1183.

CRITERION OF FULLY α–ACCESSIBILITY FOR POLYHARMONIC FUNCTIONS

K.F. Amozova, E.G. Ganenkova, S. Ponnusamy

In this article, we present a new criterion of fully α*–accessibility for polyharmonic functions, which, in*

particular, produces a criterion of fully starlikeness for polyharmonic functions.
Keywords: polyharmonic function, fully α–accessible function, α–accessible domain, starlike domain.

УДК 517.546.1

ОБ ИНЪЕКТИВНОСТИ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ И ПОЛИАНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

К.Ф. Амозова[1], Е.Г. Ганенкова[2], С. Поннусами[3]

1 *amo-kira@rambler.ru*; Петрозаводский государственный университет
2 *g_ek@inbox.ru*; Петрозаводский государственный университет
3 *samy@isichennai.res.in*; Indian Statistical Institute, Chennai Centre SETS

В статье представлены новые критерии инъективности для полигармонических и полианалитических в круге функций.

Ключевые слова: однолистность, полигармоническая функция, полианалитическая функция.

Большое количество исследований, российских и зарубежных, посвящено условиям однолистности (инъективности) *аналитических* в единичном круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций. Одним из таких условий является следующий критерий однолистности И. Е. Базилевича в терминах коэффициентов аналитической функции.

Теорема А. [1] *Аналитическая в $\mathbb{D}$ функция $F(z) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ является однолистной тогда и только тогда, когда для каждого $z \in \mathbb{D}$ и каждого $t \in [0, \pi/2]$ справедливо*

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \frac{\sin nt}{\sin t} z^{n-1} \neq 0, \quad \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)\Big|_{t=0} = n. \tag{1}$$

Для *гармонических* в $\mathbb{D}$ функций условий однолистности получено гораздо меньше (см., например, [2] и [3]).

В докладе будут представлены критерии однолистности для полигармонических и полианалитических в $\mathbb{D}$ функций, опубликованные авторами в [4], а также связанные с ними результаты.

Пусть $p \in \mathbb{N}$.

Определение. Комплекснозначная функция $F \in C^{2p}(\mathbb{D})$, называется p-гармонической (или полигармонической) в $\mathbb{D}$, если $\Delta^p F(z) = 0$ в $\mathbb{D}$, где Δ — оператор Лапласа.

Известно [5], что функция $F \in C^{2p}(\mathbb{D})$ является p–гармонической в $\mathbb{D}$ тогда и только тогда, когда F представима в виде

$$F(z) = \sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} F_{p-k+1}(z),$$

где каждая функция $F_{p-k+1} = h_{p-k+1} + \overline{g}_{p-k+1}$, $k = 1, \ldots, p$, является гармонической в $\mathbb{D}$. Без ограничения общности можно считать, что $h_{p-k+1}(0) = 0 = g_{p-k+1}(0)$. Напомним, что каждая гармоническая функция f в $\mathbb{D}$ может быть записана в виде $f = h + \overline{g}$,

где h и g — аналитические в $\mathbb{D}$ функции. Якобиан функции F обозначается J_F. Подробнее о p–гармонических функциях см., напр., [6].

Используя метод И. Е. Базилевича [1], мы получили следующую теорему.

Теорема 1. [4] *Пусть* $F(z) = \sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} F_{p-k+1}(z)$ — *p-гармоническая в* $\mathbb{D}$ *функция, однолистная в некоторой окрестности нуля, где*

$$F_{p-k+1}(z) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(p-k+1)} z^n + b_n^{(p-k+1)} \overline{z}^n \right) \ (k = 1, \dots, p)$$

— гармонические в $\mathbb{D}$ *функции. Тогда* $F(z)$ *однолистна в* $\mathbb{D}$ *тогда и только тогда, когда для всех* $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *и* $t \in (0, \pi/2]$ *выполняется следующее условие*

$$\sum_{k=1}^{p} |z|^{2(k-1)} \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n^{(p-k+1)} z^n - b_n^{(p-k+1)} \overline{z}^n \right) \sin nt \neq 0. \tag{2}$$

Аналогично был получен критерий однолистности для p–аналитических в $\mathbb{D}$ функций.

Определение. Для $p \in \mathbb{N}$ назовем p–аналитической (или полианалитической) функцией в $\mathbb{D}$ многочлен по переменной $\overline{z}$

$$F(z) = \sum_{k=0}^{p-1} \overline{z}^k a_k(z),$$

коэффициентами которого являются аналитические в $\mathbb{D}$ функции $\{a_k(z)\}_{k=1}^{p-1}$. Это эквивалентно тому, что $F(z) \in C^p(D)$ является решением обобщенного уравнения Коши-Римана $\partial^p F / \partial \overline{z}^p = 0$ в $\mathbb{D}$ (подробнее, см. напр., [6]).

Теорема 2. [4] *Пусть* $F(z) = \sum_{k=0}^{p-1} \overline{z}^k a_k(z)$ — *p–аналитическая в* $\mathbb{D}$ *функция, однолистная в некоторой окрестности нуля, где*

$$a_k(z) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} z^n, \ k = 1, \dots, p-1,$$

— аналитические в $\mathbb{D}$ *функции. Тогда* $F(z)$ *однолистна в* $\mathbb{D}$ *тогда и только тогда, когда для всех* $z \in \mathbb{D} \setminus \{0\}$ *и* $t \in (0, \pi/2]$ *выполнено*

$$\sum_{k=0}^{p-1} \overline{z}^k \sum_{n=0}^{\infty} c_n^{(k)} \sin(n-k)\, t\, z^n \neq 0.$$

Исследование выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

Литература

1. Базилевич И. Е. *Проблема коэффициентов однолистных функций* // Матем. журнал МАИ. – 1945. – С. 29–47.

2. Starkov V. V. *Univalence of harmonic functions, the problem of Ponnusamy and Sairam, and constructions of univalent polynomials* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2014. – V. 3(21). – № 2. – P. 59–73.

3. Li P., Ponnusamy S., Wang X. *Some properties of planar p–harmonic and* log-p–*harmonic mappings* // Bull. Malays. Math. Sci. Soc. – 2013. – V. 36. – № 3. – P. 595–609.

4. Amozova K. F., Ganenkova E. G., Ponnusamy S. *Criteria of univalence and fully α–accessibility for p–harmonic and p–analytic functions* // Complex Var. Elliptic Equ. – 2017. – V. 62. – № 8. – P. 1165–1183.

5. Chen Sh., Ponnusamy S., Wang X. *Bloch constant and Landau's theorem for planar p–harmonic mappings* // J. Math Anal. Appl. – 2011. – V. 373. – № 1. – P. 102–110.

6. Балк М. Б. , Зуев М. Ф. *О полианалитических функциях* // Успехи мат. наук. – 1970. – Т. 25. – Вып. 5(155). – С. 203—226.

ON INJECTIVITY OF POLYHARMONIC AND POLYANALYTIC FUNCTIONS

K.F. Amozova, E.G. Ganenkova, S. Ponnusamy

In the paper we present new univalence criteria for polyharmonic and polyanalytic functions.

Keywords: univalence, polyharmonic function, polyanalytic function.

УДК 517.518

О Λ-СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ДВОЙНЫХ РЯДОВ ФУРЬЕ

Н.Ю. Антонов[1]

1 *nikolai.antonov@imm.uran.ru*; Институт математики и механики им. Н.Н. Красовского УрО РАН

Рассматривается один вид сходимости (Λ-сходимость) двойных тригонометрических рядов Фурье, промежуточный между сходимостью по квадратам и λ-сходимостью при $\lambda > 1$. Известный результат о сходимости почти всюду по квадратам рядов Фурье функций из класса $L(\ln^+ L)^2 \ln^+ \ln^+ \ln^+ L([0,2\pi)^2)$ распространен на случай Λ-сходимости для некоторых последовательностей Λ.

Ключевые слова: двойные тригонометрические ряды Фурье, сходимость почти всюду.

Пусть $d \in \mathbb{N}$; $\mathbb{T}^d = [0,2\pi)^d$ — d-мерный тор; $\varphi : [0,+\infty) \to [0,+\infty)$ — неубывающая функция; $\varphi(L)(\mathbb{T}^d)$ — множество определенных на $\mathbb{T}^d$ комплекснозначных функций f, для которых функция $\varphi(|f|)$ суммируема на $\mathbb{T}^d$; $C(\mathbb{T}^d)$ — множество функций, непрерывных на $\mathbb{T}^d$. Для $f \in L(\mathbb{T}^d)$ и вектора $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_d)$ с неотрицательными целочисленными координатами через $S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x})$ будем обозначать значение $\mathbf{n}$-й прямоугольной частичной суммы кратного тригонометрического ряда Фурье функции f в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$.

Пусть $\lambda \geq 1$. Говорят, что ряд Фурье функции f λ-сходится в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^d$, если существует предел

$$\lim_{\min\{n_i : 1 \leq i \leq d\} \to \infty} S_{\mathbf{n}}(f, \mathbf{x}), \tag{1}$$

рассматриваемый только по тем векторам $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_d)$, для которых

$$\frac{1}{\lambda} \leq \frac{n_i}{n_j} \leq \lambda, \qquad 1 \leq i, j \leq d.$$

В случае $\lambda = 1$ λ-сходимость называется сходимостью по кубам, а при $\lambda = +\infty$ — сходимостью по Прингсхейму.

Сходимость почти всюду по квадратам (двумерным кубам) рядов Фурье функций $f \in L^2(\mathbb{T}^2)$ была установлена Н.Р. Тевзадзе [1]. Ч. Фефферман [2] распространил этот результат на функции $f \in L^p(\mathbb{T}^d)$, $p > 1$, $d \geq 2$, а затем П. Шёлин [3] доказал, что если $f \in L(\ln^+ L)^d(\ln^+ \ln^+ L)(\mathbb{T}^d)$, то ее ряд Фурье сходится по кубам почти всюду. Автором [4] показано, что условие $f \in L(\ln^+ L)^d \ln^+ \ln^+ \ln^+ L(\mathbb{T}^d)$ также является достаточным для сходимости почти всюду кратного ряда Фурье функции f.

С другой стороны, Ч. Фефферман [5] построил пример непрерывной функции двух переменных, ряд Фурье которой расходится по Прингсхейму почти всюду. М. Бахбух и Е.М. Никишин [6] доказали, что существует функция $f \in C(\mathbb{T}^2)$ с расходящимся по Прингсхейму на множестве положительной меры рядом Фурье и удовлетворяющая следующему условию на модуль непрерывности: $\omega(f, \delta) = O\left(\ln^{-1}(1/\delta)\right)$ при $\delta \to +0$. А.Н. Бахвалов [7] установил, что для любых $m \in \mathbb{N}$ и $\lambda > 1$ найдется функция $f \in C(\mathbb{T}^{2m})$ такая, что ее ряд Фурье λ-расходится всюду, а модуль непрерывности удовлетворяет условию

$$\omega(f, \delta) = O\left(\ln^{-m}(1/\delta)\right), \quad \delta \to +0. \tag{2}$$

Затем в работе [8] Бахвалов доказал существование функции $f \in C(\mathbb{T}^{2m})$, удовлетворяющей условию (2) и такой, что ее ряд Фурье λ-расходится всюду для всех $\lambda > 1$ одновременно.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ — невозрастающая последовательность положительных чисел,

$$\Omega_\Lambda = \left\{(n_1, n_2) \in \mathbb{N}^2 : \frac{1}{1+\lambda_{n_1}} \leq \frac{n_1}{n_2} \leq 1 + \lambda_{n_2}\right\}.$$

Двойной ряд Фурье функции $f \in L(\mathbb{T}^2)$ назовем Λ-сходящимся в точке $\mathbf{x} \in \mathbb{T}^2$, если существует предел (1), рассматриваемый при $d = 2$ только по тем парам (n_1, n_2), которые принадлежат Ω_Λ.

Теорема. *Пусть $f \in L(\ln^+ L)^2 \ln^+ \ln^+ \ln^+ L(\mathbb{T}^2)$, невозрастающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $\lambda_\nu = O(1/\nu)$. Тогда тригонометрический ряд Фурье функции f Λ-сходится почти всюду на $\mathbb{T}^2$.*

Гипотеза. *Пусть невозрастающая последовательность положительных чисел $\Lambda = \{\lambda_\nu\}_{\nu=1}^{\infty}$ такая, что $\lambda_\nu \neq O(1/\nu)$. Тогда найдется функция $f \in C(\mathbb{T}^2)$, тригонометрический ряд Фурье которой Λ-расходится почти всюду на $\mathbb{T}^2$.*

Работа выполнена за счет гранта Российского научного фонда (проект 14-11-00702).

Литература

1. Тевзадзе Н. Р. *О сходимости двойного ряда Фурье функции, суммируемой с квадратом* // Сообщ. АН ГССР. – 1970. – Т. 58. – № 2. – С. 277-279.

2. Fefferman C. *On the convergence of multiple Fourier series* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 77. – № 5. – P. 744–745.

3. Sjölin P. *Convergence almost everywhere of certain singular integrals and multiple Fourier series* // Arkiv för mat. – 1971. – V. 9. – № 1. – С. 65–90.

4. Антонов Н. Ю. *О сходимости почти всюду по кубам кратных тригонометрических рядов Фурье* // Известия РАН. Серия матем. – 2004. – Т. 68. – № 2. – С. 3-22.

5. Fefferman C. *On the divergence of multiple Fourier series* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1971. – V. 77. – № 2. – P. 191–195.

6. Бахбух М., Никишин Е. М. *О сходимости двойных рядов Фурье от непрерывных функций* // Сиб. матем. журн. – 1973. – Т. 14. – № 6. – С. 1189–1199.

7. Бахвалов А. Н. *О расходимости всюду рядов Фурье непрерывных функций многих переменных* // Матем. сборник. – 1997. – Т. 188. – № 8. – С. 45–62.

8. Бахвалов А. Н. *О λ-расходимости всюду ряда Фурье непрерывной функции многих переменных* // Матем. заметки. – 2002. – Т. 72. – № 4. – С. 490–501.

ON Λ-CONVERGENCE ALMOST EVERYWHERE OF DOUBLE FOURIER SERIES

N.Yu. Antonov

We consider one type of convergence of double trigonometric Fourier series intermediate between convergence over squares and λ-convergence for $\lambda > 1$. The well-known result on the convergence almost everywhere over squares of the Fourier series of functions from the class $L(\ln^+ L)^2 \ln^+ \ln^+ \ln^+ L([0,2\pi)^2)$ is extended to the case of Λ-convergence for some sequences Λ.

Keywords: double trigonometric Fourier series, convergence almost everywhere.

УДК 514.822

ПРИМЕРЫ ОТОБРАЖЕНИЙ С S-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

У.К. Асанбеков[1], А.Н. Малютина[2]

1 *urmat_1396@mail.ru*; Томский государственный университет, Механико-математический факультет

2 *nmd@math.tsu.ru*; Томский государственный университет, Механико-математический факультет

В настоящей работе приводятся примеры, показывающие, что в отличие от отображений с ограниченным искажением [1] для отображений с s-усредненной характеристикой [2], у которых конечны интегралы $\int_D K_I^s(x,f)|J(x,f)|dx$ и $\int_D K_O^{s'}(x,f)dx$, ограниченность кратности и степени на компактах из D вообще говоря, не имеет места.

Ключевые слова: ограниченность, усреднение, компактность.

В настоящей работе приводятся примеры, показывающие, что в отличие от отображений с ограниченным искажением [1] для отображений с s-усредненной характеристикой [2], у которых конечны интегралы $\int_D K_I^s(x,f)|J(x,f)|dx$ и $\int_D K_O^{s'}(x,f)dx$, ограниченность кратности и степени на компактах из D вообще говоря, не имеет места. Рассмотрим отображение с s-усредненной характеристикой [2]. Приведем следующие два примера.

Пример 1. Закручивание вокруг оси тора. В пространстве R^3 рассмотрим тор D, точки которого $x = (x_1, x_2, x_3)$ описываются при помощи криволинейных координат: $x_1 = (R + r\cos\theta)\cos\phi$, $x_2 = (R + r\cos\theta)\sin\phi$, $x_3 = r\sin\theta$, где $0 \le \phi < 2\pi$, $0 \le \theta < 2\pi$, $0 < r < R$, и R – некоторое положительное число. Пусть $\rho(x) = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$. Обозначим через D^1 окружность $\{x : \rho(x) = R, x_3 = 0\}$. В области D зададим отображение

$f:(r,\phi,\theta)\mapsto(r,\phi,r^p\theta)$, $r\neq 0$, где p – некоторое произвольное отрицательное число, и положим $f(x)=x$, если $x\in D^1$. Отображение f, очевидно, непрерывно и ограничено в D. При этом, оно локально гомеоморфно в точках $x\in D$, $r\neq 0$. Все точки множества D^1 отображение f переводит в себя, и каждая окружность с центром на D^1, лежащая в двумерной плоскости, ортогональной D^1, при отображении f также переходит в себя.

Отсюда легко увидеть, что отображение f открыто и непрерывно дифференцируемо в точках $x\in D\setminus D^1$ и $J(x,f)=r^p>0$. Поскольку 2-мерная мера Лебега множества D^1 равна нулю и сужение f на любую прямую, не проходящую через D^1, непрерывно дифференцируемо, то f есть ACL-отображение. Если точка x обходит описанную выше окружность один раз в каком либо направлении, то точка $f(x)$ обойдет ту же окружность в том же направлении $r^p>1$ раз. Теперь возьмем компакт $F\subset D$, содержащий внутри себя некоторые точки из D^1. Если $y=(y_1,y_2,y_3)=f(x)$, то $y_1=(R+r\cos r^p\theta)\cos\phi$, $y_2=(R+r\cos r^p\theta)\sin\phi, y_3=r\sin r^p\theta$. Следовательно, на окружности $(\rho(y)-R)^2+y_3=r^2$ имеется не менее m прообразов множества F. Для этого надо выбрать r так, чтобы шар радиуса r с центром на D^1 лежал во множестве F и целая часть $[r^p]$ числа r^p была бы не меньше m. Это и означает, что ограниченность на компактах кратности отображения f не имеет места. Так как $J(x,f)>0$ при $x\in D\setminus D^1$, то $N(y,f,G)=\mu(y,f,G)$ для всякой подобласти G, где $N(y,f,G)$ – кратность, а $\mu(y,f,G)$ – степень или топологический индекс отображения f относительно точки f и области G.

Следовательно, ограниченность на компактах степени для отображения f – отображения с s-усредненной характеристикой – не имеет места. Покажем далее, что сходятся интегралы, характеризующие отображение с s-усредненной характеристикой (см. [2]).

Пусть $\alpha>0$, $\beta>0$ – произвольные числа. Убедимся, что можно подобрать $p<0$ так, чтобы интегралы $\int_D K_I^\alpha(x,f)|J(x,f)|dx$, $\int_D K_O^\beta(x,f)dx$ были конечны. Если $x\in D^1$, то $K_O^\beta=K_I(x,f)=J(x,f)=1$.

Если же $x\in D\setminus D^1$, то $J(x,f)=r^p$, $K_O(x,f)<(3+4\pi^2p^2)^{\frac{3}{2}}r^2p$, и так как $K_I(x,f)\leq K_O^2(x,f)$, следовательно $\int_D K_I^\alpha(x,f)|J(x,f)|dx\leq c_2\int_0^1 r^{2\alpha p+p+1}dr<\infty$.

Если $0>p>-\frac{2}{2\alpha+1}$, $\int_D K_I^\beta(x+f)dx<c_3$, а также $\int_0^1 r^{4\beta p+1}dr<\infty$, если $0>p>-\frac{1}{2\beta}$. Таким образом, оба этих интеграла конечны одновременно, если $0>p>\max\{-\frac{1}{2\beta},-\frac{2}{2\alpha+1}\}$. Аналогично получается следующий

Пример 2. Закручивание вокруг точки. В пространстве R^3 рассмотрим область D, которая представляет собой шар $x_1^2+x_2^2+x_3^2\leq 1$ с центром в начале координат и радиуса 1. В области D зададим отображение $f:(r,\phi,\theta)\mapsto(r,\phi,r^p\theta)$, если $\theta\neq 0$, $r\neq 0$ и $f(x)=x$ при $x=0$.

Отметим, что в [3] приведены примеры и методы нахождения сферического модуля.

Литература

1. Решетняк Ю.Г. *Пространственные отображения с ограниченным искажением.* – Новосибирск: Наука, 1982. – 284 с.

2. Елизарова М.А., Малютина А.Н. *Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства*. – LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 121 с.

3. Малютина А.Н. Асанбеков У.К. *Нахождение сферического модуля некоторых семейств кривых* / Матер. межд. конф. Воронежская зимняя матем. школа С.Г. Крейна, 25-31 января 2016 г. // Сб. тр. конф. Воронеж: Научная книга, 2016. – 464 с.

EXAMPLES OF MAPPINGS WITH S-AVERAGED CHARACTERISTIC

U.K. Asanbekov, A.N. Malyutina

In the present paper we give examples showing that, in contrast to mappings with bounded distortion, for mappings with s-averaged characteristic, for which the integrals are bounded, the boundedness of the multiplicity and the degree on compact sets in D, in general, does not hold.

Keywords: boundedness, homogenization, compactness.

УДК 517.982.22+517.982.27

О СИММЕТРИЧНЫХ ПРОСТРАНСТВАХ СО СВОЙСТВОМ КАТО

С.В. Асташкин[1]

1 *astash56@mail.ru*; Самарский национальный исследовательский университет им. С.П. Королева

Говорят, что банахово пространство X имеет свойство Като, если каждый линейный строго сингулярный оператор, действующий в X, компактен. Уточняя некоторые недавние результаты, мы доказываем, что этим свойством обладает широкий класс 2-дизъюнктно однородных симметричных пространств.

Ключевые слова: симметричное пространство, компактный оператор, строго сингулярный оператор, 2-дизъюнктно однородная банахова решетка.

Напомним, что линейный оператор, ограниченный из одного банахова пространства в другое, называется *строго сингулярным*, если никакое сужение его на бесконечномерное подпространство не является изоморфизмом. Это понятие было введено Т. Като в связи с решением некоторых проблем теории возмущений фредгольмовых операторов [1].

Как легко видеть, множество всех строго сингулярных операторов образует замкнутый операторный идеал, который содержит идеал компактных операторов. В то же время, согласно классической теореме Ж. Калкина [2] последний является единственным нетривиальным замкнутым идеалом операторов, ограниченных в гильбертовом пространстве. Поэтому в этом случае идеалы строго сингулярных и компактных операторов совпадают [1]. Аналогичный результат верен также для пространств l_p, $1 \le p < \infty$, и c_0 [3], и, как совсем недавно было доказано в работе [4], для некоторого класса 2-дизъюнктно однородных симметричных пространств.

Будем говорить, что банахово пространство X *имеет свойство Като*, если каждый линейный строго сингулярный оператор, действующий в X, компактен в этом пространстве. Напомним также, что банахова решетка X называется *2-дизъюнктно однородной*, если всякая последовательность попарно дизъюнктных нормированных элементов в X содержит подпоследовательность, эквивалентную каноническому базису в l_2.

Теорема 1 [4]. *Пусть X — 2-дизъюнктно однородное симметричное пространство на $[0,1]$ такое, что $X \supset L_p$ при некотором $p < \infty$. Тогда каждый строго сингулярный оператор, действующий в X, компактен.*

Цель этой заметки состоит в распространении теоремы 1 на более широкий класс 2-дизъюнктно однородных симметричных пространств.

Напомним некоторые определения из теории симметричных пространств (более полную информацию см. в [5]).

Банахово пространство X измеримых на $[0,1]$ функций называется *симметричным* (или *перестановочно-инвариантным*), если 1) оно идеально, т.е. из неравенства $|x(t)| \leqslant |y(t)|$ для п.в. $t \in [0,1]$, где функция x измерима по Лебегу, а $y \in X$, следует $x \in X$ и $\|x\|_X \leqslant \|y\|_X$; 2) из *равноизмеримости* функций x и $y \in X$, т.е. равенства

$$\mu(\{t \in [0,1] : |y(t)| > u\}) = \mu(\{t \in [0,1] : |x(t)| > u\}), \ \ u > 0,$$

где $\mu(E)$ — мера Лебега множества $E \subset \mathbb{R}$, вытекает $x \in X$ и $\|x\|_X = \|y\|_X$.

В частности, любая измеримая на $[0,1]$ функция x равноизмерима со своей невозрастающей непрерывной слева *перестановкой*

$$x^*(t) := \inf\{u \geq 0 \, : \, \mu(\{s \in [0,1] : |x(s)| > u\}) < t\}, \ \ 0 < t \leq 1.$$

Для каждого с.п. X на $[0,1]$ справедливы непрерывные вложения: $L_\infty \subset X \subset L_1$.

Важный и наиболее известный пример симметричных пространств — L_p - пространства, $1 \leq p \leq \infty$, с обычной нормой. Их естественным обобщением являются пространства Орлича. Пусть $M(t)$ — возрастающая выпуклая функция на $[0,\infty)$, $M(0) = 0$. Пространство Орлича L_M состоит из всех измеримых на $[0,1]$ функций x, таких, что норма

$$\|x\|_{L_M} := \inf\left\{u > 0 : \int_0^1 M\left(\frac{|x(s)|}{u}\right) ds \leq 1\right\}$$

конечна. В частности, если $M(t) = t^p$, $1 \leq p < \infty$, получаем L_p-пространства. Замыкание L_∞ в пространстве Орлича, построенном по функции $M(t) = e^{t^2} - 1$, обычно обозначается через G. Хорошо известно (см. [6] или [7, лемма 3.2]), что $x \in G$, если и только если

$$\lim_{t \to 0} \frac{x^*(t)}{\ln^{1/2}(e/t)} = 0.$$

Из последнего соотношения, в частности, легко видеть, что $G \overset{\neq}{\subset} L_p$ для каждого $p < \infty$. Поэтому следующее утверждение является усилением теоремы 1.

Теорема 2. *Пусть X — 2-дизъюнктно однородное симметричное пространство на $[0,1]$, $X \supset G$. Тогда каждый строго сингулярный оператор, действующий в X, компактен.*

Доказательство. Пусть линейный оператор $T : X \to X$ строго сингулярен. Так как пространство X 2-дизъюнктно однородно, то ввиду [4, лемма 2.10] достаточно показать, что множество $T([-x,x])$, где $[-x,x] := \{y \in X : |y| \leq x\}$, относительно компактно в X для каждого $x \in X$, $x \geq 0$.

Если T не компактен, то существуют $x \in X$, $x \geq 0$, и последовательность $\{g_n\}$ из порядкового интервала $[-x, x]$ такие, что последовательность $\{Tg_n\}$ не содержит фундаментальных в X подпоследовательностей. Из условия ясно, что в X нет подрешеток, изоморфных l_1 или c_0. Следовательно, X рефлексивно [8, теорема 14.23]. Поэтому, последовательность, образованная разностями элементов некоторой подпоследовательности $\{g_n\}$ слабо сходится к нулю в X. Обозначив ее через $\{f_n\}$, согласно предположению имеем

$$\|Tf_n\|_X \geq \alpha \tag{1}$$

для некоторого $\alpha > 0$ и всех $n \in \mathbb{N}$.

Так как $|f_n| \leq 2x$ и норма пространства X абсолютно непрерывна, то для каждого $\varepsilon > 0$ существует такое $M > 0$, что

$$\|f_n \chi_{\{|f_n| \geq M\}}\| < \varepsilon \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{2}$$

Заметим, что последовательность $f_n^M := f_n \chi_{\{|f_n| < M\}}$ содержится в интервале $[-M, M]$, и, значит, снова переходя к подпоследовательности, можно считать, что $\{f_n^M\}$ сходится слвбо в X к некоторому $f \in [-M, M]$. Поэтому, если $z_n := f_n^M - f$, то $|z_n| \leq 2M$ и $z_n \xrightarrow{w} 0$ в X. Более того, так как $f_n \xrightarrow{w} 0$ в X, то ввиду (2) $\|f\|_X \leq \varepsilon$. Значит, в силу (1) и (2)

$$\|Tz_n\| \geq \|Tf_n^M\| - \|Tf\| \geq \|Tf_n\| - (\|T(f_n \chi_{\{|f_n| \geq M\}})\| + \|Tf\|) \geq \alpha - 2\|T\|\varepsilon.$$

Отсюда, если ε удовлетворяет неравенству $\varepsilon < \alpha/(4\|T\|)$, то

$$\|Tz_n\| \geq \frac{\alpha}{2} \text{ для всех } n \in \mathbb{N}. \tag{3}$$

Так как $|z_n| \leq 2M$ и $z_n \xrightarrow{w} 0$ в X, то $z_n \xrightarrow{w} 0$ и в L_2. Поэтому согласно [7, теорема 9.2 и следствие 9.1] последовательность $\{z_n\}$ содержит такую подпоследовательность (обозначаем ее по-прежнему через $\{z_n\}$), что для некоторого $C \geq 1$ и любых $a_n \in \mathbb{R}$, $n = 1, 2, \ldots$, и $\tau > 0$

$$\mu\Big\{t \in [0,1] : \Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_n z_n(t)\Big| > \tau\Big\} \leq C\mu\Big\{t \in [0,1] : \Big|\sum_{k=1}^{\infty} a_n r_n(t)\Big| > C^{-1}\tau\Big\},$$

где $r_n(t) := \operatorname{sign} \sin(2^n \pi t)$, $0 \leq t \leq 1$, — функции Радемахера. Так как $X \supset G$, то последовательность $\{r_n\}$ эквивалентна в X каноническому базису в l_2 (см., например, [7, теорема 3.1]). Таким образом, в силу предыдущего неравенства, а также [5, следствие 2.4.2]

$$\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_n Tz_n\Big\|_X \leq \|T\|\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_n z_n\Big\|_X \leq C^2\|T\|\Big\|\sum_{k=1}^{\infty} a_n r_n\Big\|_X \leq C'\|T\|\|(a_n)\|_{l_2}. \tag{4}$$

Тем самым, применяя [8, предложение 2.1], получим, что $\|Tz_n\|_{L_1} \to 0$ при $n \to \infty$. Сопоставляя это соотношение с (3) в силу классической альтернативы Кадеца-Пелчинского [10] заключаем, что из $\{Tz_n\}$ можно выделить подпоследовательность (оставляем для нее прежнее обозначение), эквивалентную в X некоторой последовательности попарно дизъюнктных функций. Так как X — 2-дизъюнктно однородное пространство, то можно считать, что $\{Tz_n\}$ эквивалентна в X каноническому

базису в l_2, т.е. для некоторого $C_1 > 0$

$$C_1^{-1}\|(a_n)\|_{l_2} \le \Big\| \sum_{k=1}^{\infty} a_n T z_n \Big\|_X \le C_1 \|T\| \|(a_n)\|_{l_2}.$$

Отсюда и из (4) следует, что обе последовательности $\{z_n\}$ и $\{Tz_n\}$ эквивалентны в X каноническому базису в l_2. В итоге оператор T является изоморфизмом на бесконечномерном подпространстве пространства X, порожденном последовательностью $\{z_n\}$. Так как это противоречит строгой сингулярности T, то теорема доказана.

Работа подготовлена в рамках выполнения госзадания Минобрнауки, проект 1.470.2016/1.4, а также частично поддержана Российским фондом фундаментальных исследований, грант 17-01-00138.

Литература

1. Kato T. *Perturbation theory for nullity deficiency and other quantities of linear operators*// J. d'Analyse Math. – 1958. – V. 6. – P. 273–322.

2. Calkin J. W. *Abstract symmetric boundary conditions*// Trans. Amer. Math. Soc. – 1939. – V. 45. – № 3. – P. 360–442.

3. Herman R. H. *On the uniqueness of the ideals of compact and strictly singular operators*// Studia Math. – 1967/1968. – V. 29. – P. 161–165.

4. Flores J., Hernández F. L., Semenov E. M., Tradacete P. *Strictly singular and power-compact operators on Banach lattices*// Israel J. Math. – 2012. – V. 188. – P. 323–352.

5. Крейн С. Г., Петунин Ю. И., Семенов Е. М. *Интерполяция линейных операторов.* – М.: Наука, 1978. – 400 с.

6. Рутицкий Я. Б. *О некоторых классах измеримых функций*// УМН – 1965. – Т. 20. – № 4. – С. 205–208.

7. Асташкин С. В. *Функции Радемахера в симметричных пространствах*// Современная математика. Фундаментальные направления – 2009. – Т. 32. – С. 3–161.

8. Aliprantis C. D., Burkinshaw O. *Positive Operators.* – Dordrecht: Springer, 2006.

9. Flores J., Hernández F. L., Kalton N. J., Tradacete P. *Characterizations of strictly singular operators on Banach lattices*// J. London Math. Soc. – 2009. – V. 79. – P. 612–630.

10. Kadec M. I., Pe lczyński A. *Bases, lacunary sequences and complemented subspaces in the spaces L_p* // Stud. Math. – 1962. – V. 21. – P. 161–176.

ON SYMMETRIC SPACES WITH KATO PROPERTY

S.V. Astashkin

A Banach space X is said to have the Kato property if every linear strictly singular operator in X is compact. Refining some recent results, we prove that there is a wide class of 2-disjointly homogeneous symmetric spaces that possess this property.

Keywords: symmetric space, compact operator, strictly singular operator, 2-disjointly homogeneous Banach lattice.

УДК 517.948

МЕТОДЫ ПРИБЛИЖЕННОГО РЕШЕНИЯ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРО–ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ

М.Г. Ахмадиев[1]

1 *bulat–007@mail.ru*; Казанский научно–исследовательский технологический университет

В работе для численного решения сингулярного интегро–дифференциального уравнения задачи дифракции используется метод механических квадратур. Доказано, что этот метод устойчив относительно малых возмущений элементов аппроксимирующих уравнений.

Ключевые слова: приближенные методы, задача дифракции, метод механических квадратур, сингулярные интегро–дифференциальные уравнения, аппроксимирующие уравнения, операторные уравнения.

В работах [1]–[6] рассмотрены прямые методы решения следующего уравнения теории крыла, которая имеет приложения в ряде прикладных задач, например, в задачах аэродинамики, теории упругости, фильтрации, управления и др.:

$$B(t)\Gamma(t) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(\tau)}{\tau - t}dt = f(t)\ \ (-1 < t < 1),$$

при условиях $\Gamma(-1) = \Gamma(1) = 0$.

В работе [2] отмечено, что аналогичные результаты могут быть получены и для уравнений вида

$$\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1}\frac{\Gamma'(\tau)}{\tau - t}dt + (T\Gamma)(t) = f(t)\ \ (-1 < t < 1),$$

где T – вполне непрерывный оператор.

Следуя указанным выше работам, рассмотрим сингулярное интегро–дифференциальное уравнение, встречающееся в задачах дифракции [7]–[8]

$$\frac{d}{dt}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi(\tau)}{\tau - t}dt + \int_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau)}{|\tau - t|^{\lambda}}\varphi(\tau)d\tau = f(t)\ \ (-1 < t < 1), \tag{1}$$

при условиях

$$\varphi(-1) = \varphi(1) = 0, \tag{2}$$

где $h(t,\tau)$, $f(t)$ – известные функции, $\varphi(t)$ – искомая функция, $\lambda\,(0 \le \lambda < 1)$ – числовой параметр, а сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

В этой работе для численного решения задачи (1)–(2) применяется метод механических квадратур; это является непосредственным продолжением работы [9], где поставленная задача решена полиномиальными методами. Теоретическое обоснование метода механических квадратур проводится с помощью одного из вариантов общей теории приближённых методов анализа [10] и результатов теории приближения функций.

Известно [1], что решение задачи (1)–(2) представляется в виде

$$\varphi(\tau) = \sqrt{1-\tau^2}\varphi_0(\tau),$$

где $\varphi_0(\tau)$ – ограниченная функция.

Приближённое решение задачи (1)–(2) ищем в виде (см. например, [1] или [8])

$$\varphi_n(\tau) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}\widetilde{\varphi}(\tau_k)\frac{\sqrt{1-\tau^2}U_n(\tau)\sqrt{1-\tau^2}}{\tau-\tau_k} =$$

$$= \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\varphi}(\tau_k)\sum_{m=1}^{n}\frac{T_{m-1}(\tau)-T_{m+1}(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\sin(m\nu_k),$$

где $\nu_k = \frac{k\pi}{n+1}$, $\tau_k = \cos\nu_k$, а $T_k(\tau)$ и $U_k(\tau)$ – полиномы Чебышева первого и второго рода, соответственно. Следуя работам [1], [3] и [8], используя при этом свойства полиномов Чебышева, находим

$$\frac{d}{dt}\int_{-1}^{1}\frac{\varphi_n(\tau)}{\tau-t}d\tau = -\frac{2\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\widetilde{\varphi}(\tau_k)\sum_{k=1}^{n}mU_{m-1}(t)\sin(m\nu_k) = \sum_{k=1}^{n}\widetilde{\varphi}(\tau_k)\frac{w(\tau_k,t)}{\sqrt{1-t^2}}, \qquad (3)$$

где

$$w(\tau_k,t) = \frac{2\pi}{n+1}\sum_{m=1}^{n}m\sin(m\nu_k)\sin(m\nu),\ t=\cos\nu.$$

Для интеграла со слабой особенностью построим квадратурную формулу. С этой целью подинтегральную функцию $h(t,\tau)\varphi(\tau)$ аппроксимируем полиномом $P_n^{\tau}(h\varphi)$ по переменной τ. Здесь через P_n^{τ} обозначен оператор, ставящий в соответствие любой непрерывной функции её интерполяционный полином Лагранжа по узлам τ_k. Тогда имеем

$$T(h\varphi)(t) = \int_{-1}^{1}\frac{h(t,\tau)}{|\tau-t|^{\lambda}}\varphi(\tau)d\tau \approx \sum_{k=1}^{n}h(t,\tau_k)\widetilde{\varphi}(\tau_k)\int_{-1}^{1}\frac{l_k(\tau)}{|\tau-t|^{\lambda}}d\tau, \qquad (4)$$

где $l_k(\tau)$ – фундаментальные полиномы Лагранжа для узлов τ_k.

Таким образом, используя формулы (3) и (4), получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно приближённых значений искомой функции, обозначим их через $\widetilde{\varphi}(\tau_k)$.

$$\sum_{k=1}^{n}\left[\frac{w(\tau_k,\tau_j)}{\sin\nu}+h(\tau_j,\tau_k)\alpha_{kj}\right]\widetilde{\varphi}(\tau_k) = f(\tau_j)\,(j=1,2,\dots n), \qquad (5)$$

где

$$\tau_m = \cos\nu_m;\ \nu_m = \frac{m\pi}{n+1}\,(m=k,j);\ \alpha_{kj} = \int_{-1}^{1}\frac{l_k(\tau)}{|\tau_j-\tau|^{\lambda}}d\tau.$$

Введём в рассмотрение пространство $L_{2,\rho}$ квадратично-суммируемых функций с весом $\rho(t) = \sqrt{1-t^2}$ с обычной нормой. Через $L_{2,\rho}^{(1)}$ обозначим пространство функ-

ций, удовлетворяющих условиям (2), первые производные которых квадратично-суммируемы с весом $\rho(t)$

$$\|\varphi\|_{L_{2,\rho}^{(1)}} = \|\varphi'\|_{L_{2,\rho}} = \|\varphi'\|_{2,\rho} = \left(\int_{-1}^{1} \rho(t)|\varphi'(t)|^2 dt\right)^{1/2}.$$

Пусть $X = L_{2,\rho}^{(1)}$, $Y = L_{2,\rho}$. Тогда задачу (1)-(2) запишем в виде операторного уравнения, эквивалентного ей,

$$K\varphi = \frac{d}{dt}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{\tau - t} d\tau + \int_{-1}^{1} \frac{h(t,\tau)}{|t-\tau|^{\lambda}} \varphi(\tau) d\tau. \tag{6}$$

Теорема. *Пусть $f \in C$, $h(t,\tau)$ непрерывна по переменному t и удовлетворяет условию Дини-Липшица по переменной τ и уравнение (6) однозначно разрешимо в X при любой правой части $f \in Y$. Тогда при n таких, что*

$$q_n = A\left\{\omega_t(h, \frac{1}{n})_C + \frac{1}{n^{1-\lambda}} + \left[\omega_\tau(h, \frac{1}{n})_C + \frac{1}{n^{1/4}}\right]\ln n\right\} < 1$$

система (5) имеет единственное решение $\{\widetilde{\varphi}^*(\tau_k)\}_{k=1}^n$ и приближённые решения

$$\varphi_n^*(\tau) = \frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n} (-1)^{k+1} \widetilde{\varphi}^*(\tau_k) \frac{\sqrt{1-\tau^2}U_n(\tau)\sqrt{1-\tau_k^2}}{\tau - \tau_k}$$

сходятся к точному решению $\varphi^*(\tau)$ со скоростью

$$\|\varphi^* - \varphi_n^*\|_X = O\{q_n + E_{n-1}(f)_C\},$$

где A – постоянная, не зависящая от n, $\omega_S(h, \frac{1}{n})_C$ – модуль непрерывности функции $h(\cdot,\cdot)$ по переменной S равномерно относительно другой, а $E_{n-1}(f)_C$ – наилучшее равномерное приближение функции $f(t)$ алгебраическими полиномами степени не выше $n-1$.

Литература

1. Каландия А. И. *Математические методы двумерной теории упругости.* – М.: Наука,1973. – 304 с.

2. Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения уравнения теории крыла* // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 2. – С. 29–44.

3. Иванов В. В. *Теория приближенных методов и ее применение к численному решению сингулярных интегральных уравнений.* – Киев: Наукова думка, 1968. – 288 с.

4. Габдулхаев Б. Г. *Конечномерные аппроксимации сингулярных интегралов и прямые методы решения особых интегральных и интегро-дифференциальных уравнений* // Итоги науки и техники. Сер. Математики. – 1980. – Т. 18. – М.: ВИНИТИ. – С. 251–307.

5. Ioakimidis N. I. *A natural interpolation formula for Prandtl's singular integrodifferential rquation* // Int.j. Meth. Fluids. – 1984. – Т. 4. – № 3. – P. 283–290.

6. Белоцерковский С. М., Лифанов И. К. *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях и их применение в аэродинамике, теории упругости, электродинамике.* – М.: Наука, 1985. – 254 с.

7. Захаров Е. В., Собянина И. В. *Об одномерных интегро-дифференциальных уравнениях задач дифракции на экранах* // Журн. выч. матем. и матем. физ. – 1986. – Т. 26. – № 4. – С. 632–636.

8. Панасюк В. В., Саврук М. П., Назарчук З. Т. *Метод сингулярных интегральных уравнений в двумерных задачах дифракции.* – Киев: Наукова думка, 1984. – 344 с.

9. Ахмадиев М. Г. *Прямые методы решения некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнений.* // Казань:Деп. в ВИНИТИ. – 1986. – № 43. – 18 с.

10. Габдулхаев Б. Г. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань.: Изд-во КГУ, 1980. – 232 с.

11. Натансон П. Н. *Конструктивная теория функций.* – М.-Л.: Гостехиздат, 1949. – 688 с.

APPROXIMATE METHODS OF SOLUTION OF SINGULAR INTEGRO–DIFFERENTIAL EQUATIONS OF DIFFRACTION

M.G. Akhmadiev

For numerical solution of singular integro–differential equations of diffraction it is used the method of mechanical quadratures. It is proved that this method is stable under small perturbations of approximating equations.

Keywords: approximate methods, diffraction problem, method of the mechanical squarings, singular and integro–differential equations, approximating equations, operators equations.

УДК 517.51

ПРИБЛИЖЕНИЕ НЕКОТОРЫХ КЛАССОВ ФУНКЦИЙ МНОГИХ ПЕРЕМЕННЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКИМИ СУММАМИ ФУРЬЕ ПО КРАТНОЙ СИСТЕМЕ ВСПЛЕСКОВ С КОМПАКТНЫМИ НОСИТЕЛЯМИ

Ш.А. Балгимбаева[1]

1 *sholpan.balgyn@gmail.com*; Институт математики и математического моделирования, Алматы, Казахстан

Получены точные по порядку оценки приближения гиперболическими суммами Фурье по кратной системе всплесков с компактными носителями на классах типа Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля в пространстве L_q для всевозможных значений параметров классов и пространства.

Ключевые слова: поперечники Фурье, гиперболический крест, пространства типа Никольского–Бесова, пространства типа Лизоркина–Трибеля.

Пусть $\mathbb{N}, \mathbb{R}, \mathbb{Z}$ — множества натуральных, действительных и целых чисел соответственно; $\mathbb{N}_0 = \mathbb{N} \cup \{0\}$, $\mathbb{R}_+ = (0, +\infty)$.

Пусть $L_q = L_q([0,1]^d)$ $(1 \le q \le \infty, 2 \le d \in \mathbb{N})$ — пространство измеримых функций $f : [0,1]^d \to \mathbb{C}$, суммируемых в степени q (при $q = \infty$ существенно ограниченных) на $[0,1]^d$ со стандартной нормой

$$\| f \mid L_q \| = \| f \mid L_q([0,1]^d) \| = \left(\int_{[0,1]^d} | f(x) |^q dx \right)^{1/q} (1 \le q < \infty),$$

$$\| f \mid L_\infty \| = \| f \mid L_\infty([0,1]^d) \| = \operatorname{ess\,sup} \{ | f(x) | : x \in [0,1]^d \}.$$

Пусть $\Phi = \{\phi_\iota \mid \iota \in \mathrm{J}\}$ – счетное семейство функций в L_∞, ортонормальное в L_2, и пусть $\{J(n) \subset \mathrm{J} \mid n \in \mathbb{N}\}$ такое, что $J(n) \subset J(n+1)$ и $\#J(n) < \infty$ для всех $n \in \mathbb{N}$, $\cup_{n\in\mathbb{N}} J(n) = \mathrm{J}$.

Для $f \in L_1$ мы рассмотрим сумму Фурье по системе Φ в виде

$$S_n^\Phi(f,x) = \sum_{\iota\in J(n)} \langle f, \phi_\iota\rangle \phi_\iota(x),$$

где $\langle f, g\rangle = \int_{[0,1]^d} f(x)\overline{g}(x)dx$ ($\overline{z}$ – число, комлексно-сопряженное к $z \in \mathbb{C}$).

Для множества $\mathrm{F} \in L_q$ обозначим

$$E_n(\mathrm{F}, \Phi, L_q) = \sup\{\|f - S_n^\Phi(f,x) \mid L_q\| \mid f \in \mathrm{F}\}. \tag{1}$$

Нами получены (точные по порядку) оценки приближения гиперболическими крестами по системе $\psi^{(\mathrm{d})}$ классов типа Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля, заданных по системе всплесков с компактными носителями, в пространстве $L_q([0,1]^d)$ для всевозможных значений параметров классов и пространства.

Введем некоторые обозначения. Пусть $d \in \mathbb{N}$, $\mathrm{z}_d = \{1,\dots,d\}$; $k \in \mathbb{N}$: $k \le d$. Фиксируем мультииндекс $\mathrm{d} = (d_1,...,d_k) \in \mathbb{N}^k$ так, что $d_1 + \cdots + d_k = d$, и представим $x = (x_1,\dots,x_d) \in \mathbb{R}^d$ в виде $x = (x^1,\dots,x^k)$, где $x^\kappa \in \mathbb{R}^{n_\kappa}$, $\kappa \in \mathrm{z}_k$.

Обозначим

$$\mathrm{e}^d = \mathrm{e}^d(0) = \{0,1\}^d, \quad \mathrm{e}^d(1) = \mathrm{e}^d \setminus \{(0,\dots,0)\};$$

$$\Xi(d,j) = \mathbb{Z}^d \cap [0, 2^j - 1]^d,\ j \in \mathbb{N}_0.$$

Пусть масштабирующая функция $\psi^{(0)}$ и соответствующая всплеск–функция $\psi^{(1)}$ имеют компактный носитель:

$$\operatorname{supp}\psi^{(0)} \cup \operatorname{supp}\psi^{(1)} \subset [0, 2N-1] \text{ for some } N > 0;$$

$\psi^{(0)}, \psi^{(1)} \in C^r(\mathbb{R})$.

Далее, d-кратная всплеск-система, определяется как

$$\psi^{(\mathrm{d})} = \{\psi^\iota_{\alpha\sigma}(x) \ \mid\ \iota \in \mathrm{e}^{\mathrm{d}}(\alpha),\ \sigma \in \Xi(\mathrm{d},\alpha),\ \alpha \in \mathbb{N}_0^k\},$$

где

$$\psi^\iota_{\alpha\sigma}(x) = \prod_{\kappa=1}^k \psi^{\iota^\kappa}_{\alpha_\kappa\sigma^\kappa}(x^\kappa),\ \ \psi^{\iota^\kappa}_{j\sigma^\kappa}(x^\kappa) = 2^{\frac{jd_\kappa}{2}}\psi^{\iota^\kappa}(2^j x^\kappa - \sigma^\kappa);$$

$$\psi^{\iota^\kappa}(x^\kappa) = \prod_{\nu\in \mathrm{k}_\kappa} \psi^{(\iota_\nu)}(x_\nu),$$

здесь

$$\mathrm{e}^{\mathrm{d}}(\alpha) = \mathrm{e}^{d_1}(\operatorname{sign}(\alpha_1)) \otimes \cdots \otimes \mathrm{e}^{d_k}(\operatorname{sign}(\alpha_k)),$$

$$\sigma(\mathrm{d},\alpha) = \sigma(d_1,\alpha_1) \times \cdots \times \sigma(d_k,\alpha_k).$$

Известно, что система $\psi^{(\mathrm{d})}$ является ортонормированной в $L_2([0,1]^d)$. Кроме того, система $\psi^{(\mathrm{d})}$ является безусловным базисом $L_q([0,1]^d)$ при $1 < q < \infty$. В случае $k = 1$ этот факт доказан в [1, гл. 8]. Случай $k > 1$ следует отсюда, т. к. система $\psi^{(\mathrm{d})}$ (по переменной x) есть тензорное произведение систем $\psi^{(d_\kappa)}$ (по переменным x^κ), $\kappa \in \mathrm{z}_k$.

Определим оператор Δ_α^ψ $(\alpha \in \mathbb{N}_0^k)$ следующим образом: пусть для $f \in L_1$

$$\Delta_\alpha^\psi(f,x) = \sum_{\iota \in \mathrm{e}^{\mathrm{d}}(\alpha)} \sum_{\sigma \in \Xi(\mathrm{d},\alpha)} f_{\alpha\sigma}^\iota \psi_{\alpha\sigma}^\iota(x)$$

диадическая пачка, где

$$f_{\alpha\sigma}^\iota = \int_{[0,1]^d} f(x)\, \psi_{\alpha\sigma}^\iota(x)\, dx.$$

Кроме того, для $f \in L_1$ определим ее суммы Фурье по системе $\psi^{(\mathrm{d})}$ по гиперболическим крестам (для фиксированного $\sigma = (\sigma_1, \ldots, \sigma_k) \in \mathbb{R}_+^k$):

$$S_n^{\psi,\sigma}(f,x) = \sum_{\alpha\sigma \le n} \Delta_\alpha^\psi(f,x) \quad (n \in \mathbb{N})$$

(здесь $\alpha\sigma := \alpha_1\sigma_1 + \ldots + \alpha_k\sigma_k$). Далее будем обозначать величину (1) с $S_n^{\psi,\sigma}$ вместо S_n^Φ как $E_n^\sigma(\mathrm{F}, L_q)$.

Пусть $1 \le p, \theta \le \infty$ и пусть $\ell_\theta \equiv \ell_\theta(\mathbb{N}_0^k)$ – пространство последовательностей комплексных чисел $(c_\alpha) = (c_\alpha \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^k)$ с конечной нормой

$$\|(c_\alpha) \,|\, \ell_\theta\| = \Big(\sum_{\alpha \in \mathbb{N}_0^k} |\, c_\alpha \,|^\theta \Big)^{1/\theta} \ (1 \le \theta < \infty), \ \ \|(c_\alpha) \,|\, \ell_\infty\| = \sup_{\alpha \in \mathbb{N}_0^k} |\, c_\alpha \,|;$$

пусть $\ell_\theta(L_p) \equiv \ell_\theta(L_p([0,1]^d))$ (соответственно $L_p(\ell_\theta) \equiv L_p([0,1]^d; \ell_\theta)$) — пространство функциональных последовательностей $(g_\alpha(x)) = (g_\alpha(x) \,|\, \alpha \in \mathbb{N}_0^k)$ $(x \in [0,1]^d)$ с конечной нормой

$$\|\,(g_\alpha(x)) \,|\, \ell_\theta(L_p)\,\| = \|\,(\,\|\, g_\alpha \,|\, L_p \,\|)\,|\, \ell_\theta\,\|$$

(соответственно

$$\|\,(g_\alpha(x)) \,|\, L_p(\ell_\theta)\,\| = \|\,\|\,(g_\alpha(\cdot)) \,|\, \ell_\theta\,\|\,|\, L_p\,\|\,).$$

Введем функциональные пространства (и классы), которые будем рассматривать далее.

Определение. *Пусть $s = (s_1, \ldots, s_k) \in \mathbb{R}_+^k$, $1 \le p, \theta \le \infty$. Тогда*

i) *пространство типа Никольского–Бесова $\psi B_{p\theta}^{s\mathrm{d}} \equiv \psi B_{p\theta}^{s\mathrm{d}}([0,1]^d)$, связанное с системой $\psi^{(\mathrm{d})}$, состоит из всех функций $f \in L_p$, для которых конечна норма*

$$\|\, f \,|\, \psi B_{p\theta}^{s\mathrm{d}}\,\| = \|(2^{\alpha s} \Delta_\alpha^\psi(f,x)) \,|\, \ell_\theta(L_p)\|;$$

ii) *пространство типа Лизоркина–Трибеля $\psi L_{p\theta}^{s\mathrm{d}} \equiv \psi L_{p\theta}^{s\mathrm{d}}([0,1]^d)$, связанное с системой $\psi^{(\mathrm{d})}$, состоит из всех функций $f \in L_p$, для которых конечна норма*

$$\|\, f \,|\, \psi L_{p\theta}^{s\mathrm{d}}\,\| = \|(2^{\alpha s} \Delta_\alpha^\psi(f,x)) \,|\, L_p(\ell_\theta)\|.$$

Единичные шары $\psi\mathrm{B}_{p\theta}^{s\mathrm{d}} \equiv \psi\mathrm{L}_{p\theta}^{s\mathrm{d}}([0,1]^d)$ и $\psi\mathrm{L}_{p\theta}^{s\mathrm{d}} \equiv \psi\mathrm{L}_{p\theta}^{s\mathrm{d}}([0,1]^d)$ этих пространств будем называть классами Никольского-Бесова и Лизоркина-Трибеля, связанными с системой $\psi^{(\mathrm{d})}$ соответственно.

Нетрудно показать, что если $r > s$, то пространства $\psi B^{s\mathrm{d}}_{p\theta}([0,1]^d)$ и $\psi B^{s\mathrm{d}}_{p\theta}([0,1]^d)$ совпадают соответственно с пространствами $B^{sm}_{p\theta}([0,1]^d)$ и $L^{sm}_{p\theta}([0,1]^d)$ обобщенной смешанной гладкости на единичном кубе $[0,1]^d$, которые есть непериодический аналог пространств периодических функций, изученных в [2].

Если $s_j > r_j$, $j \in \mathrm{e}_d$, тогда мы имеем другие классы и теоремы, которые представляют основные результаты работы, являются обобщениями результатов по приближениям по гиперболическим крестам функциональных классов $\chi\mathrm{B}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}$ и $\chi\mathrm{L}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}$, определенных с помощью n-кратной системы Хаара (соответственно при $r = 0$) [3].

Положим $p_* = \min\{p, 2\}$, $\varsigma_\kappa = \frac{s_\kappa}{d_\kappa}$; без потери общности, мы будем считать $\varsigma \equiv \min\{\varsigma_\kappa \mid \kappa \in \mathrm{z}_k\} = \varsigma_1 = \ldots = \varsigma_\omega < \varsigma_\kappa$, $\kappa \in \mathrm{z}_k \setminus \mathrm{z}_\omega$ для некоторого $\omega \in \mathrm{z}_k$. Рассмотрим вектор $\varsigma' = (\varsigma'_1, \ldots, \varsigma'_k)$ такой, что $\varsigma = \varsigma'_1 = \ldots = \varsigma'_\omega < \varsigma'_\kappa < \varsigma_\kappa$, $\kappa = \omega + 1, \ldots, k$, и положим $s' = (s'_1, \ldots, s'_k)$ с $s'_\kappa = \varsigma'_\kappa d_\kappa$ ($\kappa \in \mathrm{z}_k$) и $\gamma = \frac{1}{\varsigma} s'$.

Ниже мы будем использовать символы $\ll$ и $\asymp$, чтобы показать отношения между порядками величин: для функций $F : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ и $H : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ пишем $F(u) \ll H(u)$ при $u \to \infty$, если существует постоянная $C = C(F, H) > 0$ такая, что неравенство $F(u) \le CH(u)$ имеет место для $u \ge u_0 > 0$, и $F(u) \asymp H(u)$, если $F(u) \ll H(u)$ и $H(u) \ll F(u)$ одновременно.

Для числа $a \in \mathbb{R}$ положим $a_+ = \max\{a, 0\}$; ниже, log – логарифм по основанию 2.

Теорема 1. *Пусть* $1 < q \le p \le \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *и* $s \in \mathbb{R}^k_+$. *Тогда*

$$E^\sigma_n(\psi\mathrm{B}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_q) \asymp 2^{-\varsigma n} n^{(\omega-1)(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Если, кроме того, $1 < p < \infty$, *тогда* $E^\sigma_n(\psi\mathrm{L}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_q) \asymp 2^{-\varsigma n} n^{(\omega-1)(\frac{1}{2}-\frac{1}{\theta})_+}$. *Кроме этого,* $E^\sigma_n(\psi\mathrm{L}^{s\mathrm{d}}_{1\theta}, L_1) \asymp 2^{-\varsigma n} n^{(\omega-1)(1-\frac{1}{\theta})_+}$.

Эта теорема – аналог теоремы 4.1 из [2] и аналог теоремы 1 из [3] для классов Никольского–Бесова и Лизоркина–Трибеля, связанных с системой $\psi^{(\mathrm{d})}$.

Теорема 2. *Пусть* $1 \le p < q < \infty$, $1 \le \theta \le \infty$ *и* $s \in \mathbb{R}^k_+$ *такое, что* $\varsigma > \frac{1}{p} - \frac{1}{q}$. *Тогда*

$$E^\sigma_n(\psi\mathrm{B}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_q) \asymp 2^{-(\varsigma-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n} n^{(\omega-1)(\frac{1}{q}-\frac{1}{\theta})_+}; \quad E^\sigma_n(\psi\mathrm{L}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_q) \asymp 2^{-(\varsigma-\frac{1}{p}+\frac{1}{q})n}.$$

Теорема 3. *Пусть* $1 \le p, \theta \le \infty$ *и* $s \in \mathbb{R}^k_+$ *такое, что* $\varsigma > \frac{1}{p}$. *Тогда*

$$E^\sigma_n(\psi\mathrm{B}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_\infty) \asymp 2^{-(\varsigma-\frac{1}{p})n} n^{(\omega-1)(1-\frac{1}{\theta})_+}.$$

Если, кроме того, $p < \infty$, *тогда*

$$E^\sigma_n(\psi\mathrm{L}^{s\mathrm{d}}_{p\theta}, L_\infty) \asymp 2^{-(\varsigma-\frac{1}{p})n} n^{(\omega-1)(1-\frac{1}{p})}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Гранта № 5130/ГФ4 Комитета науки Министерства образования и науки Республики Казахстан.

Литература

1. Wojtaszczyk P. *A mathematical introduction to wavelets.* – Cambridge.: CUP, 1997. – 261 p.

2. Базарханов Д. Б. *Приближение всплесками и поперечники Фурье классов периодических функций многих переменных. I* // Тр. МИ РАН. – 2010. – Т. 269. – С. 8–30.

3. Bazarkhanov, D.B.: Hyperbolic cross approximation of some function classes w. r. t. multiple Haar system on the unit cube // Springer Conference Proceedings. — 2017.

HYPERBOLIC CROSS APPROXIMATION OF SOME MULTIVARIATE FUNCTION CLASSES W. R. T. WAVELET SYSTEM WITH COMPACT SUPPORTS

Sh. Balgimbayeva

We obtain estimates, sharp in order, for hyperbolic cross approximation w.r.t. d*–multiple wavelet system with compact supports* $\psi^{(\mathrm{d})}$ *of the Nikol'skii – Besov and Lizorkin – Triebel type classes associated with this system in the space* $L_q([0,1]^d)$ *for a number of relations between the parameters of the classes and the space.*

Keywords: Fourier width, hyperbolic cross, the Nikol'skii – Besov type space, the Lizorkin – Triebel type space.

УДК 621.391.1 : 519.6

ПРОГРАММНАЯ РЕАЛИЗАЦИЯ БЫСТРОГО ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ

А.А. Барышев[1], Г.А. Бондаренко[2], Д.С. Лукомский[3]

1 *baryshevaa@gmail.com*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет

2 *gebond77@gmail.com*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет

3 *lukomskiids@info.sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет

В статье обсуждается реализация численного алгоритма быстрого дискретного преобразования Фурье на локальных полях положительной характеристики. В качестве примера применения алгоритма приводится сжатие изображений.

Ключевые слова: дискретное преобразование Фурье, локальные поля, численный алгоритм, сжатие изображений.

Данная работа посвящена вопросу численной реализации быстрого преобразования Фурье на локальных полях, рассмотренного в работе С.Ф. Лукомского и А.М. Водолазова [1]. Необходимо отметить, что в настоящее время в информационных технологиях активно применяются алгоритмы, использующие различные свойства преобразования Фурье по разнообразным системам. Будем рассматривать применение алгоритма на примере сжатия изображений.

Под локальным полем K понимают локально компактное, вполне несвязное, недискретное, полное топологическое пространство, в котором определены непрерывные операции "$\dotplus$", "$\cdot$" – сложения и умножения, для которых выполнены акси-

омы поля. В поле K вводят оператор растяжения следующим образом. Единичный шар

$$\mathscr{D} = \{x \in K : |x| \leq 1\},\ \mu\mathscr{D} = 1.$$

является кольцом, в котором существует единственный максимальный идеал

$$\mathscr{B} = \{x \in K : |x| < 1\}.$$

Элемент $\mathfrak{p} \in \mathscr{B}$ с наибольшей нормой $|\mathfrak{p}|$ называют примитивным элементом. Для него $\mu\mathscr{B} = |\mathfrak{p}| = \frac{1}{p^s}$, где p – простое, $s \in \mathbb{N}$. Если $x \in \mathscr{D} \setminus \mathscr{B}$, то $|x| = 1$. Если для любого $a \in K$ произведение $pa \stackrel{df}{=} \underbrace{a + a + \cdots + a}_{p} = 0$, то число p называют характеристикой поля K.

Пусть p – простое и s – натуральное. Конечное поле $GF(p^s)$ состоит из векторов

$$\mathbf{a} = (a^{(0)}, a^{(1)}, ..., a^{(s-1)}),$$

в которых компоненты $a^{(j)}$ принимают значения от 0 до $p-1$, операция сложения определяется покомпонентно по модулю p. Локальное поле $K = F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно множеству формальных степенных рядов

$$a = \sum_{i=k}^{\infty} a_i t^i, k \in \mathbb{Z},\ ,\ a_i \in GF(p^s)$$

Операции сложения и умножения определяются как сумма и произведение таких рядов. Можно считать, что локальное поле $F^{(s)}$ характеристики p состоит из бесконечных в обе стороны последовательностей

$$a = (\ldots, \mathbf{0}_{n-1}, \mathbf{a}_n, \ldots, \mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \ldots),\ \mathbf{a}_j \in GF(p^s)$$

в которых лишь конечное число элементов $\mathbf{a}_j$ с отрицательными номерами отлично от нуля.

Пусть $f^{(N)}$ – ступенчатая функция. Обозначим ее значения на смежных классах

$$K_N \dot{+} \mathbf{a}_{N-1} g_{N-1} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{a}_1 g_1 \dot{+} \mathbf{a}_0 g_0 \subset K_0.$$

через

$$f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} := f^{(N)}(K_N \dot{+} \mathbf{a}_{N-1} g_{N-1} \dot{+} \ldots \dot{+} \mathbf{a}_1 g_1 \dot{+} \mathbf{a}_0 g_0)$$

Таким образом, преобразование Фурье вектору значений

$$f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}$$

ставит в соответствие вектор коэффициентов $c_{\bar{\alpha}_0, \bar{\alpha}_1, \ldots, \bar{\alpha}_{N-1}}$.
Можно считать, что вектор значений функции $f^{(N)}$ есть вектор

$$\mathbf{F} = f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} = \left| \text{т.к. } \mathbf{a}_m = (a_m^{(0)}, a_m^{(1)}, \ldots, a_m^{(s-1)}), a_m^{(j)} = \overline{0, p-1} \right| =$$

$$= f^{(N)}_{a^{(0)}_{N-1} a^{(1)}_{N-1} \ldots a^{(s-1)}_{N-1}, a^{(0)}_{N-2} a^{(1)}_{N-2} \ldots a^{(s-1)}_{N-2}, \ldots, a^{(0)}_1 a^{(1)}_1, \ldots, a^{(s-1)}_1, a^{(0)}_0 a^{(1)}_0, \ldots, a^{(s-1)}_0}.$$

Будем полагать, что $f^{(N)}_{\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}$ занумерованы индексом

$$n = (a^{(0)}_{N-1} + a^{(1)}_{N-1}p + \cdots + a^{(s-1)}_{N-1}p^{s-1}) + p^s(a^{(0)}_{N-2} + a^{(1)}_{N-2}p + \cdots + a^{(s-1)}_{N-2}p^{s-1}) + \cdots + \\ + p^{s(N-1)}(a^{(0)}_0 + a^{(1)}_0 p + \cdots + a^{(s-1)}_0 p^{s-1}). \quad (1)$$

Далее приведем формулы обратного преобразования Фурье

$$f^{(n)}_{(\bar{\alpha}_N\ldots\bar{\alpha}_n)\mathbf{a}_{n-1}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} = \sum_{\bar{\alpha}_{n-1}\in GF(p^s)} p^{\frac{-s}{2}} e^{\frac{2\pi i}{p}(\bar{\alpha}_{n-1},\mathbf{a}_{n-1})} p^{\frac{s}{2}} f^{(n-1)}_{(\bar{\alpha}_N,\ldots\bar{\alpha}_{n-1})\mathbf{a}_{n-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}. \quad (2)$$

Так как матрица системы (2) унитарна, то ее решение имеет вид

$$f^{(n-1)}_{(\bar{\alpha}_N\ldots\bar{\alpha}_{n-1})\mathbf{a}_{n-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0} = \sum_{\mathbf{a}_{n-1}\in GF(p^s)} p^{-s} e^{-\frac{2\pi i}{p}(\bar{\alpha}_{n-1},\mathbf{a}_{n-1})} f^{(n)}_{(\bar{\alpha}_N,\ldots\bar{\alpha}_n)\mathbf{a}_{n-1}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0}, \quad (3)$$

Это прямое преобразование Фурье. После предпоследнего шага получаем равенства

$$f^{(1)}_{(\bar{\alpha}_N,\bar{\alpha}_{N-1},\ldots,\bar{\alpha}_1)\mathbf{a}_0} = \sum_{\bar{\alpha}_0\in GF(p^s)} e^{\frac{2\pi i}{p}(\bar{\alpha}_0,\mathbf{a}_0)} f^{(0)}_{(\bar{\alpha}_N,\bar{\alpha}_{N-1},\ldots,\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_0)},$$

из которых находим коэффициенты Фурье

$$c_{\bar{\alpha}_0\bar{\alpha}_1\ldots\bar{\alpha}_N} = f^{(0)}_{(\bar{\alpha}_N,\bar{\alpha}_{N-1},\ldots,\bar{\alpha}_1\bar{\alpha}_0)}$$

по формулам (3). Таким образом (3) и (2) – расчетные формулы для прямого и обратного преобразования Фурье соответственно.

Общее количество операций равно $(N+1)\cdot 2p^{2s}\cdot p^{Ns} = 2(N+1)p^{s(N+2)}$.

При реализации данного алгоритма возникает ряд задач, имеющих отношение как к самому БПФ, так и к его практическому применению (например, к сжатию изображений). Первая задача – это организация цикла при вычислении БПФ при произвольном значении s. Чтобы избежать необходимости написания различного количества циклов при разном значении параметра s, вводится отношение порядка в p-ичной системе, количество операций в этом случай увеличивается на множитель sN.

Далее рассмотрим практические задачи на примере сжатия изображений. Изображение можно трактовать как матрицу фиксированного размера, элементами которой являются номера цветов точек в цветовой палитре. Разобьем исходную матрицу на подматрицы размерности $p^N \times p^N$, где p – простое. Данную матрицу будем рассматривать как вектор длины p^{sN}, где $s = 2$. Таким образом, имеем кусочно постоянную функцию f^N, принимающую p^{sN} значений. Далее к ней применяем прямое преобразование Фурье (2), сортируем коэффициенты по убыванию модуля и обнуляем некоторый процент наименьших коэффициентов. Затем применяем обратное преобразование (1) и восстанавливаем изображение.

Отметим проблемы, возникающие при реализации данного алгоритма, которые влияют на вычислительную сложность. В формулах прямого и обратного преобразования для нумерации значений функции и коэффициентов используется мультииндекс $\mathbf{a}_{N-1}\mathbf{a}_{N-2}\ldots\mathbf{a}_1\mathbf{a}_0$, который необходимо преобразовать в десятичное представление и наоборот.

Процедуры пересчета нумерации (преобразования индексов) в приведенных формулах преобразования Фурье не рассматриваются, однако они вносят значительную вычислительную сложность в прикладной задаче. Поэтому необходимо решить следующие проблемы:

1. подсчет мультииндекса по номеру значения функции, задаваемому равенством (1);
2. подсчет номера значения функции по мультииндексу из равенства (1).

Здесь под номером значения функции понимается номер элемента (номер пикселя) в одномерном массиве, полученном из цветовой матрицы. Условимся, что во избежании вложенных итераций основного цикла к исходному массиву размерности s будем обращаться по индексу. Например, если $s = 2$, то к двумерному массиву $funArray[,]$ по номеру N можем обратиться, используя преобразование:

```
int i = (int) N / funArray.len;
int j = N - ( funArray.len * i );
```

Далее, пункт 1 может быть реализован при помощи предварительного подсчета структуры типа Словарь. Для заданных p и s можно пересчитать все комбинации номеров от 0 до p^{sN} и подставить в соответствие каждому мультииндексу число:

```
Map<int, multiindex> map;
for multiindex in gfield(p,s):
int num = calculate(multiindex)
map.add(num, multiindex)
```

$gfield(p,s)$ – это локальное поле состоящее из всевозможных мультииндексов. $int \quad n = calculate(multiindex)$ – это прямой подсчет по формуле (1). Данный подход позволяет сделать пересчет каждого номера лишь один раз при запуске программы и на каждой итерации преобразования обращаться к map по номеру. Алгоритмическая сложность такого подхода близка к $O(1)$, т.е. зависит от времени обращения к элементу массива.

Пункт 2 может быть реализован аналогично при помощи предварительного подсчета многомерного массива размерности ps, для заданных p и s можно пересчитать все комбинации номеров от 0 до p^{sN}. Необходимо в целевой многомерный массив разместить номера значений по координатам, соответствующим компонентам мультииндекса. Приведем пример при $p = 2$, $s = 2$:

```
for multiindex in gfield(p,s):
int num = calculate(multiindex)
map.add(num, multiindex)
vectors[multiindex[0][0], multiindex[0][1], multiindex[1][0],
multiindex[1][1], multiindex[2][0], multiindex[2][1]] = num;
```

таким образом, многомерный массив заполнен числами от 0 до p^{sN} и координаты каждого числа образуют компоненты мультииндекса, поэтому по заданному мультииндексу можно получить соответствующий номер за время, зависящее от скорости обращения к элементам массива.

После реализации данных алгоритмов использование БПФ по заданным формулам обладает необходимой вычислительной сложностью.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152)

Литература

1. Лукомский С.Ф, Водолазов А.М. *Быстрое дискретное преобразование Фурье на локальных полях положительной характеристики* // Проблемы передачи информации. – 2017. – Т. 53. – Вып. 2. – С. 60–69.

IMPLEMENTATION OF FAST FOURIER TRANSFORM ON LOCAL FIELDS

A.A. Baryshev, G.A. Bondarenko, D.S. Lukomskii

The implementation of numerical algorithm of fast Fourier transform on local fields of positive characteristic is discussed in the paper. Image compression is presented as an example of application of the algorithm.

Keywords: discrete Fourier transform, local fields, numerical algorithm, image compression.

УДК 517.982.256 + 515.124.4

О МНОЖЕСТВЕ ST(M_4) В ПРЕДУАЛЬНОМ К L_1 ПРОСТРАНСТВЕ

Б.Б. Беднов[1]

1 *noriiii@inbox.ru*; МГУ им. М.В. Ломоносова, МГТУ им. Н.Э. Баумана

Исследуется множество точек Штейнера четырёх элементов предуального к L_1 пространства.

Ключевые слова: банахово пространство, пространство Линденштраусса, точка Штейнера, липшицева выборка.

Пусть $(X, \|\cdot\|)$ — банахово пространство. Для заданного набора $M_n = \{x_1, \dots, x_n\} \subset X$ множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M_n)$ состоит из таких точек $s \in X$, для которых

$$\sum_{k=1}^{n} \|x_k - s\| = \inf\left\{ \sum_{k=1}^{n} \|x_k - x\| : x \in X \right\} =: |\mathrm{st}|(M_n).$$

Пространство X называется предуальным к L_1 или пространством Линденштраусса, если X^* изометрически изоморфно $L_1(\mu) = L_1(E, \Sigma, \mu)$ для некоторого множества E, некоторой σ-алгебры Σ подмножеств E и некоторой σ-аддитивной меры μ, определенной на Σ. К этому классу пространств относятся все пространства $C[K]$ действительнозначных функций, непрерывных на (хаусдорфовом) компакте K, пространства $c_0(E)$, l_∞ и многие другие. Пространство размерности n предуально к L_1 тогда и только тогда, когда оно изометрически изоморфно l_∞^n (здесь l_∞^n обозначает n-мерное пространство с нормой $\|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \max\{|x_i| : i \in \{1, \dots, n\}\}$). Пространства Линденштраусса хорошо изучены (см. [1], [2], а также [3]).

В предуальном к L_1 пространстве множество точек Штейнера $\mathrm{st}(M_n)$ не пусто [4] для произвольного множества $M_n \subset X$, а само множество $\mathrm{st}(M_n)$ можно охарактеризовать [5] при помощи метрических отрезков (*метрический отрезок* с концами a

и b в банаховом пространстве X есть множество $m[a,b] = \{x \in X : \|x-a\| + \|x-b\| = \|a-b\|\}$).

Для трёх точек в предуальном к L_1 пространстве множество точек Штейнера полностью характеризуется следующей теоремой.

Теорема A [6], [5]. *Пусть пространство X предуально к L_1, $x_1, x_2, x_3 \in X$. Тогда множество* $\mathrm{st}(x_1,x_2,x_3) = m[x_1,x_2] \cap m[x_2,x_3] \cap m[x_3,x_1] = \cap_{i=1}^{3} S(x_i, r_i)$, *где* $r_i = \frac{1}{2}(\|x_j - x_i\| + \|x_k - x_i\| - \|x_k - x_j\|)$, $\{i,j,k\} = \{1,2,3\}$.

Множества $\mathrm{st}(x_i,x_j,x_k)$, $\{i,j,k\} \subset \{1,2,3,4\}$, и $\mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ связаны между собой. Покажем некоторые закономерности.

Теорема 1. *Пусть X предуально к L_1, $x_1, x_2, x_3, x_4 \in X$. Существует точка $s \in \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3) \cap \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$.*

Следствие 1. *Пусть X предуально к L_1, $x_1, x_2, x_3 \in X$. Для произвольной точки $x_4 \in X$ найдётся такая точка $s \in \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3)$, что $s \in \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$.*

Приведём пример построения точек Штейнера четырёхэлементного множества.

Теорема 2. *Пусть X предуально к L_1, $\{x_1,x_2,x_3,x_4\} \subset X$, $z \in \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$, $s \in \mathrm{st}(x_i,x_j,z)$. Тогда $s \in \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$.*

Далее введём следующие обозначения. Пусть $r_i^{jk} = \frac{1}{2}(\|x_i - x_j\| + \|x_i - x_k\| - \|x_j - x_k\|)$. Это расстояние от точки x_i до (любой) точки $s \in \mathrm{st}(x_i,x_j,x_k)$, что следует из теоремы A. Пусть $\rho_i = \min\{r_i^{jk} \mid \{j,k\} \subset \{1,2,3,4\} \setminus \{i\}\}$, $M_4 = \{x_1,x_2,x_3,x_4\}$.

Теорема 3. *Пусть X предуально к L_1, $M_4 \subset X$. Наименьшее значение $\|x_1 - s\|$ равно ρ_1 при $s \in \mathrm{st}(M_4)$.*

Следствие 2. *Пусть X предуально к L_1, $M_4 \subset X$, $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$. Наибольшее расстояние от точки x_4 до множества* $\mathrm{st}(x_1,x_2,x_3,x_4)$ *достигается для точки $s \in \mathrm{st}(x_1,x_2,x_3) \cap \mathrm{st}(M_4)$.*

Теорема 4. *Пусть X предуально к L_1, $M_4 \subset X$, $\|x_1 - x_4\| + \|x_2 - x_3\| = \max(M_4)$. Тогда*

$$\mathrm{st}(M_4) = \cup_{R_1 \in I_1} \cup_{R_2 \in I_2} \cap_{i=1}^{4} S(x_i, R_i),$$

где $R_3 = \|x_2 - x_3\| - R_2$, $R_4 = \|x_1 - x_4\| - R_1$, $I_1 = [\rho_1, \|x_1 - x_4\| - \rho_4]$, $I_2 = I_2(R_1) = [A,B]$ при

$$A = \max\{\|x_1 - x_2\| - R_1, \|x_4 - x_2\| - \|x_4 - x_1\| + R_1\},$$

$$B = \min\{\|x_2 - x_3\| - \|x_1 - x_3\| + R_1, \|x_2 - x_3\| - \|x_4 - x_3\| + \|x_4 - x_1\| - R_1\}.$$

В связи с многозначностью отображения $\mathrm{St_n} : (x_1,\dots,x_n) \to \mathrm{st}(x_1,\dots,x_n)$ естественно возникает вопрос о существовании хорошей выборки. Липшицева выборка из $\mathrm{St_3}$ в пространстве $C[K]$ действительнозначных непрерывных на компакте K функций построена в [6]. Сформулируем соответствующий результат.

Теорема B [6]. *Пусть $x_1, x_2, x_3 \in C[K]$. Отображение $V(x_1,x_2,x_3)(t) = \min\{x_1(t) + r_1, x_2(t) + r_2, x_3(t) + r_3\}$ является липшицевой выборкой из отображения* $\mathrm{St_3}$ (*здесь $r_i = r_i(x_1,x_2,x_3)$ — числа из теоремы A*).

Из отображения St_4 в пространстве $C[K]$ также существует липшицева выборка.

Теорема 5. *Пусть* $x_1, x_2, x_3, x_4 \in C[K]$. *Отображение* $V(x_1, x_2, x_3, x_4)(t) = \min_{i=1}^{4}\{x_i(t) + r_i\}$ *является липшицевой выборкой из отображения* St_4 *при* $r_1 = \rho_1 = \rho_1(x_1, x_2, x_3, x_4)$, $r_i = \|x_i - x_1\| - r_1$, $i = 2, 3, 4$.

Работа поддержана РФФИ (проект № 15-01-08335).

Литература

1. Grothendieck A. *Une caractérisation vectorielle-métrique des espaces L^1* // Canad. J. Math. – 1955. – V. 7. – № 4. – P. 552–561.

2. Lindenstrauss J. *Extension of compact operators* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1964. – V. 48. – P. 1–112.

3. Lima Å. *Intersection properties of balls and subspaces in Banach spaces* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1977. – V. 227. – P. 1–62.

4. Беднов Б. Б., Бородин П. А. *Банаховы пространства, реализующие минимальные заполнения* // Матем. сб. – 2014. – Т. 205. – № 4. – С. 3–19.

5. Беднов Б. Б. *Длина минимального заполнения типа звезды* // Матем. сб. – 2016. – Т. 207. – № 8. – С. 31–46.

6. Беднов Б. Б. *О точках Штейнера в пространстве непрерывных функций* // Вестн. Моск. ун-та, Матем. Механ. – 2011. – № 6. – С. 26–31.

ON THE SET $\mathrm{ST}(\mathrm{M}_4)$ IN THE SPACE PREDUAL TO L_1

B.B. Bednov

We investigate the set of Steiner points of four element sets in the space predual to L_1.

Keywords: Banach space, Lindenstrauss space, Steiner point, Lipschits selection.

УДК 517.986.62

ВЕЙВЛЕТЫ НА ГРУППАХ ВИЛЕНКИНА

Г.С. Бердников[1]

1 *evrointelligent@gmail.com*; Саратовский Государственный Универсситет

В статье обсуждается использование графов для построения вейвлетов на группах Виленкина. Работа является логическим продолжением работ с участием автора по нахождению непереборного алгоритма построения масштабирующей функции, порождающей ортогональный кратномасштабный анализ на группах Виленкина.

Ключевые слова: вейвлеты, группы Виленкина, кратномасштабный анализ, графы, масштабирующая функция, алгоритм.

Пусть $(G_n, \dot{+})$ – локально компактная группа Виленкина, элементами которой являются бесконечные в обе стороны последовательности

$$x = (\ldots, 0_{n-1}, x_n, x_{n+1}, \ldots),\ x_j = \overline{0, p-1},$$

где p – любое простое число. Операция сложения $\dot{+}$ определяется как покоординатное сложение по модулю p, т.е. $x\dot{+}y = (x_j\dot{+}y_j)(x_j + y_j \bmod p)$. Пусть

$$G_n = \{x \in G:\ x = (\ldots, 0_{n-1}, x_n, X_{n+1}, \ldots)\}, n \in \mathbb{Z}$$

основная цепочка подгрупп, $G_n^{\perp}$ – совокупность аннуляторов, A – оператор сжатия.

Пусть $\mathfrak{D}_{-N}(G_M^{\perp})$ – множество функций, постоянных на $G_{-N}^{\perp}\zeta$ с носителем в $G_M^{\perp}$. Мы будем искать такие φ с преобразованием Фурье $\hat{\varphi} \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^{\perp})$, которые порождают ортогональный КМА.

Необходимое и достаточное условие масштабирующей функции было найдено в работах [1], [2], однако для нахождения функции требуется перебор всех возможных вариантов. Алгоритм представленный в работах [3], [4] и в данной работе не обладает этим недостатком.

Сначала построим N-валидное дерево T и запишем его вершины как N-компонентные векторы $(\alpha_N, ..., \alpha_1)$.

Определение 1. [3] *Пусть N – натуральное число, p - простое. Под N-валидным деревом мы будем понимать дерево, ориентированное от листа к корню и удовлетворяющее следующим условиям:*

1) Корень и все вершины вплоть до N-го уровня имеют значение равное нулю.

2) Любой путь $(\alpha_k \to \alpha_{k+1} \to \cdots \to \alpha_{k+N-1})$ длины $N-1$ присутствует в дереве ровно один раз. Здесь $\alpha_i = \overline{0, p-1}$.

Выберем N-валидное дерево T и будем строить по нему масштабирующую функцию.

Схема 1 (Переход от компактной к развернутой форме записи).

По дереву T строим новое дерево $\tilde{T}$ следующим образом.

1) Заменяем последовательность из N нулей, заканчивающуюся корнем дерева, на одну вершину со значением $(0_N, 0_{N-1}, \ldots, 0_1)$. Все вершины $(N+1)$-го уровня дерева T теперь связаны с этой вершиной в дереве $\tilde{T}$. Она является корнем дерева $\tilde{T}$.

2) Без изменения связей переобозначаем остальные вершины. Если в дереве T с вершины α_N начинался путь из N элементов в направлении к корню

$$\alpha_N \to \alpha_{N-1} \to \cdots \to \alpha_1,$$

то в новом дереве $\tilde{T}$ данная вершина будет иметь значение равное N-мерному вектору $(\alpha_N, \alpha_{N-1}, \ldots, \alpha_1)$.

В силу условия N-валидности дерева T каждому такому вектору в дереве $\tilde{T}$ соответствует единственная вершина. Также, если мы обозначим $height(T) = H$, $height(\tilde{T}) = \tilde{H}$, то очевидно $\tilde{H} = H - N + 1$.

Такое дерево будем называть N-валидным деревом в развернутой форме записи.

конец схемы 1

Схема 2 (Построение графа и маски). Теперь соединим часть (или все) вершины дерева $\tilde{T}$ вида $(\alpha_{i_N}, ..., \alpha_{i_1})$ с вершинами $(\alpha_{i_{N-1}}, ..., \alpha_{i_0})$ и получим граф Г.
Обозначим

$$\lambda_{\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, ..., \alpha_{-1}, \alpha_0} = |m_0(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} r_{-N+1}^{\alpha_{-N+1}} \ldots r_{-1}^{\alpha_{-1}} r_0^{\alpha_0})|^2.$$

Если вершина $(\alpha_{-N}, \alpha_{-N+1}, \ldots, \alpha_{-1})$ в Г связана с вершиной $(\alpha_{-N+1}, \alpha_{-N+2} \ldots, \alpha_{-1}, \tilde{\alpha}_0)$ то определим значения маски $m_0(\chi)$ масштабирующей функции следующим обра-

зом:

$$\sum_{\tilde{\alpha}_0} \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\tilde{\alpha}_0} = 1 \text{ и } \lambda_{\alpha_{-N},\alpha_{-N+1},\ldots,\alpha_{-1},\alpha_0} = 0 \text{ для всех } \alpha_0 \notin \{\tilde{\alpha}_0\}.$$

Выбор конкретных значений произволен, главное, чтобы выполнялись условия, указанные выше.

Дополнительно, положим $m_0(G_{-N}^{\perp}) = 1$.

конец схемы 2

По маске, построенной таким образом, можно восстановить значения масштабирующей функции $\hat{\varphi}$ по формуле $\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-n})$. Заметим, что произведение на самом деле конечно, так как $m_0(G_{-N}^{\perp}) = 1$.

Таким образом, верна следующая

Теорема 1. [3] *Пусть по N-валидному дереву T построены дерево $\tilde{T}$, граф Γ и определены значения маски $m_0(\chi)$ так, как указано в схемах 1 и 2. Пусть $\tilde{H} = height(\tilde{T})$. Тогда равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m_0(\chi \mathscr{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(G_M^{\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$, причем $M = \tilde{H} - N$.

Заметим, что данный алгоритм, очевидно, является достаточным условием, но одновременно он же является и необходимым условием ступенчатой ортогональной масштабирующей функции с компактным носителем на группах Виленкина в том смысле, что любая масштабирующая функция из рассматриваемого класса может быть построена по данному алгоритму (см. [5]).

Теперь коснемся вопроса построения вейвлетов по найденной маске $m_0(\chi)$. Вейвлеты ψ^l можно найти по формулам $\hat{\psi}^l(\chi) = m^l(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1})$, $l = \overline{0, p-1}$, где функции m^l называются масками вейвлетов. Очевидно, $m_0 = m^0$, $\psi^0 = \varphi$.

Теорема 2. *Пусть $m^k(\chi)$, $k = \overline{0, p-1}$ – маски, постоянные на смежных классах $G_{-N}{}^{\perp}$ и периодичные с любым периодом $r_1^{\alpha_1} r_2^{\alpha_2} \ldots r_{\nu}^{\alpha_{\nu}}$, $\alpha_j = \overline{0, p-1}$, $\nu \in \mathbb{N}$. Определим вейвлеты ψ^l равенствами*

$$\hat{\psi}^l(\chi) = m^l(\chi)\hat{\varphi}(\chi A^{-1}),$$

где $\varphi \in \mathfrak{D}_M(G_{-N})$ – масштабирующая функция. Система сдвигов $(\psi^l(x \dot{-} h^{(l)}))$, $l = \overline{0, p-1}$, $h^l \in H_0$ будет ортонормированной тогда и только тогда, если для любых $\alpha_{-N} \ldots \alpha_{-1} = \overline{0, p-1}$

$$\sum_{\alpha_0=0}^{p-1} m^k(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0}) \overline{m^l(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0})} = \delta_{k,l}.$$

Достаточность этого условия следует из теоремы 3 в работе [6], доказательство необходимости и достаточности для ступенчатых функций есть результат данной работы. Следуя всему вышеизложенному, алгоритм построения вейвлетов можно сформулировать так:

Алгоритм 1.

1) Построим маску m_0 пользуясь схемами 1,2. Обозначим

$$m^0_{\alpha_{-N}\ldots\alpha_0} = m^0(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^0), \quad m^l_{\alpha_{-N}\ldots\alpha_0} = m^l(G_{-N}^{\perp} r_{-N}^{\alpha_{-N}} \ldots r_0^{\alpha_0}).$$

Восстановим значения $\hat{\varphi}$, воспользовавшись формулой $\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{n=0}^{\infty} m_0(\chi A^{-n})$.

2) Для каждого набора $\alpha_{-N}\dots\alpha_{-1}$ построим матрицу $M(\alpha_{-N}\dots\alpha_{-1}) \in Mat_{p\times p}(\mathbb{C})$ с элементами $M_{l,\alpha_0}(\alpha_{-N}\dots\alpha_{-1})$ следующим образом. Первая строка состоит из всех значений

$$m^0_{\alpha_{-N}\dots\alpha_{-1},0}, m^0_{\alpha_{-N}\dots-1,1},\dots, m^0_{\alpha_{-N}\dots\alpha_{-1},p-1},$$

где $\alpha_{-N}\dots\alpha_{-1}$ фиксированы. Чтобы сделать эту матрицу унитарной, поступим следующим образом.
Если $m^{(\mathbf{0})}_{\alpha_{-N}\dots-1,0} \neq 0$, то присвоим $M_{l,l} = 1$, если $l \neq 0$ и $M_{l,\mathbf{a_{-1}}} = 0$ в противном случае. Если $m^{(\mathbf{0})}_{\alpha_{-N}\dots\alpha_{-1},0} = 0$, то существует номер j такой, что $m^{(\mathbf{0})}_{\alpha_{-N}\dots\alpha_{-1},j} \neq 0$. Это ненулевое значение существует по необходимому условию маски m^0 (). В этом случае, присвоим $M_{j,\mathbf{0}} = 1, \quad M_{l,l} = 1$ при $l \neq 0, j$, и $M_{l,\mathbf{a_{-1}}} = 0$ в противном случае. Очевидно, полученная матрица имеет линейно независимые строки.

Заметим, что, на самом деле, любая невырожденная матрица с первой строкой, заполненной значениями $m^0_{\alpha_{-N}\dots\alpha_{-1},0}, m^0_{\alpha_{-N}\dots-1,1},\dots, m^0_{\alpha_{-N}\dots\alpha_{-1},p-1}$ удовлетворяет нашим целям, выше всего лишь указан простейший способ сконструировать такую матрицу.

3) Используя алгоритм ортогонализации Грамма-Шмидта, преобразуем данную матрицу к унитарной.

4) Теперь, для каждого $l = \overline{1, p-1}$ мы находим значения маски m^l из равенств

$$m^l(G^{\perp}_{-N} r^{\alpha_{-N}}_{-N} \dots r^{\alpha_0}_0) = M_{l,\alpha_0}(\alpha_{-N}\dots\alpha_{-1}).$$

После этих операций, маски m^l будут удовлетворять условию теоремы 2.

5) Вейвлеты ψ^l могут быть получены по формуле

$$\hat{\psi}^l(\chi) = m^l(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1})$$

после чего необходимо провести обратное преобразование Фурье.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00152-а).

Литература

1. Фарков Ю. А. *Ортогональные вейвлеты с компактными носителями на локально компактных абелевых группах* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2005. – Т. 69. – № 3. – С. 193–220.

2. Фарков Ю. А. *Ортогональные вейвлеты на прямых произведениях циклических групп* // Матем. заметки. – 2007. – Т. 82. – № 6. – С. 934-952.

3. Бердников Г.С., Лукомский С.Ф., Крусс Ю. *Об ортогональности системы сдвигов масштабирующей функции на группах Виленкина* // Математические заметки. – 2015. – Т. 98. – № 2. – С. 310–313.

4. Бердников Г.С. *Графы с контурами в кратномасштабном анализе на группах Виленкина* // Изв. Саратовск. университета. Новая серия. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2016. – Т. 16, вып. 4. – С. 377–388.

5. Бердников Г.С. *Графы в кратномасштабном анализе на группах Виленкина.*// Труды Матем. центра им. Н.И. Лобачевского. Том 51. Теория функций, ее приложения и смежные вопросы. Материалы Двенадцатой межд. Казанской летней науч. школы-конф., 2015. – С. 70—72.

6. Jiang H, Li D, Jin N. *Multiresolution analysis on local fields* // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – V. 294. – P. 523–532.

WAVELETS ON VILENKIN GROUPS

G.S. Berdnikov

Wavelet construction on Vilenkin groups is discussed in the paper. The work is a logical conclusion of author's research in finding an algorithm for constructing a scaling function which generates orthogonal multiresolution analysis on Vilenkin groups. The algorithm doesn't require exhaustive search.
Keywords: wavelets, Vilenkin groups, multiresolution analysis, graphs, scaling function, algorithm.

УДК 517.98

ПАРАНОРМАЛЬНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ В НОРМИРОВАННОЙ АЛГЕБРЕ

А.М. Бикчентаев[1], С.А. Абед[2]

1 *airat.bikchentaev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *samialbarkish@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Для нормированной алгебры $\mathscr{A}$ и $k \in \mathbb{N}$ введены и исследованы $\|\cdot\|$-замкнутые классы

$$\mathscr{P}_k(\mathscr{A}) = \{T \in \mathscr{A} : \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \text{ для всех } A \in \mathscr{A} \text{ с } \|A\| = 1\}.$$

Показано, что $\mathscr{P}_1(\mathscr{A}) \subset \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. Если $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$, то $T^n \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Если $\mathscr{A}$ унитальна, $U, V \in \mathscr{A}$ такие, что $\|U\| = \|V\| = 1$, $VU = I$ и $T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$, то $UTV \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$. В частности, если $\mathscr{A}$ унитальная C^*-алгебра и $T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$, то $UTU^* \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ для всех изометрий $U \in \mathscr{A}$ и $k \in \mathbb{N}$. Пусть $\mathscr{A}$ унитальна, тогда 1) если элемент $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ обратим справа, то правый обратный элемент $T^{-1} \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$; 2) при $\|I\| = 1$ класс $\mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ состоит из нормалоидных элементов; 3) если спектр элемента $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ лежит на единичной окружности, то $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathscr{A}$. Если $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то класс $\mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$.

Ключевые слова: гильбертово пространство, C*-алгебра, паранормальный оператор, квазинильпотеный оператор, изометрия, гипонормальный оператор, нормалоидный оператор, нормированная алгебра, унитальная алгебра.

Пусть $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ – *-алгебра всех линейных ограниченных операторов в гильбертовом пространстве $\mathscr{H}$. Оператор $T \in \mathscr{B}(\mathscr{H})$ называется *паранормальным*, если $\|T^2x\|_{\mathscr{H}} \geq \|Tx\|^2_{\mathscr{H}}$ для всех $x \in \mathscr{H}$ с $\|x\|_{\mathscr{H}} = 1$, см. [1]– [3]; *изометрией*, если $T^*T = I$; *гипонормальным*, если $T^*T \geq TT^*$. C^*-алгеброй называется комплексная банахова $*$-алгебра такая, что $\|X^*X\| = \|X\|^2$ для всех $X \in \mathscr{A}$. По теореме Гельфанда–Наймарка любую C^*-алгебру можно реализовать как C^*-подалгебру в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ для некоторого гильбертова пространства $\mathscr{H}$.

Пусть $\mathscr{A}$ – нормированная алгебра над полем Λ, $\mathscr{A}_1 = \{X \in \mathscr{A} : \|X\| = 1\}$ и $k \in \mathbb{N}$. Напомним, что $T \in \mathscr{A}$ *квазинильпотент*, если $\|T^n\|^{\frac{1}{n}} \to 0$ при $n \to \infty$; *нормалоидный*, если $\|T^n\| = \|T\|^n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Введем класс

$$\mathscr{P}_k(\mathscr{A}) = \{T \in \mathscr{A} : \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \text{ для всех } A \in \mathscr{A}_1\}.$$

Очевидно, $0 \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ и $T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A}) \Leftrightarrow \lambda T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ для всех $\lambda \in \Lambda \setminus \{0\}$ и $k \in \mathbb{N}$.

Теорема 1. *Класс $\mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ $\|\cdot\|$-замкнут в $\mathscr{A}$.*

Предложение 2. *Пусть $\mathscr{A}$ – плотная подалгебра нормированной алгебры $\mathscr{B}$. Тогда $\mathscr{P}_k(\mathscr{A}) \subset \mathscr{P}_k(\mathscr{B})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Предложение 3. *Пусть $\mathscr{A}_1, \ldots, \mathscr{A}_n$ – нормированные алгебры. Тогда $\mathscr{P}_k(\mathscr{A}_1) \times \cdots \times \mathscr{P}_k(\mathscr{A}_n) \subset \mathscr{P}_k(\mathscr{A}_1 \times \cdots \times \mathscr{A}_n)$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 4. *Имеем $\mathscr{P}_1(\mathscr{A}) \subset \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Следствие 5. *Пусть $\mathscr{A}$ – нормированная унитальная алгебра и $\|I\| = 1$. Если $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$, то T нормалоидный.*

Следствие 6. *Пусть $\mathscr{A}$ – нормированная унитальная алгебра и $\|I\| = 1$. Если $(0 \neq) T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$, то T не может быть квазинильпотентом.*

Предложение 7. *Пусть $\mathscr{A}$ – нормированная алгебра.*
(i) *Если $T \in \mathscr{A}$ с $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathscr{A}$, то $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$.*
(ii) *Если $T \in \mathscr{P}_{k-1}(\mathscr{A})$ и $T^k \in \mathscr{P}_{n-1}(\mathscr{A})$, то $T \in \mathscr{P}_{kn-1}(\mathscr{A})$ для всех $k, n \geq 2$.*

Предложение 8. *Пусть $\mathscr{A}$ – нормированная алгебра, $X \in \mathscr{A}_1$ и $T \in \mathscr{A}$ такие, что $XTX = T$. Если $k \in \mathbb{N}$ нечетно и $T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$, то $XT \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$.*

Предложение 9. *Пусть нормированная алгебра $\mathscr{A}$ унитальна. Тогда $\lambda I \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ для всех $\lambda \in \Lambda$ и справедливы утверждения:*
(i) *если $T \in \mathscr{A}_1$ с $T^{k+1} = I$, то $T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$;*
(ii) *если $T = T^{k+1} \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ и $\|I\| = 1$, то $\|T\| \in \{0, 1\}$.*

Предложение 10. *Если $\mathscr{A}$ – коммутативная нормированная алгебра и $\|T^2\| = \|T\|^2$ для всех $T \in \mathscr{A}$, то $\mathscr{P}_k(\mathscr{A}) = \mathscr{A}$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Теорема 11. *Пусть $\mathscr{A}$ – нормированная унитальная алгебра и $U, V \in \mathscr{A}_1$ такие, что $VU = I$. Если $T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$, то $UTV \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ для всех $k \in \mathbb{N}$.*

Следствие 12. *Если $\mathscr{A}$ унитальная C^*-алгебра и $T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$, то $UTU^* \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ для всех изометрий $U \in \mathscr{A}$ и $k \in \mathbb{N}$.*

Следствие 12 при $k = 1$ обобщает п. (ii) теоремы 2 [4].

Теорема 13. *Пусть $\mathscr{A}$ – нормированная унитальная алгебра. Если элемент $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ обратим справа, то правый обратный элемент $T^{-1} \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$.*

Следствие 14. *Пусть $\mathscr{A}$ – нормированная унитальная алгебра над полем $\mathbb{C}$ и $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ такой, что спектр $\sigma(T)$ лежит на единичной окружности. Тогда $\|TX\| = \|X\|$ для всех $X \in \mathscr{A}$.*

Теорема 15. *Пусть $\mathscr{A}$ – нормированная алгебра. Если $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$, то $T^n \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ для всех $n \in \mathbb{N}$.*

Замечание 16. Из теоремы 15 можно получить второе доказательство следствия 5.

Из теоремы 2.1 [4] (см. также теорему 1 [5]) имеем

Следствие 17. *Если $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то класс $\mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ совпадает с классом всех паранормальных операторов в $\mathscr{H}$.*

Поскольку операция произведения секвенциально совместно непрерывна в сильной операторной топологии в $\mathscr{B}(\mathscr{H})$ [6, задача 93], из следствия 17 вытекает

Следствие 18. *Если $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то класс $\mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ секвенциально замкнут в сильной операторной топологии.*

Следствие 19. *Если $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$, то в $\mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ существует не гипонормальный оператор.*

Замечание 20. Если $\mathscr{A} = \mathbb{M}_2(\mathbb{C})$, то класс $\mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ есть множество всех нормальных матриц из $\mathscr{A}$ (теорема 2.32 [5]). Для $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$ теорема 4 установлена в [7] и [8], теорема 13 (для обратимого T) и следствие 14 доказаны в [7], а теорема 15 – в [2].

Работа поддержана Российским фондом фундаментальных исследований и правительством Республики Татарстан, проект 15-41-02433, и выделенными Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности субсидиями 1.1515.2017/ПЧ, 1.9773.2017/8.9.

Литература

1. Istrăţescu V. *On some hyponormal operators* // Pacific J. Math. – 1967. – V. 22. – No. 3. – P. 413–417.

2. Furuta T. *On the class of paranormal operators* // Proc. Japan Acad. – 1967. – V. 43. – No. 7. – P. 594–598.

3. Kubrusly C.S. *Hilbert space operators. A problem solving approach*. – Boston, MA: Birkhäuser Boston, Inc., 2003. – xvi+149 p.

4. Бикчентаев А.М. *Два класса τ-измеримых операторов, присоединенных к алгебре фон Неймана* // Изв. вузов. Матем. – 2017. – № 1. – С. 86–91.

5. Бикчентаев А.М. *Паранормальные τ-измеримые операторы, присоединенные к полуконечной алгебре фон Неймана* // Матем. заметки (в печати).

6. Халмош П. *Гильбертово пространство в задачах.* – М.: Мир, 1970. – 352 с.

7. Istrăţescu V., Saito T., Yoshino T. *On a class of operators* // Tôhoku Math. J. – 1966. – V. 18. – No. 4. – P. 410–413.

8. Furuta T., Horie M., Nakamoto R. *A remark on a class of operators* // Proc. Japan Acad. – 1967. – V. 43. – No. 7. – P. 607–609.

PARANORMAL ELEMENTS IN NORMED ALGEBRA

A.M. Bikchentaev, S.A. Abed

For a normed algebra $\mathscr{A}$ and $k \in \mathbb{N}$ we introduce and investigate the $\|\cdot\|$-closed classes

$$\mathscr{P}_k(\mathscr{A}) = \{T \in \mathscr{A} : \|T^{k+1}A\| \geq \|TA\|^{k+1} \text{ for all } A \in \mathscr{A} \text{ with } \|A\| = 1\}.$$

We show that $\mathscr{P}_1(\mathscr{A}) \subset \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ for all $k \in \mathbb{N}$. If $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$, then $T^n \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ for all $n \in \mathbb{N}$. If $\mathscr{A}$ is unital, $U, V \in \mathscr{A}$ are such that $\|U\| = \|V\| = 1$, $VU = I$ and $T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$, then $UTV \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ for all $k \in \mathbb{N}$. In particular, if $\mathscr{A}$ is a unital C^*-algebra and $T \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$, then $UTU^* \in \mathscr{P}_k(\mathscr{A})$ for all isometries $U \in \mathscr{A}$ and $k \in \mathbb{N}$. Let $\mathscr{A}$ be unital, then 1) if an element $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ is right invertible then the right inverse element $T^{-1} \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$; 2) for $\|I\| = 1$ the class $\mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ consists of normaloid elements; 3) if the spectrum of an element $T \in \mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ lies on unit circle then $\|TX\| = \|X\|$ for all $X \in \mathscr{A}$. If $\mathscr{A} = \mathscr{B}(\mathscr{H})$, then the class $\mathscr{P}_1(\mathscr{A})$ coincides with the set of all paranormal operators on a Hilbert space $\mathscr{H}$.

Keywords: Hilbert space, C*-algebra, paranormal operator, quasinilpotent operator, isometry, hyponormal operator, normaloid operator, normed algebra, unital algebra.

УДК 517.983

О ДИССИПАТИВНЫХ РАСШИРЕНИЯХ ИНТЕГРАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

В.М. Брук[1]

1 *vladislavbruk@mail.ru*; Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина

В статье рассматривается интегральное уравнение с операторной мерой. Для этого уравнения устанавливается формула Лагранжа, учитывающая наличие одноточечных атомов у операторной меры. С помощью граничных значений дается описание диссипативных расширений минимального симметрического оператора, порожденного этим уравнением.

Ключевые слова: интегральное уравнение, операторная мера, гильбертово пространство, симметрический оператор, граничная задача.

Пусть H – сепарабельное гильбертово пространство с нормой $\|\cdot\|$ и скалярным произведением $(\cdot,\cdot)$. Рассмотрим функцию $\Delta \mapsto \mathbf{P}(\Delta)$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b]$ и принимающую значения в множестве ограниченных линейных операторов, действующих в H. Функция $\mathbf{P}$ называется операторной мерой на $[a,b]$ (см., например, [1], гл. 5, с. 324), если $\mathbf{P}$ равна нулю на пустом множестве и для любых непересекающихся борелевских множеств Δ_n справедливо равенство $\mathbf{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}\Delta_n\right) = \sum_{n=1}^{\infty}\mathbf{P}(\Delta_n)$ со слабо сходящимся рядом. Далее всякую меру $\mathbf{P}$, определенную на борелевских множествах $\Delta \subset [a,b]$, продолжаем на некоторый отрезок $[a,b_0] \supset [a,b_0) \supset [a,b]$, полагая $\mathbf{P}(\Delta) = 0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset [a,b_0]\setminus[a,b]$.

Обозначим $\mathbf{V}_{\Delta}(\mathbf{P}) = \rho(\Delta) = \sup\sum_i \|\mathbf{P}(\Delta_i)\|$, где sup распространяется на конечные суммы непересекающихся борелевских множеств $\Delta_i \subset \Delta$. Число $\mathbf{V}_{\Delta}(\mathbf{P})$ называется вариацией меры $\mathbf{P}$ на борелевском множестве Δ. Пусть мера $\mathbf{P}$ имеет ограниченную вариацию на $[a,b]$. Тогда для ρ-почти всех $\xi \in [a,b]$ существует такая операторная функция $\xi \to \Psi(\xi)$ со значениями в множестве линейных ограниченных операторов в H, $\|\Psi(\xi)\| = 1$, что для любого борелевского множества $\Delta \subset [a,b]$ справедливо равенство $\mathbf{P}(\Delta) = \int_{\Delta}\Psi(\xi)\,d\rho$. Этот интеграл сходится в смысле обычной нормы операторов, а функция Ψ определяется однозначно с точностью до значений на множестве нулевой ρ-меры ([1], гл. 5, с. 325).

Символ $\int_{t_0}^{t}$ обозначает $\int_{[t_0,t)}$, если $t_0 < t$; $-\int_{[t,t_0)}$, если $t_0 > t$; и 0, если $t_0 = t$. Функция h интегрируема по мере $\mathbf{P}$ на множестве Δ, если существует интеграл (в смысле Бохнера) $\int_{\Delta}\Psi(t)h(t)\,d\rho = \int_{\Delta}(d\mathbf{P})h(t)$. Предположим, что функция h интегрируема по мере $\mathbf{P}$ на $[a,b_0]$. Тогда функция $y(t) = \int_{t_0}^{t}(d\mathbf{P})h(s)$ непрерывна слева в сильном смысле ($t_0, t \in [a,b_0]$). Далее $\mathscr{S}_{\mathbf{P}}$ обозначает множество одноточечных атомов меры $\mathbf{P}$ (т.е. множество таких $t \in [a,b]$, что $\mathbf{P}(\{t\}) \neq 0$). Множество $\mathscr{S}_{\mathbf{P}}$ не более чем счетно.

В следующей теореме J–линейный оператор в H со свойствами: $J = J^*$, $J^2 = E$ (E – тождественный оператор); $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}$ – операторные меры, имеющие ограниченную вариацию на $[a,b]$, принимающие значения в множестве линейных ограниченных операторов, действующих в H, причем мера $\mathbf{q}$ самосопряженная, т.е. $\mathbf{q}^*(\Delta) = \mathbf{q}(\Delta)$ для любого борелевского множества Δ. Предполагается, что меры $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{q}$ продолжены на отрезок $[a,b_0] \supset [a,b_0) \supset [a,b]$ описанным выше способом.

Теорема 1. *Пусть f, g – интегрируемые на $[a, b_0]$ по мере $\mathbf{q}$ функции; $y_0, z_0 \in H$. Тогда для любых функций y, z вида*

$$y(t) = y_0 - iJ\int_{t_0}^{t} d\mathbf{p}_1(s)\,y(s) - iJ\int_{t_0}^{t} d\mathbf{q}(s)\,f(s),$$

$$z(t) = z_0 - iJ\int_{t_0}^{t} d\mathbf{p}_2(s)\,z(s) - iJ\int_{t_0}^{t} d\mathbf{q}(s)\,g(s),\quad a \leqslant t_0 < b_0,\ t_0 \leqslant t \leqslant b_0,$$

справедлива формула (*аналог формулы Лагранжа*)

$$\int_{c_1}^{c_2} (d\mathbf{q}(t)\,f(t), z(t)) - \int_{c_1}^{c_2} (y(t), d\mathbf{q}(t)\,g(t)) = (iJy(c_2), z(c_2)) - (iJy(c_1), z(c_1)) +$$
$$+ \int_{c_1}^{c_2} (y(t), d\mathbf{p}_2(t)\,z(t)) - \int_{c_1}^{c_2} (d\mathbf{p}_1(t)\,y(t), z(t)) - \sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{p}_1}\cap\mathscr{S}_{\mathbf{p}_2}\cap[c_1,c_2)} \big(iJ\mathbf{p}_1(\{t\})\,y(t), \mathbf{p}_2(\{t\})\,z(t)\big) -$$
$$- \sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{q}}\cap\mathscr{S}_{\mathbf{p}_2}\cap[c_1,c_2)} \big(iJ\mathbf{q}(\{t\})\,f(t), \mathbf{p}_2(\{t\})\,z(t)\big) - \sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{p}_1}\cap\mathscr{S}_{\mathbf{q}}\cap[c_1,c_2)} \big(iJ\mathbf{p}_1(\{t\})\,y(t), \mathbf{q}(\{t\})\,g(t)\big) -$$
$$- \sum_{t\in\mathscr{S}_{\mathbf{q}}\cap[c_1,c_2)} \big(iJ\mathbf{q}(\{t\})\,f(t), \mathbf{q}(\{t\})\,g(t)\big),\quad t_0 \leqslant c_1 \leqslant c_2 \leqslant b_0.$$

Пусть отрезок $[l_1, l_2] \subset [a, b_0]$. Рассмотрим множество измеримых по Борелю функций со значениями в H, ограниченных на $[l_1, l_2]$, непрерывных слева на $(l_1, l_2]$ (в сильном смысле) и постоянных на $[l_1, l_2] \cap (b, b_0]$. Определим норму равенством $\|u\|_{[l_1,l_2]} = \sup\limits_{t\in[l_1,l_2]} \|u(t)\|$. Полученное банахово пространство обозначим $\widetilde{C}[l_1, l_2]$. Рассмотрим уравнение

$$y(t) = \int_{t_0}^{t} d\mathbf{p}(\xi)\,y(\xi) + g(t),\quad a \leqslant t_0 \leqslant b_0, \tag{1}$$

где мера $\mathbf{p}$ имеет ограниченную вариацию на $[a, b]$ (как и выше, полагаем $\mathbf{p}(\Delta) = 0$ для всех борелевских множеств $\Delta \subset (b, b_0]$).

Теорема 2. *Для любой функции $g \in \widetilde{C}[a, b_0]$ существует единственное решение уравнения* (1)*, принадлежащее пространству $\widetilde{C}[t_0 - \delta, b_0]$, где $\delta = \delta(t_0) > 0$ достаточно мало, если $t_0 > a$, и $\delta = 0$ при $t_0 = a$.*

Следствие 1. *Пусть $t_0 = a$. Тогда для любой функции $g \in \widetilde{C}[a, b_0]$ уравнение* (1) *имеет единственное решение, принадлежащее пространству $\widetilde{C}[a, b_0]$.*

Следующее уравнение

$$y_s(t) = c + \int_{s}^{t} d\mathbf{p}(\tau)\,y_s(\tau),\quad c \in H, \tag{2}$$

является частным случаем уравнения (1) при $g(t) = c$. Через $U(t, s)$ обозначим оператор, ставящий в соответствие каждому элементу $c \in H$ значение решения $y_s(t)$ уравнения (2). Функция $t \to U(t, s)c$ является решением уравнения $U(t, s)c = c + \int_s^t d\mathbf{p}(\tau)U(\tau, s)c$.

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{p}$, $\mathbf{q}$ – меры с ограниченной вариацией, не имеющие общих одноточечных атомов, и функция f интегрируема по мере $\mathbf{q}$. Тогда решение уравнения*

$$y(t) = c + \int_a^t d\mathbf{p}(s)y(s) + \int_a^t d\mathbf{q}(s)f(s), \quad c \in H,$$

имеет вид $y(t) = U(t,a)c + \int_a^t U(t,s)d\mathbf{q}(s)f(s)$.

Далее предполагаем, что мера $\mathbf{p}$ самосопряженная. Рассмотрим уравнение

$$y(t) = x_0 - iJ\int_a^t d\mathbf{p}(s)y(s) - iJ\int_a^t f(s)d\mu(s), \tag{3}$$

где J – оператор в H, $J = J^*$, $J^2 = E$, μ – обычная мера Лебега (т.е. мера μ, для которой $\mu([\alpha,\beta)) = \beta - \alpha$ при всех $\alpha, \beta \in [a,b]$), продолженная на отрезок на $[a,b_0)$ равенством $\mu(\Delta) = 0$ для любого борелевского множества $\Delta \subset (b,b_0]$; $x_0 \in H$, $f \in L_1(H;a,b)$ и $f = 0$ на $(b,b_0]$. Согласно следствию 1 уравнение (3) имеет единственное решение.

По мере $\mathbf{p}$ построим непрерывную меру $\mathbf{p}_0$ (т.е. меру без одноточечных атомов) следующим образом. Для всех $t_k \in \mathscr{S}_\mathbf{p}$ полагаем $\mathbf{p}_0(\{t_k\}) = 0$, а для всех борелевских множеств Δ таких, что $\Delta \cap \mathscr{S}_\mathbf{p} = \varnothing$, полагаем $\mathbf{p}_0(\Delta) = \mathbf{p}(\Delta)$. Мера $\mathbf{p}_0$ самосопряженная. Обозначим через W операторное решение уравнения

$$W(t)x_0 = x_0 - iJ\int_a^t d\mathbf{p}_0(\xi)W(\xi)x_0, \quad x_0 \in H.$$

Из непрерывности меры $\mathbf{p}_0$ и теоремы 1 следует равенство $W^*(t)JW(t) = J$.

Операторы, рассматриваемые ниже, действуют в пространстве $\mathfrak{H} = L_2(H,\mu;a,b_0)$, которое состоит из измеримых функций, определенных на $[a,b]$, принимающих значения в H и имеющих интегрируемый квадрат нормы. Скалярное произведение функций $x, y \in \mathfrak{H}$ задается равенством $(x,y)_\mathfrak{H} = \int_a^{b_0}(x(t),y(t))d\mu(t)$.

Введем оператор L, порожденный уравнением (3), следующим образом. Область определения $\mathscr{D}(L)$ оператора L состоит из функций y, для каждой из которых существует функция $f \in \mathfrak{H}$ такая, что выполняется (3). При этом полагаем $Ly = f$. Оператор L_0, порожденный уравнением (3), определяется как сужение оператора L на множество функций y, удовлетворяющих равенствам $y(a) = y(b_0) = y(t_k) = 0$ для всех $t_k \in \mathscr{S}_\mathbf{p}$. Из теоремы 1 следует, что оператор L_0 симметрический.

Далее предположим, что множество одноточечных атомов $\mathscr{S}_\mathbf{p}$ меры $\mathbf{p}$ конечно и состоит из $n \geqslant 0$ точек. Если $n = 0$, то $\mathscr{S}_\mathbf{p} = \varnothing$. При $n \geqslant 1$ обозначим эти точки как t_k и предположим, что $a < t_1 < \ldots < t_n < b$. Положим $W_k(t) = \chi_{[t_{k-1},t_k]}(t)W(t)$, где $k = 1,\ldots,n+1$; $t_0 = a$; $t_{n+1} = b_0$; $\chi_{[c,d]}$ – характеристическая функция отрезка $[c,d]$. Пусть $\overline{W}(t) = (W_1(t),\ldots,W_{n+1}(t))$ – операторная однострочная матрица, которую при фиксированных t удобно рассматривать как оператор, отображающий H^{n+1} в H и действующий по формуле $\overline{W}(t)\overline{c} = \sum_{k=1}^{n+1} W_k(t)c_k$, где $\overline{c} = (c_1,\ldots,c_{n+1}) \in H^{n+1}$. Обозначим через $\mathscr{W}$ оператор $\overline{c} \to \overline{W}(t)\overline{c}$. Оператор $\mathscr{W}$ непрерывно и взаимно однозначно отображает H^{n+1} в $\mathfrak{H}$ и его область значений замкнута. Сопряженный оператор $\mathscr{V} = \mathscr{W}^*$ отображает $\mathfrak{H}$ на H^{n+1} и действует по формуле $\mathscr{V}f = \int_a^{b_0}\overline{W}^*(s)f(s)d\mu(s), \quad f \in \mathfrak{H}$.

Теорема 4. *Пусть множество $\mathscr{S}_\mathbf{p}$ конечно, содержит $n \geqslant 0$ точек и $\mathscr{S}_\mathbf{p} \cap \{a,b\} = \varnothing$. Тогда L_0^* является оператором с областью определения, состоящей из функций*

$$y = \overline{W}(t)\overline{c} - \overline{W}(t)i\widetilde{J}\int_a^t \overline{W}^*(s)f(s)d\mu(s), \tag{4}$$

где $f \in \mathfrak{H}$, $\overline{c} \in H^{n+1}$. *При этом* $L_0^* y = f$. (*Здесь* $\widetilde{J}$ *– оператор в* H^{n+1}, *действующий по формуле* $\widetilde{J}(d_1, ..., d_{n+1}) = (Jd_1, ..., Jd_{n+1})$, $d_k \in H$.)

Пусть функция $y \in \mathscr{D}(L_0^*)$ и $L_0^* y = f$. Тогда y имеет вид (4). Для функции y определим граничные значения $Y = \Gamma_1 y$, $Y' = \Gamma_2 y$ равенствами

$$Y = \overline{c} - (1/2) i \widetilde{J} \int_a^{b_0} \overline{W}^*(s) f(s) d\mu(s) = \overline{c} - (1/2) i \widetilde{J} \mathcal{V} f, \quad Y' = \int_a^{b_0} \overline{W}^*(s) f(s) d\mu(s) = \mathcal{V} f.$$

Обозначим через Γ оператор, отображающий $\mathscr{D}(L_0^*)$ в $H^{n+1} \times H^{n+1}$ согласно формуле $\Gamma y = \{\Gamma_1 y, \Gamma_2 y\}$ (здесь $\{\cdot, \cdot\}$ – упорядоченная пара).

Теорема 5. *Область значений* $\mathscr{R}(\Gamma)$ *оператора* Γ *совпадает с* $H^{n+1} \times H^{n+1}$ *и справедлива "формула Грина"*

$$(L_0^* y, z)_{\mathfrak{H}} - (y, L_0^* z)_{\mathfrak{H}} = (Y', Z) - (Y, Z'),$$

где $y, z \in \mathscr{D}(L_0^*)$, $\Gamma y = \{Y, Y'\}$, $\Gamma z = \{Z, Z'\}$.

Из теоремы 5 следует, что тройка $(H^{n+1}, \Gamma_1, \Gamma_2)$ является пространством граничных значений в смысле работ [2], [3] (см. также [4], с. 158]). Из [2–4] вытекает

Теорема 6. *Для любого сжатия* K *в* H^{n+1} *сужение оператора* L_0^* *на множество функций* $y \in \mathscr{D}(L_0^*)$, *удовлетворяющих условию*

$$(K - E)\Gamma_2 y + i(K + E)\Gamma_1 y = 0, \tag{5}$$

представляет собой максимальное диссипативное расширение оператора L_0. *Обратно, всякое максимальное диссипативное расширение оператора* L_0 *является сужением оператора* L_0^* *на множество функций* $y \in \mathscr{D}(L_0^*)$, *удовлетворяющих равенству* (5), *причем сжатие* K *определяется по расширению однозначно.*

Литература

1. Березанский Ю.М. *Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов.* – Киев: Наукова Думка, 1965. – 798 с.

2. Кочубей А. Н. *О расширениях симметрических операторов и симметрических бинарных отношений* // Матем. заметки. – 1975. – Т. 17. – № 1. – С. 41–48.

3. Брук В. М. *Об одном классе краевых задач со спектральным параметром в граничном условии* // Матем. сборник. – 1976. – Т. 100. – № 2. – С. 210–216.

4. Горбачук В. И., Горбачук М. Л. *Граничные задачи для дифференциально-операторных уравнений.* – Киев: Наукова Думка, 1984. – 284 с.

ON DISSIPATIVE EXTENSIONS OF AN INTEGRAL OPERATOR

V.M. Bruk

In the present work, we consider an integral equation with an operator measure. We establish the Lagrange formula, which takes into account the presence of single-point atoms in the operator measure. With the help of boundary conditions, we describe dissipative extensions of a minimal symmetric operator generated by this integral equation.

Keywords: integral equation, operator measure, Hilbert space, boundary value problem, symmetric operator.

УДК 514.521.2

ПРЕДСТАВЛЕНИЕ СУММЫ РЕКУРРЕНТНОЙ ФОРМУЛЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ПОКАЗАТЕЛЕЙ ОБРАТНОЙ ФУНКЦИЙ ЛАМБЕРТА В ВИДЕ РАЗЛОЖЕНИЯ НА БОЛЕЕ ПРОСТЫЕ СУММЫ

А.П. Буланов[1]

1 *bksen2002@yandex.ru*; Обнинский институт атомной энергетики НИЯУ МИФИ

В этом сообщении обсуждается рекуррентная формула определения показателей обратной цепной экспоненты, которая была получена ранее как обобщение понятия первоначальной функции Ламберта. Приводится один из способов вычисления обратного показателя a_n путем разложения исходной суммы на частичные суммы, порядок суммирования которых строго меньше n. В качестве примера этим методом вычислен обратный показатель a_6.

Ключевые слова: цепная экспонента, показатель цепной экспоненты, взаимно обратные цепные экспоненты, суммирование по всем ненулевым комбинациям, порядок суммирования, последовательность показателей, гиперфункция Ламберта.

Рассмотрим две цепные экспоненты

$$L_b(z) = z \cdot B(z), \tag{1}$$

$$L_a(w) = w \cdot A(w). \tag{2}$$

Цепная экспонента (1) определяется последовательностью функций:

$$B(z) = e^{b_1 z \cdot B_1(z)}, B_1(z) = e^{b_2 z \cdot B_2(Z)}, \ldots, B_{k-1}(z) = e^{b_k z \cdot B_k(z)}.$$

Здесь вводится обозначение $B(z) =< e^Z; b_1, b_2, ... >$. Аналогично определяется экспонента (2), где $A(w) =< e^w; a_1, a_2, ... >$ Пусть последовательность показателей $\{b_n\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет условию $b_n \neq 0, = 1, 2, .., \overline{\lim}|b_n| = \overline{b} < \infty$ тогда предельная функция $B(z) = \lim\limits_{k->\infty} < e^z; b_1, b_2, ..., b_k, 0, 0, ... >$ сходится в круге $K = \{z : |z| < \frac{1}{e\overline{b}}\}$ (см. [1] и [2]). Цепные эксоненты (1) и (2) могут быть взаимно обратными функциями, тогда последовательность показателей $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ определяется рекуррентной формулой (5) приведенной ниже (см. также [3], с. 69). Первоначальная функция Ламберта

$$w = z \cdot \langle e^z; -b, -b, ..., \rangle \tag{3}$$

определяется как обратная функция по отношению к элементарной функции

$$z = w \cdot e^{bw} = w \cdot \langle e^w; b, 0, 0, ... \rangle. \tag{4}$$

Из определения (3) мы видим $b_1 = b_2$; тогда включая неравенство $b_1 \neq b_2$, мы приходим к обобщению понятия первоначальной функции Ламберта (3). Вместо исходной функции (4) можно рассматривать конечную цепную экспоненту

$$z = w \cdot \langle e^w; b_1, ..., b_e, 0, 0, ... \rangle,$$

где $b_k \neq 0, k = 1, 2, ..., l$, или бесконечную $z = w \cdot \langle e^w; b_1, b_2, ... \rangle$.

Это обощение является промежуточным между первоначальной функцией Ламберта (3) и гиперфункциями Ламберта (Lambert′s HW function), которые ввел И.Н. Галидакис в 2004 г. HW-функции Ламберта используются при решении некоторых функциональных уравнений, возникающих, в частности, в гравитационной механике (см. [4]- [6]).

Здесь задача заключается в том, чтобы по заданной функции $w = L_b(z) = z \cdot B(z)$ найти обратную к ней функцию $z = L_a(w) = w \cdot A(w)$, аналитическую в окрестности т. $w = 0$ (или наоборот по заданной функции $z = L_a(w)$ найти обратную к ней функцию $w = L_b(z)$), то есть по заданным показателям $b_1, b_2, ...,$ найти показатели $a_1, a_2, ...$

Легко определяются первые три показателя:

$$a_1 = -b_1, a_2 = b_2 - b_1, a_3 = \frac{1}{b_2 - b_1} \cdot (b_1^2 - 2b_1 b_2 + b_2 b_3).$$

Показатели $a_4, a_5, \ldots, a_n$ определяются по упомянутой рекуррентной формуле

$$a_n = \frac{-1}{a_1 a_2 ... a_{n-1}} \cdot \Big\{ \sum_{k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} = n} \frac{k_1^{k_2} k_2^{k_3} ... k_{n-2}^{n-1}}{k_1! k_2! ... k_{n-1}!} \times$$

$$\times \Big[(-(n+1))^{k_1 - 1} b_1^{k_1} b_2^{k_2} ... b_{n-1}^{k_{n-1}} + a_1^{k_1} a_2^{k_2} ... a_{n-1}^{k_{n-1}} \Big] + b_1 b_2 ... b_{n-1} b_n \Big\}, \quad (5)$$

где суммирование проводится по всем ненулевым комбинациям неотрицательных целых чисел $k_1, k_2, ..., k_{n-1}$, удовлетворяющим уравнению $k_1 + k_2 + ... + k_{n-1} = n$. Обозначим сумму в формуле (5) через S_n.

Сумма в равенстве (5) содержит $N = 2^{n-1}$ слагаемых, которые обозначим через d_κ, $1 \le \kappa \le N$: каждый ненулевой комбинации соответствует слагаемое d_κ. Тогда имеем

$$S_n = \sum_{\kappa=1}^{N} d_\kappa. \quad (6)$$

Условимся говорить, что S_n имеет «порядок суммирования n».

В работе [7] доказана теорема (см. с. 108–110): если

$$L_b(z) = z \cdot \langle e^z; \alpha, b, b, ... \rangle, \quad (7)$$

где $\alpha \ne b$ и функция $L_a(w) = w \cdot \langle e^w; a_1, a_2, ... \rangle$ является обратной по отношению к функции (7), то показатели

$$a_1 = -\alpha, a_2 = a_3 = a_4 = ... = a_n = ... = b - \alpha. \quad (8)$$

Из анализа цепной экспоненты (7) и полученной последовательности (8) возникает вопрос: какова будет обратная экспонента

$$L_a(w) = w \cdot \langle e^w;, a_1, a_2, ... \rangle,$$

если исходная экспонента

$$L_b(z) = z \cdot \langle e^z; b, \alpha, b, b, ... \rangle? \quad (9)$$

В этом сообщении приведем один из способов вычисления показателей a_n путем разложения исходной суммы S_n, имеющей порядок суммирования n, на частичные суммы, порядок суммирования которых строго меньше n.

Представим сумму S_n в виде

$$S_n = S_n^{(n)} + S_n^{n-1} + \ldots + S_n^{(n-l)} + \ldots + S_n^{(2)} + S_n^{(1)}, \tag{10}$$

где

$$S_n^{(n)} = S_n(k_1 = n) = d_1; S_n^{(n-l)} = S_n(k_1 = n-l) = \sum_{\kappa=2^{l-1}+1}^{2^l} d_\kappa, \tag{11}$$

$l = 1, 2, \ldots, n-2, n-1$, (причем $d_N = b_1 \cdot b_2 \cdot \ldots \cdot b_{n-1} \cdot b_n$).

Из такого представления видно, что каждое слагаемое суммы S_n, соответствующее определенной ненулевой комбинации, удовлетворяющее уравнению $k_1 + \ldots + k_{n-1} = n$, содержится в сумме (6). С другой стороны, это слагаемое содержится в одной из частичных сумм разложения (10), и по номеру κ можно определить соответствующую ненулевую комбинацию.

Эта схема вычисления сумм используется для вычисления некоторых конкретных показателей обратных цепных экспонент.

Пример. В попытке ответить на вопрос, возникающий в связи с простой последовательностью (8), полученной из цепных экспоненты (7), в одной из работ представлены первые пять показателей обратной цепной экспоненты

$$L_a(w) = w \cdot \langle e^w; a_1, a_2, \ldots \rangle, \tag{12}$$

если исходная функция $L_b(z)$ дана цепной экспонентой (9). Сравнивая две цепные экспоненты (7) и (9), видим, что показатель $\alpha \neq b$ сдвинут с первого «этажа» на второй и это существенно затрудняет нахождение всей последовательности $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Первые четыре показателя находятся просто, без затруднений: $a_1 = -b$, $a_2 = \alpha - \beta$, $a_3 = -b$, $a_4 = \frac{3}{2}\alpha - b$. Пятый показатель выражается рациональной функцией параметров α и b:

$$a_5 = -\frac{1}{12(3\alpha - 2b)} \cdot (11\alpha^2 + 8\alpha \cdot b - 24b^2). \tag{13}$$

Здесь найден показатель a_6 при условии $\alpha \neq 1$, $b = 1$:

$$a_6 = \frac{-455\alpha^4 + 5168\alpha^3 - 10376\alpha^2 + 6768\alpha - 1152}{24(3\alpha - 2)(11\alpha^2 + 8\alpha - 24)}. \tag{14}$$

Однако, остается вопрос: какой рациональной функцией двух переменных α и b (или же одного переменного α, если в (9) взять $b = 1$) выражается показатель a_n цепной эспоненты (12), если $L_b(z)$ задана экспонентой (9)?

Литература

1. Буланов А.П. *Регулярность степеней бесконечной кратности* // Изв. РАН. Сер. матем. – 1998. – Т. 62(5). – С. 49–78.

2. Буланов А.П. *Бесконечная цепная степень с коэффициентами, принимающие поочередно два значения* // Матем. сб. – 2001. – Т. 192(11). – С. 3-34.

3. Буланов А.П. *Цепные экспоненты и функции Ламберта* // Труды математического центра им. Н.И. Лобачевского. – 2011. – Т. 43. – С. 64–71.

4. Дубинов А.Е, Галидакис И.Н. *Явное решение уравнения Кеплера* // Письма в ЭЧАЯ. – 2007. – Т. 4. – № 3(139). – С. 365–370.

5. Galidakis I. N. *On an application of Lambert's W function to infinite exponentials* // Complex Var. Theory Appl. – 2004. – V. 49. – № 11. – P. 759–780.

6. Galidacis I.N. *On solving the p-th complex auxiliamy equation* $f^{(p)}(z) = z$ // Complex Var. Theory Appl. — 2005. – V. 50. – № 13. – P. 977–997.

7. Буланов А.П. *Нетривиальные последовательности, являющиеся показателями взаимно обратных функций Ламберта* // Компл. анализ и его приложения: Материалы VII Петрозаводской Межд. конф. – Петрозаводск, 2014. – С. 105–111.

DECOMPOSITION OF THE SUM OF THE RECURRENT FORMULA FOR EXPONENTS OF THE INVERSE LAMBERT FUNCTION INTO SIMPLER SUMS

A.P. Bulanov

We discuss the recurrent formula for determining the exponent of the inverse chain exponential which was obtained earlier as a generalization of the original Lambert function. We describe the method of evaluation of the exponent by decomposition of original sum into partial sums whose order of summation are strictly less than n. As example, by this method, we evaluate the inverse exponent a_6.

Keywords: chain exponential, exponent of chain exponential, mutually inverse chain exponentials, the order of summation, sequence of exponents, Lambert's HW-function.

УДК 517.95

ТЕОРЕМЫ ТИПА ЛИУВИЛЛЯ ДЛЯ СТАЦИОНАРНОГО УРАВНЕНИЯ ГИНЗБУРГА-ЛАНДАУ И ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО НЕРАВЕНСТВА СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА НА МОДЕЛЬНЫХ ЛИПШИЦЕВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

С.С. Вихарев[1]

1 *s.viharev@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет, Институт математики и информационных технологий

Найдены условия выполнения теорем типа Лиувилля о тривиальности ограниченных решений эллиптического неравенства специального вида, а также стационарного уравнения Гинзбурга-Ландау на модельных липшицевых многообразиях.

Ключевые слова: липшицевы многообразия, стационарное уравнение Гинзбурга-Ландау, теоремы типа Лиувилля.

Работа посвящена вопросам существования положительных решений стационарного уравенения Гинзбурга-Ландау и эллиптического неравенства специального вида на так называемых модельных липшицевых многообразиях. Опишем их подробнее.

Рассмотрим липшицево многообразие M_g, изометричное прямому произведению $R_+ \times S$ (где $R_+ = (0, +\infty)$, а S – компактное липшицево многообразие без края) с метрикой:

$$ds^2 = dr^2 + g^2(r)d\theta^2.$$

Здесь g – непрерывная по Липшицу, неубывающая положительная на R_+ функция. Пусть также $n = \dim M_g$.

Рассмотрим на M_g стационарный случай известного уравнения Гинзбурга-Ландау

$$-\Delta u = c(x) f(u), \tag{1}$$

где $f(0) = f(a) = 0$ для некоторого $a > 0$, $\quad f(u) > 0$ на $(0, a)$ и $f(u) < 0$ на $(a, +\infty)$, $c(x)$ – положительная функция.

Под решением уравнения (1) на M_g будем понимать непрерывную по Липшицу функцию u такую, что для любого множества $\Omega \subset M_g$ и для любой положительной функции $\phi(x) \in C_0^1(\Omega)$ выполнено

$$\int\limits_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx = \int\limits_{\Omega} c(x) f(u) \phi(x) \, dx,$$

где ∇u – градиент функции u.

Пусть $0 < c_1 < c(x) < c_2 < \infty$, $f(s)$ – липшицева на $[0, a]$.

Теорема 1. *Пусть выполнены следующие условия:*
1. Существует константа $q > 1$, такая что

$$\limsup_{\rho \to \infty} \rho^{\frac{2}{q-1}} \left(\frac{\int\limits_{\rho/4}^{2\rho} g^{n-1}(r) dr}{\int\limits_{\rho/2}^{\rho} g^{n-1}(r) dr} \right)^{\frac{1}{q-1}} \int\limits_{2\rho}^{\infty} \frac{ds}{g^{n-1}(r)} = +\infty.$$

2. Существуют константы $\delta(q) > 0$ и $\sigma(q, \delta) > 0$ при которых для всех $s \in (0, \delta)$ выполнено $f(s) \geqslant \sigma s^q$.

Тогда любое решение уравнения (1), удовлетворяющее условию $0 \leqslant u \leqslant a$, является тождественной константой.

В процессе доказательства теоремы 1 нам потребовалось сформулировать и доказать лиувиллево свойство для следующего эллиптического неравенства:

$$-\Delta u \geqslant u^q, \quad q > 1, \tag{2}$$

на внешней области M_g, а именно на множестве $\Omega_e = \{x = (r, \theta) \in M : r > 1\}$.

Под решением неравенства (2) на множестве Ω_e будем понимать непрерывную по Липшицу функцию u такую, что для любого множества $\widetilde{\Omega} \subset \Omega_e$ и для любой положительной функции $\phi(x) \in C_0^1(\widetilde{\Omega})$ выполнено

$$\int\limits_{\widetilde{\Omega}} \nabla u \cdot \nabla \phi \, dx \geqslant \int\limits_{\widetilde{\Omega}} u^q \phi \, dx,$$

где ∇u – градиент функции u.

Теорема 2. *Пусть многообразие M_g такое, что для некоторой константы $q > 1$ выполняется условие*

$$\limsup_{\rho\to\infty} \rho^{\frac{2}{q-1}} \left(\frac{\int_{\rho/2}^{\rho} g^{n-1}(r)\,dr}{\int_{\rho/4}^{2\rho} g^{n-1}(r)\,dr} \right)^{\frac{1}{q-1}} \int_{2\rho}^{\infty} \frac{ds}{g^{n-1}(r)} = +\infty.$$

Тогда любое неотрицательное решение неравенства (2) на Ω_e есть тождественный нуль.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02479-р_поволжье_а).

Литература

1. Лосев А. Г. *О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях* // Сиб. матем. журнал. – 1998. – Т. 39, № 1. – С. 87-93.

2. Решетняк Ю. Г. *К теории соболевских классов функций со значениями в метрическом пространстве* // Сиб. матем. журнал. – 2006. – Т. 47, № 1. – С. 146–168.

3. Bidaut-Veron M., Pohozaev S. I. *Non-existence results and estimates for some nonlinear elliptic problems* // J. Anal. Math. – 2001. – V. 84. – P. 1–49.

LIOUVILLE-TYPE RESULTS FOR THE STATIONARY GINZBURG-LANDAU EQUATION AND ELLIPTIC INEQUALITIES OF A SPECIAL FORM ON MODEL LIPSCHITZ MANIFOLDS

S.S. Vikharev

We establish conditions for the fulfillment of Liouville-type theorems on the triviality of bounded solutions of a special type elliptic inequality, as well as of the stationary Ginzburg-Landau equation on model Lipschitz manifolds.

Keywords: Lipschitz manifolds, stationary Ginzburg-Landau equation, Liouville-type results.

УДК 517

ПРОСТРАНСТВА ТИПА L_1 И РАЗЛОЖЕНИЯ ПОЛОЖИТЕЛЬНЫХ ФУНКЦИОНАЛОВ НА АЛГЕБРЕ ФОН НЕЙМАНА

Л.В. Веселова[1], Ан.Ан. Новиков[2], О.Е. Тихонов[3]

1 *lidveselova@gmail.com*; Казанский национальный исследовательский технологический университет

2 *a.hobukob@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

3 *oleg.tikhonov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Обобщая ряд известных конструкций теории интегрирования относительно нормальных функционалов и весов на алгебрах фон Неймана, мы вводим и изучаем пространства типа L_1, ассоциированные с положительными функционалами на упорядоченных векторных пространствах. В качестве приложения приведены новые результаты о представлениях положительных нормальных функционалов на алгебрах фон Неймана.

Ключевые слова: положительный функционал, пространство с базовой нормой, пространство с порядковой единицей, алгебра фон Неймана, вес, почти доминируемый функционал, сингулярный функционал, разложение Лебега.

Данная работа инициирована подходом А. Н. Шерстнева к теории интегрирования относительно нормальных функционалов и весов на алгебрах фон Неймана (см. [9, 10]), а также решением двойственной задачи построения пространств типа L_1, ассоциированных с положительными самосопряженными операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана [1, 3]. Представляется естественным получать ряд конструкций и утверждений как частные случаи более общего подхода в рамках упорядоченных векторных пространств, который реализован в разделе 1. В разделе 2 показано, как некоторые утверждения раздела 1 совместно с известными утверждениями теории некоммутативного интегрирования позволяют получить новые результаты о представлениях положительных нормальных функционалов на алгебрах фон Неймана.

1. Пространство с базовой нормой и пространство с порядковой единицей, ассоциированные с положительным функционалом

Пусть X^+ — конус положительных элементов в положительно порожденном упорядоченном векторном пространстве X над $\mathbb{R}$. Пусть F — алгебраически сопряженное к X и F^+ — сопряженный конус положительных линейных функционалов на X. Для $f \in F^+$ положим

$$J_f = \{g \in F : -\lambda f \le g \le \lambda f \text{ для некоторого } \lambda \in \mathbb{R}^+\}.$$

Легко проверить, что J_f — линейное подпространство F, конус $J_f^+ = J_f \cap F^+$ порождает J_f и что f — порядковая единица в $J_f$ãîîáùå. Более того, формула

$$\|g\|^f = \inf\{\lambda \ge 0 : -\lambda f \le g \le \lambda f\}$$

определяет норму на J_f, которая превращает J_f в полное пространство с порядковой единицей. Соответствующий единичный шар $\{g \in F : -f \le g \le f\}$ обозначим $J_{f,1}$.

Для такого $f \in F^+$ введем полунорму r_f на X:

$$r_f(x) = \inf\{f(x') + f(x'') : x', x'' \in X^+;\ x = x' - x''\} \tag{1}$$

и положим: $X_{f,0} = \{x \in X : r_f(x) = 0\}$, $X_{f,1} = \{x \in X : r_f(x) \le 1\}$. Ясно, что $r_f(x) = f(x)$ для $x \in X^+$.

Предложение [4]. *Поляра $X^\circ_{f,1}$ есть $J_{f,1}$.*

Теорема 1.1. *Пусть Y — такое подпространство пространства F, что каноническая билинейная форма $\langle X, F\rangle$ ставит в двойственность X и Y, и пусть $J_f \subset Y$. Полунорма r_f является нормой в том и только том случае, когда J_f плотно в Y в топологии $\sigma(Y, X)$.*

Замечание 1. Пусть X — упорядоченное банахово пространство с замкнутым порождающим конусом X^+. Если f — положительный линейный функционал на X, то

f автоматически ограничен и J_f — линейное подпространство сопряженного упорядоченного банахова пространства X^*. Теорема 1.1 говорит в этом случае, что полунорма r_f на X является нормой тогда и только тогда, когда J_f *-слабо плотно в X^*.

Если в качестве X взять эрмитову часть алгебры фон Неймана, а в качестве f — точный положительный нормальный функционал на X, то r_f — норма [9, 10]. Более того, от условия нормальности можно отказаться [5]. В то же время, авторам неизвестно, будет ли r_f нормой, если в качестве X взять эрмитову часть C*-алгебры, а в качестве f — точный положительный функционал на этой алгебре, или, что эквивалентно, будет ли J_f *-слабо плотно в пространстве эрмитовых ограниченных функционалов на рассматриваемой алгебре.

Другие нетривиальные примеры, когда r_f — норма, возникают в "двойственных" задачах теории некоммутативного интегрирования [1, 3].

В дальнейшем будем предполагать, что r_f — норма, и через $(\widehat{X}_f, \|\cdot\|_f)$ обозначать соответствующее пополнение нормированного пространства X. Для $g \in J_f$ той же самой буквой будем обозначать и соответствующее продолжение g по непрерывности на $\widehat{X}_f$.

Обозначим:

$$K_f = \{\hat{x} \in \widehat{X}_f : \hat{x} = \sum_{n=1}^{\infty} x_n,\ x_n \in X^+,\ \sum_{n=1}^{\infty} \|x_n\|_f < \infty\}. \tag{2}$$

Ясно, что $X^+ \subset K_f$, K_f — конус, и что $\|\hat{x}\|_f = f(\hat{x})$ для любого $\hat{x} \in K_f$.

Теорема 1.2. *K_f порождает $\widehat{X}_f$. Более того, для любого $\hat{x} \in \widehat{X}_f$ выполняется равенство* $\|\hat{x}\|_f = \inf\{f(\hat{x}') + f(\hat{x}'') : \hat{x}', \hat{x}'' \in K_f;\ \hat{x} = \hat{x}' - \hat{x}''\}$.

Теорема 1.3. *Для $\hat{x} \in \widehat{X}_f$ эквивалентны следующие условия:*
(i) $\|\hat{x}\|_f = f(\hat{x})$,
(ii) $g(\hat{x}) \geq 0$ *для любого* $g \in J_f^+$,
(iii) $\hat{x}$ *лежит в замыкании конуса* X^+ *по норме.*

Замыкание X^+ по норме в $\widehat{X}_f$ будем обозначать $\widehat{X}_f^+$. Ясно, что $K_f \subset \widehat{X}_f^+$, и что $\widehat{X}_f^+$ — порождающий конус в $\widehat{X}_f$.

Замечание 2. Банахово пространство $\widehat{X}_f$ с конусом положительных элементов $\widehat{X}_f^+$ и базой $\{\hat{x} \in \widehat{X}_f^+ : f(\hat{x}) = 1\}$ является *пространством с базовой нормой* в смысле [1]. Банахово сопряженным к нему является пространство с порядковой единицей $(J_f, \|\cdot\|^f)$.

Положим: $S_f = \{\hat{x} \in \widehat{X}_f^+ : 0 \leq x \leq \hat{x},\ x \in X^+ \implies x = 0\}$.

Теорема 1.4. *Любой элемент $\hat{x} \in \widehat{X}_f^+$ допускает представление $\hat{x} = \hat{x}_1 + \hat{x}_2$, где $\hat{x}_1 \in K_f$, $\hat{x}_2 \in S_f$. Единственность такого представления для любого $\hat{x} \in \widehat{X}_f^+$ эквивалентна условию $\widehat{X}_f^+ = K_f$.*

2. Почти доминируемые функционалы и единственность лебеговского разложения положительных функционалов

Всюду далее φ — точный нормальный полуконечный вес на алгебре фон Неймана $\mathcal{M}$. Множество положительных операторов из алгебры обозначаем $\mathcal{M}^+$. Пространство ультраслабо непрерывных функционалов на $\mathcal{M}$ обозначаем $\mathcal{M}_*$, его эрмитову и положительную части — $\mathcal{M}_*^h$ и $\mathcal{M}_*^+$ соответственно.

Пусть $\mathfrak{m}_\varphi^+ = \{x \in \mathcal{M}^+ : \varphi(x) < \infty\}$, $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}} = \mathfrak{m}_\varphi^+ - \mathfrak{m}_\varphi^+$. Тогда $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ — упорядоченное векторное пространство, $\mathfrak{m}_\varphi^+$ — конус его положительных элементов. Вес φ однозначно продолжается до положительного линейного функционала на $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$, обозначаемого далее той же буквой φ. Полунорма r_φ на $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ (см. (1)) является нормой [9, 10], которую мы ранее условились обозначать $\|\cdot\|_\varphi$. Пополнение $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$ по норме $\|\cdot\|_\varphi$ будем обозначать $\widehat{L}_1^h(\varphi)$.

Определение 2.1. Будем говорить, что вес φ *доминирует* функционал $\psi \in \mathcal{M}_*^+$, если $\psi \le \lambda\varphi$ при некотором $\lambda \ge 0$; φ *почти доминирует* ψ, если ψ представим в виде $\psi = \sum_{i\in I}\psi_i$, где каждый из функционалов ψ_i доминируется весом φ, в последнем случае будем использовать обозначение $\psi \ll \varphi$.

Известно (напр., [8]), что существует единственное отображение $\gamma : \mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}} \to \mathcal{M}_*^h$, удовлетворяющее условиям:

(γ1) $\gamma(x)(1) = \varphi(x)$ $(x \in \mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}})$,

(γ2) $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}) = \{\psi \in \mathcal{M}_*^+ : \exists\lambda \in \mathbb{R}^+(\psi \le \lambda\varphi)\}$,

(γ3) $\{x, y\} \mapsto \gamma(x)(y)$ — симметричная положительная билинейная форма на $\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}}$.

Отображение γ является изометрическим и порядковым изоморфизмом, $\gamma(\mathfrak{m}_\varphi^{\mathrm{sa}})$ плотно в $\mathcal{M}_*^h$. Будем использовать ту же букву γ для обозначения соответствующего изометрического и порядкового изоморфизма $\widehat{L}_1^h(\varphi)$ на $\mathcal{M}_*^h$. Таким образом, в обозначениях (2) имеем: $\gamma(K_\varphi) = \{\psi \in \mathcal{M}_*^+ : \psi \ll \varphi\}$, и теорема 1.2 влечет:

Теорема 2.1. *Любой $\psi \in \mathcal{M}_*^h$ может быть представлен в виде $\psi = \psi' - \psi''$, где $\psi', \psi'' \ll \varphi$.*

Следствие. *Для любого $\psi \in \mathcal{M}_*^+$ найдется $\psi' \in \mathcal{M}_*^+$ такой, что $\psi' \ll \varphi$ и $\psi \le \psi'$.*

Определение 2.2. Функционал $\psi \in \mathcal{M}_*^+$ называется *сингулярным* относительно φ (обозначаем: $\psi \perp \varphi$), если условия $\psi' \in \mathcal{M}_*^+$, $\psi' \le \psi$, $\psi' \le \varphi$ влекут $\psi' = 0$.

Ясно, что $\{\psi \in \mathcal{M}_*^+ : \psi \perp \varphi\} = \gamma(S_\varphi)$ и по теореме 1.4 любой $\psi \in \mathcal{M}_*^+$ допускает представление $\psi = \psi_1 + \psi_2$, где $\psi_1 \ll \varphi$, $\psi_2 \perp \varphi$. Такого вида преставление часто называют *лебеговским разложением* положительного нормального функционала.

Определение 2.3 [6, 7]. Вес φ называется *регулярным*, если $\psi \ll \varphi$ каков бы ни был $\psi \in \mathcal{M}_*^+$.

Теорема 1.4 тогда влечет:

Теорема 2.2. *Представление $\psi = \psi_1 + \psi_2$, где $\psi_1 \ll \varphi$, $\psi_2 \perp \varphi$, единственно для каждого $\psi \in \mathcal{M}_*^+$ в том и только том случае, когда вес φ регулярен.*

Замечание 3. В работах [6, 7] Н. В. Трунов изучал почти доминируемые функционалы и регулярные веса в связи с задачами теории интегрирования относительно

нормальных весов на алгебрах фон Неймана. Его результаты совместно с теоремой 2.2 влекут ряд, на наш взгляд, интересных следствий относительно единственности лебеговского разложения положительных нормальных функционалов на различных алгебрах фон Неймана.

Литература

1. Azimow L., Ellis A. J. *Convexity theory and its applications in functional analysis.* – London: Academic Press, 1980. – 268 p.

2. Novikov An. *L_1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra* // Positivity. – 2017. – V. 21. – P. 359—375.

3. Novikov An. An., Tikhonov O. E. *Measures on orthoideals and L_1-spaces associated with positive operators* // Lobachevskii J. Math. – 2016. – V. 37. – P. 497–499.

4. Скворцова Г. Ш., Тихонов О. Е. *Выпуклые множества в некоммутативных L_1-пространствах, замкнутые в топологии локальной сходимости по мере* // Изв. вузов. Математика. – 1998. – № 8. – С. 48–55.

5. Столяров А. И., Тихонов О. Е. *О характеризации следов в терминах теории некоммутативного интегрирования*. – Казань, 1992. – 9 с. – Казань, Казанск. ун-т. Деп. в ВИНИТИ 05.11.92, № 3186-В92.

6. Трунов Н. В. *Интегрирование в алгебрах Неймана и регулярные веса* // Констр. теория функций и функц. анализ. – Казань, 1981. – Вып. 3. – С. 73–87.

7. Трунов Н. В. *К теории нормальных весов на алгебрах Неймана* // Изв. вузов. Математика. – 1982. – № 8. – С. 61–70.

8. Трунов Н. В. *Интегрирование относительно веса на JBW-алгебрах* // Функц. анализ и его прил. – 1985. – Т. 19, вып. 3. – С. 77–78.

9. Трунов Н. В., Шерстнев А. Н. *Введение в теорию некоммутативного интегрирования* // Современные пробл. математики. Новейшие достижения. Т. 27 (Итоги науки и техн. ВИНИТИ АН СССР). – М., 1985. – С. 167–190.

10. Шерстнев А. Н. *Методы билинейных форм в некоммутативной теории меры и интеграла*. – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2008. – 264 с.

L_1-TYPE SPACES AND DECOMPOSITIONS OF POSITIVE FUNCTIONALS ON VON NEUMANN ALGEBRA

L.V. Veselova, An.An. Novikov, O.E. Tikhonov

We introduce and study L_1-type spaces associated with positive functionals on ordered vector spaces. As an application, we give new results on representations of normal positive functionals on von Neumann algebras.

Keywords: positive functional, base norm space, order unit space, von Neumann algebra, weight, almost dominated functional, singular functional, Lebesgue decomposition.

УДК 517

ПРОДОЛЖЕНИЕ ЧАСТИЧНЫХ МЕР

Л.В. Веселова[1], О.Е. Тихонов[2]

1 *lidveselova@gmail.com*; Казанский национальный исследовательский технологический университет

2 *oleg.tikhonov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Изучаются σ-аддитивные функции множества, заданные на идеале в σ-алгебре и возможно принимающие оба значения $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$.

Ключевые слова: σ-алгебра, мера, σ-аддитивная функция множества.

Термин *мера* будем использовать для σ-аддитивных отображений σ-алгебр в расширенную числовую прямую $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty\} \cup \{-\infty\}$. Непустой подкласс $\mathscr{I}$ алгебры множеств $\mathscr{A}$ будем называть *идеалом* в $\mathscr{A}$, если условия $A \in \mathscr{I}$, $B \in \mathscr{A}$, $B \subset A$ влекут $B \in \mathscr{I}$.

Хорошо известно, что конечно аддитивная функция множества, заданная на алгебре множеств и принимающая значения в $\overline{\mathbb{R}}$, может принимать максимум одно из значений $\{+\infty\}$ или $\{-\infty\}$. В настоящей работе мы продолжаем начатое в [2] исследование "частичных мер", то есть функций множества, заданных на идеале в σ-алгебре, обладающих многими присущими мерам свойствами и возможно принимающих оба значения $\{+\infty\}$ и $\{-\infty\}$.

Лемма. *Пусть $\mu : \mathscr{I} \to \overline{\mathbb{R}}$ — конечно аддитивная функция множества, заданная на идеале $\mathscr{I}$ в алгебре $\mathscr{A}$; $\mu(\varnothing) = 0$. Для $A \in \mathscr{A}$ положим:*

$$\widetilde{\mu}(A) = \sup\Big\{\sum_{i\in I} \mu(B_i) : I \text{ конечно, } B_i \in \mathscr{I},\ \sum_{i\in I} B_i \subset A,\ \sum_{i\in I} \mu(B_i) \text{ опред. корректно}\Big\}. \quad (1)$$

Тогда $\widetilde{\mu}$ — конечно аддитивная функция множества на $\mathscr{A}$, принимающая значения в $\overline{\mathbb{R}}^+$.

Если μ σ-аддитивна на $\mathscr{I}$, то $\widetilde{\mu}$ σ-аддитивна на $\mathscr{A}$.

Как ясно из конструкции, введенная в лемме функция множества $\widetilde{\mu}$ является наименьшей из положительных аддитивных функций ν на $\mathscr{A}$, удовлетворяющих условию $\mu(A) \le \nu(A)$ $(A \in \mathscr{I})$.

Определение 1 [2]. *Частичной мерой в σ-алгебре называется σ-аддитивное отображение из некоторого идеала в этой алгебре в $\overline{\mathbb{R}}$.*

Иными словами, функция множества $\mu : \mathscr{D}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}$, заданная на непустом подклассе $\mathscr{D}_\mu$ некоторой σ-алгебры $\mathscr{A}$, является частичной мерой в $\mathscr{A}$ тогда и только тогда, когда для любого $B \in \mathscr{A}$ класс $\mathscr{A} \cap B = \{A \cap B : A \in \mathscr{A}\}$ есть σ-алгебра подмножеств B и ограничение $\mu|_{\mathscr{A}\cap B}$ является мерой на $\mathscr{A} \cap B$.

Пример 1. Пусть μ_1, μ_2 — две положительные меры на σ-алгебре $\mathscr{A}$. Положим: $\mathscr{D}_{\mu_1-\mu_2} = \{A \in \mathscr{A} : \mu_1(A) - \mu_2(A)$ корректно определено$\}$. Тогда формула $(\mu_1 - \mu_2)(A) = \mu_1(A) - \mu_2(A)$ задает частичную меру $\mu_1 - \mu_2 : \mathscr{D}_{\mu_1-\mu_2} \to \overline{\mathbb{R}}$ в $\mathscr{A}$.

Определение 2 [2]. *Частичная мера называется максимальной, если она не имеет собственных продолжений до частичной меры в рассматриваемой σ-алгебре.*

Пример 2. Пусть $\xi : \Omega \to \overline{\mathbb{R}}$ — случайная величина на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, P)$. Положим: $\mathscr{D}_\xi = \{A \in \mathscr{A} : \xi$ квазиинтегрируема на $A\}$ [1], $\mu_\xi(A) = \int_A \xi \, dP$ $(A \in \mathscr{D}_\xi)$. Тогда μ_ξ — максимальная частичная мера.

Отметим, что в работе [2] было показано, что на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathscr{A}, P)$ любая максимальная частичная мера, абсолютно непрерывная относительно P, имеет вид, указанный в примере 2.

В [2] было отмечено со ссылкой на лемму Цорна, что любая частичная мера продолжается до максмальной. Следующая теорема дает в определенном смысле "каноническое" продолжение.

Теорема 1. *Пусть $\mu : \mathscr{D}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}$ — частичная мера на σ-алгебре $\mathscr{A}$. Формулы*

$$\mu^+ = \widetilde{\mu}, \quad \mu^- = \widetilde{(-\mu)}$$

(см. (1)) задают положительные меры μ^+ и μ^- на $\mathscr{A}$. Частичная мера $\overline{\mu} = \mu^+ - \mu^-$ (пример 1) продолжает μ и максимальна.

Представление $\mu(A) = \mu^+(A) - \mu^-(A)$ $(A \in \mathscr{D}_\mu)$ экстремально в следующем смысле: если ν_1 и ν_2 — две положительные меры на $\mathscr{A}$ такие, что $\mu(A) = \nu_1(A) - \nu_2(A)$ $(A \in \mathscr{D}_\mu)$, то $\mu^+ \le \nu_1$, $\mu^- \le \nu_2$.

Для двух частичных мер $\mu : \mathscr{D}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}$, $\nu : \mathscr{D}_\nu \to \overline{\mathbb{R}}$ на σ-алгебре $\mathscr{A}$ определим частичную меру $\mu + \nu$ как поточечную сумму на множестве $\mathscr{D}_{\mu+\nu} = \{A \in \mathscr{D}_\mu \cap \mathscr{D}_\nu : \mu(A) + \nu(A)$ корректно определено$\}$. Таким образом, согласно теореме 1 отображение $(\mu, \nu) \mapsto \overline{\mu + \nu}$ задает двуместную операцию на множестве максимальных частиных мер. Эту операцию будем обозначать символом "$\dot{+}$".

Определение 2. *Частичную меру $\mu : \mathscr{D}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}$ в σ-алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств Ω назовем σ-заданной, если в $\mathscr{D}_\mu$ найдется не более чем счетное разбиение $\{D_i\}_{i \in I}$ множества Ω.*

Теорема 2. *Продолжение σ-заданной частичной меры до максимальной частиной меры единственно.*

σ-заданная частичная мера допускает лишь единственное продолжение до максимальной.

Определение 3. *Частичную меру $\mu : \mathscr{D}_\mu \to \overline{\mathbb{R}}$ в σ-алгебре $\mathscr{A}$ подмножеств Ω назовем σ-конечной, если в $\mathscr{D}_\mu$ найдется не более чем счетное разбиение $\{D_i\}_{i \in I}$ множества Ω такое, что для любого $i \in I$ значение $\mu(D_i)$ конечно.*

Заметим, что любая σ-конечная частичная мера σ-плотно задана и что операция "$\dot{+}$" на множестве σ-конечных частичных мер в σ-алгебре ассоциативна.

Литература

1. Невё Ж. *Математические основы теории вероятностей.* – М.: Мир, 1969. – 312 с.

2. Tikhonov O. E. *Partial measures* // Lobachevskii J. Math. – 2000. – V. 17. – P. 47–50.

CONTINUATION OF PARTIAL MEASURES

L.V. Veselova, O.E. Tikhonov

We study σ-additive set functions on an ideal in σ-algebra, which possibly take both the values $\{+\infty\}$

and $\{-\infty\}$.
Keywords: σ-algebra, measure, σ-additive set function.

УДК 517.98

ЛАПЛАСИАН ЛЕВИ НА БЕСКОНЕЧНОМЕРНОМ МНОГООБРАЗИИ

Б.О. Волков[1]

1 *borisvolkov1986@gmail.com*; Московский государственный технический университет имени Н.Э. Баумана

В статье обсуждается связь двух определений лапласиана Леви на бесконечномерном многообразии. Первое из них заключается в том, что лапласиан Леви определяется как среднее Чезаро вторых производных по направлению. Второе из них заключается в том, что лапласиан Леви определяется как интегральный функционал, заданный специальным видом второй производной. Интерес к лапласиану Леви обусловлен его связью с калибровочными полями.

Ключевые слова: лапласиан Леви, бесконечномерное многообразие, уравнения Янга-Миллса.

Оригинальное определение лапласиана Леви было следующим. Лапласиан Леви $\Delta_L^{\{e_n\}}$ — это бесконечномерный лапласиан, действующий на функции f, определенной на пространстве $L_2[0,1]$, по формуле

$$\Delta_L^{\{e_n\}} f(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} < f''(x) e_k, e_k >,$$

где $\{e_n\}$ – ортонормированный базис в $L_2[0,1]$.

Другое определение лапласиана Леви заключается в следующем. Пусть вторая производная Фреше функции f имеет вид:

$$< f''(x) u, v >= \int_0^1 K^V(x;t,s) u(t) v(s) dt ds + \int_0^1 K^L(x;t) u(t) v(t) dt,$$

где $K^V(x;\cdot,\cdot) \in L_2([0,1]\times[0,1])$ и $K^L(x;\cdot) \in L_\infty[0,1]$, тогда лапласиан Леви Δ_L можно определить по формуле

$$\Delta_L f(x) = \int_0^1 K^L(x;t) dt.$$

Ортонормированный базис $\{e_n\}$ в $L_2[0,1]$ называется слабо равномерно плотным, если $\lim_{n\to\infty} \int_0^1 h(t)(\frac{1}{n}\sum_{k=1}^n e_k^2(t) - 1) dt = 0$ для любой функции $h \in L_\infty[0,1]$. Примером слабо равномерно плотного базиса является $e_n(t) = \sqrt{2}\sin(\pi n t)$. Для слабо равномерно плотного базиса $\{e_n\}$ выполняется

$$\Delta_L \subset \Delta_L^{\{e_n\}}. \tag{1}$$

В работе [1] Л. Аккарди, П. Гибилиско и И.В. Воловича по аналогии со вторым определением лапласиана Леви был введен бесконечномерный лапласиан на пространстве функций на пространстве кривых в $\mathbb{R}^d$. Этот аналог также называется лапласианом Леви. Для такого оператора в [1] было доказано следующее. Связность

в векторном расслоении над $\mathbb{R}^d$ является решением уравнений Янга-Миллса тогда и только тогда, когда соответствующий связности параллельный перенос является решением уравнения Лапласа для лапласиана Леви. В работе [2] Р. Леандра и И.В. Воловича определение лапласиана Леви и теорема о связи с уравнениями Янга-Миллса были обобщены на случай многообразия. В работе [3] Л. Аккарди и О.Г. Смолянова был предложен аналог первого определения оригинального лапласиана Леви для случая многообразия. В настоящей работе показывается, что лапласианы Леви на бесконечномерном многообразии связаны соотношением аналогичным (2).

Если $\pi\colon \mathbf{E} \to \mathbf{M}$ –векторное расслоение, символом $\Xi_{\mathbf{E}}$ будем обозначать пространство сечений в этом расслоении. Пусть (M, g) — это C^∞-гладкое риманово односвязное многообразие размерности d с римановой метрикой g. Пусть $H^1_m([0,1], M)$ — гильбертово многообразие H^1-кривых на M с началом в точке $m \in M$. Пусть $\pi_E\colon E \to M$ — векторное расслоение над M со слоем $\mathbb{C}^N$. Если $p \in M$, пусть E_p — слой над p в расслоении E. Пусть $\pi_{\mathscr{E}}\colon \mathscr{E} \to H^1_m([0,1], M)$ — векторное расслоение на $H^1_m([0,1], M)$, слоем которого над $\gamma \in H^1_m([0,1], M)$ является пространство линейных операторов из E_m в $E_{\gamma(1)}$.

Пусть $Q(\gamma, t)$ параллельный перенос в TM вдоль $\gamma \in H^1_m([0,1], M)$, порожденный связностью Леви-Чивиты на M. Пусть $Z \in T_mM$ и $h \in C^1([0,1], \mathbb{R})$, причем $h(0) = 0$. Для кривой $\gamma \in H^1_m([0,1], M)$ кривая $\gamma_s^{Z,h} \in H^1_m([0,1], M)$, где $s \in (-\delta, \delta)$ для достаточно малого $\delta > 0$, определяется формулой:

$$\gamma_s^{Z,h}(t) = \exp_{\gamma(t)}(\mathrm{sh}(t) Q(\gamma, t) Z),$$

где $\exp_p$ – экспоненциальное отображение в точке $p \in M$. Пусть $\{Z_1, \ldots, Z_d\}$ — ортонормированный базис в T_mM. Обозначим символом Ω множество ортонормированных базисов в $L_2(0,1)$ таких, что $e_n \in C^1[0,1]$ и $e_n(0) = e_n(1) = 0$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Определение. *Лапласиан Леви $\Delta_L^{\{e_n\}}$ — это линейное отображение*

$$\Delta_L^{\{e_n\}} : dom\Delta_L^{\{e_n\}} \to \Xi_{\mathscr{E}},$$

определенное формулой:

$$\Delta_L^{\{e_n\}} \varphi(\gamma) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \sum_{i=1}^{d} \left. \frac{d^2}{ds^2} \right|_{s=0} \varphi(\gamma_s^{Z_i, e_k}), \tag{2}$$

где $dom\Delta_L^{\{e_n\}}$ — это пространство всех сечений $\varphi \in \Xi_{\mathscr{E}}$ для которых правая часть (2) существует для всех $\gamma \in H^1_m([0,1], M)$.

Над $H^1_m([0,1], M)$ существуют два канонических векторных расслоения $\alpha_0\colon \mathscr{H}^0 \to H^1_m([0,1], M)$ и $\alpha_1\colon \mathscr{H}^1 \to H^1_m([0,1], M)$ (см. [4]). Слоем в H^0 над $\gamma \in H^1_m([0,1], M)$ является пространство H^0-полей вдоль γ. Каноническая риманова метрика в расслоении $\mathscr{H}^0$ определяется формулой

$$< X(\gamma), Y(\gamma) >_0 = \int_0^1 g(X(\gamma)(t), Y(\gamma)(t))\, dt.$$

Символом ∇^{α_0} будем обозначать ковариантное дифференцирование, ассоциированное с канонической связностью в $\mathscr{H}^0$, порожденной связностью Леви-Чивиты на M.

Слоем в $\mathscr{H}^1$ над $\gamma \in H^1_m([0,1],M)$ является пространство H^1-полей $X(\gamma)$ вдоль γ таких, что $X(\gamma)(0)=0$. Если $X \in \Xi_{\mathscr{H}^1}$ и $\gamma \in H^1_m([0,1],M)$, то $X(\gamma)$ — H^1-путь в TM. Его ковариантная производная — это $\nabla X(\gamma)(s) = \frac{d}{ds}X(\gamma)(s) + \Gamma(\gamma(s))(X(\gamma)(s),\gamma(s))$, где Γ — символы Кристоффеля связности Леви-Чивиты на M. Каноническая риманова метрика в расслоении $\mathscr{H}^1$ определяется формулой:

$$< X(\gamma), Y(\gamma) >_1 = \int_0^1 g(X(\gamma)(t), Y(\gamma)(t)))dt + \int_0^1 g(\nabla X(\gamma)(t), \nabla Y(\gamma)(t))dt.$$

Расслоение $\mathscr{H}^1$ является касательным расслоением над $H^1_m([0,1],M)$. Пусть $\Xi^0_{\mathscr{H}^1}$ обозначает пространство сечений $X \in \Xi_{\mathscr{H}^1}$ таких, что $X(\gamma)(1)=0$ для всех $\gamma \in H^1_m([0,1],M)$. Если $\varphi \in \Xi_{\mathscr{E}}$ и $X \in \Xi^0_{\mathscr{H}^1}$, то $d_X\varphi$ — это производная φ по направлению X.

Определение. *Если $\varphi \in \Xi_{\mathscr{E}}$, то α_0-градиент φ — это такое сечение из $grad_{\alpha_0}\varphi \in \Xi_{\mathscr{E}\otimes\mathscr{H}^0}$, что*

$$< \mathrm{grad}_{\alpha_0}\varphi(\gamma), X(\gamma) >_0 = d_X\varphi(\gamma)$$

для всех $X \in \Xi^0_{\mathscr{H}^1}$.

Пусть для $\psi \in \Xi_{\mathscr{H}^0\otimes\mathscr{E}}$ и для всех $X, Y \in \Xi^0_{\mathscr{H}^1}$ выполняется

$$< \nabla^{\alpha_0}_X \psi(\gamma), Y(\gamma) >_0 = \int_0^1\int_0^1 K^V(\gamma;s,t) < X(\gamma)(t), Y(\gamma)(s) > ds dt +$$
$$+ \int_0^1 K^L(\gamma;t) < X(\gamma)(t), Y(\gamma)(t) > dt + \int_0^1 K^S(\gamma;t) < \nabla X(\gamma)(t), Y(\gamma)(t) > dt +$$
$$+ \int_0^1 K^S(\gamma;t) < \nabla Y(\gamma)(t), X(\gamma)(t) > dt,$$

где $K^L = (K^L_{\mu\nu})$ — симметричный тензор и $K^S = (K^S_{\mu\nu})$ — антисимметричный тензор со значениями в пространстве линейных операторов из E_m в $E_{\gamma(1)}$), для каждого $\gamma \in H^1_m([0,1],M)$ функции $K^V_{\mu\nu}(\gamma;\cdot,\cdot)$ принадлежат классу L_2, $K^L_{\mu\nu}(\gamma;\cdot)$ принадлежат классу L_1, а $K^S_{\mu\nu}(\gamma;\cdot)$ принадлежат классу L_∞.

Определение. *Значение дивергенции Леви на ψ определяется формулой*

$$\mathrm{div}_L\psi(\gamma) = \int_0^1 \sum_{\mu=1}^{d} K^L_{\mu\mu}(\gamma;t)dt$$

Определение. *Значение лапласиана Леви Δ_L на $\varphi \in \Xi_{\mathscr{E}}$ определяется формулой*

$$\Delta_L\varphi = \mathrm{div}_L(\mathrm{grad}_{\alpha_0}\varphi)$$

Теорема. *Пусть $\{e_n\} \in \Omega$. Если элементы $\{e_n\}$ образуют равномерно ограниченную систему функций, то $\Delta_L \subset \Delta_L^{\{e_n\}}$.*

Литература

1. Accardi L., Gibilisco P., Volovich I.V. *Yang-Mills gauge fields as harmonic functions for the Levy-Laplacians* // Russ. J. Math. Phys. – 1994. – V. 2. – № 2. – P. 235–250.

2. Leandre R., Volovich I.V. *The Stochastic Levy Laplacian and Yang–Mills equation on manifolds* // Infin. Dimens. Anal. Quantum Probab. Relat. Top. – 2001. – V. 4.– № 2. – P. 161–172.

3. Аккарди Л., Смолянов О.Г. *Формулы Фейнмана для эволюционных уравнений с лапласианом Леви на бесконечномерных многообразиях* // ДАН. –2006. – Т. 407.– № 5. – С. 583–588.

4. Klingenberg W. *Riemannian geometry*. – de Gruyter Studies in Mathematics. V. 1, Berlin, 1982.

LEVY-LAPLACIAN ON INFINITE-DIMENSIONAL MANIFOLD

B.O. Volkov

The article discusses the connection between two definitions of the Levy-Laplacian on an infinite-dimensional manifold. In the first of the definitions, the Levy-Laplacian is defined as the Cesaro mean of the second order directional derivatives. In the second one, the Levy-Laplacian is given as an integral functional defined by a special kind of the second derivative. Interest in the Levy-Laplacian is due to its connection with the gauge fields.

Keywords: Levy-Laplacian, infinite dimensional manifold, Yang-Mills equations.

УДК 517.518

СЛАБЫЕ И СИЛЬНЫЕ ОЦЕНКИ ДЛЯ ГРУБЫХ ОПЕРАТОРОВ ТИПА ХАУСДОРФА НА *P*-АДИЧЕСКОМ ЛИНЕЙНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

С.С. Волосивец[1]

1 *volosivetsss@mail.ru*; НИУ Саратовский государственный университет

Для грубых операторов типа Хаусдорфа, определенных на p-адическом линейном пространстве Q_p^n, и их коммутаторов с символом из пространства Липшица мы приводим достаточные условия их ограниченности из одного пространства Лоренца в другое.

Ключевые слова: оператор Хаусдорфа, коммутатор, слабый тип, пространство Лоренца, интерполяция.

Пусть p – простое число и $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$. Если x записано в вид $x = p^{\gamma} m/n$, где $\gamma = \gamma(x) \in \mathbb{Z}$ и $m, n \in \mathbb{Z}$ взаимно просты с p, то $|x|_p := p^{-\gamma}$ (для $x = 0$ полагаем $|0|_p = 0$). Величина $|x|_p$ имеет все свойства нормы на поле, включая равенство $|xy|_p = |x|_p|y|_p$ и дополнительное свойство $|x+y|_p \leq \max(|x|_p, |y|_p)$. Через $\mathbb{Q}_p$ обозначим замыкание $\mathbb{Q}$ по норме $|\cdot|_p$. Каждое $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$, имеет представление

$$x = p^{\gamma}(x_0 + x_1 p + x_2 p^2 + \ldots) = \sum_{i=0}^{\infty} x_i p^{i+\gamma},$$

где $x_0 \neq 0$, $x_i \in \mathbb{Z}$, $0 \leq x_i < p$, $\gamma \in \mathbb{Z}$. В этом случае $|x|_p = p^{-\gamma}$ и $|0|_p = 0$. С этой нормой $\mathbb{Q}_p$ снова является полем. Пусть $B_k(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x - x_0|_p \leq p^k\}$ и $S_k(x_0) = \{x \in \mathbb{Q}_p :$

$|x-x_0|_p = p^k\}$. Так как аддитивная группа $\mathbb{Q}_p$ локально компактна, существует мера Хаара μ, такая что $\mu(B_0)=1$.

Для $\mathbf{x}=(x_1,\dots,x_n)\in\mathbb{Q}_p^n := \mathbb{Q}_p\times\mathbb{Q}_p\cdots\times\mathbb{Q}_p$ и $t\in\mathbb{Q}_p$ введем $|\mathbf{x}|_p=\max\{|x_i|_p : 1\le i\le n\}$, $t\mathbf{x}=(tx_1,\dots,tx_n)$. Шары $B_k(\mathbf{x})$ и сферы $S_k(\mathbf{x})$, $k\in\mathbb{Z}$, определяются так же, как при $n=1$. Мера Хаара μ на $\mathbb{Q}_p^n$ является произведением n соответствующих мер.

Пространство $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$, $1\le q<\infty$, состоит из комплекснозначных измеримых функций с конечной нормой $\|f\|_q=\left(\int\limits_{\mathbb{Q}_p^n}|f(\mathbf{x})|^q\,d\mu(\mathbf{x})\right)^{1/q}$. Далее $1/q+1/q'=1$. Функция распределения η_f измеримой на $\mathbb{Q}_p^n$ функции f задается равенством

$$\eta_f(\lambda)=\mu(\{\mathbf{x}\in\mathbb{Q}_p^n : |f(\mathbf{x})|>\lambda\}),\quad \lambda\ge 0.$$

Невозрастающей перестановкой f называется функция f^*, определенная на $\mathbb{R}_+=[0,\infty)$ формулой

$$f^*(t)=\inf\{\lambda : \eta_f(\lambda)\le t\},\quad t\in\mathbb{R}_+.$$

Пусть $0<q,s<\infty$. Пространство Лоренца $L^{q,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ состоит из всех измеримых функций f на $\mathbb{Q}_p^n$, для которых

$$\|f\|_{q,s}=\left(\int_0^\infty [t^{1/q}f^*(t)]^s\frac{dt}{t}\right)^{1/s}<\infty.$$

Если $s=\infty$ и $1\le q\le\infty$, то $\|f\|_{q,\infty}=\sup\limits_{t>0}t^{1/q}f^*(t)$. Пусть T – оператор, определенный на $L^{q,1}(\mathbb{Q}_p^n)$ и его значения измеримы на $\mathbb{Q}_p^n$, $1\le q<\infty$, $1\le r\le\infty$. Если T ограничен из $L^{q,1}(\mathbb{Q}_p^n)$ в $L^{r,\infty}(\mathbb{Q}_p^n)$, то T называется оператором слабого типа (q,r). Важную роль в работе играет теорема Марцинкевича.

Теорема A. *Предположим, что* $1\le q_0<q_1<\infty$, $1\le r_0,r_1$, $r_0\ne r_1$, $\theta\in(0,1)$ *и*

$$1/q=(1-\theta)/q_0+\theta/q_1,\quad 1/r=(1-\theta)/r_0+\theta/r_1.$$

Если оператор T *имеет слабые типы* (q_0,r_0) *и* (q_1,r_1), *то* T *ограничен из* $L^{q,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ *в* $L^{r,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ *при всех* $1\le s\le\infty$.

О пространствах Лоренца, операторах слабого типа и интерполяционной теореме Марцинкевича см. [2, гл. 4, § 4].

Введем следующий p-адический аналог оператора типа Хаусдорфа, рассмотренного в работе [3],

$$\mathcal{H}_{\Phi,\Omega}(f)(\mathbf{x})=\int_{\mathbb{Q}_p^n}\frac{\Phi(\mathbf{x}|\mathbf{y}|_p)}{|\mathbf{y}|_p^n}\Omega(\mathbf{y}|\mathbf{y}|_p)f(\mathbf{y})\,d\mu(\mathbf{y}).$$

Здесь $\Omega\in L^1(S_0(\mathbf{0}))$ и мы рассматриваем число $|\mathbf{y}|_p$, равное некоторой степени p, как элемент $\mathbb{Q}_p$. Также мы определяем коммутатор $\mathcal{H}^b_{\Phi,\Omega}(f):=b\mathcal{H}_{\Phi,\Omega}(f)-\mathcal{H}_{\Phi,\Omega}(bf)$, где $b\in\Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)$ для некоторого $0<\beta\le 1$, т.е.

$$\|b\|_{\Lambda_\beta}=\sup\{|b(\mathbf{x}+\mathbf{h})-b(\mathbf{x})|/|\mathbf{h}|_p^\beta : \mathbf{x}\in\mathbb{Q}_p^n,\quad \mathbf{h}\in\mathbb{Q}_p^n\setminus\mathbf{0}\}<\infty.$$

Целью настоящей работы является получение достаточных условий для оценок сильного и слабого типов для $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ в $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$ и для $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ из $L^{q,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ в $L^{r,s}(\mathbb{Q}_p^n)$. Поскольку сфера $S_0(\mathbf{0})$ имеет ту же размерность, что и $\mathbb{Q}_p^n$, методы, используемые в работе, отличаются от применяемых в случае $\mathbb{R}^n$ (см. [3] и [4]).

Теорема 1. *Пусть* $1 \le q < \infty$, Φ *радиальна, т.е.* $\Phi(\mathbf{x}) = \varphi(|\mathbf{x}|_p)$, *где* φ *определена во всех* p^k *и постоянна на всех* $(p^{k-1}, p^k]$, $k \in \mathbb{Z}$, $\Omega \in L^{q'}(S_0(\mathbf{0}))$ *и интеграл*

$$M^{q'}(\varphi, q) := \int_0^\infty |\varphi(t)|^{q'} t^{n(q'-1)-1}\, dt$$

конечен. Тогда $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ *имеет слабый тип* (q, q).

Теорема 2. *Пусть* $1 < q < \infty$, Φ *и* Ω *такие же, как в теореме 1 и* $M^{q'}(\varphi, q)$ *конечно при* $q \pm \delta$ *вместо* q, *где* $0 \le \delta < \delta_0$. *Тогда оператор* $\mathscr{H}_{\Phi,\Omega}$ *ограничен в* $L^{q,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ *для всех* $1 \le s \le \infty$.

Теорема 3. *Пусть* $1 < q < r < \infty$, $0 < \beta < 1$, $1/q - 1/r = \beta/n$, Φ *является радиальной функцией,* $\Omega \in L^{q'}(S_0(\mathbf{0}))$, $b \in \Lambda_\beta(\mathbb{Q}_p^n)$ *и*

$$\int_0^\infty \varphi^{q'}(t)\, t^{(n(q'-1)-1} \max(1, t^{-\beta q'})\, dt < \infty. \tag{1}$$

Тогда коммутатор $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ *имеет слабый тип* (q, r).

Теорема 4. *Пусть* q, r, β, Φ, b *как в теореме 3, а (1) верно для всех* $q \pm \delta$ *вместо* q, *где* $0 \le \delta < \delta_0$. *Тогда оператор* $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ *ограничен из* $L^{q,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ *в* $L^{r,s}(\mathbb{Q}_p^n)$ *при всех* $1 \le s \le \infty$.

Следствие. При выполнении условий теоремы 4 оператор $\mathscr{H}^b_{\Phi,\Omega}$ ограничен из $L^q(\mathbb{Q}_p^n)$ в $L^r(\mathbb{Q}_p^n)$.

Литература

1. Владимиров В. С., Волович И. В., Зеленов Е. И. *p-адический анализ и математическая физика.* – М.: Наука, 1994. – 352 с.

2. Bennett C., Sharpley R. *Interpolation of operators.* – N.Y.: Academic Press, 1988. – 484 p.

3. Chen J., Fan D., Li J. *Hausdorff operators on function spaces* // Chinese Ann. Math. – 2012. – V. 33B. – P. 537–556.

4. Hussain A., Ahmed M. *Weak and strong estimates for the commutators of Hausdorff operators* // Math. Ineq. Appl. – 2017. – V. 20. – № 1. – P. 49–56.

WEAK AND STRONG ESTIMATES FOR ROUGH HAUSDORFF TYPE OPERATOR DEFINED ON P-ADIC LINEAR SPACE

S.S. Volosivets

For rough Hausdorff type operator, defined on p-adic linear space Q_p^n *and its commutator with symbol from Lipschitz space, we give sufficient conditions of their boundedness from one Lorentz space into another.*

Keywords: Hausdorff operator, commutator, weak type, Lorentz space, interpolation.

УДК 519.642

К ЧИСЛЕННОМУ РЕШЕНИЮ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Н.С. Габбасов[1]

1 *gabbasovnazim@rambler.ru*; Набережночелнинский институт Казанского федерального университета

Исследовано линейное интегро-дифференциальное уравнение с коэффициентом, имеющим нули степенного порядка. Для его приближенного решения в пространстве обобщенных функций предложен и обоснован специальный обобщенный вариант метода коллокации.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение, пространство обобщенных функций, приближенное решение, метод коллокации, теоретическое обоснование.

Работа посвящена линейному интегро-дифференциальному уравнению третьего рода (ИДУТР):

$$Ax \equiv x(t)\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j} + \sum_{j=0}^{p}\int_{-1}^{1} K_j(t,s)x^{(j)}(s)ds = y(t), \tag{1}$$

где $t \in I \equiv [-1,1]$, $t_j \in (-1,1)$, $m_j \in \mathrm{N}\,(j=\overline{1,q})$; K_j $(j=\overline{0,p})$ и y – известные "гладкие" функции, а x – искомая функция. Разработаны и обоснованы в смысле [1, гл.1] обобщенные варианты полиномиальных и сплайновых прямых методов, специально приспособленные к приближенному решению ИДУТР (1) в некотором пространстве X типа D обобщенных функций, порожденных функционалом "дельта-функция Дирака". Проведена также оптимизация по порядку точности прямых проекционных методов решения исследуемых уравнений. В виде иллюстрации приведем некоторые результаты.

Пусть $C\{m;0\}$ и $C^{(p)}$ – пространства "точечно-гладких" и гладких функций соответственно, а $T : C\{m;0\} \to C$ – "характеристический" оператор класса $C\{m;0\}$, $Y \equiv \{y \in C\{m;0\} | Ty \in C^{(p)}\}$ – пространство основных функций, а $X \equiv D^{(p)}\{m;0\}$– семейство обобщенных функций, определенных на Y (см., напр., [2]).

Далее ради простоты выкладок и формулировок будем считать в ИДУТР (1) $q = 1$, $t_1 = 0$, т.е. рассмотрим уравнение вида

$$Ax \equiv t^m x(t) + \sum_{j=0}^{p}\int_{-1}^{1} K_j(t,s)x^{(j)}(s)ds = y(t) \qquad (t \in I), \tag{2}$$

где $m \in N$, $y \in Y$, ядра $K_j(j=\overline{0,p})$ удовлетворяют условиям фредгольмовости оператора $A : X \to Y$ (см. [2]).

Приближенное решение уравнения (2) будем искать в виде

$$x_n \equiv x_n(t;\{c_j\}) \equiv \left(J\left\{\sum_{i=0}^{2n-1} c_i t^i\right\}\right)(t) + \sum_{i=0}^{p-1} c_{i+2n}(t+1)^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+p+2n}\delta^{\{i\}}(t), \tag{3}$$

где $Jf \equiv ((p-1)!)^{-1} \int\limits_{-1}^{t} (t-s)^{p-1} f(s)ds$, а δ и $\delta^{\{i\}}$ – соответственно дельта-функция Дирака и ее "тейлоровские" производные, определенные на Y (см. [2]). Набор $\{c_j\}$ неизвестных параметров найдем из СЛАУ

$$\rho_n^{\{i\}}(0) = 0,\ (T\rho_n)^{(j)}(-1) = 0,\ (DT\rho_n)(\nu_k) = 0,$$

$$(DTUx_n)'(\nu_k) = 0, \quad (i = \overline{0, m-1},\ j = \overline{0, p-1},\ k = \overline{1, n}), \tag{4}$$

в которой $Df \equiv f^{(p)}$, $Ux \equiv t^m x(t)$, $\rho_n(t) \equiv \rho_n^A(t) \equiv (Ax_n - y)(t)$ – невязка приближенного решения, а $\{\nu_k\}$ – система узлов Чебышева первого рода.

Относительно алгоритма (2)-(4) справедлива

Теорема. *Пусть $Ker\,A = \{\theta\}$ в X, а функции $h_j \equiv D_t T_t K_j$ (по t), $\tau_{ji} \equiv DT\theta_{ji}$ $(j = \overline{0, p},\ i = \overline{0, m-1})$, $DTy \in Lip\,\alpha\ (0 < \alpha \le 1)$, где $\theta_{ji}(t) \equiv (\eta_j)_s^{\{i\}}(t, 0) \in Y$, $\eta_j(t,s) \equiv \frac{\partial^j K_j}{\partial s^j}(t,s)$. Тогда при всех $n \in N$ $(n \ge n_0)$ СЛАУ (4) имеет единственное решение $\{c_j^*\}$ и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_j^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ по норме X со скоростью*

$$\|x_n^* - x^*\| = O(n^{-\alpha/2}).$$

При доказательстве теоремы существенно используются соответствующие идеи и результаты работ [2, 1].

Литература

1. Габдулхаев Б. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казанск. ун-та, 1980. – 232 с.

2. Габбасов Н. С. *Прямые методы решения интегро-дифференциальных уравнений в особом случае* // Дифференц. уравнения. – 2016. – Т. 52. – № 7. – С. 904–916.

ON NUMERICAL SOLVING FOR A CLASS OF INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

N.S. Gabbasov

We study a linear integro-differential equation with a coefficient that has zeros of finite order. For its approximate solution in the space of generalized functions, we suggest and justify a special generalized variant of the collocation method.

Keywords: integro-differential equation, space of generalized functions, approximate solution, collocation method, theoretical substantiation.

УДК 517.518.3

О СХОДИМОСТИ ПОЧТИ ВСЮДУ ОРТОРЕКУРСИВНЫХ РАЗЛОЖЕНИЙ ПО СИСТЕМАМ СЖАТИЙ И СДВИГОВ

В.В. Галатенко[1], Т.П. Лукашенко[2], В.А. Садовничий[3]

1 *vgalat@imscs.msu.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
2 *lukashenko@mail.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова
3 *info@rector.msu.ru*; Московский государственный университет имени М.В. Ломоносова

В работе рассматриваются орторекурсивные разложения по системам двоичных сжатий и сдвигов фиксированной функции. Сходимость в L^2 орторекурсивных разложений по таким системам была доказана А.Ю. Кудрявцевым и А.В. Политовым, однако вопрос о сходимости почти всюду оставался открытым. В данной работе приводится общий результат о сходимости почти всюду орторекурсивных разложений по системам двоичных сжатий и сдвигов.

Ключевые слова: орторекурсивное разложение, системы сжатий и сдвигов, сходимость почти всюду.

Орторекурсивные разложения, введенные Т.П. Лукашенко в 2000–2001 гг. [1, 2], представляют собой естественную схему разложения, обобщающую классическое разложение в ряды Фурье и входящую как составная часть в чисто жадные разложения и их обобщения [3].

Напомним определение орторекурсивных разложений. Пусть H — пространство со скалярным произведением (в данной работе рассматривается случай пространств над полем действительных чисел), $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ — система единичных элементов H, f — элемент H. Определим индуктивно последовательность остатков $\{r_n\}_{n=0}^{\infty}$ и последовательность коэффициентов $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$:

$$r_0 = f;$$

$$\hat{f}_{n+1} = (r_n, e_{n+1}), \qquad r_{n+1} = r_n - \hat{f}_{n+1} e_{n+1}.$$

Определение. *Ряд* $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n e_n$ *называется орторекурсивным разложением (орторекурсивным рядом Фурье) элемента* f *по системе* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Легко заметить, что сходимость орторекурсивного разложения к разлагаемому элементу эквивалентна сходимости остатков разложения к нулю. Для орторекурсивных разложений, как и для разложений в ряды Фурье по ортонормированным системам, последовательность коэффициентов $\{\hat{f}_n\}_{n=1}^{\infty}$ принадлежит пространству ℓ^2, а равенство Парсеваля

$$\sum_{n=1}^{\infty} \hat{f}_n^2 = \|f\|^2$$

выполняется если и только если имеет место сходимость разложения к разлагаемому элементу.

Интересным случаем неортогональных систем с точки зрения орторекурсивных разложений являются системы двоичных сжатий и сдвигов фиксированной функ-

ции [4]. Определим их, положив $H = L^2[0,1]$. Пусть φ — произвольная функция, лежащая в $L^2[0,1]$ и имеющая единичную L^2-норму. Доопределим ее нулем вне отрезке $[0,1]$ и положим

$$\varphi_{k,j}(x) = \varphi_{2^k+j}(x) = 2^{\frac{k}{2}}\varphi(2^k x - j)$$

($k = 0, 1, 2 \ldots$, $j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$). Полученная система $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, являющаяся нормированной в $L^2[0,1]$, и называется системой двоичных сжатий и сдвигов, порожденной функцией $\varphi(x)$.

А.Ю. Кудрявцевым и А.В. Политовым [5, 6] было показано, что если

$$\int_0^1 \varphi(x)\, d\mu \neq 0$$

(это условие необходимо для полноты системы $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ в $L^2[0,1]$) и дополнительно выполнено достаточно слабое условие на модуль непрерывности порождающей функции

$$\sum_{k=1}^{\infty} \omega_2^2(\varphi, 2^{-k}) < \infty$$

(где ω_2 — интегральный модуль непрерывности в L^2), то для каждого элемента $f \in L^2[0,1]$ его орторекурсивное разложение по системе $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к f по норме L^2.

Однако для функциональных пространств и, в частности, пространства L^2 при изучении разложений наряду с вопросом о сходимости по норме встает вопрос и о сходимости почти всюду. Для некоторых систем — в первую очередь, системы характеристических функций двоичных промежутков и ее обобщений — такие результаты были отмечены авторами ранее [2, 7]. Но оказывается, что сходимость почти всюду является общим свойством при орторекурсивном разложении непрерывной почти всюду функции по широкому классу систем двоичных сжатий и сдвигов. Более конкретно, имеет место следующая

Теорема. *Пусть функция $\varphi(x)$, порождающая систему двоичных сжатий и сдвигов, неотрицательна на отрезке* $[0,1]$ *и удовлетворяет условию Липшица (или условию Гёльдера с произвольным положительным показателем) на этом отрезке, а функция $f \in L^2[0,1]$ непрерывна почти всюду. Тогда орторекурсивное разложение функции $f(x)$ по системе двоичных сжатий и сдвигов $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ сходится к $f(x)$ почти всюду на отрезке* $[0,1]$.

Ключевую роль в доказательстве теоремы играет лемма, по сути связанная с рассмотрением локального (с точки зрения отрезка $[0,1]$) свойства коэффициентов разложения. Эта лемма может быть сформулирована следующим образом. Для двоично-иррациональной точки x и целого неотрицательного k через $n_k(x)$ обозначим такое натуральное число $n = 2^k + j$ ($j = 0, 1, \ldots, 2^k - 1$), что

$$x \in \left[\frac{j}{2^k}, \frac{j+1}{2^k}\right].$$

Иными словами, $n_k(x)$ — это индекс двоичного отрезка k-й пачки, содержащего точку x.

Лемма. *Ряд* $\sum\limits_{k=0}^{\infty} \hat{f}^2_{n_k(x)} 2^k$ *сходится для почти всех* $x \in [0,1]$.

Представляется, что приведенная теорема допускает дальнейшие обобщения, связанные с ослаблением условий как на порождающую функцию φ (в частности, имеется в виду отказ от требования наотрицательности, а также ослабление условия гёльдеровости), так и на разлагаемую функцию.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента "Ведущие научные школы РФ" (проект НШ–7461.2016.1).

Литература

1. Лукашенко Т. П. *Об орторекурсивных разложениях по системе Фабера–Шаудера* // Тез. докл. 10-й Саратовской зимней школы "Современные проблемы теории функций и их приложения". – Саратов: Изд-во Саратовского ун-та, 2000. – С. 83.

2. Лукашенко Т. П. *О свойствах орторекурсивных разложений по неортогональным системам* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2001. – № 1. – С. 6–10.

3. Temlyakov V. N. *Weak greedy algorithms* // Adv. Comput. Math. – 2000. – Vol. 12. – Issue 2–3. – P. 213–227.

4. Filippov V. I., Oswald P. *Representation in L_p by series of translates and dilates of one function* // J. Approx. Theory. – 1995. – Vol. 82. – Issue 1. – P. 15–29.

5. Кудрявцев А. Ю. *Орторекурсивные разложения по системам сжатий и сдвигов фиксированной функции* // Тез. докл. Воронежской зимней математ. школы "Современные методы теории функций и смежные проблемы". – Воронеж: ВГУ, 2001.

6. Политов В. А. *Орторекурсивные разложения в гильбертовых пространствах* // Вестн. Моск. ун-та. Сер. 1. Математика. Механика. – 2010. – № 3. – С. 3–7.

7. Галатенко В. В. *Об орторекурсивном разложении по некоторой системе функций с ошибками при вычислении коэффициентов* // Матем. сб. – 2004. – Т. 195. – № 7. – С. 21–36.

ON CONVERGENCE ALMOST EVERYWHERE OF ORTHORECURSIVE EXPANSIONS IN SYSTEMS OF TRANSLATES AND DILATES

V.V. Galatenko, T.P. Lukashenko, A.V. Sadovnichy

We consider orthorecursive expansions in systems of dyadic translates and dilates of one function. Convergence in L^2–norm of orthorecursive expansions in such systems was established by A.Yu. Kudryavtsev and A.V. Politov, but the the results on the convergence almost everywhere were lacking. In this paper we present a general result on convergence almost everywhere of orthorecursive expansions in systems of dyadic translates and dilates.

Keywords: orthorecursive expansions, systems of translates and dilates, convergence almost everywhere.

УДК 519.642

ОБОБЩЕННЫЙ МЕТОД КОЛЛОКАЦИИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ВТОРОГО РОДА

З.Х. Галимова[1]

1 *zulshik@mail.ru*; Казанский инновационный университет имени В.Г.Тимирясова (ИЭУП), Набережночелнинский филиал

Исследовано линейное интегральное уравнение второго рода с неподвижными особенностями в ядре. Для его приближенного решения предложен и обоснован обобщенный вариант метода коллокации.

Ключевые слова: интегральное уравнение, приближенное решение, метод коллокации, теоретическое обоснование.

Рассматривается линейное интегральное уравнение с неподвижными особенностями (УНО) в ядре

$$Ax \equiv x(t) + \int_0^1 K(t,s)[u(s)]^{-1}x(s)ds = y(t) \quad (t \in J \equiv [0,1]), \tag{1}$$

где $u(t) \equiv t^{p_1}(1-t)^{p_2}\prod_{j=1}^{q}(t-t_j)^{m_j}$; $p_1, p_2 \in \mathbb{R}^+$, $t_j \in (0,1)$, $m_j \in \mathrm{N}$ $(j = \overline{1,q})$; K и y – известные непрерывные функции, обладающие определенными свойствами "гладкости" точечного характера, x – искомая функция, а интеграл понимается в смысле конечной части по Адамару. На базе рассуждений и результатов работ [1, 2] разработаны и обоснованы в смысле [3, гл.1] прямые проекционные методы, специально приспособленные к решению УНО (1) в общем случае, установлена их оптимальность по порядку точности. В виде иллюстрации приведем лишь некоторые результаты.

Пусть $X \equiv C\{p_1, p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\} \equiv C^{\{p_1,p_2;\overline{m}\}}(J)$ – векторное пространство функций, представимых в виде

$$g(t) \equiv (u \cdot G)(t) + \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} a_{ji}R_{ji}(t), \tag{2}$$

где $G \in G(J)$, $G(t_j) \equiv \lim\limits_{t\to t_j} G(t)$ $(j = \overline{1,q+2})$, $t_j \in (0,1)$ $(j = \overline{1,q})$, $t_{q+1} \equiv 0$, $t_{q+2} \equiv 1$; $a_{ji} \in R$, а R_{ji} – фундаментальные полиномы Эрмита степени $m-1$ по узлам $\{t_j\}_1^{q+2}$. Здесь $m \equiv \sum\limits_{j=1}^{q+2} m_j$, $m_{q+1} \equiv \lambda_1 + 1$, $m_{q+2} \equiv \lambda_2 + 1$, $\lambda_j \equiv \lambda(p_j)$ $(j = \overline{1,2})$, $\lambda(p) \equiv [p] - (1 + sign([p] - p))$ ([·] - целая часть). Введем "характеристический" оператор класса X :

$$(Tg)(t) \equiv \left[g(t) - \sum_{j=1}^{q+2}\sum_{i=0}^{m_j-1} g^{\{i\}}(t_j)R_{ji}(t)\right] / u(t) \quad (g \in X),$$

где $g^{\{i\}}(t_j)$ – соответствующие тейлоровские производные (см., напр., [2]). Ясно, что

в (2) $G = Tg \in C$, $a_{ji} = g^{\{i\}}(t_j)$. По норме

$$\|g\|_X \equiv \|Tg\|_C + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j-1} |g^{\{i\}}(t_j)|$$

пространство X полно и вложено в C.

Изучим оператор A в УНО (1), где ядро K удовлетворяет условиям

$$K \in C^{\{p_1,p_2;\overline{m}\}}(J^2); \varphi_{ji}(s) \equiv K_t^{\{i\}}(t_j, s),$$

$$\psi_{ji}(t) \equiv K_s^{\{i\}}(t, t_j) \in X \, (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, q+2}). \tag{3}$$

Теорема 1. *В условиях (3) оператор $A : X \to X$ фредгольмов.*

Схема доказательства такова. Предварительно показывается полная непрерывность оператора $K : X \to X$. Тогда утверждение теоремы непосредственно следует из того, что возмущение нетерова оператора вполне непрерывным сохраняет нетеровость и не меняет его индекса.

Пусть дано уравнение (1), в котором ядро K удовлетворяет требованиям (3), $y \in X$, а $x \in X$ – искомая функция. Приближенное решение УНО (1) образуем в виде

$$x_n \equiv x_n(t; \{c_i\}) \equiv u(t) \sum_{i=0}^{n-1} c_i t^i + \sum_{i=0}^{m-1} c_{i+n} t^i, \quad (n \geq 2). \tag{4}$$

Неизвестные параметры $\{c_i\}_0^{n+m-1}$ найдем согласно обобщенному методу коллокации из системы линейных алгебраических уравнений (СЛАУ)

$$(TAx_n - Ty)(\nu_k) = 0 \quad (k = \overline{1, n}); (Ax_n - y)^{\{i\}}(t_j) = 0 \quad (i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, q+2}), \tag{5}$$

где $\{\nu_k\}$ – система узлов Чебышева первого (или второго) рода.

Теорема 2. *Пусть $Ker A = \{\theta\}$ в X, а $h \equiv T_t T_s K$ (по t), $T\psi_{ji}$ $(i = \overline{0, m_j - 1}, j = \overline{1, q+2})$, $Ty \in DL(J)$. Тогда при всех $n \geq n_0 \in N$ СЛАУ (5) имеет единственное решение $\{c_i^*\}$ и последовательность приближенных решений $x_n^* \equiv x_n(t; \{c_i^*\})$ сходится к точному решению $x^* = A^{-1}y$ в пространстве X со скоростью*

$$\|x_n^* - x^*\| = O\left\{ \left[E_{n-1}^t(h) + \sum_{j=1}^{q+2} \sum_{i=0}^{m_j-1} E_{n-1}(T\psi_{ji}) + E_{n-1}(Ty) \right] \ln n \right\},$$

где $E_l(q)$ – наилучшее равномерное приближение функции $g \in C$ полиномами степени не выше $l \geq 0$.

Рассмотрим теперь оптимизацию на классе однозначно разрешимых уравнений вида (1) в случае, когда исходные данные принадлежат семейству $C^{\{p_1,p_2;\overline{m}\}} H_\omega^r \equiv \{g \in C\{p_1, p_2; \overline{m}, \overline{\tau}\} | Tg \in H_\omega^r\}$. Через $V_N(F)$ обозначим [3] оптимальную оценку погрешности всевозможных "полиномиальных" проекционных методов решения УНО (1) на классе F.

Теорема 3. *Если $F = C^{\{p_1,p_2;\overline{m}\}} H_\omega^r$, то*

$$V_N(F), \asymp N^{-r} \omega(N^{-1}) \ln N \quad (N = n + m),$$

и этот оптимальный порядок реализует предложенный метод (4)-(5).

При доказательстве теорем 2, 3 существенно используются результаты работ [1, 3].

Литература

1. Габбасов Н. С. *Методы решения линейного интегрального уравнения с ядром, имеющим неподвижные особенности* // Изв. вузов. Математика. – 2001. – № 5. – С. 12–20.

2. Габбасов Н. С. *К теории линейных интегральных уравнений третьего рода* // Дифференц. уравнения. – 1996. – Т. 32. – № 9. – С. 1192–1201.

3. Габдулхаев Б. *Оптимальные аппроксимации решений линейных задач.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1980. – 232 с.

GENERALIZED COLLOCATION METHOD FOR A CLASS
OF INTEGRAL EQUATIONS OF THE SECOND KIND

Z.H. Galimova

We study a linear integral equation of the second kind with fixed singularities in the kernel. For its approximate solution we suggest and justify generalized variant of the collocation method.

Keywords: integral equation, approximate solution, collocation method, theoretical substantiation.

УДК 514.822

ОБОБЩЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА МАКАИ ДЛЯ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ

Л.И. Гафиятуллина[1], Р.Г. Салахудинов[2]

1 *ligafiyatullina@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *rustem.salakhudinov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В данной работе с использованием подходов из [3] доказывается обобщение неравенства Макаи для жесткости кручения в классе выпуклых областей.

Ключевые слова: жесткость кручения, моменты Евклида области относительно границы, изопериметрические неравенства, функция расстояния до границы области.

Ряд изопериметрических неравенств для жесткости кручения односвязных областей были получены Полиа и Сегё [2], Макаи [1], Пейном [4] и др.

Пусть G — выпуклая область на плоскости со спрямляемой границей и $\rho(z,G)$ — расстояние от точки z до границы ∂G области G. Пусть $\rho(G)=\sup_{z\in G}\rho(z,G)$.

Геометрический функционал, определяемый равенством

$$\mathrm{I}_p(G):=\iint\limits_{\Omega}\rho(z,G)^p\,\mathrm{dA},$$

называется моментом Евклида области G порядка p.

В 1962 г. Е. Макаи получил следующее неравенство

$$\mathrm{P}(G)\le 4\mathrm{I}_2(G),$$

справедливое для любой выпуклой области G.

Имеет место следующая

Теорема. *Пусть G – выпуклая область на плоскости и $p \geq 2$. Тогда имеет место неравенство*

$$\mathrm{P}(G) \leq \frac{(p+1)(p+2)}{3\rho(G)^{p-2}}\mathrm{I}_{\mathrm{p}}(G) - \frac{(p-2)\mathrm{l}(\rho(G))\rho(G)^3}{3},$$

где $\mathrm{l}(\rho(G))$ — длина линии уровня $\rho(z,G)$, расположенной на расстоянии $\rho(G)$ от границы ∂G.

Литература

1. Makai E. *On the Principal Frequency of a Membrane and the Torsional Regidity of a Beam*. – Stanford University Press, 1962. – P. 227-231.

2. Полиа Г., Сегё Г. *Изопериметрические неравенства в математической физике*. – М., Физматгиз, 1962. — 336 с.

3. Салахудинов Р.Г. *Изопериметрические свойства евклидовых граничных моментов односвязной области* // Известия вузов. Математика. – 2013. – № 8. – С. 66-79.

4. Payne L.E. *Some isoperimetric inequalities in the torsion problem for multiply connected regions*. – Studies in Mathematical Analisis and Related Topics // Essays in honor of G. Polya (Standford University Press, Standford, California, 1962). – P. 270-280.

EXTENSIONAL OF MAKAI INEQUALITY FOR TORSIONAL RIGIDITY

L.I. Gafiyatullina, R.G. Salakhudinov

Using methods from [3], we proved a generalization of the Makai inequality for convex domains.

Keywords: torsional rigidity, Euclidean moments of a domain with respect to the boundary, isoperimetric inequalities, distance function to the boundary of a domain.

УДК 517.584

О НУЛЯХ КОМБИНАЦИЙ ПРОИЗВЕДЕНИЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.А. Гималтдинова[1]

1 *alfiragimaltdinova@mail.ru*; Уфимский государственный нефтяной технический университет

Исследуются нули функции, являющейся суммой произведений функций Бесселя с противоположными индексами.

Ключевые слова: функция Бесселя, модифицированная функция Бесселя, множество нулей функции.

При исследовании спектральных задач для вырождающихся уравнений смешанного типа (а именно, при нахождении собственных значений) возникает необходимость нахождения нулей функции вида

$$f(t) = J_\nu(t)I_{-\nu}(t) + I_\nu(t)J_{-\nu}(t),\ 0 < \nu < 1, \tag{1}$$

при $\operatorname{Re} t \geq 0$.

Изучению нулей комбинаций произведений цилиндрических функций посвящено относительно небольшое количество исследований.

Например, в справочнике [1] приведены таблицы нескольких первых корней уравнения $J_\nu(x)N_\nu(kx) - J_\nu(kx)N_\nu(x) = 0$ для некоторых значений k и ν и корней уравнения $I_n(x)J'_n(x) - J_n(x)I'_n(x) = 0$ для $n = 0, 1, 2, 3$.

В некоторых случаях комбинации произведений функций Бесселя представляют собой элементарные функции, и тогда вопрос об их корнях решается элементарно, например, [2, с. 91]:

$$J_\nu(z)\,Y_{\nu-1}(z) - Y_\nu(z)J_{\nu-1}(z) = \frac{z}{\pi z},$$

$$I_\nu(z)I_{-\nu+1}(z) - I_{-\nu}(z)I_{\nu-1}(z) = -\frac{2\sin(\nu\pi)}{\pi z}.$$

В книге [3] приведен обзор работ, посвященных изучению нулей функций, содержащих произведения бесселевых функций, но функция (1) или аналогичные ей не исследованы. Там приведена формула

$$J_{-\nu}(z)I_\nu(z) = \frac{\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\ {}_0F_3\Big(1; 1-\frac{\nu}{2}, 1+\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{z^4}{64}\Big) -$$

$$-\frac{\sin(\pi\nu)z^2}{2\pi(1-\nu^2)}\ {}_0F_3\Big(1; \frac{3-\nu}{2}, \frac{3+\nu}{2}, \frac{3}{2}; -\frac{z^4}{64}\Big), \tag{2}$$

где ${}_0F_3(1; a, b, c; z)$ – обобщенная гипергеометрическая функция.

С учетом формулы (2) функцию (1) можно привести к виду

$$f(t) = \frac{2\sin(\pi\nu)}{\pi\nu}\ {}_0F_3\Big(1; 1-\frac{\nu}{2}, 1+\frac{\nu}{2}, \frac{1}{2}; -\frac{t^4}{64}\Big).$$

Однако в известной нам литературе для полученной функции нет утверждений относительно ее корней.

Справедлива

Теорема. *Уравнение*

$$J_\nu(t)I_{-\nu}(t) + I_\nu(t)J_{-\nu}(t) = 0,\ \ 0 < \nu < 1, \tag{3}$$

имеет счетное множество действительных положительных корней $t_k^{(1)}$ *и счетное множество чисто мнимых корней* $i \cdot t_k^{(2)}$ *с положительной мнимой частью.*

Доказательство. 1) Пусть $t = x \in \mathbb{R}_+$. В силу того, что $(\forall x > 0)(I_\nu(x) > 0,\ I_{-\nu}(x) > 0)$, из уравнения (3) получим

$$\frac{J_\nu(t)}{I_\nu(t)} = -\frac{J_{-\nu}(t)}{I_{-\nu}(t)}. \tag{4}$$

При этом функция $f_1(t) = J_\nu(t)/I_\nu(t)$ имеет те же нули, что и функция $J_\nu(t)$, а функция $f_2(t) = -J_{-\nu}(t)/I_{-\nu}(t)$ – те же нули, что и функция $J_{-\nu}(t)$.

По теореме о разделении корней [4, с. 136] в силу того, что функции $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$ являются линейно независимыми решениями уравнения Бесселя (ν – нецелое число), нули функций $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$ взаимно разделены, следовательно, и нули функций f_1 и f_2 также взаимно разделены. Это означает, что между любыми двумя соседними

корнями функции f_1 найдется ровно один корень функции f_2, и наоборот. Отсюда в силу непрерывности обеих этих функций получим, что их графики пересекаются ровно в одной точке на каждом интервале между любыми двумя соседними корнями функции $J_\nu(t)$ (а также, между любыми двумя соседними корнями функции $J_{-\nu}(t)$).

Это означает, что уравнение (4) имеет счетное множество положительных корней. А зная нули функций $J_\nu(t)$ и $J_{-\nu}(t)$, можем отделить промежутки, на которых находятся корни уравнения (4).

2) Пусть $t = iy \in \mathbb{C}$, $y \in \mathbb{R}_+$. Рассуждая аналогично, получим, что уравнение $I_\nu(iy)/J_\nu(iy) = -I_{-\nu}(iy)/J_{-\nu(iy)}$ имеет счетное множество чисто мнимых нулей.

Замечание. Остается не выясненным вопрос, имеет ли уравнение (3) другие комплексные корни, отличные от найденных чисто мнимых.

Можно убедиться в справедливости аналогичного утверждения для уравнения

$$J_\nu(t)I_{-\nu}(t) - I_\nu(t)J_{-\nu}(t) = 0,\ 0 < \nu < 1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-41-020516).

Литература

1. Янке Е., Эмде Ф., Лёш Ф. *Специальные функции. Формулы, графики, таблицы.* – М.: Наука, 1977. – 344 с.

2. Бейтмен Г., Эрдейи А. *Высшие трансцендентные функции. Т.2. Функции Бесселя, функции параболического цилиндра, ортогональные многочлены.* – М.: Наука, 1974. – 296 с.

3. Люк Ю. *Специальные математические функции и их аппроксимации.* – М.: Мир, 1980. – 608 с.

4. Трикоми Ф. *Дифференциальные уравнения.* – М.: ИЛ., 1962. – 352 с.

ON ZEROS OF COMBINATIONS OF PRODUCTS OF CYLINDRICAL FUNCTIONS

A.A. Gimaltdinova

Zeros of a function that is the sum of products of Bessel functions with opposite indices are investigated.
Keywords: the Bessel function, the modified Bessel function, the set of zeros of the function.

УДК 517.9

ОБ ИСПОЛЬЗОВАНИИ АППАРАТА ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕНЕЙ БЕРСА ДЛЯ ПОСТРОЕНИЯ БАЗИСНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЙ ВЫСШЕГО ПОРЯДКА

Ю.А. Гладышев[1], В.В. Калманович[2]

1 *v572264@yandex.ru*; Калужский государственный университет им.К.Э. Циолковского
2 —; Калужский государственный университет им.К.Э. Циолковского

В статье показано, что метод обобщенных степеней, предложенный Берсом и распространенный на операторы степени выше первой, позволяет свести решение уравнений второго и более высокого порядков к построению решений дифференциальных

уравнений первого порядка. Даны примеры использования метода для нахождения решений уравнений разных типов. При этом показано полное совпадение результатов с ранее известными. Указаны возможные пути обобщения метода на уравнения с большим числом независимых переменных.

Ключевые слова: обобщенные степени, обобщенная константа, дифференциальные уравнения, уравнение Лапласа.

Понятие обобщенной степени было введено Берсом [1] при распространении методов теории функций комплексного переменного на системы уравнений типа Коши-Римана с переменными коэффициентами. Обобщенная степень Берса $X^{(n)}C$ была определена как функция, построенная путем последовательного применения интегрального оператора I

$$X^{(n)}C = n!I^nC,\ X^{(0)}C = C,$$

который является правым обратным для заданного дифференциального оператора D,

$$DI = 1,$$

к функции C, взятой из ядра оператора D в заданном линейном пространстве L:

$$DC = 0.$$

Изучая свойства линейных комбинаций обобщенных степеней, Берс ввел принцип соответствия, когда сходящемуся ряду в обычных переменных сопоставляется ряд обобщенных степеней с теми же коэффициентами. На основе принципа соответствия были введены символы $\sin mX(x, x_0)$, $\cos mX(x, x_0)$, удовлетворяющие относительно D правилам, формально аналогичным обычным правилам дифференцирования. Понятие принципа соответствия в несколько другом понимании под названием “метод подстановки” (replacement) было использовано Проттером [2] для построения обобщенных сферических гармоник. В этих исследованиях оператор D оставался оператором первого порядка с заданными переменными коэффициентами.

В настоящем сообщении предпринята попытка взять в качестве D оператор более высокого, чем первого, порядка. Поскольку оба метода ведут к однозначному результату при задании дополнительных вполне выполнимых требований, то в сообщении введено понятие оператора соответствия B_x, который аналитически заданному в виде ряда соотношению $f(x)$ в обычных переменных сопоставляет линейное соотношение между обобщенными степенями

$$B_x(x, 0; n)f = F(x).$$

Здесь функция $F(x)$ получена после подстановки обобщенной степени через обычные переменные. В скобках при B_x указывается вся необходимая дополнительная информация, например, порядок n оператора D, пределы интегрирования при нахождении обобщенной степени и т.д.

В данной работе рассмотрен случай операторов D порядка выше первого. Впервые этот вопрос поднимался в монографии [3], где было дано обобщение понятия

обобщенной степени для операторов более высокого порядка. Представляет интерес в качестве D выбрать оператор ρ-кратной производной

$$D = \frac{d^\rho}{dx^\rho}. \tag{1}$$

В этом случае обобщенная константа имеет вид многочлена

$$C = C_0 + C_1 x + \ldots + C_{\rho-1} x^{\rho-1},$$

а интегральный оператор I достаточно прост, так что обобщенная степень имеет вид

$$X^{(n)}(x,0) = n!\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}C_0 + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}C_1 + \ldots + (\rho-1)!\frac{x^{2n+\rho-1}}{(2n+\rho-1)!}C_{\rho-1}\right).$$

Например, если $\rho = 2$, то имеем

$$D = \frac{d^2}{dx^2},\ X^{(n)}(x,0) = n!\left(\frac{x^{2n}}{(2n)!}C_0 + \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}C_1\right).$$

Возьмем в качестве исходной функции $f(x) = Ce^{kx}$, которая дает решение простейшего уравнения $\frac{df}{dx} = kf$. Перейдем к обобщенной степени, получим функцию

$$F(x) = c_1 \operatorname{ch}\sqrt{k}x + c_2 \operatorname{sh}\sqrt{k}x,$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2 f}{dx^2} = kF.$$

Очевидно, что появление двух, вообще говоря, новых произвольных констант вполне естественно и необходимо, так как уравнение для $F(x)$ второго порядка.

Покажем действие оператора $B_x(x,0;2)$. В качестве исходной функции возьмем решение

$$f(x,t) = (x-t)^n c \tag{2}$$

уравнения

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial t} = 0.$$

Применим оператор соответствия $B_x(x,0;2)$ к (2), имеем

$$B_x(x,0;2)f(x,t) = (X-t)^n C = \sum_{i=0}^{n} C_n^i X^{(n-i)}(x,0)\,t^i.$$

Выражение $(X-t)^n C$ после подстановки обобщенной степени может быть выражено через полиномы Эрмита

$$F(x) = (X-t)^n C = \frac{n!}{(2n)!}H_{2n}(\xi)C_0 + \frac{n!}{(2n+1)!}H_{2n+1}(\xi)C_1,$$

$$x = 2\sqrt{t},$$

и дает решение уравнения второго порядка

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x^2} + \frac{\partial F}{\partial t} = 0.$$

Если уравнение взять с другим знаком при производной по t

$$\frac{\partial f}{\partial x} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0, \tag{3}$$

то имеем решение

$$f = \frac{1}{\sqrt{x+t}}, \tag{4}$$

имеющее особенности на линии $x + t = 0$.

Если $p = 2$, то для $F(x, t)$ имеем уравнение теплопроводности. Проведем разложение (4) в ряд по x

$$(x+t)^{-\frac{1}{2}} = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i (2i-1)!!}{(2i)!!} x^i t^{-\frac{i+1}{2}}.$$

Действуя оператором B_x при $C_0 = 1$, $C_1 = 0$, найдем известное решение уравнения теплопроводности мгновенного источника

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} e^{-\frac{x^2}{4t}}. \tag{5}$$

Проведено исследование многочленов решений для более высоких значений $p = 3, 4, 5$.

Обратим внимание на возможность повторного применения оператора B_x. Например, взяв решение уравнения

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - \frac{\partial f}{\partial t} = 0,$$

получим решение уравнения четвертого порядка

$$\frac{\partial^4 F}{\partial x^4} - \frac{\partial F}{\partial t} = 0. \tag{6}$$

Для решения (5) найдем

$$F(x, t) = \frac{1}{\sqrt{t}} \sum_{i=0}^{\infty} \frac{(-1)^i}{i!} \frac{(2i)!}{(4t)^{2i}} \frac{x^{4i}}{(4i)!} C_1.$$

Можно показать, что подстановка обобщенной степени только улучшает сходимость ряда. Очевидно, что решение уравнения (6) можем получить из (3) непосредственно, взяв оператор $B_x(x, 0; 4)$

Преобразование может быть проведено над двумя различными переменными. Например, рассмотрим уравнение (3) и совершим преобразование над решением

$$f = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i x^{n-i} t^i,$$

получим

$$f = \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_n^i (n-i)! \frac{x^{2n-2i}}{(2n-2i)!} i! \frac{t^{2i}}{(2i)!} = n! \sum_{i=0}^{n} (-1)^i C_{2n}^{2i} X^{2n-2i} t^{2i}.$$

Это соответствует степени $2n$ при использовании комплексного переменного $z = x + i\,t$.

Особо отметим случай трех переменных. Возьмем уравнение

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial y} + \frac{\partial f}{\partial z} = 0. \tag{7}$$

Тогда при переходе к случаю (1) для всех трех переменных имеем уравнение Лапласа

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Следовательно, записав решение (7) и переходя к обобщенным степеням, имеем набор

$$(X_1 + X_2 - 2X_3)^n C, \ldots, (X_2 - X_1)^n C.$$

Здесь обобщенная константа имеет восемь компонент, то есть содержит содержит восемь произвольных постоянных

$$C = c_0 + c_1 x + c_2 y + c_3 z + c_4 xy + c_5 yz + c_6 zx + c_7 xyz. \tag{8}$$

Следовательно, все обобщенные степени содержат восемь произвольных констант, входящих в (8).

Можно показать, что полученный набор многочленов совпадает с системой ортогональных гармонических многочленов.

Повторное применение метода обобщенных степеней дает возможность построить решения уравнения четвертого порядка (бигармонического), что представляет интерес для теории упругости.

Литература

1. Bers L., Gelbart A. *On a class of function defined by partial differential quanions* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1944. – V. 56. – C. 67–93.

2. Protter H. *Generalized spherical harmonics* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1948. – V. 63. – C. 314–341.

3. Гладышев Ю. А. *Формализм Бельтрами-Берса и его приложение в математической физике*. – Калуга: Изд. КГПУ им. К. Э. Циолковского, 1997. – 259 с.

ON THE USE OF BERS' THEORY OF GENERALIZED POWERS FOR CONSTRUCTION OF BASIC SOLUTIONS OF EQUATIONS OF HIGHER ORDER

Yu.A. Gladyshev, V.V. Kalmanovich

We show that the method of generalized powers proposed by Bers and extended to operators of degree higher than the first allows us to reduce the solution of equations of the second and higher orders to the construction of solutions of first-order differential equations. Examples of using the method for finding solutions of equations of different types are given. The full coincidence of the results with previously

known ones is shown. Possible ways of generalizing of the method to equations with a large number of independent variables are indicated.

Keywords: generalized powers of Bers, generalized constant, differential equations, Laplace equation.

УДК 517.98

О НЕКОТОРЫХ РЕЗУЛЬТАТАХ И ЗАДАЧАХ ИЗ ДВОИЧНОГО АНАЛИЗА

Б.И. Голубов[1]

1 *golubov@mail.mipt.ru*; Московский физико-технический институт (государственный университет)

В докладе будет представлен обзор результатов, связанных с двоичным анализом, и сформулированы некоторые задачи.

Ключевые слова: ортонормированные системы, двоичный анализ, ряды Фурье-Уолша, преобразование Уолша.

В 1923 г. Дж. Л. Уолш построил ортонормированную систему функций, получившую название системы Уолша. Функции этой системы являются ступенчатыми на отрезке $[0,1]$ и каждая из них принимает всего два значения, а именно 1 и -1 на промежутках, концы которых являются двоично-рациональными числами. В 1950 г. Дж. Файн определил преобразование Уолша функций, интегрируемых по Лебегу на полуоси $[0,+\infty)$. Ряды Фурье-Уолша и преобразование Уолша нашли широкое применение в различных областях математики, физики и других наук. В настоящее время теория рядов Фурье-Уолша и преобразования Уолша, составляющие основу так называемого двоичного гармонического анализа, получили большое развитие (см. [1], [2] и [3]).

С конца 60-х годов прошлого века начал развиваться так называемый двоичный анализ. Подобно тому, как основу математического анализа составляют дифференцирование и интегрирование, основу двоичного анализа составляет двоичное дифференцирование и интегрирование. Определение точечной двоичной производной впервые появилось в 1967 г. в работе Дж. Е. Гиббса [4]. С тех пор оно обобщалось и изменялось в различных направлениях. Библиография по теории и приложениям двоичных производных и связанных с ними двоичных интегралов в настоящее время содержит более 200 наименований, в том числе две монографии [5], [6]. Итоги развития двоичного анализа подведены в двух недавно вышедших монографиях [7], [8]. Во второй из них сформулированы некоторые нерешенные задачи.

В докладе будут сформулированы некоторые из этих задач.

Литература

1. Голубов Б.И., Ефимов А.В., Скворцов В.А. *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения.* – М.: Наука, 1987. – 344 с.

2. Golubov B., Efimov A., Skvortsov V. *Walsh series and transforms. Theory and applications.* – Dordrecht-Boston-London: Kluwer Academic Publishers, 1991. – 368 p.

3. Schipp F., Wade W.R., Simon P. *Walsh series. An Introduction to dyadic harmonic analysis.* – Budapest: Akademiai Kiado, 1990. – 560 p.

4. Gibbs G.E. *Walsh spectrometry, a form of spectral analysis well suited to binary digital computation.* – NPL DES Rept. Teddington: National Phys. Lab., 1967. – 24 p.

5. Wagner J.H. *Ein Differential– und Integralkalkül in der Walsh-Fourier-Analysis mit Anwendungen*. – Köln, Opladen: Westdeutscher Verlag, 1974.

6. Голубов Б.И. *Элементы двоичного анализа. 2-е изд.* – URSS, 2007. – 203 с.

7. Stankovic R.S., Butzer P.L., Schipp F., Wade W.R., Su W., Endow Y., Fridli S., Golubov B.I., Pichler F. *Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh-Gibbs-Butzer dyadic differentiation in science. V. 1. Foundations.* – Paris: Atlantis Press / Springer, 2015. – 455 p.

8. Stankovic R.S., Butzer P.L., Schipp F., Wade W.R., Su W., Endow Y., Fridli S., Golubov B.I., Pichler F. *Dyadic Walsh analysis from 1924 onwards Walsh-Gibbs-Butzer dyadic differentiation in science. Vol. 2. Extensions and generalizations* // Paris: Atlantis Press / Springer, 2015. – 360 p.

ON SOME RESULTS AND PROBLEMS FROM DIADIC ANALYSIS

B.I. Golubov

The report will provide an overview of the results related to dyadic analysis, some problems are formulated.

Keywords: orthonormal systems, dyadic analysis, Fourier-Walsh series, Walsh transform.

УДК 517.51

НЕКОТОРЫЕ ЭКСТРЕМАЛЬНЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ФУРЬЕ НА ГИПЕРБОЛОИДЕ

Д.В. Горбачев[1], В.И. Иванов[2], О.И. Смирнов[3]

1 *dvgmail@mail.ru*; Тульский государственный университет
2 *ivaleryi@mail.ru*; Тульский государственный университет
3 *so.2@mail.ru*; Тульский государственный университет

Изучаются экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Логана и Бомана для преобразования Фурье на гиперболоиде $\mathbb{H}^{d-1}$ или на пространстве Лобачевского. С помощью метода усреднения по сфере эти задачи сводятся к аналогичным задачам для преобразования Якоби на полупрямой. Для их решения используются квадратурные формулы Гаусса и Маркова на полупрямой для целых функций экспоненциального типа по нулям функций Якоби.

Ключевые слова: гиперболоид, пространство Лобачевского, преобразование Фурье, экстремальные задачи Турана, Фейера, Дельсарта, Логана, Бомана, квадратурные формулы Гаусса и Маркова для целых функций экспоненциального типа.

Основные факты гармонического анализа на гиперболоиде или в пространстве Лобачевского можно найти в [1, гл. 9].

Пусть $d \in \mathbb{N}$, $d \geq 3$, $\mathbb{R}^{d-1}$ — действительное $(d-1)$-мерное евклидово пространство со скалярным произведением $(x, y) = x_1 y_1 + \ldots + x_{d-1} y_{d-1}$ и нормой $|x| = \sqrt{(x, x)}$, $\mathbb{S}^{d-2} = \{x \in \mathbb{R}^{d-1} : |x| = 1\}$ — евклидова сфера, $\mathbb{R}^{d-1,1}$ — действительное d-мерное псевдоевклидово пространство с билинейной формой $[x, y] = -x_1 y_1 - \ldots - x_{d-1} y_{d-1} +$

$x_d y_d$, $\mathbb{H}^{d-1} = \{x \in \mathbb{R}^{d-1,1} : [x,x] = 1,\ x_d > 0\}$ — верхняя пола двуполостного гиперболоида, $d(x,y) = \operatorname{arc}\cosh[x,y] = \ln([x,y] + \sqrt{[x,y]^2 - 1})$ — расстояние между $x, y \in \mathbb{H}^{d-1}$, $\big(\mathbb{H}^{d-1}, d(\cdot,\cdot)\big)$ — пространство Лобачевского.

Пусть $r > 0$, $o = (0,\dots,0,1) \in \mathbb{H}^{d-1}$, $d(x,o) = d(x)$, $B_\tau = \{x \in \mathbb{H}^{d-1} : d(x) \le r\}$ — шар в пространстве Лобачевского.

Если $t > 0$, $\eta \in \mathbb{S}^{d-2}$, $x = (\sinh t\,\eta, \cosh t) \in \mathbb{H}^{d-1}$, то

$$d\mu(t) = \Delta(t)\,dt = 2^{d-2}\sinh^{d-2} t\,dt, \quad d\omega(\eta) = \frac{1}{|\mathbb{S}^{d-2}|}\,d\eta, \quad d\nu(x) = d\mu(t)d\omega(\eta)$$

— меры Лебега на $\mathbb{R}_+$, $\mathbb{S}^{d-2}$ и $\mathbb{H}^{d-1}$, соответственно. Вероятностная мера $d\omega$ инвариантна относительно группы вращений $SO(d-1)$, мера $d\nu$ инвариантна относительно группы гиперболических вращений $SO_0(d-1,1)$.

Если $\lambda \in \mathbb{R}_+ = [0,\infty)$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-2}$, $y = (\lambda,\xi) \in \Omega^{d-1} = \mathbb{R}_+ \times \mathbb{S}^{d-2}$, то

$$d\sigma(\lambda) = s(\lambda)\,d\lambda = 2^{5-2d}\Gamma^{-2}\Big(\frac{d-1}{2}\Big)\left|\frac{\Gamma\big(\frac{d-2}{2} + i\lambda\big)}{\Gamma(i\lambda)}\right|^2 d\lambda, \quad d\tau(y) = d\sigma(\lambda)d\omega(\xi)$$

— меры Лебега на $\mathbb{R}_+$ и Ω^{d-1}.

Пусть $X = \mathbb{R}_+, \mathbb{S}^{d-1}, \mathbb{H}^{d-1}, \Omega^{d-1}$, $d\rho$ — мера на X, $1 \le p < \infty$, $L^p(X, d\rho)$ — банахово пространство с нормой $\|f\|_{p,d\rho} = \Big(\int_X |f|^p\,d\rho\Big)^{1/p}$, $C_b(X)$ — пространство непрерывных ограниченных на X функций f с нормой $\|f\|_\infty = \sup_X |f|$, $\operatorname{supp} f$ — носитель функции f.

Гармонический анализ в $L^2(\mathbb{H}^{d-1}, d\nu)$ и $L^2(\Omega^{d-1}, d\tau)$ осуществляется с помощью прямого и обратного преобразований Фурье

$$\mathscr{F} f(y) = \int_{\mathbb{H}^{d-1}} f(x)[x,\xi']^{-\frac{d-2}{2} - i\lambda}\,d\nu(x), \quad \mathscr{F}^{-1} g(x) = \int_{\Omega^{d-1}} g(y)[x,\xi']^{-\frac{d-2}{2} + i\lambda}\,d\tau(y),$$

где $\xi' = (\xi, 1)$, $\xi \in \mathbb{S}^{d-1}$.

Пусть $\chi_r(t)$ — характеристическая функция отрезка $[0,r]$, $F(a,b,c;z)$ — гипергеометрическая функция Гаусса,

$$\varphi_\lambda(t) = \varphi_\lambda^{((d-3)/2,-1/2)}(t) = F\left(\frac{(d-2)/2 + i\lambda}{2}, \frac{(d-2)/2 - i\lambda}{2}; \frac{d-1}{2}; -(\operatorname{sh} t)^2\right)$$

— функция Якоби, $w(t) = \varphi_0^2(t)\Delta(t)$ — модифицированный вес, $u_\lambda(t) = \varphi_\lambda(t)/\varphi_0(t)$,

$$Qg(\lambda) = \int_{\mathbb{S}^{d-2}} g(y)\,d\omega(\xi),\ y = (\lambda,\xi) \in \Omega^{d-1}. \tag{1}$$

— оператор усреднения по сфере.

Задача Турана. Вычислить величину

$$T(r, \mathbb{H}^{d-1}) = \sup Q(\mathscr{F} f)(0),$$

если

$$f \in C_b(\mathbb{H}^{d-1}), \quad f(o) = 1, \quad \operatorname{supp} f \subset B_r, \quad \mathscr{F} f(y) \ge 0.$$

Задача Фейера. Вычислить величину

$$F(r,\mathbb{R}_+) = \sup Qg(0),$$

если

$$g = \mathscr{F} f \in L_1(\Omega^{d-1}, d\tau),\ g(y) \geq 0,\ f \in C_b(\mathbb{H}^{d-1}),\ f(o) = 1,\ \operatorname{supp} f \subset B_r. \tag{2}$$

Теорема 1. *Пусть $d \geq 3$, $r > 0$. Тогда в задачах Турана и Фейера*

$$T(r,\mathbb{H}^{d-1}) = F(r,\mathbb{H}^{d-1}) = \int_0^{r/2} w(t)\,dt,$$

экстремальные функции единственны и имеют вид

$$f^*(x) = \frac{(\varphi_0\chi_{r/2} * \varphi_0\chi_{r/2})(d(x))}{\int_0^{r/2} w(t)\,dt}, \quad g^*(y) = a(r)\left(\frac{\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r/2)}{\lambda^2}\right)^2,$$

где $x \in \mathbb{H}^{d-1}$, $y = (\lambda,\xi) \in \Omega^{d-1}$ и $a(r) = w^2(r/2)/\int_0^{r/2} w(t)\,dt$.

Задача Дельсарта. Вычислить величину

$$D(r,s,\mathbb{H}^{d-1}) = \sup \mathscr{F}^{-1} g(o) = \sup f(o),$$

если

$$g = \mathscr{F} f \in L_1(\Omega^{d-1}, d\tau), \quad Qg(0) = 1, \quad g(\lambda,\xi) \leq 0,\ \lambda \geq s,$$
$$f \in C_b(\mathbb{H}^{d-1}), \quad \operatorname{supp} f \subset B_r, \quad f(x) \geq 0.$$

Теорема 2. *Пусть $d \geq 3$, $r > 0$, $\lambda_1' = \lambda_1'(r/2)$ — минимальный положительный нуль $\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r/2)$ по λ. Тогда в задаче Дельсарта*

$$D(r,\lambda_1'(r/2),\mathbb{H}^{d-1}) = \left(\int_0^{r/2} w(t)\,dt\right)^{-1},$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g^*(y) = \frac{b(r)\left(\frac{\partial u_\lambda}{\partial t}(r/2)\right)^2}{\lambda^4\left(1-(\lambda/\lambda_1')^2\right)},$$

где $y = (\lambda,\xi) \in \Omega^{d-1}$ и

$$b(r) = \left(\frac{1}{w(r/2)}\int_0^{r/2} w(t)\,dt\right)^{-2}.$$

Пусть $y = (\lambda,\xi) \in \Omega^{d-1}$, $g(y)$ — действительная непрерывная функция на Ω^{d-1},

$$\Lambda(g) = \sup\{\lambda > 0 :\ g(\lambda,\xi) > 0,\ \xi \in \mathbb{S}^{d-2}\}.$$

Задача Логана. Вычислить величину

$$L(r,\mathbb{H}^{d-1}) = \inf \Lambda(g),$$

если

$$g = \mathscr{F} f \in L_1(\Omega^{d-1}, d\tau), \quad g(y) \not\equiv 0, \quad f \in C_b(\mathbb{H}^{d-1}), \quad \operatorname{supp} f \subset B_r, \quad f(x) \geq 0.$$

Теорема 3. *Пусть $d \geq 3$, $r > 0$, $\lambda_1 = \lambda_1(r/2)$ — минимальный положительный нуль $\varphi_\lambda(r/2)$ по λ. Тогда в задаче Логана*

$$L(r, \mathbb{H}^{d-1}) = \lambda_1,$$

единственная с точностью до положительного множителя экстремальная функция имеет вид

$$g^*(y) = \frac{\varphi_\lambda^2(r/2)}{1 - (\lambda/\lambda_1)^2}, \quad y = (\lambda, \xi) \in \Omega^{d-1}, \quad \lambda \in \mathbb{R}_+, \quad \xi \in \mathbb{S}^{d-2}.$$

Задача Бомана. Вычислить величину

$$B(r, \mathbb{H}^{d-1}) = \inf \int_{\Omega^{d-1}} \left(\lambda^2 + \left(\frac{d-2}{2}\right)^2\right) g(y)\, d\tau(y),$$

если g удовлетворяет условиям (2), $y = (\lambda, \xi) \in \Omega^{d-1}$.

Теорема 4. *Пусть $d \geq 3$, $r > 0$, $\lambda_1 = \lambda_1(r/2)$ — минимальный положительный нуль $\varphi_\lambda(r/2)$ по λ. Тогда в задаче Бомана*

$$B(r, \mathbb{H}^{d-1}) = \lambda_1^2 + \left(\frac{d-2}{2}\right)^2,$$

единственная экстремальная функция имеет вид

$$g^*(y) = \frac{1}{c(r)} \left(\frac{\varphi_\lambda(r/2)}{\lambda_1^2 - \lambda^2}\right)^2,$$

где $y = (\lambda, \xi) \in \Omega^{d-1}$,

$$c(r) = \frac{\frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial \lambda}(r/2)}{2\lambda_1 \Delta(r/2)\, \frac{\partial \varphi_{\lambda_1}}{\partial t}(r/2)}.$$

Для решения экстремальных задач мы применяем операторы усреднения по сфере $Qg(\lambda)$ (1) и

$$Pf(t) = \begin{cases} \int_{\mathbb{S}^{d-2}} f(x)\, d\omega(\eta), & x = (\sinh t\,\eta, \cosh t) \in \mathbb{H}^{d-1}, \ t > 0, \\ f(o), & t = 0, \end{cases}$$

и сводим их к аналогичным экстремальным задачам для преобразования Якоби на полупрямой. Общие оценки в одномерных задачах получаем с помощью квадратурных формул Гаусса и Маркова на полупрямой для целых функций экспоненциального типа по нулям функций Якоби [1]. Экстремальные функции строим опираясь на анализ условий равенства в неравенствах, получаемых при применении квадратурных формул [2, 3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-01-00308).

Литература

1. Горбачев Д. В., Иванов В. И. *Квадратурные формулы Гаусса и Маркова по нулям собственных функций задачи Штурма–Лиувилля, точные для целых функций экспоненциального типа* // Матем. сб. – 2015. – Т. 206. – № 8.– С. 63–98.

2. Горбачев Д. В., Иванов В. И. *Экстремальная задача Бомана для преобразования Якоби* // Тр. ИММ УрО РАН. – 2016. – Т. 22. – № 4. – С. 126–135.

3. Gorbachev D. V., Ivanov V. I., Smirnov O. I. *The Delsarte extremal problem for the Jacobi transform* // Math. Notes. – 2016. – V. 100. – № 5. – P. 677–686.

SOME EXTREMAL PROBLEMS FOR FOURIER TRANSFORM ON HYPERBOLOID

D.V. Gorbachev, V.I. Ivanov, O.I. Smirnov

We study the Turán, Fejér, Delsarte, Logan and Boman extremal problems for the Fourier transform on the hyperboloid $\mathbb{H}^{d-1}$ or Lobachevskii space. By the averaging method over the sphere we reduce these problems to the problems for the Jacobi transform on the half-line. To solve them we apply Gauss and Markov quadrature formulas on the half-line for entire functions of exponential type at zeros of the Jacobi functions.

Keywords: hyperboloid, Lobachevskii space, Fourier transform, Turán, Fejér, Delsarte, Logan and Boman extremal problems, Gauss and Markov quadrature formulas for entire functions of exponential type.

УДК 517.54

ПОЛУГРУППЫ ГОЛОМОРФНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ ПОЛОСЫ И ПОЛУПЛОСКОСТИ

В.В. Горяйнов[1]

1 *goryainov_vv@hotmail.com*; Московский физико-технический институт (государственный университет)

Изучается полугруппа голоморфных отображений полосы в себя и изоморфная ей полугруппа голоморфных отображений правой полуплоскости в себя. Для голоморфных отображений полосы требуется выполнение условия, которое является аналогом гидродинамической нормировки. Получены теоремы искажения для этих отображений и выделены условия, при которых существуют области однолистности. Дано описание класса отображений, которые допускают вложение в однопараметрические полугруппы. Получен аналог уравнения Лёвнера-Куфарева для изучаемой полугруппы отображений и установлена теорема существования и единственности решений для этого уравнения.

Ключевые слова: голоморфное отображение, теоремы искажения, области однолистности, однопараметрическая полугруппа, эволюционное семейство, эволюционное уравнение.

Пусть f — голоморфное отображение полосы

$$\mathbb{S} = \{z \in \mathbb{C}\colon\ -\pi/2 < \operatorname{Im} z < \pi/2\}$$

в себя и $\operatorname{Re} f(x) \to \pm\infty$ при $x \to \pm\infty$. Инвариантную форму леммы Шварца для полосы $\mathbb{S}$ можно записать в виде

$$\frac{|f'(z)|}{\cos\{\operatorname{Im} f(z)\}} \le \frac{1}{\cos\{\operatorname{Im} z\}}.$$

Из этого неравенства легко выводится, что функция $x \mapsto \operatorname{Re}\{x - f(x)\}$ не убывает на $\mathbb{R}$. Таким образом, существуют (конечные или бесконечные) пределы

$$d^{\pm}(f) = \lim_{x \to \pm\infty} \operatorname{Re}\{x - f(x)\}.$$

При этом $d^{-}(f) \le d^{+}(f)$. Обозначим через $\mathfrak{T}$ класс голоморфных отображений $f\colon \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$, для которых $d^{-}(f) = 0$ и $d^{+}(f) < \infty$. В действительности, если $f \in \mathfrak{T}$, то для любого $\alpha \in (0,1)$ в полосе $\mathbb{S}_\alpha = \{z \in \mathbb{C}\colon |\operatorname{Im} z| < \alpha\pi/2\}$ выполняются предельные соотношения

$$\lim_{\operatorname{Re} z \to -\infty} (z - f(z)) = 0, \qquad \lim_{\operatorname{Re} z \to +\infty} (z - f(z)) = d^{+}(f).$$

Условие $(z - f(z)) \to 0$ при $\operatorname{Re} z \to -\infty$ по форме является аналогом гидродинамической нормировки, которая принята для конформных отображений полуплоскости.

Для $\delta > 0$ через $\mathfrak{T}(\delta)$ будем обозначать класс функций f из $\mathfrak{T}$, для которых $d^{+}(f) = \delta$. В определённом смысле параметр δ определяет степень отклонения голоморфного отображения $f\colon \mathbb{S} \mapsto \mathbb{S}$ от тождественного преобразования. В частности, для всех $z \in \mathbb{S}$ выполняется неравенство

$$\frac{\cos(\operatorname{Im} z)}{\cos(\operatorname{Im} f(z))} \le e^{\delta/2},$$

которое можно также рассматривать как некоторый аналог леммы Шварца.

Под теоремами искажения в геометрической теории функций понимаются оценки функционалов, зависящих от значений функции и её производной в фиксированной точке, в различных классах функций. Как правило, эти оценки характеризуют степень отклонения отображений, осуществляемых функциями данного класса, от тождественного преобразования. В более общей постановке изучаются области значений соответствующих функционалов. Фиксируем точку z_0 в полосе $\mathbb{S}$ и введём в рассмотрение для $\delta > 0$ два множества

$$\Omega_\delta(z_0) = \left\{ w = e^{[z_0 - f(z_0)]}\colon\ f \in \mathfrak{T}(\delta) \right\},$$
$$\Omega'_\delta(z_0) = \left\{ w = f'(z_0) e^{[z_0 - f(z_0)]}\colon\ f \in \mathfrak{T}(\delta) \right\}.$$

Описание этих множеств позволяет получить оценки отклонения отображений f класса $\mathfrak{T}(\delta)$ от тождественного преобразования.

Теорема 1. *Пусть $z_0 = x_0 + i y_0$ — фиксированная точка в полосе $\mathbb{S}$ и $\delta > 0$. Тогда*

$$\Omega_\delta(z_0) = \left\{ w\colon\ \left| w - \frac{e^{\delta + i y_0} + e^{-i y_0}}{2\cos y_0} \right| \le \frac{e^{\delta} - 1}{2\cos y_0}, \quad w \ne 1, e^{\delta} \right\}.$$

Описание второго множества содержится в следующей теореме.

Теорема 2. *Пусть $z_0 = x_0 + i y_0$ — фиксированная точка в полосе $\mathbb{S}$ и $\delta > 0$. Тогда множество $\Omega'_\delta(z_0)$ представляет собой выпуклую оболочку кривой*

$$\Gamma_\delta(z_0) = \left\{ w = 1 + (e^\delta - 1)\frac{\cos^2\frac{t}{2}}{\cos^2 y_0} e^{i(t+2y_0)} :\ t \in [0, 2\pi],\, t \neq -2y_0 \right\}.$$

Кроме того, в классе $\mathfrak{T}(\delta)$, $\delta > 0$, имеет место точное неравенство

$$\left| f'(z) e^{[z - f(z)]} - 1 \right| \leq \frac{e^\delta - 1}{\cos^2(\operatorname{Im} z)}.$$

Отметим еще одно свойство классов $\mathfrak{T}(\delta)$ при малых значениях δ, которое выражается в существовании полос однолистности.

Теорема 3. *Пусть f принадлежит классу $\mathfrak{T}(\delta)$ и $0 < \delta < 2\ln 3$. Тогда f однолистна в полосе $\{z :\ |\operatorname{Im} z| < y^*(\delta)\}$, где $y^*(\delta)$ — единственный в интервале $0 < y < \pi/2$ корень уравнения*

$$\cos^2 y = \left(e^\delta - 1\right) \cos^3 \frac{\pi - 2y}{3}.$$

Заметим, что $y^*(\delta) \to \pi/2$ при $\delta \to 0$ и $y^*(\delta) \to 0$ при $\delta \to 2\ln 3$. Эта теорема может рассматриваться как усиление теоремы 2 из [1].

Следующие результаты связаны с тем, что класс $\mathfrak{T}$ образует топологическую полугруппу относительно операции композиции и топологии локально равномерной сходимости в полосе $\mathbb{S}$. Рассматривая $\mathbb{R}_+ = \{t \in \mathbb{R} :\ t \geq 0\}$ как аддитивную полугруппу с обычной топологией вещественных чисел, под однопараметрической полугруппой в $\mathfrak{T}$ понимаем непрерывный гомоморфизм $t \mapsto f^t$, действующий из $\mathbb{R}_+$ в $\mathfrak{T}$. При целых неотрицательных значениях $t = 0, 1, 2, \ldots$ элементы f^n однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ представляют собой обычные итерации функции $f = f^1$. Проблема дробных итераций произвольной f из $\mathfrak{T}$ состоит в вопросе существования такой однопараметрической полугруппы $t \mapsto f^t$ в $\mathfrak{T}$, для которой $f^1 = f$. Для решения этой задачи введём в рассмотрение класс $\mathscr{P}$ функций $p(z)$, голоморфных в $\mathbb{S}$ и допускающих интегральное представление

$$p(z) = \int_{\mathbb{R}} \frac{i u}{i u + e^{-z}} d\mu(u),$$

где μ — вероятностная мера на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $\mu(\{0\}) = 0$. Замечая, что любая функция p из класса $\mathscr{P}$ не обращается в нуль в полосе $\mathbb{S}$, по ней однозначно определяется функция F посредством равенств

$$F'(z) = -1/p(z), \qquad F(0) = 0.$$

Класс всех функций F, полученных таким образом, обозначим через $\mathscr{F}$. Функции F класса $\mathscr{F}$ являются однолистными в полосе $\mathbb{S}$ и отображают её на области, обладающие свойством: с каждой своей точкой w_0 область $F(\mathbb{S})$ содержит и луч $w_0 + t$, $t \geq 0$.

Теорема 4. *Функция $f(z) \not\equiv z$ из $\mathfrak{T}$ вложима в однопараметрическую полугруппу в $\mathfrak{T}$ в том и только том случае, если найдутся такие $F \in \mathscr{F}$ и $t > 0$, что $f(z) = F^{-1}(F(z)+t)$, $z \in \mathbb{S}$.*

Функцию F из формулировки теоремы можно рассматривать как аналог функции Кёнигса для f (см., напр., [2]).

Определение. Двупараметрическое семейство $\{f_{t,s}\colon 0 \le s \le t \le T\}$ функций $f_{t,s}$ из $\mathfrak{T}$ будем называть *эволюционным семейством* полугруппы $\mathfrak{T}$ на промежутке $[0, T]$, если выполняются следующие условия:

(i) $f_{t,s}(z) = f_{t,\tau} \circ f_{\tau,s}(z)$ при $0 \le s \le \tau \le t \le T$,

(ii) $f_{t,s}(z) \to z$ локально равномерно в $\mathbb{S}$ при $(t - s) \to 0$.

Эволюционное семейство является расширением понятия однопараметрической полугруппы и играет важную роль в геометрической теории функций и приложениях, связанных с уравнением Лёвнера. При этом, в отличие от случая однопараметрической полугруппы вопрос дифференцируемости эволюционного семейства решается гораздо сложнее. При решении этого вопроса важно правильно выбрать шкалу времени.

Пусть $\{f_{t,s}\}$ — эволюционное семейство полугруппы $\mathfrak{T}$ на промежутке $[0, T]$. Рассмотрим функцию $\delta(t) = d^+(f_{t,0})$, $0 \le t \le T$. Поскольку при $0 \le s < t \le T$ выполняется равенство

$$\delta(t) = d^+(f_{t,0}) = d^+(f_{t,s} \circ f_{s,0}) = d^+(f_{t,s}) + \delta(s)$$

и $d^+(f_{t,s}) \ge 0$, то функция $\delta(t)$ является неубывающей на $[0, T]$. При этом, если $\delta(t_1) = \delta(t_2)$, $t_1 < t_2$, то $f_{t,s}(z) \equiv z$ при $t_1 \le s \le t \le t_2$. Будем говорить, что эволюционное семейство нормировано, если $\delta(t) = t$, $0 \le t \le T$.

Теорема 5. *Пусть $\{f_{t,s}\colon 0 \le s \le t \le T\}$ — нормированное эволюционное семейство полугруппы $\mathfrak{T}$. Тогда для любых $s \in [0, T)$ и $z \in \mathbb{S}$ функция $t \mapsto f_{t,s}(z)$ абсолютно непрерывна на $[s, T]$ и является решением задачи Коши*

$$\frac{dw}{dt} = -P(w, t), \qquad w|_{t=s} = z, \tag{1}$$

где $P(z, t)$ — функция, определённая на $\mathbb{S} \times [0, T]$, голоморфная по z, измеримая по t и такая, что $P(\cdot, t) \in \mathscr{P}$ для почти всех t.

Заметим, что в силу выполнения условий теоремы единственности решения задачи Коши (1) всякое нормированное эволюционное семейство полугруппы $\mathfrak{T}$ представляет собой семейство однолистных функций. Уравнение (1) является аналогом уравнения Лёвнера—Куфарева для полугруппы $\mathfrak{T}$.

Теорема 6. *Пусть на $\mathbb{S} \times [0, T]$ определена комплекснозначная функция $P(z, t)$, которая голоморфна по z, измерима по t и удовлетворяет условию $P(\,\cdot\,, t) \in \mathscr{P}$ для почти всех $t \in [0, T]$. Тогда для любых $z \in \mathbb{S}$ и $s \in [0, T)$ существует единственное абсолютно непрерывное решение $w = w(t, z, s; P)$, $s \le t \le T$, задачи Коши (1). Кроме того, при каждом $t \in [s, T]$ отображение $w^P_{t,s}\colon z \mapsto w(t, z, s; P)$ является однолистным в $\mathbb{S}$ и принадлежит $\mathfrak{T}$, а $\{w^P_{t,s}\colon 0 \le s \le t \le T\}$ является нормированным эволюционным семейством полугруппы $\mathfrak{T}$.*

Основным инструментом в получении сформулированных выше результатов является использование изоморфизма полугруппы $\mathfrak{T}$ и полугруппы $\mathfrak{N}$ голоморфных отображений h правой полуплоскости $\mathbb{H} = \{\zeta \in \mathbb{C}\colon\ \mathrm{Re}\,\zeta > 0\}$ в себя. Этот изоморфизм осуществляется посредством равенства $h = l \circ f \circ l^{-1}$ где $l(z) = e^{-z}$ — конформное отображение полосы $\mathbb{S}$ на полуплоскость $\mathbb{H}$. Через $\mathfrak{N}(\delta)$, $\delta > 0$, обозначим образ класса $\mathfrak{T}(\delta)$ в полугруппе $\mathfrak{N}$.

Теорема 7. *Для того чтобы голоморфная в $\mathbb{H}$ функция h принадлежала классу $\mathfrak{N}(\delta)$, $\delta > 0$, необходимо и достаточно, чтобы она допускала представление в виде*

$$h(\zeta) = \zeta + (e^{\delta} - 1) \int\limits_{\mathbb{R}} \frac{i u \zeta}{\zeta + i u} d\mu(u),$$

где μ — вероятностная мера на $\mathbb{R}$, удовлетворяющая условию $\mu(\{0\}) = 0$.

Работа выполнена при поддержке РФФИ (грант № 16-01-00674-а) и программы поддержки научных школ (грант НШ - 9110.2016.1).

Литература

1. Горяйнов В. В. *Голоморфные отображения единичного круга в себя с двумя неподвижными точками* // Матем. сб. – 2017. – Т. 208. – № 3. – С. 55–72.

2. Горяйнов В. В. *Полугруппы аналитических функций в анализе и приложениях* // УМН. – 2011. – Т. 67. – Вып. 6(408). – С. 5–52.

SEMIGROUPS OF HOLOMORPHIC MAPPINGS OF A STRIP AND HALF-PLANE

V.V. Goryainov

We study the semigroup of holomorphic mappings of a strip into itself and the semigroup of holomorphic mappings of the right half-plane into itself; the semigroups are isomorphic. For holomorphic mappings of a strip, it is necessary to satisfy the condition, which is analogous to the hydrodynamic normalization. Distortion theorems for these mappings are obtained, and the conditions under which there exist domains of univalence are distinguished. An analogue of the Loewner-Kufarev equation for the semigroup of mappings studied is obtained and an existence and uniqueness theorem for solutions for this equation is established.

Keywords: holomorphic mapping, distortion theorems, domains of univalence, one-parameter semigroup, evolution family, evolution equation.

УДК 517.54

ЛОГАРИФМИЧЕСКИЕ КОЭФФИЦИЕНТЫ И НОРМА ПРОИЗВОДНОЙ ШВАРЦА ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С.Ю. Граф[1]

1 *sergey.graf@tversu.ru*; Тверской государственный университет, Петрозаводский государственный университет

Получены оценки логарифмических коэффициентов и производной Шварца в линейно- и аффинно-инвариантных семействах сохраняющих ориентацию гармонических отображений единичного круга. Доказываются оценки порядка семейства в терминах супремума норм производных Шварца в рассматриваемых семействах. Обсуждается связь данных результатов с достаточными условиями однолистности гармонических функций.

Ключевые слова: гармонические отображения, производная Шварца, линейно-инвариантные семейства.

Всякая локально однолистная сохраняющая ориентацию гармоническая в круге $\mathbb{D} = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функция $f(z)$ имеет вид

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}, \text{ где } h(z) = \sum_{k=0}^{\infty} a_k z^k, \quad g(z) = \sum_{k=1}^{\infty} b_k z^k, \tag{1}$$

дилатация $\omega(z) = g'(z)/h'(z)$ аналитична и $|\omega(z)| < 1$ в $\mathbb{D}$.

Классическая *производная Шварца* (шварциан) локально однолистной аналитической функции h (см., например, [1]) определяется как

$$S_h(z) = \left(\frac{h''(z)}{h'(z)}\right)' - \frac{1}{2}\left(\frac{h''(z)}{h'(z)}\right)^2.$$

Попытки обобщить понятие производной Шварца на случай гармонических функций предпринимались неоднократно (см., например, [2, 3]). В частности в [3] Р. Эрнандез и М. Мартин предложили достаточно удачное определение производной Шварца для произвольных локально однолистных гармонических функций вида (1):

$$S_f(z) = \big(P_f(z)\big)_z - \frac{1}{2}\big(P_f(z)\big)^2,$$

где

$$P_f(z) = \frac{\partial}{\partial z}\ln(|h'(z)|^2 - |g'(z)|^2).$$

Данное определение сохраняет в силе основные свойства классической производной Шварца. *Норма шварциана* гармонической функции f определяется равенством

$$||S_f|| = \sup_{z\in\mathbb{D}} |S_f(z)|(1-|z|^2)^2.$$

Семейство $\mathscr{L}$ локально однолистных сохраняющих ориентацию гармонических в $\mathbb{D}$ функций вида (1), т. ч. $a_0 = a_1 - 1 = 0$, называется *линейно-инвариантным* (л.и.с.),

если для всякой функции $f \in \mathscr{L}$

$$\frac{f(\phi(z)) - f(\phi(0))}{f_z(\phi(0))\phi'(0)} \in \mathscr{L} \ \forall\, \phi(z) = e^{i\theta}\frac{z+a}{1+\overline{a}z},\ a \in \mathbb{D},\ \theta \in \mathbb{R}.$$

Семейство $\mathscr{L}$ называется *аффинно-инвариантным* (а.и.с.), если

$$\frac{f(z) + \varepsilon\overline{f(z)}}{1+\varepsilon b_1} \in \mathscr{L} \ \forall\, \varepsilon \in \mathbb{D}.$$

Существенную роль в теории аффинно- и линейно-инвариантных семейств играет понятие *порядка семейства*, определенное Т. Шейл-Смоллом [4] как $\alpha = \sup_{f\in\mathscr{L}} |a_2|$. В [5] предложено понятие *уточненного порядка* а.л.и.с. $\mathscr{L}$:

$$\alpha_0 = \sup_{f\in\mathscr{L}^0} |a_2|,$$

где $\mathscr{L}^0 = \{f \in \mathscr{L} : b_1 = 0\}$. Уточненный порядок в некоторых случаях оказывается удобнее порядка α. Определим также $\beta_0 = \sup_{f\in\mathscr{L}^0} |b_2|$. Заметим, что $\alpha_0 \le \alpha$ и $\beta_0 \le 1/2$ для всякого а.л.и.с. $\mathscr{L}$.

Теорема 1 [6]. *Для любой функции $f \in \mathscr{L}$ и $z \in \mathbb{D}$*

$$|P_f(z)| \le 2\frac{\alpha_0 + |z|}{1-|z|^2}.$$

Оценка точна, например, в а.л.и.с. выпуклых или близких к выпуклым гармонических отображений.

Рассмотрим произвольное а.л.и.с. $\mathscr{L}$ и $f = h + \overline{g} \in \mathscr{L}^0$. Определим локально однолитсную аналитическую функцию $F_\varepsilon(z) = h(z) + \varepsilon g(z)$ в $\mathbb{D}$ с произвольным значением ε, $|\varepsilon| \le 1$. Пусть

$$\Phi_\varepsilon(z) = \ln F'_\varepsilon(z) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k(\varepsilon) z^k.$$

Назовем $c_k(\varepsilon)$ *логарифмическими коэффициентами* f.

Теорема 2 [6]. *Пусть локально-однолистная гармоническая функция $f \in \mathscr{L}^0$ и $|\varepsilon| \le 1$. Тогда*

$$|c_k(\varepsilon)| \le \min_{r\in(0,1)} C_k(\varepsilon, r) < C_k\left(\varepsilon, \sqrt{\frac{k-1}{k+1}}\right),$$

где

$$C_k(\varepsilon, r) = \frac{2}{kr^{k-2}(1-r^2)}\left\{\frac{\alpha_0 + \beta_0\frac{r+|\varepsilon|}{1+r|\varepsilon|}}{r} - \frac{r}{\alpha_0 + \beta_0\frac{r+|\varepsilon|}{1+r|\varepsilon|}}\right\}.$$

Теорема 2 позволяет оценить в $\mathscr{L}^0$ функционал Фекете-Сегё, который играет ключевую роль в оценке нормы шварциана гармонической функции f: для любой функции $f \in \mathscr{L}^0$ справедливо неравенство

$$\left|a_3 - a_2^2\right| \le \frac{1}{3}\left(\alpha_0^2 + \min_{r\in(0,1)} C_2(0, r)\right).$$

Следствием этой оценки является

Теорема 3 [6]. *Для любой функции* $f \in \mathscr{L}$

$$||S_f|| \le 2\left(\alpha_0^2 + \min_{r\in(0,1)} C_2(0,r)\right) < 2\alpha_0^2 + 3\left(\sqrt{3}\alpha_0 + \beta_0 - \frac{1}{\sqrt{3}\alpha_0 + \beta_0}\right).$$

Обратная задача заключается в оценке порядка а.л.и.с. $\mathscr{L}$, если известна оценка нормы производной Шварца в этом семействе. Данная задача важна для построения достаточных условий однолистности гармонических функций.

Теорема 4 [6]. *Пусть* $\mathscr{L}$ *– а.л.и.с. гармонических функций, причем существует константа* C *такая, что*

$$\sup_{f\in\mathscr{L}} |P_f(z)(1-|z|^2)| \le C + 2|z|.$$

Тогда $\alpha_0 \le \frac{C}{2}$, $\alpha \le \frac{C+1}{2}$.

Оценка точна, например, в семействе выпуклых гармонических отображений.

Аналогичный результат справедлив в терминах супремума норм шварциана в семействе $\mathscr{L}$.

Теорема 5 [6]. *Пусть* $\mathscr{L}$ *– а.л.и.с. гармонических функций, причем существует константа* C *такая, что*

$$\sup_{f\in\mathscr{L}} ||S_f|| \le C.$$

Тогда:

(i) для любой функции $f \in \mathscr{L}^0$

$$|a_3 - a_2^2| \le C/6$$

и для $f \in \mathscr{L}$

$$|a_3 - a_2^2| \le (C + 2\alpha_0 + 3/2)/6;$$

(ii) порядок семейства $\mathscr{L}$ *удовлетворяет неравенству*

$$\alpha \le (1 + \sqrt{8 + 2C})/2.$$

В сообщении предполагается обсудить приведенные выше результаты, а также некоторые связанные с ними, включая условия однолистности гармонической функции в терминах её производной Шварца.

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01229).

Литература

1. Duren P. *Univalent functions*. – N. Y.: Springer-Verlag. – 1983. – 395 p.

2. Chuaqui M., Duren P., Osgood B. *The Schwarzian derivative for harmonic mappings* // J. Anal. Math. – 2003. – V. 91. – P. 329–351.

3. Hernandez R., Martin M. J. *Pre-Schwarzian and Schwarzian Derivatives of Harmonic Mappings* // J. Geom. Anal. – 2015. – V. 25. – № 1. – P. 64–91.

4. Sheil-Small T. *Constants for planar harmonic mappings* // J. London Math. Soc. – 1990. – V. 42. – P. 237–248.

5. Граф С. Ю. *Точная оценка якобиана в линейно- и аффинно-инвариантных семействах гармонических отображений* // Труды Петрозаводского гос. ун-та. Сер. Математика. – 2007. – Вып. 14. – С. 31–38.

6. Graf S. Yu. *On the Schwarzian norm of harmonic mappings* // Проблемы анализа – Issues of Analysis. – 2016. – Т. 5(23). – № 2. – P. 20–32.

LOGARITHMIC COEFFICIENTS AND NORM
FOR SCHWARZIAN DERIVATIVE OF HARMONIC FUNCTIONS

S.Yu. Graf

Estimations of logarithmic coefficients and Schwarzian derivative in linear- and affine-invariant families of sense preserving harmonic mappings of the unit disk are obtained. As a converse, estimations of the order of family are proved in terms of supremum of Schwarzian norm over the family. Relations of this results with univalence of harmonic functions will be discussed.

Keywords: harmonic mappings, Schwarzian derivative, linear-invariant families.

УДК 517.54

О ГИПЕРБОЛИЧЕСКОМ ПОРЯДКЕ ВЫПУКЛОСТИ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

С.Ю. Граф[1], Я.И. Самойлова[2]

1 *sergey.graf@tversu.ru*; Тверской государственный университет, Петрозаводский государственный университет

2 *yana-zavorygina@yandex.ru*; Тверской государственный университет, Петрозаводский государственный университет

Определяется гиперболический порядок выпуклости локально-однолистных функций. Доказываются теоремы регулярности убывания и роста гиперболического порядка выпуклости в классах однолистных конформных отображений единичного круга.

Ключевые слова: конформные отображения, порядок выпуклости, теоремы регулярности.

В геометрической теории функций комплексного переменного традиционно большое внимание уделяется выпуклым однолистным аналитическим функциям и многочисленным обобщениям понятия выпуклости (см., напр., [1, 2]).

Пусть f – локально однолистная аналитическая функция в единичном круге $\mathbb{D} \subset C$.

Порядком выпуклости функции f в круге $D(0,r) = \{z \in \mathbb{C} : |z| \le r\}$, $0 < r < 1$, называется число [1]

$$\beta(f,r) = \min_{\theta\in[0,2\pi)} \frac{d}{d\theta}\arg\frac{df(re^{i\theta})}{d\theta} = \min_{|z|=r} \operatorname{Re}\left\{z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 1\right\}.$$

Пусть $d_h(z_0,z)$ – гиперболическое расстояние между точками z_0, $z \in \mathbb{D}$ в круге $\mathbb{D}$, $\gamma_h(z_0,\rho) = \{z \in \mathbb{D} : d_h(z,z_0) = \rho\}$ – окружность в $\mathbb{D}$ с гиперболическим центром z_0 и гиперболическим радиусом $\rho > 0$.

Гиперболическим порядком выпуклости функции f в круге $D_h(z_0,\rho)=\{z\in\mathbb{D}: d_h(z,z_0)\le\rho\}$ назовем число

$$\beta_h(f,z_0,\rho)=\min_{z\in\gamma_h(z_0,\rho)}\frac{d}{d\theta}\arg T_f(z),$$

где θ – аргумент гиперболического радиуса, соединяющего точку $z\in\gamma_h(z_0,\rho)$ с центром z_0, а $T_f(z)=\frac{d}{d\theta}f(z)$ – касательный вектор к образу окружности $\gamma_h(z_0,\rho)$ при отображении f в точке $f(z)$.

Теорема 1 [3]. *Для локально однолистной аналитической в $\mathbb{D}$ функции f и $z_0\in\mathbb{D}$, $\rho>0$, справедливы соотношения*

$$\beta_h(f,z_0,\rho)=\beta_h(\tilde f,0,\rho)=\beta\left(\tilde f,\frac{e^\rho-1}{e^\rho+1}\right)=$$
$$=\min_{z\in\gamma_h(z_0,\rho)}\operatorname{Re}\left\{\frac{z-z_0}{1-|z_0|^2}\left((1-\overline{z_0}z)\frac{f''(z)}{f'(z)}-2\overline{z_0}\right)+1\right\},$$

где $\tilde f(\zeta)=f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\overline{z_0}\zeta}\right)$.

Символом $\mathscr{S}$ обозначим семейство однолистных аналитических в $\mathbb{D}$ функций f, таких, что $f(0)=f'(0)-1=0$. В [4] доказана регулярность роста и убывания порядка выпуклости $\beta(f,r)$ в подклассе $\mathscr{C}\subset\mathscr{S}$ выпуклых отображений. В ходе сообщения будут представлены теоремы регулярности для $\beta_h(f,z_0,\rho)$ в $\mathscr{C}$ и $\mathscr{S}$.

Теорема 2 [3]. *Пусть $f\in\mathscr{C}$, $z_0\in\mathbb{D}$, $\rho>0$, $R(\rho)=\frac{e^\rho-1}{e^\rho+1}$ и $\tilde f(\zeta)=f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\overline{z_0}\zeta}\right)$. Тогда*

1) $\beta_h(f,z_0,\rho)\ge e^{-\rho}$;

2) $\beta_h(f,z_0,\rho)\,e^\rho$ и $\operatorname{Re}\left\{e^{it}R(\rho)\frac{\tilde f''(e^{it}R(\rho))}{\tilde f'(e^{it}R(\rho))}+1\right\}e^\rho$ не убывают по ρ на $(0,+\infty)$ для любого $t\in[0,2\pi)$;

3) существуют постоянные $\delta\in[1,+\infty]$ и $t_0\in\mathbb{R}$, такие что

$$\lim_{\rho\to+\infty}\operatorname{Re}\left\{e^{it_0}R(\rho)\frac{\tilde f''\left(e^{it_0}R(\rho)\right)}{\tilde f'\left(e^{it_0}R(\rho)\right)}+1\right\}e^\rho=\lim_{\rho\to+\infty}\beta_h(f,z_0,\rho)\,e^\rho=\delta;$$

4) константа $\delta=1$ тогда и только тогда, когда

$$f(z)=z\left(1+\frac{e^{-it_0}-\overline{z_0}}{1-e^{-it_0}z_0}z\right)^{-1}.$$

В классе $\mathscr{S}$ теорема регулярности имеет место только для убывания $\beta_h(f,z_0,\rho)$ и только для гиперболических радиусов $\rho<\ln\sqrt{3}$.

Теорема 3 [3]. *Пусть $f\in\mathscr{S}$, $z_0\in\mathbb{D}$, $0<\rho<\ln\sqrt{3}$, $R(\rho)=\frac{e^\rho-1}{e^\rho+1}$ и $\tilde f(\zeta)=f\left(\frac{\zeta+z_0}{1+\overline{z_0}\zeta}\right)$. Тогда*

1) $\beta_h(f,z_0,\rho)\ge\frac{3-e^{2\rho}}{e^\rho+1}$;

2) $\beta_h(f,z_0,\rho)\,\frac{e^\rho+1}{3-e^{2\rho}}$ и $\operatorname{Re}\left\{e^{it}R(\rho)\frac{\tilde f''(e^{it}R(\rho))}{\tilde f'(e^{it}R(\rho))}+1\right\}\frac{e^\rho+1}{3-e^{2\rho}}$ не убывают по ρ на $(0,\ln\sqrt{3})$ для любого $t\in[0,2\pi)$;

3) существуют постоянные $\delta \in [1, +\infty]$ *и* $t_0 \in \mathbb{R}$*, такие что*

$$\lim_{\rho \to \ln\sqrt{3}} \operatorname{Re}\left\{ e^{it_0} R(\rho) \frac{\tilde{f}''\left(e^{it_0} R(\rho)\right)}{\tilde{f}'\left(e^{it_0} R(\rho)\right)} + 1 \right\} \frac{e^{\rho}+1}{3-e^{2\rho}} =$$

$$= \lim_{\rho \to \ln\sqrt{3}} \beta_h(f, z_0, \rho) \frac{e^{\rho}+1}{3-e^{2\rho}} = \delta;$$

4) константа $\delta = 1$ *тогда и только тогда, когда*

$$f(z) = \left(z + \frac{e^{-2it_0} z_0 - \overline{z_0}}{1 - e^{-2it_0} z_0^2} z^2 \right) \left(1 + \frac{e^{-it_0} - \overline{z_0}}{1 - e^{-it_0} z_0} z \right)^{-2}.$$

В сообщении предполагается обсудить также регулярность изменения порядка выпуклости и гиперболического порядка выпуклости в классах α-выпуклых конформных отображений, удовлетворяющих условию

$$\operatorname{Re}\left\{ z \frac{f''(z)}{f'(z)} + 1 \right\} \geq \alpha, \ \alpha \in [-1/2, 1).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РНФ (проект 17-11-01229).

Литература

1. Robertson M.I.S. *On the theory of univalent functions* // Annals of Mathematics. Second Series. – 1936. – V. 37. – № 2. – P. 374–408.

2. Goodman A.W. *On uniformly convex functions* // Ann. Polon. Math. – 1991. – № 56. – P. 87–92.

3. Граф С.Ю., Самойлова Я.И. *Регулярность убывания порядка выпуклости и гиперболического порядка выпуклости конформных отображений* // Применение функц. анализа в теории приближений. – Тверь, 2016. – С. 13–27.

4. Граф С.Ю., Самойлова Я.И. *Регулярность убывания порядка выпуклости конформных отображений* // Вестн. ТвГУ. Сер. «Прикладная математика». – 2015. – № 2. – С. 135–144.

ON HYPERBOLIC ORDER OF CONVEXITY OF CONFORMAL MAPPINGS

S.Yu. Graf, Ya.I. Samojlova

The hyperbolic order of convexity of locally univalent planar functions is defined. The regularity theorems for decreasing and increasing of hyperbolic order of convexity are proved in the class of univalent conformal mappings of the unit disk.

Keywords: conformal mappings, order of convexity, regularity theorems.

УДК 514.174.3+519.65

АППРОКСИМАЦИЯ ГРАДИЕНТА ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИИ НА ОСНОВЕ Ф-ТРИАНГУЛЯЦИИ

Е.Г. Григорьева[1], В.А. Клячин[2]

1 *e_grigoreva@mail.ru*; Волгоградский государственный университет
2 *klchnv@mail.ru*; Волгоградский государственный университет

В работе вводится класс Ф*-триангуляций конечного множества P точек в $\mathbb{R}^n$, аналогичных классической триангуляции Делоне. Такие триангуляции строятся исходя из условия пустого пересечения с множеством P внутренности всякого выпуклого множества из заданного семейства выпуклых, ограниченных множеств, граница которого содержит вершины симплекса триангуляции. В таком случае классическая триангуляция Делоне соответствует семейству всех шаров в $\mathbb{R}^n$. В статье продемонстрировано использование* Ф*-триангуляций для получения оценок погрешности аппроксимации производных C^2-гладких функций кусочно-линейными функциями.*

Ключевые слова: триангуляция Делоне, условие пустой сферы, семейства выпуклых множеств, кусочно-линейная аппроксимация.

Пусть в $\mathbb{R}^n$ задан конечный набор точек $P = \{p_i\}, i = 1, ..., N$. Для функции $f \in C^1(\mathbb{R}^n)$ ставится задача о приближенном вычислении ее производных по известным значениям функции в точках p_i. Одним из методов решения такой задачи является метод, основанный на построении триангуляции T множества точек P – системы симплексов с вершинами из P, которые попарно не пересекаются по внутренним точкам. Если такой симплекс $S \in T$ имеет вершины $p_{i_0}, p_{i_1}, ..., p_{i_n} \in P$, то можно найти функцию вида $f_S(x) = \langle b, x \rangle + c$ такую, что

$$f(p_{i_k}) = f_S(p_{i_k}), \quad k = 0, ..., n.$$

Тогда приближенным значением градиента $\nabla f(x)$ для точек $x \in S$ можно считать значение градиента этой линейной функции $\nabla f_S(x)$. Напомним, что триангуляция T называется триангуляцией Делоне [1] если выполнено следующее условие пустоты сферы: для всякого симплекса $S \in T$ его описанная сфера не содержит внутри себя точек набора P.

Введем обозначение

$$\delta_S(f) = \max_{x \in S} |\nabla f(x) - \nabla f_S(x)| \tag{1}$$

для абсолютной погрешности вычисления градиента на симплексе S указанным выше способом.

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ семейство Ф строго выпуклых ограниченных множеств с непустой внутренностью. Пусть S произвольный невырожденный симплекс. Определим *охватывающее* множество $B \in$ Ф (если оно существует) из данного семейства как множество, чья граница содержит вершины симплекса (а, значит содержит весь симплекс в силу выпуклости B). В общем случае таких охватывающих множеств из данного семейства Ф может быть несколько.

Определение 1. *Рассмотрим произвольную триангуляцию конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^n$. Будем говорить, что эта триангуляция является* Ф*-триангуляцией, ес-*

ли для любого симплекса S этой триангуляции внутренность любого охватывающего множества B не содержит вершин других симплексов.

Заметим, что если семейство Ф представляет собой семейство D всех шаров в $\mathbb{R}^n$, то вышеприведенное определение совпадает с определением триангуляции Делоне. В работе [2] было доказано существование Ф-триангуляции конечного множества точек при условии, что семейство Ф обладает следующим свойством: для любого невырожденного симплекса S в семействе Ф существует, и при том только, одно охватывающее множество $B(S)$.

В дальнейшем мы будем предполагать, что это условие на семейство выпуклых множеств является выполненным. В таком случае охватывающее множество будем обозначать через $B(S)$.

Пример 1. Рассмотрим гладкую, строго выпуклую вниз функцию $x_{n+1} = \Psi(x)$, определенную во всем пространстве $\mathbb{R}^n$ и такую, что

$$\frac{\Psi(x)}{|x|} \to +\infty \text{ при } x \to \infty. \tag{2}$$

При выполнении этого условия пересечение графика функции $\Psi(x)$ с произвольной не вертикальной плоскостью П представляет собой выпуклую компактную $(n-1)$-мерную поверхность в $\mathbb{R}^{n+1}$. Положим для любых $x \in \mathbb{R}^n, r > 0$

$$\Phi_\Psi(x, r) = \{y \in \mathbb{R}^n : \Psi(y) \le \Psi(x) + \langle \nabla\Psi(x), y - x\rangle + r\}. \tag{3}$$

В силу свойства (2) и выпуклости $\Psi(x)$ множества $\Phi_\Psi(x, r)$ образуют семейство $\{\Phi_\Psi\}$ выпуклых компактных множеств. В [3] было показано, что для всякого невырожденного симплекса S можно построить единственное охватывающее множество из этого семейства. Это множество будем обозначать через $B_\Psi(S)$. Также введем обозначение $x_\Psi = x_\Psi(S)$ точки, для которой при некотором $r > 0$ выполнено $B_\Psi(S) = \Phi_\Psi(x_\Psi, r)$. Триангуляции, соответствующие такого рода семействам выпуклых множеств, называются регулярными триангуляциями [4]. Совпадает ли класс всех Ф-триангуляций с классом регулярных триангуляций, авторам не известно.

Требование «пустоты» в определении 1 можно несколько ослабить.

Определение 2. *Рассмотрим произвольную триангуляцию конечного множества точек $P \subset \mathbb{R}^n$ и некоторое целое неотрицательное k. Будем говорить, что эта триангуляция является Ф-триангуляцией кратности k, если для любого симплекса S этой триангуляции внутренность любого охватывающего множества B содержит не более k вершин других симплексов.*

Рассмотрим строго выпуклую и гладкую функцию $g : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ для которой выполнено условие (2). Также предположим, что для этой функции найдутся положительные числа λ, Λ, такие что неравенства

$$g(x) \le \langle x - y, \nabla g(y)\rangle + \Lambda|x - y|^2, \tag{4}$$

$$g(x) \ge \langle x - y, \nabla g(y)\rangle + \lambda|x - y|^2 \tag{5}$$

выполнены для всех $x, y \in \mathbb{R}^n$. Заметим, что если для выпуклой функции $g(x)$ выполнено неравенство (5), то для этой функции имеет место свойство (2).

Рассмотрим в $\mathbb{R}^n$ локально конечное множество A, являющееся ε-сетью для некоторого $\varepsilon > 0$. Построим его Ф-триангуляцию T по семейству $\{\Phi_g\}$. Следующая тео-

рема дает оценку погрешности производных для выпуклых вниз функций с указанными выше свойствами на соответствующей этой функции триангуляции.

Теорема 1. *Имеет место оценка*

$$\sup_{S\in T}\delta_S(g) \le C(n)\Lambda\sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\cdot\varepsilon. \tag{6}$$

Полученную в теореме 1 оценку можно интерпретировать как погрешность аппроксимации нормалей специального случая выпуклых множеств в $\mathbb{R}^{n+1}$, ограниченных графиком выпуклой функции. Отметим, что в [5] – [6] рассматриваются проблемы аппроксимации выпуклых множеств многогранниками, однако не исследуется аппроксимация нормалей к границе выпуклого множества.

Пусть $B(x,t)$ обозначает открытый шар радиуса $t>0$ с центром в точке $x\in\mathbb{R}^n$. Неравенство (6), полученное в теореме 1, дает оценку погрешности аппроксимации градиента выпуклой функции в подходящей для этой функции триангуляции. Однако можно получить аналогичную оценку и для триангуляции, не так сильно связанной с функцией $g(x)$. Для формулировки нам понадобится следующая величина

$$\eta_{k,n} = \inf_{q_1,\dots,q_k\in B(0,1)}\sup_{y_0\in B(0,1)}\{\rho : B(y_0,\rho)\subset B(0,1)\setminus\{q_1,\dots,q_k\}\}.$$

Геометрический смысл величины $\eta_{k,n}$ состоит в том, что какие бы k точек из $B(0,1)$ ни взять, найдется открытый шар радиуса $\eta_{k,n}$, лежащий внутри шара $B(0,1)$ и не содержащий заданных k точек. Ясно, что для всех k,n выполнено $\eta_{k,n}>0$ и $\eta_{k,n}\to 0$ при $k\to+\infty$.

Теорема 2. *Пусть $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ строго выпуклая функция, для которой выполнены неравенства (4),(5). Рассмотрим триангуляцию T локально конечной ε-сети $A\subset\mathbb{R}^n$, являющуюся Φ-триангуляцией кратности k относительно семейства $\{\Phi_g\}$. Имеет место оценка*

$$\sup_{S\in T}\delta_S(g) \le C(n)\Lambda\sqrt{\frac{\Lambda}{\lambda}}\cdot\frac{\varepsilon}{\eta_{k,n}}.$$

В следующей теореме дается оценка погрешности для выпуклой функции на Φ-триангуляции, построенной по семейству вида (3).

Теорема 3. *Пусть $g:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ и $h:\mathbb{R}^n\to\mathbb{R}$ строго выпуклые функции, для которых выполнены неравенства (4),(5) с постоянными λ_g,Λ_g и λ_h,Λ_h соответственно. Рассмотрим триангуляцию T локально конечной ε-сети $A\subset\mathbb{R}^n$, являющуюся Φ-триангуляцией относительно семейства $\{\Phi_h\}$. Имеет место оценка*

$$\delta_S(g) \le C(n)\Lambda_g\sqrt{\frac{\Lambda_h}{\lambda_h}}\cdot\varepsilon + C(n)\Lambda_g|x_g(S)-x_h(S)|.$$

Литература

1. Скворцов А.В., Мирза Н.С. *Алгоритмы построения и анализа триангуляции*. – Томск: Изд. Томск. ун-та, 2006. – 168 с.

2. Клячин В.А. *Алгоритм триангуляции, основанный на условии пустого выпуклого множества* // Вестник Волгоградского государственного университета. Серия 1: Математика. Физика. – 2015. – Т. 28, № 3. – С. 27–33.

3. Клячин В.А. *Экстремальные свойства триангуляции, основанной на условии пустого выпуклого множества* // Сибирские электронные математические известия. – 2015. – Т. 12. – С. 991–997.

4. Гельфанд И.М., Зелевинский А.В., Капранов М.М. *Дискриминанты многочленов от многих переменных и триангуляции многогранников Ньютона* // Алгебра и анализ. – 1990. – Т. 2, Вып. 3. – С. 1–62.

5. Каменев Г.К., Поспелов А.И. *Полиэдральная аппроксимация выпуклых компактных тел методами наполнения* // Журнал вычислительной математики и математической физики. – 2012. – Т. 52, № 5. – С. 818–828.

6. Бронштейн Е.М. *Аппроксимация выпуклых множеств многогранниками* // Современная математика. Фундаментальные направления. – 2007. – Т. 22. – С. 5–37.

APPROXIMATION OF GRADIENT OF THE CONVEX FUNCTIONS BASED ON Φ-TRIANGULATION

E.G. Grigorieva, V.A. Klyachin

The class of Φ-triangulations of a finite set of P points in $\mathbb{R}^n$ similar to classical Delaunay triangulation is introduced. Such triangulations are constructed using the condition of empty intersection with the set P of the interior of every convex set from a given family of convex, bounded sets whose boundary contains vertices of the simplex of the triangulation. In this case, the classical Delaunay triangulation corresponds to the family of all balls in $\mathbb{R}^n$. We use of Φ-triangulations to obtain estimates of the error of approximation of the derivatives of C^2-smooth convex functions by piecewise linear functions.

Keywords: Delaunay triangulation, empty sphere condition, convex set families, piecewise approximation.

УДК 512.573, 512.562

$\pi_1(K)$–ГРАДУИРОВАННЫЕ C^*–АЛГЕБРЫ, ПОРОЖДЕННЫЕ ЧАСТИЧНО–УПОРЯДОЧЕННЫМ МНОЖЕСТВОМ

С.А. Григорян[1], Е.В. Липачева[2], А.С. Ситдиков[3]

1 *gsuren@inbox.ru*; Казанский государственный энергетический университет
2 *elipacheva@gmail.com*; Казанский государственный энергетический университет
3 *airat_vm@rambler.ru*; Казанский государственный энергетический университет

В работе строится C^*–алгебра над частично–упорядоченным множеством, в каждой точке которого задано гильбертово пространство. Доказывается, что эта алгебра является градуированной по 1-й гомотопической фундаментальной группе данного частично-упорядоченного множества.

Ключевые слова: C^*–алгебра, градуированная C^*–алгебра, полугруппа путей, частично-упорядоченное множество, 1-я гомотопическая фундаментальная группа, оператор частичной изометрии.

Работа посвящена исследованию C^*–алгебр, заданных на тройке $(K, H_a, \gamma_{ba})_{a\le b\in K}$, где K — частично–упорядоченное множество, H_a — гильбертовы пространства (пространства состояний), а $\gamma_{ba} : H_a \to H_b$ — изометрические вложения. Данная задача возникает при алгебраическом подходе к квантовой теории поля, основы которого были разработаны в [1, 2]. В работах [3–5] Допличером и Робертсом была установлена связь между полевым описанием физической системы и описанием, основанном на алгебре наблюдаемых. В настоящей работе используется аксиоматический подход к описанию полугруппы путей, который отличается от подхода Допличера и Робертса. Основным объектом исследования в нашем случае является пространство состояний, с помощью которого мы исследуем алгебру наблюдаемых над частично-упорядоченным множеством. Работа является продолжением исследований, начатых в работе [6].

Пусть K — частично–упорядоченное множество с отношением порядка $\le$, удовлетворяющим свойствам рефлексивности, антисимметричности и транзитивности. Элементы a and b называются *сравнимыми* на K, если $a \le b$ или $b \le a$. Назовем множество K *направленным вверх*, если для любых $a, b \in K$ существует $c \in K$, такой, что $a \le c$ и $b \le c$.

Пусть задана тройка $(K, H_a, \gamma_{ba})_{a\le b\in K}$, где H_a — гильбертовы пространства с базисом $\{e_n^a\}_{n=1}^{\infty}$, а $\gamma_{ba} : H_a \to H_b$ — изометрические вложения, заданные для $a \le b$, отображающие базис $\{e_n^a\}_{n=1}^{\infty}$ в базис $\{e_n^b\}_{n=1}^{\infty}$ и удовлетворяющие соотношению $\gamma_{ca} = \gamma_{cb} \circ \gamma_{ba}$, если только $a \le b \le c$.

Приведем определение пути на K. Подробное описание можно посмотреть в [6]. Назовем упорядоченную пару (b, a) для $b \le a$ или $\overline{(b, a)}$ для $b \ge a$ на K *элементарным путем*. При этом $\partial_1 p = a$ называется *начальной точкой* пути и $\partial_0 p = b$ — *конечной точкой*. Определим *обратный путь* $p^{-1} = \overline{(a, b)}$ для $p = (b, a)$ и $p^{-1} = (a, b)$ для $p = \overline{(b, a)}$. Пару $(a, a) = \overline{(a, a)} = i_a$ назовем *тривиальным путем*. Символом 0 обозначим *нулевой путь*, не имеющий начальной и конечной точек.

Пусть $p_1, \dots, p_n$ — элементарные пути, такие, что $\partial_0 p_{i-1} = \partial_1 p_i$ для $i = 2, \dots, n$. Определим *путь* p как последовательность

$$p = p_n * p_{n-1} * \dots * p_1.$$

При этом $\partial_1 p = \partial_1 p_1$ — начальная точка пути p и $\partial_0 p = \partial_0 p_n$ — конечная точка. Обратный путь определяется как

$$p^{-1} = p_1^{-1} * p_2^{-1} * \dots * p_n^{-1}.$$

Определим произведение путей, продолжив операцию " $*$ " для любых p и q:

$$p * q = \begin{cases} p * q & \text{если } p \ne 0,\ q \ne 0 \text{ и } \partial_1 p = \partial_0 q, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Полугруппой путей S называется множество всех путей на K с бинарной операцией " $*$ ", удовлетворяющей аксиомам для любых $a, b, c \in K$, таких, что $a \le b \le c$,

1. $\overline{(a, b)} * \overline{(b, c)} = \overline{(a, c)}$;
2. $\overline{(c, b)} * \overline{(b, a)} = \overline{(c, a)}$;
3. $\overline{(b, a)} * (a, b) = i_b, \quad (a, b) * \overline{(b, a)} = i_a$;
4. $(a, b) * i_b = (a, b), \quad i_a * (a, b) = (a, b)$;

5. $\overline{(b,a)} * i_a = \overline{(b,a)}, \quad i_b * \overline{(b,a)} = \overline{(b,a)}$;
6. $i_a * i_a = i_a$.

Назовем $p \in S$ *петлей*, если $\partial_0 p = \partial_1 p$. Обозначим через G_a, $a \in K$ множество всех петель, имеющих начальную и конечную точку a. В работе [6] показано, что G_a является подгруппой в S с единицей i_a и описаны свойства этой группы и полугруппы S. Отметим, что если K — направленное вверх множество, то G_a — тривиальна.

Множество K называется *связным*, если для любых $a, b \in K$ существует путь p, такой, что $\partial_0 p = a$, $\partial_1 p = b$. Далее в статье будем считать, что множество K связное. В работе [6] было показано, что для связного множества K справедливо $G_a \cong G_b$ для любых $a, b \in K$.

Пусть $\pi_1(K)$ — 1-я (гомотопическая) фундаментальная группа частично-упорядоченного множества K (см. работы [3–5]).

Теорема 1. *Имеет место изоморфизм $\pi_1(K) \cong G_a$ для любого $a \in K$.*

Для любого $a \in K$ определим $S_a = \{p \in S \mid \partial_0 p = a\}$.

Рассмотрим гильбертово пространство

$$l^2(S_a) = \left\{ f : S_a \to \mathbb{C} \mid \sum_{p \in S_a} |f(p)|^2 < \infty \right\}$$

со скалярным произведением $\langle f, g \rangle = \sum\limits_{p \in S_a} f(p)\overline{g(p)}$. Семейство функций $\{e_p\}_{p \in S_a}$ образует ортонормированный базис в $l^2(S_a)$, где $e_p(p') = \delta_{p,p'}$ — символ Кронекера.

Пусть $\mathcal{H} = \bigoplus\limits_{a \in K} H_a \otimes l^2(S_a)$. Для любых $a, b \in K$, $a \le b$, определим оператор частичной изометрии $\chi_a^b : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$ следующим образом:

$$\chi_a^b(h \otimes e_p) = \begin{cases} \gamma_{ba}(h) \otimes e_{\overline{(b,a)} * p} & \text{если } h \in H_a \text{ и } \partial_0 p = a, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Отметим, что $\chi_a^b(H_a \otimes l^2(S_a)) \subseteq H_b \otimes l^2(S_b)$. Сопряженным оператором к χ_a^b является оператор $\chi_a^{b*} : \mathcal{H} \to \mathcal{H}$, действующий следующим образом:

$$\chi_a^{b*}(h \otimes e_p) = \begin{cases} h' \otimes e_{(a,b) * p} & \text{если существует } h' \in H_a, \text{ такой,} \\ & \text{что } h = \gamma_{ba}(h') \text{ и } \partial_0 p = b, \\ 0 & \text{в противном случае.} \end{cases}$$

Лемма 1. *Справедливы следующие утверждения:*
1) $\chi_a^c = \chi_b^c \chi_a^b$, *если* $a \le b \le c$.
2) $\chi_a^{c*} = \chi_a^{b*} \chi_b^{c*}$, *если* $a \le b \le c$.
3) $\chi_a^{b*} \chi_a^b = I_{H_a} \otimes I_a$, *где* $I_{H_a} \otimes I_a : \mathcal{H} \to H_a \otimes l^2(S_a)$ — *проектор.*
4) $\chi_a^b \chi_a^{b*} = P_{H_b} \otimes I_b$, *где* $P_{H_b} \otimes I_b : \mathcal{H} \hookrightarrow H_b \otimes l^2(S_b)$ — *проектор.*

Лемма 2. *Для любых сравнимых $b, d \in K$ если $a, c \le b$ и $a, c \le d$, то $\chi_c^{b*} \chi_a^b = \chi_c^{d*} \chi_a^d$.*

Множество изометрий $\{\chi_a^b\}_{a,b \in K, a \le b}$ может быть расширено до $\{\chi_p\}_{p \in S}$ следующим образом. Если

$$p = (a_{2n}, a_{2n-1}) * \ldots * \overline{(a_3, a_2)} * (a_2, a_1) * \overline{(a_1, a_0)}$$

— произвольный путь, то

$$\chi_p = \chi_{a_{2n}}^{a_{2n-1}\,*} \cdots \chi_{a_2}^{a_1\,*} \chi_{a_0}^{a_1}.$$

При этом $\chi_p^* = \chi_{p^{-1}}$.

Назовем *областью определения* пути p множество

$$D_p = \{h \in H_{\partial_1 p} \mid \chi_p(h \otimes e_q) \neq 0 \text{ если } \partial_0 q = \partial_1 p\}.$$

Заметим, что для равных путей $p = q \in S$ необязательно должно выполняться $D_p = D_q$. Например, если $p = i_a = (a,b) * \overline{(b,a)}$ для $a \leq b$, то $D_p = H_a$, а если $p = i_a = \overline{(a,c)} * (c,a)$ для $c \leq a$, то $D_p \subseteq H_a$.

Теорема 2. *Пусть $p = q \in G_a$. Тогда $\chi_p^* \chi_q = P_{H_a} \otimes I_a$.*

Следствие 1. *Для любой петли $p \in G_a$ справедливо $\chi_p^* \chi_p = P_{H_a} \otimes I_a$. Причем здесь P_{H_a} — есть проектор на область определения $D_{p^{-1} * p}$.*

Следствие 2. *Если K — направленное вверх множество, то для любой петли $p \in G_a$ справедливо $\chi_p = P_{H_a} \otimes I_a$. Здесь P_{H_a} — есть проектор на область определения D_p.*

Будем называть отображение χ_p *циклом*, если p есть петля.

Любой цикл χ_p, $p \in G_a$, имеет вид $\chi_p = U_p \otimes L_p$, где $U_p : H_a \to H_a$ — оператор частичной изометрии, а $L_p : l^2(S_a) \to l^2(S_a)$ — оператор, соответствующий петле p, такой, что $L_p e_q = e_{p*q}$.

Пусть $p = q \in G_a$. Тогда $L_p = L_q$, но, вообще говоря, $U_p \neq U_q$. Из следствия 3 имеем: $\chi_p^* \chi_p = P_{H_a} \otimes I_a$. Будем обозначать этот проектор P_{H_a} через Q_p. Таким образом, $\chi_p^* \chi_p = Q_p \otimes I_a$ и $\chi_q^* \chi_q = Q_q \otimes I_a$.

Для $p = q$ определим отношение порядка на циклах: $\chi_p \leq \chi_q$, если $Q_p \leq Q_q$. Нетрудно видеть, что справедливы неравенства

$$\chi_p^* \chi_q \leq \chi_q^* \chi_q; \;\; \chi_p^* \chi_q \leq \chi_p^* \chi_p. \tag{1}$$

Определим для $p = q$ операцию сложения циклов $\chi_p \vee \chi_q$ следующим образом:

1) если $Q_p + Q_q$ — снова проектор, т.е. $Q_p Q_q = 0$, то $\chi_p \vee \chi_q = \chi_p + \chi_q$;

2) если $Q_p Q_q = Q \neq 0$, то $\chi_p \vee \chi_q = \chi_p + \chi_q((Q_q \setminus Q) \otimes I_a)$.

Тогда сумма операторов $\chi_p \vee \chi_q$ также представляется в виде $\chi_p \vee \chi_q = U_{p,q} \otimes L_p = U_{p,q} \otimes L_q$.

Определим оператор

$$\hat{\chi}_p = \bigvee_{p_i = p} \chi_{p_i}.$$

Лемма 3. *Справедливы следующие утверждения:*

1) Если $p = q$, то $\hat{\chi}_p = \hat{\chi}_q$.

2) $\hat{\chi}_p \hat{\chi}_q = \hat{\chi}_{p*q}$.

Пусть $\mathfrak{A}_{a,e}$ — подалгебра в $B(H_a \otimes l^2(S_a))$, замкнутая в сильно-операторной топологии, порожденная циклами $\chi_p = P_{H_a} \otimes I_a$. Отметим, что эта алгебра будет содержать, в частности, операторы вида $\hat{\chi}_p^* \hat{\chi}_p$.

Рассмотрим семейство банаховых пространств $\mathfrak{A}_{a,p} = \mathfrak{A}_{a,e} \hat{\chi}_p$, $p \in G_a$. Они замкнуты и $\mathfrak{A}_{a,e}$ соответствует единице i_a группы G_a.

Пусть $\mathfrak{A}_a$ — замкнутая в равномерной норме подалгебра в $B(H_a \otimes l^2(S_a))$, порожденная элементами из семейства $\mathfrak{A}_{a,p}$, $p \in G_a$.

Теорема 3. *C^*–алгебра $\mathfrak{A}_a$ является $\pi_1(K)$–градуированной C^*–алгеброй*

$$\mathfrak{A}_a = \overline{\bigoplus_{p \in G_a \cong \pi_1(K)} \mathfrak{A}_{a,p}}.$$

Литература

1. Haag R., Kastler D. *An algebraic approach to quantum field theory* // Journal of mathematical physics. – 1964. – V. 5. – P. 848–861.

2. Haag R. *Local quantum physics: fields, particles, algebras.* – Springer–Verlag, Berlin, 1992.

3. Doplicher S., Roberts J.E. *Why there is field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics* // Comm. Math. Phys. – 1990. – V. 131. – P. 51–107.

4. Doplicher S., Roberts J.E. *A new duality theory for compact groups* // Invent. math. – 1989. – V. 98. – P. 157–218.

5. Doplicher S., Roberts J.E. *Endomorphisms of C*-algebras, cross products and duality for compact groups* // Annals of Mathematics. – 1989. – V. 130. – P. 75–119.

6. Grigoryan S., Grigoryan T., Lipacheva E., and Sitdikov A. *C*-algebra generated by the paths semigroup* // Lobachevskii J. Math. – 2016. – V. 37. – № 6. – P. 740–748.

$\pi_1(K)$–GRADED C^*–ALGEBRAS GENERATED BY PARTIALLY ORDERED SET

S.A. Grigoryan, E.V. Lipacheva, A.S. Sitdikov

In this paper we construct the C^*-algebra over a partially ordered set, at each point of which there is given a Hilbert space. It is proved this algebra is graded by the 1st homotopy fundamental group of the partially ordered set.

Keywords: C^*–algebra, graded C^*–algebra, path semigroup, partially ordered set, 1st homotopy fundamental group, operator of partial isometry.

УДК 517.54

О НЕКОТОРЫХ УСЛОВИЯХ ЕДИНСТВЕННОСТИ КОРНЯ УРАВНЕНИЯ ГАХОВА

С.А. Губайдуллина[1], А.В. Казанцев[2]

1 *sumbel.gubaydullina@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

2 *avkazantsev63@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье обсуждается новое условие единственности корня уравнения Гахова.

Ключевые слова: уравнение Гахова, класс Гахова.

Следующее утверждение устанавливается в рамках подхода, использованного в работах [1], [2]. Пусть $\tilde{H}_0$ – класс всех голоморфных и локально однолистных функций $f(\zeta) = \zeta + \ldots$ в круге $\mathbb{D} = \{\zeta \in \mathbb{C} : |\zeta| < 1\}$, $\tilde{\mathcal{G}}_1$ – регулярный класс Гахова, состоящий

из всех функций $f \in \tilde{H}_0$, для которых уравнение Гахова

$$f''(\zeta)/f'(\zeta) = 2\bar{\zeta}/(1-|\zeta|^2)$$

имеет единственный нулевой корень, являющийся максимумом гиперболической производной (конформного радиуса)

$$h_f(\zeta) = (1-|\zeta|^2)|f'(\zeta)|$$

функции f [3]. Справедлива

Теорема. *Функция $f \in \tilde{H}_0$, удовлетворяющая условиям $m \le |f'(\zeta)| \le M$ и $|\arg f'(\zeta)| \le \alpha$ при $\zeta \in \mathbb{D}$, принадлежит классу Гахова $\tilde{\mathcal{G}}_1$, если*

$$\frac{q}{(1+\lambda)K(\lambda)} \le 1,$$

где $q = \ln(M/m)$, $K(\lambda) = \int_0^1 [(1-u^2)(1-\lambda^2 u^2)]^{-1/2} du$, а величина $\lambda = \lambda(q,\alpha)$, $0 \le \lambda \le 1$, определяется из уравнения $4\alpha K(\lambda) = qK(\sqrt{1-\lambda^2})$.

В докладе обсуждается ряд аспектов, связанных с этой теоремой и ее доказательством.

Литература

1. Авхадиев Ф. Г., Аксентьев Л. А. *Достаточные условия однолистности аналитических функций* // Доклады АН СССР – 1971. – Т. 198. – № 4. – С. 743–746.

2. Аксентьев Л. А., Хохлов Ю. Е., Широкова Е. А. *О единственности решения внешней обратной краевой задачи* // Мат. заметки. – 1978. – Т. 24. – № 3. – С. 319–330.

3. Казанцев А. В. *Четыре этюда на тему Ф. Д. Гахова.* – Йошкар-Ола: Изд-во МарГУ, 2012. – 64 с.

ON SOME CONDITIONS FOR THE UNIQUENESS OF A ROOT OF GAKHOV'S EQUATION

S.A. Gubaydullina, A.V. Kazantsev

We discuss a new condition for the uniqueness of a root of the Gakhov equation.

Keywords: Gakhov's equation, Gakhov's class.

УДК 512.64+517.98

О ТЕНЗОРАХ В ГОМОЛОГИЧЕСКИХ КОМПЛЕКСАХ

Р.Н. Гумеров[1]

1 *renat.gumerov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В сообщении обсуждаются свойства и характеристики тензоров, принадлежащих пространствам, из которых строятся стандартные (ко)гомологические комплексы. В частности, мы вычисляем тензорные ранги элементов стандартной резольвенты для модуля, состоящего из суммируемых последовательностей.

Ключевые слова: комплекс, модуль, стандартная резольвента, стандартный комплекс, тензор, тензорное произведение, тензорный ранг.

Под тензорами мы понимаем элементы тензорных произведений линейных пространств над полями вещественных или комплексных чисел. Напомним некоторые обозначения и понятия.

Пусть $V_1, V_2, \ldots, V_n$ – линейные пространства над одним и тем же полем, имеющие произвольные алгебраические размерности. Рассмотрим алгебраическое тензорное произведение этих пространств

$$V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_n.$$

Например, линейное пространство квадратных матриц размера $n \times n$ образует тензорный квадрат арифметического векторного пространства размерности n. Массивы размера $k \times l \times m$ образуют линейное пространство, которое является тензорным произведением трёх арифметических пространств размерностей k, l и m.

Рассматривая алгебраическое тензорное произведение нормированных пространств V_i, мы можем говорить о различных нормах на пространстве $V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_n$ и, соответственно, о различных топологических тензорных произведениях (см., напр., [1]).

Напомним, произвольный элемент $x \in V_1 \otimes V_2 \otimes \ldots \otimes V_n$ неоднозначно представляется в виде конечной суммы

$$x = \sum_{i=1}^{r} v_{1i} \otimes v_{2i} \otimes \ldots \otimes v_{ni},$$

где $v_{ji} \in V_j$, $j = 1, 2, \ldots, n$.

Определение. *Наименьшее число r в указанном выше представлении вектора x называется тензорным рангом элемента x.*

Понятие тензорного ранга является естественным обобщением ранга матрицы и, в случае матриц, совпадает с обычным понятием ранга матрицы. Хорошо известно, что ранг матрицы является полунепрерывной снизу функцией на пространстве матриц с естественной топологией. Точнее говоря, справедливо следующее утверждение.

Утверждение. *Пусть в пространстве матриц размера $m \times n$ последовательность элементов (A_n) сходится к матрице A. Предположим, что для некоторого фиксированного натурального числа r ранг каждой матрицы (A_n) не превосходит r. Тогда ранг предельной матрицы A тоже не превосходит числа r.*

Для тензоров произвольного порядка ситуация, вообще говоря, отличается от случая матриц. А именно, множество массивов, чьи тензорные ранги не превосходят некоторого фиксированного числа r, необязательно является замкнутым множеством в естественной топологии. Если для вычисления ранга матрицы существуют различные алгоритмы, то тензорной ранг произвольного массива часто неизвестен. Кроме того, в отличие от ранга матрицы, тензорный ранг массива большого порядка зависит от поля, над которым он вычисляется.

В докладе обсуждаются некоторые близкие вопросы. Приводятся примеры нахождения ранга конкретных тензоров, в частности, для элементов тензорных пространств, участвующих в построениях стандартных комплексов гомологической теории (см., напр., [2]). При этом нами используются результаты статей [3] – [5]. В одном из примеров рассматривается стандартная проективная резольвента для банаховой алгебры Берлинга, состоящей из суммируемых последовательностей, со свёрткой в качестве умножения. При этом она рассматривается как модуль над собой с естественным левым действием.

Литература

1. Grothendieck A. *Produits tensorielles topologiques et espaces nuclearies.* // Mem. Amer. Math. Soc. – 1955. – № 16.

2. Хелемский А. Я. *Гомология в банаховых и топологических алгебрах.* – М.: Изд-во МГУ, 1986. – 288 с.

3. Гумеров Р. Н. *Гомологическая размерность радикальных алгебр типа Бёрлинга с быстро убывающим весом* // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. – 1988. – № 5. – С. 18–22.

4. Гумеров Р. Н. *Об одном геометрическом признаке нетривиальности симплициальных и циклических когомологий банаховых алгебр* // Вестник МГУ. Сер. матем., мех. – 1991. – № 3. – С. 67–69.

5. Gumerov R. N., Vidunov S. I. *Approximation by matrices with simple spectra* // Lobachevskii J. Math. – 2016. – V. 37. – № 3. – P. 240–243.

ON TENSORS IN HOMOLOGICAL COMPLEXES

R.N. Gumerov

The report is concerned with properties and characteristics of tensors in spaces of standard (co)homological complexes. In particular, we evaluate tensor ranks of elements in the standard resolution for the module consisting of summable sequences.

Keywords: complex, module, standard complex, standard resolution, tensor, tensor product, tensor rank.

УДК 517.95

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ ДЕЗИНА ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ЛАВРЕНТЬЕВА - БИЦАДЗЕ

В.А. Гущина[1]

1 *violetta.novikova.1991@mail.ru*; Самарский государственный социально-педагогический университет

В данной работе для уравнения Лаврентьева-Бицадзе рассматривается нелокальная задача Дезина в прямоугольной области. Решение задачи построено в виде суммы ряда по собственным функциям соответствующей одномерной спектральной задачи. При некоторых условиях относительно параметров и заданных фунций доказана сходимость построенного ряда в классе регулярных решений и установлена устойчивость решения от заданных граничных функций.

Ключевые слова: нелокальная задача Дезина, уравнение Лаврентьева-Бицадзе,

единственность, существование, ряд, малые знаменатели, сходимость, устойчивость.

Рассмотрим уравнение Лаврентьева-Бицадзе

$$Lu \equiv u_{xx} + (\operatorname{sgn} y)\, u_{yy} = 0 \tag{1}$$

в прямоугольной области

$$D = \{(x, y) | 0 < x < l, -\alpha < y < \beta\},$$

где $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ — заданные действительные числа, и поставим следующую нелокальную задачу.

Задача Дезина. Найти функцию $u(x, y)$, удовлетворяющую условиям:

$$u(x, y) \in C^1(\overline{D}) \cap C^2(D_- \cup D_+); \tag{2}$$

$$Lu \equiv 0, (x, y) \in D_- \cup D_+; \tag{3}$$

$$u(0, y) = u(l, y), \quad u_x(0, y) - u_x(l, y) = 0, \ -\alpha \le y \le \beta; \tag{4}$$

$$u(x, \beta) = \varphi(x), \ 0 \le x \le l; \tag{5}$$

$$u_y(x, -\alpha) - \lambda u(x, 0) = \psi(x), \ 0 \le x \le l, \tag{6}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, λ – заданный действительный параметр.

А.А. Дезин [1] отметил, что метод поиска разрешимых расширений для дифференциальных операторов может быть адаптирован к оператору Лаврентьева-Бицадзе с условиями периодичности по переменной x. З.А. Нахушевой [2] задача (2) – (6) изучена, когда $\alpha = l$, $\varphi(x) = \psi(x) = 0$, $F(x, y) = f(x, y) \cdot H(y)$, $H(y)$ – функция Хевисайда, $\lambda \ge 0$. Показано, что при $\lambda < 0$ однородная задача (т. е. когда $f(x, y) \equiv 0$) имеет нетривиальные решения.

В работах [3, 4] решение данной задачи построено в виде суммы ряда

$$u(x, y) = \frac{1}{\sqrt{l}} u_0(y) + \sqrt{\frac{2}{l}} \sum_{n=1}^{+\infty} u_n(y) \cos \mu_n x + \upsilon_n(y) \sin \mu_n x, \tag{7}$$

где коэффициенты $u_n(y)$, $u_0(y)$, и $\upsilon_n(y)$ определяются соответственно формулами:

$$u_n(y) = \begin{cases} \varphi_n \dfrac{A_n(\alpha, y)}{\Delta(n)} - \psi_n \dfrac{\operatorname{sh} \mu_n(\beta - y)}{\Delta(n)}, & y > 0, \\ \varphi_n \dfrac{B_n(\alpha, y)}{\Delta(n)} + \psi_n \dfrac{C_n(y, \beta)}{\Delta(n)}, & y < 0, \end{cases}$$

при условии, что при всех $n \in \mathbb{N}$

$$\Delta(n) = \cos \mu_n \alpha \operatorname{ch} \mu_n \beta - \operatorname{sh} \mu_n \beta \sin \mu_n \alpha + \frac{\lambda}{\mu_n} \operatorname{sh} \mu_n \beta \ne 0,$$

где

$$A_n(\alpha, y) = \cos\mu_n\alpha \operatorname{ch}\mu_n y - \sin\mu_n\alpha \operatorname{sh}\mu_n y + \frac{\lambda}{\mu_n}\operatorname{sh}\mu_n y,$$

$$B_n(\alpha, y) = \cos\mu_n(\alpha + y) + \frac{\lambda}{\mu_n}\sin\mu_n y,\ C_n(y, \beta) = \operatorname{ch}\mu_n\beta \sin\mu_n y - \operatorname{sh}\mu_n\beta\cos\mu_n y.$$

$$u_0(y) = \varphi_0\frac{1+\lambda y}{1+\lambda\beta} + \psi_0\frac{y-\beta}{1+\lambda\beta}, \quad -\alpha \le y \le \beta,$$

$$1 + \lambda\beta \ne 0, \quad \varphi_0 = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_0^l \varphi(x)dx, \quad \psi_0 = \frac{1}{\sqrt{l}}\int_0^l \psi(x)dx$$

$$v_n(y) = \begin{cases} \widetilde{\varphi}_n\dfrac{A_n(\alpha, y)}{\Delta(n)} - \widetilde{\psi}_n\dfrac{\operatorname{sh}\mu_n(\beta - y)}{\Delta(n)}, & y > 0, \\ \widetilde{\varphi}_n\dfrac{B_n(\alpha, y)}{\Delta(n)} + \widetilde{\psi}_n\dfrac{C_n(y, \beta)}{\Delta(n)}, & y < 0, \end{cases}$$

$$\widetilde{\varphi}_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi(x)\sin\mu_n x dx, \quad \widetilde{\psi}_n = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \psi(x)\sin\mu_n x dx,$$

и доказаны теоремы существования и единственности задачи (2) – (6).

В данной работе установим устойчивость решения этой задачи относительно граничных функций $\varphi(x)$, $\psi(x)$. Для этого приведем вспомогательные утверждения из [3, 4].

Лемма 1. *Если $\tilde{\alpha} = \alpha/l$ является натуральным числом и $\lambda > -2\pi/l$, то существует положительная постоянная C_0, зависящая от λ и l, такая что при всех $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка*

$$|\Delta(n)| \ge e^{\mu_n\beta}C_0 > 0.$$

Лемма 2. *Пусть выполнены условия леммы 1. Тогда при всех $n \in \mathbb{N}$ и любом $y \in [-\alpha, \beta]$ справедливы оценки*

$$|u_n(y)| \le M_1(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad |u_n'(y)| \le M_2 n(|\varphi_n| + |\psi_n|);$$
$$|u_n''(y)| \le M_3 n^2(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad y \ge 0, \quad |u_n''(y)| \le M_4 n^2(|\varphi_n| + |\psi_n|), \quad y \le 0;$$
$$|v_n(y)| \le M_1\left(|\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n|\right), \quad |v_n'(y)| \le M_2 n(|\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n|),$$
$$|v_n''(y)| \le M_3 n^2(|\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n|), \quad y \ge 0, \quad |v_n''(y)| \le M_4 n^2(|\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n|), \quad y \le 0;$$

где M_i – положительные постоянные.

Лемма 3. *Пусть $\varphi(x)$, $\psi(x) \in C^3[0, l]$ и $\varphi^{(i)}(0) = \varphi^{(i)}(l)$, $\psi^{(i)}(0) = \psi^{(i)}(l)$, $i = 0, 1, 2$. Тогда справедливы представления:*

$$\varphi_n = \frac{1}{\mu_n^3}\varphi_n^{(3)}, \quad \psi_n = \frac{1}{\mu_n^3}\psi_n^{(3)}, \quad \widetilde{\varphi}_n = -\frac{1}{\mu_n^3}\widetilde{\varphi}_n^{(3)}, \quad \widetilde{\psi}_n = -\frac{1}{\mu_n^3}\widetilde{\psi}_n^{(3)},$$

где

$$\varphi_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^1 \varphi^{(3)}(x)\sin\mu_n x dx, \quad \psi_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^1 \psi^{(3)}(x)\sin\mu_n x dx,$$

$$\widetilde{\varphi}_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^1 \widetilde{\varphi}^{(3)}(x)\cos\mu_n x dx, \quad \widetilde{\psi}_n^{(3)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^1 \widetilde{\psi}^{(3)}(x)\cos\mu_n x dx,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\varphi_n^{(3)}\right|^2 \le \left\|\varphi^{(3)}(x)\right\|_{L_2}^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\psi_n^{(3)}\right|^2 \le \left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2}^2,$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\widetilde{\varphi}_n^{(3)}\right|^2 \le \left\|\varphi^{(3)}(x)\right\|_{L_2}^2, \quad \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\widetilde{\psi}_n^{(3)}\right|^2 \le \left\|\psi^{(3)}(x)\right\|_{L_2}^2.$$

На основании лемм 1 – 3 доказано следующее утверждение.

Теорема 1. *Если выполнены условия лемм 1 и 3, то существует единственное решение задачи* (2) – (6) *и это решение определяется рядом* (7).

Теорема 2. *Если выполнены условия теоремы 1. Тогда для решения* (7) *задачи* (2) – (6) *имеют место оценки:*

$$\|u(x,y)\|_{L_2} \le M_5\left(\|\varphi(x)\|_{L_2} + \|\psi(x)\|_{L_2}\right), \tag{8}$$

$$\|u(x,y)\|_{C(\bar{D})} \le M_6\left(\|\varphi(x)\|_{C_{[0,l]}} + \|\psi(x)\|_{C_{[0,l]}} + \|\varphi'(x)\|_{C_{[0,l]}} + \|\psi'(x)\|_{C_{[0,l]}}\right), \tag{9}$$

где постоянные M_5 и M_6 не зависят от функций $\varphi(x)$ и $\psi(x)$.

Доказательство проведем, следуя работе [5]. Поскольку система $X_n(x)$ ортонормирована в пространстве $L_2[0,l]$, то из формулы (7) в силу леммы 2 получим

$$\begin{aligned}\|u(x,y)\|_{L_2}^2 = u_0^2(y) + \sum_{n=1}^{+\infty} u_n^2(y) + v_n^2(y) &\le 2\widetilde{M}_1^2\left(\varphi_0^2 + \psi_0^2\right) + \\ &+ 2M_1^2\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|\varphi_n|^2 + |\psi_n|^2 + |\tilde{\varphi}_n|^2 + |\tilde{\psi}_n|^2\right) \le \\ &\le M_5^2\left(\varphi_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\varphi_n^2 + \tilde{\varphi}_n^2 + \psi_0^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\psi_n^2 + \tilde{\psi}_n^2\right) \le \\ &\le M_5^2\left(\|\varphi(x)\|_{L_2}^2 + \|\psi(x)\|_{L_2}^2\right).\end{aligned}$$

Отсюда вытекает справедливость оценки (8). Пусть (x,y) — произвольная точка из $\overline{D}$. Тогда на основании леммы 2 имеем

$$\begin{aligned}|u(x,y)| \le |u_0(y)| + M_1\sum_{n=1}^{+\infty}|u_k(y)| + |v_n(y)| &\le \\ &\le \widetilde{M}_1(|\varphi_0| + |\psi_0|) + M_1\sum_{n=1}^{+\infty}\left(|\varphi_n| + |\psi_n| + |\tilde{\varphi}_n| + |\tilde{\psi}_n|\right).\end{aligned} \tag{10}$$

По условию φ_n, $\tilde{\varphi}_n$, ψ_n и $\tilde{\psi}_n$ можно представить в следующем виде:

$$\varphi_n = -\frac{\varphi_n^{(1)}}{\mu_n}, \quad \tilde{\varphi}_n = -\frac{\tilde{\varphi}_n^{(1)}}{\mu_n}, \quad \psi_n = -\frac{\psi_n^{(1)}}{\mu_n}, \quad \tilde{\psi}_n = -\frac{\tilde{\psi}_n^{(1)}}{\mu_n}, \tag{11}$$

где

$$\varphi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi'(x)\sin\mu_n x dx, \quad \tilde{\varphi}_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \varphi'(x)\cos\mu_n x dx,$$

$$\psi_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \psi'(x)\sin\mu_n x dx, \quad \tilde{\varphi}_n^{(1)} = \sqrt{\frac{2}{l}}\int_0^l \psi'(x)\cos\mu_n x dx.$$

С учетом представлений (11) из оценки (10) на основании неравенства Коши—Буняковского, получим

$$|u(x,y)| \le \widetilde{M}_1(|\varphi_0| + |\psi_0|) + M_1\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\mu_n}\left(\left|\varphi_n^{(1)}\right| + \left|\tilde{\varphi}_n^{(1)}\right| + \left|\psi_n^{(1)}\right| + \left|\tilde{\psi}_n^{(1)}\right|\right) \le$$

$$\le \widetilde{M}_1(|\varphi_0| + |\psi_0|) + M_1\frac{l}{\pi}\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n_2}\right)^{\frac{1}{2}} \times$$

$$\times\left[\left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\varphi_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\tilde{\varphi}_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\psi_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\tilde{\psi}_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le$$

$$\le \widetilde{M}_2\left[\|\varphi(x)\|_{L_2} + \|\psi(x)\|_{L_2} + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\varphi_n^{(1)}\right|^2 + \left|\tilde{\varphi}_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$\left. + \left(\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\psi_n^{(1)}\right|^2 + \left|\tilde{\psi}_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le \widetilde{M}_2\left[\|\varphi(x)\|_{L_2} + \|\psi(x)\|_{L_2} + \left(\left|\varphi_0^{(1)}\right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\varphi_n^{(1)}\right|^2 + \left|\tilde{\varphi}_n^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}} +\right.$$

$$\left. + \left(\left|\psi_0^{(1)}\right|^2 + \sum_{n=1}^{+\infty}\left|\psi_n^{(1)}\right|^2 + \left|\tilde{\psi}_k^{(1)}\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}\right] \le$$

$$\le \widetilde{M}_3\left(\|\varphi(x)\|_{L_2} + \|\psi(x)\|_{L_2} + \|\varphi'(x)\|_{L_2} + \|\psi'(x)\|_{L_2}\right),$$

где

$$\varphi_0^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{l}}\int_0^l \varphi'(x)dx = 0,\ \psi_0^{(1)} = \sqrt{\frac{1}{l}}\int_0^l \psi'(x)dx = 0.$$

Отсюда с учетом неравенства

$$||\varphi||_{L_2} = \left(\int_0^l \varphi^2(x)dx\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\int_0^l \left(max_{0\le x\le l}|\varphi(x)|\right)^2 dx\right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \max_{0\le x\le l}|\varphi(x)|\sqrt{l} = \sqrt{l}||\varphi||_{C_{[0,l]}}$$

следует оценка (9).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект проект № 16-31-00421).

Литература

1. Dezin A. A. *On the solvable extensions of partial differential operators*. – Outlines of the Joint Soviet-American Symposium on PDE, 1963, Novosibirsk. – С. 65–66.

2. Нахушева З. А. *Об одной нелокальной задаче А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* / А.М. Нахушева // Дифф. уравнения. – 2009. – Т. 45, № 8. – С. 1199–2003.

3. Сабитов К. Б., Новикова В. А. *Нелокальная задача А.А. Дезина для уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 6. – С. 61–72.

4. Сабитов К. Б., Гущина (Новикова) В. А. *Задача А.А. Дезина для неоднородного уравнения Лаврентьева-Бицадзе* // Сиб. матем. журн. – 2017. – № 3. – С. 37–50.

5. Сабитов К.Б. *Краевая задача для уравнения параболо-гиперболического типа с нелокальным интегральным условием* // Дифференциальные уравнения. – 2010. – № 10. – С. 1468–1478.

STABILITY OF THE SOLUTION OF THE DESIN PROBLEM
FOR THE LAVRENTIEV - BITSADZE EQUATION

V.A. Gushchina

For the homogeneous Lavrentiev-Bitsadze equation it is considered a nonlocal problem in a rectangular region. The solution of the problem is constructed as the sum of a series in eigenfunctions of the corresponding one-dimensional spectral problems. Under certain conditions on the parameters and given functions, we prove the convergence of the constructed series in the class of regular solutions and stability of the solution from the given boundary functions.

Keywords: under perturbation of nonlocal Dezin problem, the Lavrentiev-Bitsadze equation, uniqueness, existence of solution, small denominators, convergence, stability.

УДК 517.53

ВЫДЕЛЕНИЕ ПАР ГАРМОНИК ИЗ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИХ МНОГОЧЛЕНОВ АМПЛИТУДНО-ФАЗОВЫМ ОПЕРАТОРОМ

В.И. Данченко[1], Д.Я. Данченко[2]

1 *vdanch2012@yandex.ru*; Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых
2 *ddanchenko@vlsu.ru*; Владимирский государственный университет имени А.Г. и Н.Г. Столетовых

Предлагается метод выделения из тригонометрических многочленов $T_n(t)$ сумм двух гармоник с заданными номерами методом амплитудно-фазовых преобразований. Такие преобразования переводят многочлены $T_n(t)$ в подобные им, совершая две простейшие операции — умножение на вещественную константу X и сдвиг на вещественную фазу λ, т.е. $T_n(t) \mapsto X \cdot T_n(t-\lambda)$. Гармоники выделяются амплитудно-фазовым оператором, представляющим собой сложение подобных многочленов.

Ключевые слова: амплитудно-фазовый оператор, оценки гармоник.

Действие амплитудно-фазового оператора (АФО) порядка не выше m на тригонометрический многочлен

$$T_n(t) = a_0 + \sum_{k=1}^{n} \tau_k(t), \qquad \tau_k(t) := a_k \cos kt + b_k \sin kt, \qquad n \in \mathbb{N},$$

состоит в следующем:

$$T_n(t) \longmapsto \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(t - \lambda_j\right), \qquad X_j,\, \lambda_j \in \mathbb{R}. \tag{1}$$

В работах [1], [2] показано, что для любого номера $\mu \geq 1$ найдется АФО, для которого

$$\sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(t - \lambda_j\right) = \tau_\mu(t) + a_0 \cdot \sum_{j=1}^{m} X_j, \tag{2}$$

где $m = m(n, \mu)$, а $\{X_j\}$, $\{\lambda_j\}$ не зависят от T_n, а зависят лишь от n и μ. Благодаря вещественности этих параметров (2) имеет простой физический смысл: из стационарного сигнала $T_n(t)$ выделяется гармоника $\tau_\mu(t)$ наложением не более m подобных сигналов, отличающихся лишь амплитудами и начальными фазами. Выделение гармоник наложением сигналов (без использования промежуточных спектральных замеров) позволяет эффективно применять АФО для оценок гармоник тригонометрических полиномов. Особенно важным для оценок является построение АФО, у которых все X_k одного знака. С помощью таких АФО в [1], [2], например, найдены точные оценки L_p-норм гармоник через L_p-норму самого многочлена, а в случае неотрицательных полиномов $T_n \not\equiv 0$ установлены точные оценки их коэффициентов через свободный член (обобщение неравенства Фейера для первой гармоники; см. [1]):

$$\sqrt{a_\mu^2 + b_\mu^2} \leq \omega\, a_0 < 2\, a_0, \qquad n = s\mu - 1 \geq 1, \quad \omega := 2\cos\frac{\pi}{s+1}, \quad s \in \mathbb{N}.$$

Оценкам коэффициентов тригонометрических многочленов посвящено много работ (см., например, работы А.С. Белова и С.В. Конягина и обширную библиографию в них). Отметим также, что в отличие от ряда спектральных методов в конструкции АФО интегральные аппараты не применяются; формула (2) имеет чисто арифметический характер, из нее, например, при $a_0 = 0$ получаются арифметические формулы для коэффициентов Фурье:

$$a_\mu = \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(-\lambda_j\right), \quad b_\mu = \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(\frac{\pi}{2\mu} - \lambda_j\right).$$

В настоящей заметке рассматривается задача построения АФО для выделения двух гармоник в виде

$$\tau_\mu(t) + \tau_\nu(t) + a_0 \cdot \sum_{j=1}^{m} X_j = \sum_{j=1}^{m} X_j \cdot T_n\left(t - \lambda_j\right), \quad 1 \leq \mu < \nu \leq n, \tag{3}$$

и получения точных оценок сумм пар гармоник. Конечно, можно выделить две гармоники, скомбинировав действия двух АФО вида (2), однако, этим методом точные оценки гармоник получить нельзя. Задача оказалась значительно сложней задачи для одной гармоники и в общем случае ее решить не удалось. Найдены решения только для пар $(\mu, \nu) = (1, n)$ и $(\mu, \nu) = (2, n)$. Для некоторых других пар разработаны численные методы построения АФО.

Теорема. *В случае* $(\mu, \nu) = (1, n)$ *имеем* $m = n$ *и*

$$2a_0 - \tau_1(t) - \tau_n(t) = \frac{4}{n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin^2\frac{\lambda_k}{2}\, T_n(t - \lambda_k), \qquad \lambda_k = \lambda_k^{(1)} = \frac{2\pi k}{n+1}.$$

В случае $(\mu,\nu)=(2,n)$, $n=2s-1$, $s\in\mathbb{N}$, *в формуле* (3) $m=n$, *фазы* $\lambda_k=\lambda_k^{(2)}$ *являются аргументами корней* z_k *следующего многочлена* (*дробь сократима*)

$$G_n(z)=\frac{z(z^{2s+1}+1)\,\sin\varphi+(z^2-1)(z^{2s+1}-1)\,\sin s\varphi}{z^4-2\,z^2\cos(\varphi)+1},\quad \varphi=\frac{\pi}{2s+1}.$$

Многочлен G_n *имеет ровно* n *различных корней* $e^{i\lambda_k}$, *лежащих на единичной окружности. Множители* X_k *все отрицательны, их сумма равна* $(-2\cos\varphi)$.

Следствие. *Для неотрицательного многочлена* $T_n\not\equiv 0$ *при всех* t *имеем*

$$\tau_1(t)+\tau_n(t)\le 2a_0,\qquad \tau_2(t)+\tau_n(t)\le 2a_0\cos\frac{\pi}{2s+1}\quad (n=2s-1).$$

Оценки точны. Они превращаются в равенства при $t=0$ *на многочленах*

$$T_n^*(t)=\prod_{k=1}^{n}\sin^2\left(\frac{t+\lambda_k^{(1,2)}}{2}\right).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Минобрнауки России (задание No 1.574.2016/1.4).

Литература

1. Danchenko V. I., Vasilchenkova D. G. *Extraction of harmonics from trigonometric polynomials by amplitude and phase operators* // arXiv:1606.08716v1 [math.CA], 28 Jun. 2016. – P. 1-19.

2. Васильченкова Д. Г., Данченко В. И. *Фильтрация тригонометрических многочленов амплитудно-фазовыми операторами* // Межд. конф. по дифф. уравнениям и динам. системам. Тезисы докладов. Суздаль, 8-12 июль 2016. – С. 40-41.

EXTRACTION OF PAIRS OF HARMONICS FROM TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS BY AMPLITUDE AND PHASE OPERATORS

V.I. Danchenko, D.Ya. Danchenko

In this paper we propose a method for extracting sum of two harmonics by amplitude and phase transformation of trigonometric polynomials $T_n(t)$. *These transformations use two the simplest operations — multiplication by a real constant and phase shift — to obtain polynomials similar to the initial ones:* $T_n(t)\mapsto X\cdot T_n(t-\lambda)$. *A harmonic is extracted by an amplitude and phase operator that simply overlays a finite number of such polynomials.*

Keywords: amplitude and phase operator, estimates of harmonics

УДК 517.5

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ МОДУЛЯ ДВУСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ ПРИ РАСТЯЖЕНИИ ЕЕ ВДОЛЬ ОСИ АБСЦИСС

Д.Н. Даутова[1], С.Р. Насыров[2]

1 *dautovadn@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *snasyrov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Исследуется асимптотическое поведение модуля достаточно произвольной двусвязной области при растяжении ее вдоль оси абсцисс. Получен аналог классической теоремы Радо, позволяющий обосновать предполагаемую асимптотическую формулу, уже доказанную для случая симметричной относительно оси абсцисс области. Тем самым дается ответ на проблему Вуоринена в несимметричном случае.

Ключевые слова: конформный модуль, двусвязная область, четырехсторонник, квазиконформное отображение, сходимость к ядру областей, простые концы плоской области.

Одной из важнейших геометрических характеристик плоской двусвязной области B является ее конформный модуль. Если B конформно эквивалентна круговому кольцу $\{r_1 < |z| < r_2\}$, то (см., напр., [1])

$$m(B) := \frac{1}{2\pi} \ln \frac{r_2}{r_1}.$$

Модуль инвариантен относительно конформных отображений, но не сохраняется под действием квазиконформных отображений областей. В работе будем рассматривать частный случай квазиконформного отображения — растяжение f_H вдоль оси абсцисс с коэффициентом $H : x + iy \mapsto Hx + iy$, $H > 0$. М. Вуоринен поставил задачу об изучении асимптотического поведения модуля области $B_H := f_H(B)$ при неограниченном возрастании H (см, напр., [2]). В [2] была найдена асимптотика модуля B_H в случае, когда B является разностью двух гомотетичных прямоугольников со сторонами, параллельными координатным осям. В [3] показано, что

$$m(B_H) \sim \frac{1}{2cH}, \quad c = \int_a^b \frac{dx}{g(x) - f(x)}, \quad H \to +\infty.$$

Здесь B — область, симметричная относительно оси абсцисс, граница которой состоит из двух кривых

$$\Gamma_1 = \{x + iy : |y| = f(x), a \le x \le b\}, \quad \Gamma_2 = \{x + iy : |y| = g(x), c \le x \le d\},$$
$$-\infty < c < a < b < d < \infty, \quad 0 \le f(x) < g(x), \ a \le x \le b.$$

Целью данной работы является установление аналогичного факта для несимметричных двусвязных областей достаточно произвольного вида.

Пусть $-\infty < c < a < b < d < \infty$ и функции $f_1, f_2 \in C[a, b]$, $g_1, g_2 \in C[c, d]$ таковы, что

$$f_1(a) = f_2(a), \ f_1(b) = f_2(b), \ f_1(x) > f_2(x), \ a < x < b;$$

$$g_1(c) = g_2(c),\ g_1(d) = g_2(d),\ g_1(x) > g_2(x),\ c < x < d;$$

$$g_2(x) < f_2(x) \le f_1(x) < g_1(x),\ a \le x \le b,$$

Рассмотрим двусвязную область B, граница которой описывается уравнениями:

$$\Gamma_1 = \{x + iy : y = f_1(x),\ y = f_2(x),\ a \le x \le b\},$$

$$\Gamma_2 = \{x + iy : y = g_1(x),\ y = g_2(x),\ c \le x \le d\},$$

Теорема 1. *При $H \to \infty$ модуль $m(B_H)$ имеет следующее асимптотическое поведение:*

$$m(B_H) \sim \frac{1}{(c_1 + c_2)H}, \quad c_1 = \int_a^b \frac{dx}{g_1(x) - f_1(x)}, \quad c_2 = \int_a^b \frac{dx}{f_2(x) - g_2(x)} \tag{1}$$

Одним из ключевых моментов доказательства теоремы 1 является следующая теорема 2 о равномерной сходимости последовательности конформных отображений двусвязных областей, модуль которых стремится к нулю. Эта теорема является аналогом классической теоремы Радо (см. [4]).

Рассмотрим последовательность двусвязных областей G_n, ограниченных жордановыми кривыми C_{1n} и C_{2n}, которые сходятся как к ядру по Каратеодори (см. [4]) к односвязной области G, граница которой состоит из двух жордановых кривых C_1 и C_2, пересекающихся в одной точке $\widetilde{z}$. Пусть D_n — последовательность неконцентрических колец

$$D_n = \{|\zeta| < 1\} \setminus \{|\zeta + r_n| < r_n\}, \quad 0 < r_n < 1/2,$$

$r_n \nearrow 1/2$, $n \to \infty$, которая сходится как к ядру к круговой луночке

$$D = \{|\zeta| < 1\} \setminus \{|\zeta + 1/2| < 1/2\}$$

с нулевыми углами.

Теорема 2 (обобщенная теорема Радо). *Пусть последовательность функций $z = f_n(\zeta)$ конформно отображает области D_n на G_n, $f_n(0) = z_{0n} \in \partial G_n$. Пусть функция $z = f(\zeta)$, конформно отображает D на G, причем $f(0) = z_0$, $z_0 \ne \widetilde{z}$, $z_0 \in \partial G$, причем простые концы области D, соответствующие точке (-1), переходят в простые концы, соответствующие точке $\widetilde{z}$. Пусть $z_{0n} \to z_0$, $n \to \infty$. Если существуют гомеоморфизмы $g_{1n} : C_1 \to C_{1n}$, $g_{2n} : C_2 \to C_{2n}$, такие что $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists N : \forall n \ge N$ выполняются неравенства $|g_{1n}(t) - t| < \varepsilon, \quad t \in C_1; \quad |g_{2n}(s) - s| < \varepsilon, \quad s \in C_2$, то $f_n(\zeta) \rightrightarrows f(\zeta)$ в $\overline{D}$.*

Доказательство теоремы 2 основано на использовании теории простых концов последовательностей областей, сходящихся к ядру [5], и теоремы типа Каратеодори о связи сходимости к ядру областей со сходимостью соответствующих конформных отображений в случае граничной нормировки этих отображений ([6], теорема 14.6).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан (грант № 17-41-160345).

Литература

1. R. Kühnau. *The conformal module of quadrilaterals and of rings.* In: Handbook of Complex Analysis: Geometric Function Theory, (ed. by R. Kühnau) Vol. 2. North Holland, Amsterdam: Elsevier, 2005, 99–129.

2. Nasyrov S.R. *Riemann-Schwarz reflection principle and asymptotics of modules of rectangular frames* // Computational Methods and Function Theory. – 2015. – V. 15. – No 1. – P. 59–74.

3. Даутова Д. Н., Насыров С. Р. *Асимптотика модулей зеркально симметричных двусвязных областей при растяжении* // Матем. заметки. – 2018. (в печати).

4. Голузин Г.М. *Геометрическая теория функций комплексного переменного.* – М.: Наука, 1966.

5. Суворов Г. Д. *Простые концы и последовательности плоских отображений.* – Киев: Наукова думка, 1986.

6. Насыров С. Р. *Геометрические проблемы теории разветвленных накрытий римановых поверхностей.* – Казань: Магариф, 2008.

ASYMPTOTICS OF MODULUS OF DOUBLY CONNECTED DOMAIN STRETCHED ALONG THE REAL AXIS

D.N. Dautova, S.R. Nasyrov

We investigate asymptotical behavior of the conformal modulus of a doubly connected domain stretched along the real axis. We obtained a generalization of classical Rado's theorem which allows us to substantiate the desired asymptotic formula, already established for symmetric domains. This gives an answer to the problem by Prof. M. Vuorinen.

Keywords: conformal modulus, double connected domain, quadrilateral, quasiconformal mapping, convergence to a kernel, prime ends of a plane domain.

УДК 517.51

МЕТОД НАИМЕНЬШИХ КВАДРАТОВ РЕШЕНИЯ СЛАБО СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ПЕРВОГО РОДА

С.Р. Еникеева[1]

1 *enikeeva.svetlana@mail.ru*; Казанский национальный исследовательский технологический университет

В статье предложено теоретическое обоснование метода наименьших квадратов для слабо сингулярного интегрального уравнения.

Ключевые слова: слабо сингулярное интегральное уравнение, метод наименьших квадратов, полиномиальное приближение, сходимость метода.

Многочисленные прикладные и теоретические задачи математики, механики, физики, химии и техники приводят к необходимости решения различных классов интегральных уравнений с разностными логарифмическими ядрами в главной части интегрального оператора.

Рассмотрим слабо сингулярное интегральное уравнение первого рода вида

$$Kx \equiv \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} p(\tau)\ln|\tau - t|x(\tau)\,d\tau + \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} p(\tau)h(t,\tau)x(\tau)\,d\tau = y(t),\ -1 \le t \le 1. \qquad (1)$$

Здесь $h(t,\tau)$ и $y(t)$ – известные функции, $x(\tau)$ – искомая функция, а $p(t)$ – весовая функция Чебышева третьего или четвертого рода: $p(t)=\sqrt{\frac{1\mp t}{1\pm t}}$.

Такие уравнения, как правило, точно не решаются. Поэтому возникает необходимость развития приближенных методов их решения с соответствующим теоретическим обоснованием. Для этих целей ниже мы используем подход, предложенный в [1, 2] (и используемый, например в [3,4]), основанный на соответствующем выборе пространств правых частей (мы обозначим это пространство через Y) и искомых элементов X. Тогда K можно рассматривать как обратимый линейный оператор, действующий из $X=L_{2,p}(-1,1)$ в $Y=W_{2,q}^1[-1,1]$, где $q=1/p, W_{2,q}^1[-1,1]=\{\varphi(s)\in C[-1,1]:\exists\varphi'(s)\in L_{2,q}(-1,1)\}$. В этом случае задача решения слабо сингулярного интегрального уравнения (1) является корректно поставленной.

Пусть далее весовая функция $p(t)=\sqrt{\frac{1+t}{1-t}}$ и $\{P_k(t)\}_{k=0}^{\infty}$ – система ортогональных полиномов для этого веса. Известно, что в этом случае $P_k(t)=\frac{T_{k+1}(t)-T_k(t)}{t-1}$, $k\geq 1$, где $T_k(t)=\cos(k\arccos t)$ – полином Чебышева первого рода.

Приведем вычислительную схему и теоретическое обоснование метода наименьших квадратов. Приближенное решение уравнения (1) ищется в виде полинома

$$x_n(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k P_{k-1}(t)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k t^{k-1}. \tag{2}$$

Неизвестные постоянные α_k,β_k определяются из условия:

$$\|y-Kx_n\|_Y^2\Rightarrow\min.$$

А это, как известно, приводит к следующей системе линейных алгебраических уравнений (сокращенно, СЛАУ)

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_k(KP_{k-1},KP_{j-1})_Y=(y,KP_{j-1})_Y,\ j=\overline{1,n}, \tag{3}$$

где для любых $\varphi,\psi\in Y$ полагаем $(\varphi,\psi)_Y=(\varphi,\psi)_{2,p}+(\varphi',\psi')_{2,q}$, $(\varphi,\psi)_{2,p}=\int\limits_{-1}^{+1}p(t)\varphi(t)\psi(t)\,dt$, $(\varphi',\psi')_{2,q}=\int\limits_{-1}^{+1}q(t)\varphi'(t)\psi'(t)\,dt$.

Тогда Y превращается в гильбертово пространство с нормой $\|\varphi\|_Y=\sqrt{\|\varphi\|_{2,p}^2+\|\varphi'\|_{2,q}^2}$.

Обозначим через H оператор, задаваемый вторым интегралом в левой части уравнения (1).

Теорема. *Пусть оператор $K:X\to Y$ непрерывно обратим, а ядро $h(t,\tau)$ таково, что оператор $H:X\to Y$ непрерывен. Тогда при всех натуральных n СЛАУ (3) имеет единственное решение $\alpha_1^*,\alpha_2^*,\ldots,\alpha_n^*$ $(\beta_1^*,\beta_2^*,\ldots,\beta_n^*)$ при любых $n=1,2,\ldots$ Приближенное решение $x_n^*(t)=\sum_{k=1}^{n}\alpha_k^*P_{k-1}(t)=\sum_{k=1}^{n}\beta_k^*t^{k-1}$ при $n\to\infty$ сходится к точному решению $x^*(t)=(K^{-1}y)(t)$ уравнения (1) в пространстве $X=L_{2,p}(-1,1)$. Погрешность приближенного решения может быть оценена неравенством*

$$\|x^*-x_n^*\|_X\leq\nu(K)\cdot E_n(x^*)_X,$$

где $\nu(K) = \|K\|_{X\to Y} \cdot \|K^{-1}\|_{Y\to X}$ *– число обусловленности оператора* $K : X \to Y$*, а* $E_n(x^*)_X$ *– наилучшее приближение функции* $x^* \in X$ *алгебраическими полиномами степени не выше* $n-1$.

Литература

1. Габдулхаев Б. Г. *Прямые методы решения сингулярных интегральных уравнений I-го рода*. – Казань: Изд-во КГУ, 1994. – 288 с.

2. Габдулхаев Б. Г. *Численный анализ сингулярных интегральных уравнений. Избранные главы*. – Казань: Изд-во КГУ, 1995. – 230 с.

3. Еникеева С. Р. *Об одном методе решения интегральных уравнений* // Известия вузов. Математика. – 2010. – № 2. – С. 14–19.

4. Еникеева С. Р. *Исследование сплайн–методов решения слабосингулярных интегральных уравнений* // Сб. трудов XXVII Межд. науч. конф. «Математические методы в технике и технологиях – ММТТ-27». – Саратов: Саратовский гос. техн. унив. им. Ю.А. Гагарина, 2014. – С. 39–40.

METHOD OF THE LEAST SQUARES FOR SOLUTION OF WEAKLY SINGULAR INTEGRAL EQUATIONS OF THE FIRST KIND

S.R. Enikeeva

In this paper, a singular integral equation is investigated. We show that the least square method converges to the solution of this equation.

Keywords: weakly singular integral equations, least square method, polynomial approximation, convergence of the method.

УДК 514.764

ГЕОМЕТРИЯ 6-МЕРНОГО h-ПРОСТРАНСТВА ТИПА [(33)]

З.Х. Закирова[1]

1 *zakirova-kgeu@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет

Изучение геометрических свойств многомерных пространств является актуальной задачей, имеющей важное теоретическое и прикладное значение. Известно, что пространственно-временные симметрии порождают законы сохранения энергии, импульса и момента импульса. В частности, инфинитезимальные проективные и аффинные преобразования приводят к фундаментальным полевым и механическим законам сохранения в форме квадратичных первых интегралов уравнений геодезических. Интерес к многомерным теориям также связан с развитием суперсимметричных теорий и теории супергравитации. Как известно, в основе суперсимметричных теорий лежит увеличение размерности используемого многообразия. Целью данной статьи является исследование 6-мерных псевдоримановых пространств $V^6(g_{ij})$ *с сигнатурой* $[+\,+\,-\,-\,-\,-]$*, которые допускают группы непрерывных преобразований, сохраняющих геодезические. В данной работе была найдена метрика* h*-пространства типа* [(33)]*, а также указан вид квадратичного первого интеграла уравнений геодезических этого* h*-пространства.*

Ключевые слова: дифференциальная геометрия, псевдоримановы многообразия, системы дифференциальных уравнений с частными производными.

Псевдоримановы многообразия, для которых существуют нетривиальные решения $h_{ij} \neq cg_{ij}$ уравнений Эйзенхарта (см. [1])

$$h_{ij,k} = 2g_{ij}\varphi_{,k} + g_{ik}\varphi_{,j} + g_{jk}\varphi_{,i},$$

называются *h-пространствами*. Чтобы найти псевдориманово пространство, допускающее негомотетическое инфинитезимальное проективное преобразование, нужно проинтегрировать уравнение Эйзенхарта. Задача определения таких пространств зависит от типа билинейной формы $L_X g$, определяемой характеристикой Сегре λ-матрицы $(h - \lambda g)$. Если характеристика тензора $L_X g$ есть $[abc...]$, то соответствующее пространство будем называть h-пространством типа $[abc...]$.

В работе применяется техника интегрирования в косонормальном репере, в котором уравнение Эйзенхарта имеет вид [2]

$$X_r \overline{a}_{pq} + \sum_{h=1}^{n} e_h(\overline{a}_{hq}\gamma_{\tilde{h}pr} + \overline{a}_{ph}\gamma_{\tilde{h}qr}) = \overline{g}_{pr}X_q\varphi + \overline{g}_{qr}X_p\varphi \quad (p,q,r = 1,\ldots,n),$$

где $X_r\varphi \equiv \underset{r}{\xi^i}\frac{\partial\varphi}{\partial x^i}, \gamma_{pqr} = -\gamma_{qpr} = \underset{p}{\xi}_{i,j}\underset{q}{\xi^i}\underset{r}{\xi^j}, a_{ij} = h_{ij} - 2\varphi g_{ij}$, $\underset{i}{\xi^j}$ — компоненты косонормального репера, $\overline{g}_{pr} = e_p\delta_{\tilde{p}}{}^r$ и $\overline{a}_{pq}$ — канонические формы тензоров g_{pr}, a_{pq}, $\gamma^p_{lk} = e_p\gamma_{l\tilde{p}k}$ — компоненты связности в косонормальном репере X.

В случае h-пространства типа [(33)] канонические значения выражаются формулами

$$\overline{g}_{ij}dx^i dx^j = e_3(2dx^1dx^3 + dx^{2^2}) + e_6(2dx^4dx^6 + dx^{5^2}),$$

$$\overline{a}_{ij}dx^i dx^j = e_3\lambda_3(2dx^1dx^3 + dx^{2^2}) + 2e_3dx^2dx^3 + e_6\lambda_6(2dx^4dx^5 + dx^{5^2}) + 2e_6dx^5dx^6,$$

где $e_1 = e_2 = e_3, e_4 = e_5 = e_6$, $e_i = \pm 1$, $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \lambda_5 = \lambda_6$ – корни характеристического уравнения $det(a_{ij}(p) - \lambda g_{ij}(p)) = 0$.

Подставив в уравнение Эйзенхарата вместо $\overline{g}_{pq}$ и $\overline{a}_{pq}$ соответствующие канонические значения с учетом того, что в случае h-пространства типа [(33)] $\tilde{1} = 3$, $\tilde{2} = 2$, $\tilde{3} = 1$, $\tilde{4} = 6$, $\tilde{5} = 5$, $\tilde{6} = 4$, получим систему уравнений

$$\gamma_{16r} = \gamma_{25r} = \gamma_{34r}, \quad \gamma_{26r} = \gamma_{35r}, \tag{1}$$

где $r = 1,...,6$, γ_{36r} произвольны, остальные инварианты γ_{pqr} равны нулю. Для h-пространства типа [(33)] функция φ является постоянной и, следовательно, тензор h_{ij} будет ковариантно постоянным.

Для того чтобы система линейных дифференциальных уравнений в частных производных $X_q\theta = \underset{q}{\xi^i}\partial_i\theta = 0, (q = 1,\ldots,m, i = 1,\ldots,6, m < 6)$, где $\underset{q}{\xi^i}$ — компоненты косонормального репера, была вполне интегрируемой, необходимо и достаточно, чтобы все коммутаторы операторов системы (см. [1])

$$[X_q, X_r] = X_qX_r - X_rX_q = \sum_{p=1}^{6} e_p(\gamma_{pqr} - \gamma_{prq})X_{\tilde{p}}$$

линейно выражались через операторы X_q.

Для h-пространства типа [(33)] коммутаторы операторов имеют следующий вид:

$$(X_\alpha, X_\beta) = e_6(\gamma_{6\alpha\beta} - \gamma_{6\beta\alpha})X_4 + e_5(\gamma_{5\alpha\beta} - \gamma_{5\beta\alpha})X_5 - e_4\gamma_{4\beta\alpha}X_6,$$

$$(X_\nu, X_\mu) = e_3(\gamma_{3\nu\mu} - \gamma_{3\mu\nu})X_1 + e_2(\gamma_{2\nu\mu} - \gamma_{2\mu\nu})X_2 - e_1\gamma_{1\mu\nu}X_3,$$

$$(X_\alpha, X_\mu) = -e_3\gamma_{3\mu\alpha}X_1 - e_2\gamma_{2\mu\alpha}X_2 - e_1\gamma_{1\mu\alpha}X_3 + e_6\gamma_{6\alpha\mu}X_4 + e_5\gamma_{5\alpha\mu}X_5 + e_4\gamma_{4\alpha\mu}X_6, \quad (2)$$

где $\alpha, \beta = 1,2,3$, $\nu, \mu = 4,5,6$.

Составляя вполне интегрируемые системы, определим допускаемые этими системами независимые решения, которые обозначим через θ^i. После чего, с помощью преобразования координат $x^{i'} = \theta^i(x)$, мы можем обратить в нуль некоторые компоненты $\underset{q}{\xi}{}^i$ введенного выше косонормального репера. Системы $X_1\theta = X_2\theta = X_4\theta = X_5\theta = 0$, $X_1\theta = X_4\theta = 0$ и уравнения $X_1\theta = 0$, $X_4\theta = 0$ вполне интегрируемы. Первая система имеет два решения θ^3 и θ^6, вторая система четыре решения, два из которых можно выбрать совпадающими с θ^3 и θ^6, а другие обозначим через θ^2 и θ^5. Уравнения имеют решения θ^q $(q \neq 1)$ и θ^p $(p \neq 4)$. После преобразования координат получим

$$\underset{r}{\xi}{}^i = P(x)\delta_r{}^i, \quad \underset{s}{\xi}{}^3 = \underset{s}{\xi}{}^6 = 0, \quad r = 1,4, s = 2,5. \quad (3)$$

Приравнивая коэффициенты при одинаковых производных $\partial/\partial x^i$ в правых и левых частях равенств (2), с помощью формул (1) и (3) получим систему дифференциальных уравнений в частных производных на компоненты $\underset{i}{\xi}{}^j$ косонормального репера. Проинтегрировав эту систему уравнений с удачно подобранными преобразованиями координат (подобные выкладки можно найти, например, в статьях [3] и [4]), а затем применив формулы (см. [2])

$$g^{ij} = \sum_{h=1}^{6} e_h \underset{h}{\xi}{}^i \underset{\tilde{h}}{\xi}{}^j, \quad \underset{h}{\xi}{}_i = g_{ij}\underset{h}{\xi}{}^j, \quad a_{ij} = \sum_{h,l=1}^{n} e_h e_l \overline{a}_{hl} \underset{\tilde{h}}{\xi}{}_i \underset{\tilde{l}}{\xi}{}_j,$$

мы найдем компоненты тензоров g_{ij} и a_{ij}.

Сформулируем результат в виде следующей теоремы.

Теорема. *Если тензор h_{ij} типа* [(33)] *и функция φ удовлетворяют в V^6 уравнениям Эйзенхарта, то существует голономная система координат, в которой тензоры g_{ij}, h_{ij} и функция φ определяются формулами*

$$g_{ij}dx^i dx^j = e_1\{(dx^2)^2 + 2dx^1dx^2 + \theta(dx^3)^2\} + e_4\{(dx^5)^2 + 2dx^4dx^6 + \omega(dx^6)^2\},$$

$$a_{ij}dx^i dx^j = \lambda g_{ij}dx^i dx^j + 2e_1dx^1dx^3 + 2e_4dx^4dx^6, \quad h_{ij} = a_{ij} + cg_{ij}, \quad \varphi = const,$$

где θ, ω – произвольные функции переменных x^3, x^6, c, λ – const.

Каждому решению h_{ij} уравнения Эйзенхарта соответствует первый квадратичный интеграл уравнений геодезических $(h_{ij} - 4\varphi g_{ij})\dot{x}^i\dot{x}^j = \text{const}$, где $\dot{x}^i$ — касательный вектор геодезической, тензоры h_{ij}, g_{ij} и функция φ указаны в теореме.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00291 А).

Литература

1. Эйзенхарт Л. П. *Риманова геометрия*. – М.: ИЛ, 1948. – 316 с.

2. Аминова А. В. *Алгебры Ли инфинитезимальных проективных преобразований лоренцевых многообразий* // УМН. – 1995. – Т. 50. – № 1. – С. 69–142.

3. Закирова З. Х. *Метрики 6-мерных h-пространств типов [3(21)], [(32)1], [(321)]* // Краткие сообщения по физике ФИАН. – 2011. – Т. 38. – № 9. – С. 270–274.

4. Закирова З. Х. *О некоторых специальных решениях уравнения Эйзенхарта* // Уфимский матем. журнал. – 2013. – Т. 5. – № 3. – С. 41–53.

THE GEOMETRY OF 6-DIMENSIONAL h-SPACE FOR [(33)] TYPE

Z.Kh. Zakirova

Study of geometric properties of higher-dimensional manifolds is a topical problem, which is theoretically important and has numerous applications. For instance, space-time symmetries give rise to energy, momentum and angular momentum conservation laws. In particular, the infinitesimal projective and affine transformations lead to fundamental conservation laws in field theory and classical mechanics that possess a form of quadratic first integrals of the geodesics equations. Interest to higher-dimensional manifolds is also due to advances in supersymmetric and supergravity theories. The point here is that the supersymmetry leads, in a sence, to increasing the dimension of the manifold. The aim of this paper is to investigate the 6*-dimensional pseudo-Riemannian space* $V^6(g_{ij})$ *with signature* $[+\,+\,-\,-\,-\,-]$*, which admits continuous transformation groups preserving geodesics. In this note we find the metric of* h*-space for* [(33)] *type and then determine the quadratic first integral of the geodesic equations for these* h*-space.*

Keywords: differential geometry, pseudo-Riemannian manifolds, systems of partial differential equations.

УДК 517.544

СИНГУЛЯРНОЕ ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ В ОСОБОМ СЛУЧАЕ

Н.Ю. Зонова[1], И.Г. Салехова[2]

1 *nina-zonova@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, механико- математический институт

2 *jlysia.salekhova@ksu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, механико- математический институт

Решено характеристическое сингулярное интегральное уравнение, когда контуром является объединение счетного числа периодически расположенных отрезков, а также в случае счетного множества отрезков, периодически расположенных в правой полуплоскости. Решение задачи получено путем сведения к соответствующей задаче Римана.

Ключевые слова: интегральное уравнение, задача Римана, однопериодическое расположение отрезков,однопериодическая функция, целая функция, мероморфная функция.

Сообщение посвящено решению характеристического сингулярного интегрального уравнения

$$a\varphi(t)+\frac{b}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{t\varphi(\tau)d\tau}{\tau(\tau-t)}=f(t), \tag{1}$$

где a, b – const; $a,b\in\mathbb{C}$.

В первой части уравнение (1) рассматривается при условии, что $L=\bigcup\limits_{k=-\infty}^{\infty}L_k$, где $L_0=(a_0,b_0)$ лежит в вертикальной полосе $0<\mathrm{Re}z\le 2\pi$, а L_k получены из L_0 преобразованиями однопериодической группы $z+2\pi k, k\in Z$. Функция $f(t)\in H_\lambda(\bar{L}_0), f(t)=f(t+2\pi), t\in\bar{L}_0$.

Требуется найти функцию $\varphi(t)\in h(b_k)$, удовлетворяющую условию $\varphi(t)=\varphi(t+2\pi), t\in\bar{L}_0$. Под классом $h(b_k)$ понимается класс функций, гельдеровых вне окрестностей концов a_k, b_k дуги L_k и ограниченных в точках $b_k, k\in Z$.

Поставленная задача равносильна решению уравнения

$$a\varphi(t)+\frac{b}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\varphi(\tau)\left(\mathrm{ctg}\frac{\tau-t}{2}-\mathrm{ctg}\frac{\tau}{2}\right)d\tau=f(t) \tag{2}$$

в классе периодических функций $\varphi(t)\in h(b_0)$.

Единственное решение уравнения (2) имеет вид:

$$\varphi(t)=\left[\frac{a}{a^2-b^2}\right]f(t)-\left[\frac{b}{a^2-b^2}\right]\frac{\chi_b^+(t)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{f(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)}\left[\mathrm{ctg}\frac{\tau-t}{2}-\mathrm{ctg}\frac{\tau}{2}\right]d\tau,$$

где

$$\chi_b(z)=\left(\frac{\sin\frac{b_0-z}{2}\sin\frac{a_0}{2}}{\sin\frac{a_0-z}{2}\sin\frac{b_0}{2}}\right)^{\alpha+i\beta-[\alpha]},$$

$\alpha+i\beta=\dfrac{\ln G_0}{2\pi i}$, $G_0=\dfrac{a-b}{a+b}$, $[\alpha]$ – целая часть числа α.

Решение было также получено в классах $h(a_0), h_0, h(a_0,b_0)$. В частности, в классе h_0 решение уравнения (2) имеет вид

$$\varphi(t)=\left[\frac{a}{a^2-b^2}\right]f(t)-\left[\frac{b}{a^2-b^2}\right]\frac{\chi_0^+(t)}{2\pi i}\int\limits_{L_0}\frac{f(\tau)d\tau}{\chi_0^+(\tau)}\left[\mathrm{ctg}\frac{\tau-t}{2}-\mathrm{ctg}\frac{\tau}{2}\right]d\tau+\frac{2b}{(a-b)}\psi(t)\chi_0^+(t),$$

где

$$\psi(z)=c_1(e^{iz}-1), \chi_0(z)=\chi_b(z)\frac{1}{e^{iz}-e^{ib_0}}, c_1=\mathrm{const}.$$

Во второй части рассматривается решение уравнения (1) в случае, когда

$$f(t)\in H_\lambda(\bar{L}),\quad \sup_{t\in\bar{L}}|f(t)|\le M<\infty.$$

Требуется найти функцию $\varphi(t)\in h(b_k)$, удовлетворяющую условию

$$\sup_{t\in L}|\varphi(t)|\le M_1<\infty. \tag{3}$$

В этом случае искомая функция не является периодической, поэтому к задаче применяется подход, используемый в задачах для счетного множества контуров.

Единственное решение уравнения (1) в классе $h(b_k)$ имеет вид

$$\varphi(t)=\left[\frac{a}{a^2-b^2}\right]f(t)-\left[\frac{b}{a^2-b^2}\right]\frac{\chi_b^+(t)}{\pi i}\sum_{k=-\infty}^{\infty}\int\limits_{L_k}\frac{tf(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)\tau(\tau-t)}$$

Решение было также получено в классах $h(a_k), h_0, h(a_k,b_k)$.

Третья часть посвящена решению уравнению (1) при условии, что $L=\bigcup\limits_{k=0}^{\infty}L_k$, где $L_0=(a_0,b_0)$ лежит в вертикальной полосе $0\le \mathrm{Re}z<1$, а L_k получены из L_0 преобразованиями $z+k, k\in N$, причем функция $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$f(t)\in H_\lambda(\bar{L}), f(\infty)=0.$$

Функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (3).

В отличие от перидического расположения интервалов в данном случае каноническая функция соответствующей эквивалентной задачи Римана является непериодической. Однако в силу заданной закономерности расположения интервалов и постоянных коэффициентов, удается исследовать поведение канонической функции, которая выражается с помощью гамма-функции Эйлера.

Решение уравнения (1) получено в классах $h(b_k), h_0, h(a_k,b_k)$. В частности, единственное решение уравнения в классе $h(b_k)$ имеет вид

$$\varphi(t)=\left[\frac{a}{a^2-b^2}\right]f(t)-\left[\frac{b}{a-b}\right]\frac{\chi_b^+(t)}{\pi i}\sum_{k=0}^{\infty}\int\limits_{L_k}\frac{tf(\tau)d\tau}{(a+b)\chi_b^+(\tau)\tau(\tau-t)},$$

где $\chi_b(z)=\left[\dfrac{\Gamma(b_0)\Gamma(a_0-z)}{\Gamma(a_0)\Gamma(b_0-z)}\right]^{(\alpha+i\beta)-[\alpha]}$

Литература

1. Чибрикова Л.И. *Основные граничные задачи для аналитических функций.* – Казань: Изд-во Казанского ун-та, 1977. – 302 с.

2. Салехова И.Г. *Однородная задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг* // Изв. вузов. Математика. – 1975. – № 6. – С. 124–135.

3. Вафина Л.И., Салехова И.Г. *Задача Шварца в случае счетного множества интервалов* // Изв. вузов. Математика. – 2016. – № 2. – С. 10–17.

4. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения.Граничные задачи теории функций и некоторые их приложения к математической физике.* – М.: Физматгиз, 1962. – 599 с.

SINGULAR INTEGRAL EQUATION IN A SPECIAL CASE

N.J. Zonova, J.G. Salekhova

A characteristic singular integral equation is solved when the contour is the union of a countable number of periodically located segments, and also in the case of a countable set of intervals periodically

located in the right half-plane. The solution of the problem is obtained by reducing to the corresponding Riemann problem.

Keywords: integral equation, Riemann boundary value problems, periodic arrangement of segments, periodic function, entire function, meromorphic function.

УДК 517.954

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ НЕЙМАНА ДЛЯ B-ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ С ОТРИЦАТЕЛЬНЫМ ПАРАМЕТРОМ

Н.А. Ибрагимова[1], Е.А. Уткина[2]

1 *nai.liya@yandex.ru*; Казанский государственный энергетический университет
2 *eutkina1@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье рассмотрены внутренняя и внешняя задачи Неймана для одного многомерного вырождающегося B-эллиптического уравнения с отрицательным параметром. Методом потенциалов доказана однозначная разрешимость поставленных краевых задач.

Ключевые слова: многомерное вырождающееся B-эллиптическое уравнение с отрицательным параметром, фундаментальное решение, краевая задача Неймана, метод потенциалов.

Пусть $\mathbb{E}_p^{++}$ — часть p-мерного евклидова пространства, где $x_{p-1} > 0$, $x_p > 0$, D — конечная область в $\mathbb{E}_p^{++}$, ограниченная поверхностью Γ и частями Γ_0 и Γ_1 плоскостей $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$, соответственно, $C^k_{B^l}(D)$ — множество функций k раз непрерывно дифференцируемых в D и удовлетворяющих условию $\frac{\partial u}{\partial x_l} = \mathrm{o}(1)$ при $x_l \to 0$. Использованы обозначения: $x = (x', x_p)$, $x' = (x'', x_{p-1})$, $x'' = (x_1, x_2, \ldots, x_{p-2})$ — точки евклидова пространства, $D_e = \mathbb{E}_p^{++} \setminus \overline{D}$.

В настоящей работе для вырождающегося B-эллиптического уравнения

$$M_B[u] = x_p^m \left(\Delta_{x'} u + B_{x_{p-1}} u\right) + \frac{\partial^2 u}{\partial x_p^2} - \lambda^2 x_p^m u = 0, \tag{1}$$

в котором $\Delta_{x'} = \sum\limits_{l=1}^{p-2} \dfrac{\partial^2}{\partial x_l^2}$ — лапласиан, $B_{x_{p-1}} = \dfrac{\partial^2}{\partial x_{p-1}^2} + \dfrac{k}{x_{p-1}} \dfrac{\partial}{\partial x_{p-1}}$ — оператор Бесселя, $m > 0$, $k > 0$, $p \geqslant 3$, $\lambda \in \mathbb{R}$, изучены следующие краевые задачи:

Внутренняя краевая задача Неймана. Найти в области D решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$\begin{gathered} u(x) \in C^2_{B^{p-1}}(D) \cap C^2_{B^p}(D) \cap C^1(\overline{D}), \\ u(x) = \mathrm{o}(1) \quad \text{при} \quad x_p \to 0, \\ A[u]\big|_\Gamma = g(\xi), \quad g(\xi) \in C(\Gamma), \end{gathered} \tag{2}$$

где $A[u] = \xi_p^m \sum\limits_{l=1}^{p-1} \cos(n, \xi_l) \frac{\partial u}{\partial \xi_l} + \cos\left(n, \xi_p\right) \frac{\partial u}{\partial \xi_p}$ — конормальная производная.

Внешняя краевая задача Неймана. Найти в области D_e решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям

$$u(x) \in C^2_{B^{p-1}}(D_e) \cap C^2_{B^p}(D_e) \cap C^1(\overline{D_e}),$$

$$u(x) = \mathrm{o}(1) \quad \text{при} \quad x_p \to 0,$$

$$A[u]\big|_\Gamma = g(\xi), \quad g(\xi) \in C(\Gamma),$$

причем на бесконечности

$$u(x) = \mathrm{O}\left(e^{-\rho_0}\right),$$

где $\rho_0^2 = \left|x'\right|^2 + \frac{4}{(m+2)^2}\, x_p^{m+2}$.

Целью исследования является доказательство существования единственного решения поставленных краевых задач.

Решение уравнения (1) ищется в виде

$$V(x) = \int\limits_\Gamma \mu(\xi) Z(\xi, x) \xi_{p-1}^k \, d\Gamma, \tag{3}$$

где

$$Z(x, x_0) = \beta C_k \int\limits_0^\pi \left(C_\gamma \int\limits_0^\pi \rho_\varphi^{-\nu} \mathrm{K}_\nu\left(\lambda \rho_\varphi\right) \sin^{\gamma-1}\varphi \, d\varphi \right) \sin^{k-1}\varphi \, d\varphi$$

— фундаментальное решение уравнения (1) с особенностью в произвольной точке x_0, $\mathrm{K}_\nu\left(\lambda\rho_\varphi\right)$ — функция Макдональда, $C_\gamma = \frac{\Gamma\left(\frac{\gamma+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{\gamma}{2}\right)}$, $C_k = \frac{\Gamma\left(\frac{k+1}{2}\right)}{\sqrt{\pi}\,\Gamma\left(\frac{k}{2}\right)}$, $\nu = \frac{p+k+\gamma-2}{2}$, $\gamma = \frac{m}{m+2}$, $\rho_\varphi^2 = |x'' - x_0''|^2 + x_{p-1}^2 + x_{p-1_0}^2 - 2x_{p-1}x_{p-1_0}\cos\varphi + \frac{4}{(m+2)^2}\left(x_p^{m+2} + x_{p_0}^{m+2} - 2x_p^{\frac{m+2}{2}} x_{p_0}^{\frac{m+2}{2}} \cos\varphi\right)$.

Исследованы предельные значения потенциала (3) и его нормальной производной на границе области. Используя их, а также краевое условие (2), относительно неизвестной плотности $\mu(\xi)$, составляем интегральные уравнения для внутренней и внешней граничных задач Неймана с ядром со слабой особенностью. Применяя к полученным уравнениям альтернативу Фредгольма, мы доказываем, что однородные интегральные уравнения, соответствующие неоднородным, не имеют не нулевых решений. Следовательно, неоднородные уранения, а вместе с тем и краевые задачи, однозначно разрешимы.

Таким образом, верна

Теорема. *Если Γ — поверхность Ляпунова и образует с плоскостями $x_{p-1} = 0$, $x_p = 0$ прямые углы, то внутренняя и внешняя краевые задачи Неймана имеют единственное решение при любых граничных данных из $C(\Gamma)$ и решение каждой можно представить в виде потенциала простого слоя.*

SOLUTION OF THE NEUMANN PROBLEM FOR A *B*-ELLIPTIC EQUATION WITH A NEGATIVE PARAMETER

N.A. Ibragimova, E.A. Utkina

In the article we consider the Neumann internal and external boundary value problems for one multidimensional degenerate B-elliptic equation with a negative parameter. We prove the unique solvability

of the boundary value problems by the method of potentials.

Keywords: multidimensional degenerating B-elliptic equation with a negative parameter, fundamental solution, Neumann boundary value problem, the method of potentials.

УДК 517.542

НЕПРЕРЫВНЫЕ ДРОБИ И КОНФОРМНЫЕ ОТОБРАЖЕНИЯ

П.Н. Иваньшин[1]

1 *pivanshi@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В работе приведен метод построения дробно-полиномиальных конформных отображений единичного круга на области с угловыми точками.

Ключевые слова: конформное отображение, дробно-полиномиальная функция, сходимость.

В работе дан один вспомогательный метод построения приближенного конформного отображения единичного круга на односвязную область. Построенная здесь конструкция дополняет [1], [3]. Напомним, что в [1] авторы конструируют приближенное полиномиальное конформное отображение единичного круга D на некоторую односвязную область B. Метод построения приближенного конформного отображения кольца на двусвязную область см. в [2].

Главный результат заключается в том, что построенные при помощи непрерывных дробей (подобные, но не совпадающие с последовательностью дробно-полиномиальных функций [4], [5]) отображения приближают квадратный корень в комплексной правой полуплоскости.

Для приближения дробных степеней рассмотрим представление

$$z^{\frac{k}{N}} = z^{\frac{k-1}{N}} + \frac{z - z^{\frac{k-1}{N}}}{z^{\frac{N-k}{N}} + \ldots + z^{\frac{2}{N}} + z^{\frac{1}{N}} + 1}$$

Например, для $z^{1/3}$ получим для $f_1(z) = 1 + \frac{z-1}{z+1}$

$$f_n(z) = 1 + \frac{z-1}{\frac{z}{f_{n-1}(z)} + f_{n-1}(z) + 1}$$

Лемма. *Для $f_n(z)$ и z с $\mathrm{Re}[z] > 0$ выполнены следующие факты:*

1. $\mathrm{Re}[f_n(z)] > 0$

2. $\mathrm{Im}[f_n(z)]$ *имеет тот же знак, что и* $\mathrm{Im}[z]$.

3. Отношение $\frac{\mathrm{Im}[f_n(z)]}{\mathrm{Re}[f_n(z)]}$ *имеет тот же знак, что и* $\frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]}$, *но* $\left|\frac{\mathrm{Im}[f_n(z)]}{\mathrm{Re}[f_n(z)]}\right| < \left|\frac{\mathrm{Im}[z]}{\mathrm{Re}[z]}\right|$.

Теорема. *В правой комплексной полуплоскости нет точек, в которых производная $f_n(z)$ равна нулю.*

Утверждение. *Функции $f_n(z)$ сходятся к $z^{k/N}$ для* $\mathrm{Re}[z] > 0$, $|z| < 1$.

Литература

1. Shirokova E.A., Ivanshin P. N. *Approximate Conformal Mappings and Elasticity Theory* // Journal of Complex Analysis. – 2016. – V. 2016. – P. 1–8.

2. Abzalilov D. F., Shirokova E.A. *The approximate conformal mapping onto simply and dou- bly connected domains* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2017. – V. 62. – № 4. – P. 554–565

3. Абзалилов Д.Ф., Широкова Е.А. *Метод приближенного конформного отображения канонических областей на односвязные и двусвязные области* // Матер. межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии. – Казань: Казан. ун-т; изд-во АН РТ, 2016. – С. 77–78.

4. Aptekarev A. I., Yattselev M. L. *Approximations of algebraic functions by rational ones – functional analogues of diophantine approximants* // Preprint of Keldysh Institute of Applied Mathematics RAS, Moscow, 2016. – P. 1–23.

5. Aptekarev A. I., Yattselev M. L. *Pade approximants for functions with branch points – strong asymptotics of Nuttall–Stahl polynomials* // Acta Math. – 2015. – V. 215. – P. 217–280.

CONTINUOUS FRACTIONS AND CONFORMAL MAPPINGS

P.N. Ivanshin

We constuct a method of fractional polynomial conformal mapping of the unit disc onto a domain with acute internal angles.

Keywords: conformal mapping, fractional polynomial, convergence.

УДК 514.774

КАЧЕСТВЕННЫЙ АНАЛИЗ КОСМОЛОГИЧЕСКОЙ МОДЕЛИ, ОСНОВАННОЙ НА ФАНТОМНОМ СКАЛЯРНОМ ПОЛЕ С САМОДЕЙСТВИЕМ

Ю.Г. Игнатьев[1], А.А. Агафонов[2]

1 *ignatev-yurii@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *a.a.agathonov@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

На основе качественного анализа космологических моделей с фантомными скалярными полями с самодействием выявлены и уточнены их отличительные особенности.

Ключевые слова: фантомное скалярное поле, качественный анализ.

Функция Лагранжа фантомного скалярного поля с массой m и самодействием имеет вид:

$$L = -\frac{1}{8\pi}\left(g^{ik}\Phi_{,i}\Phi_{,k} + m^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4\right),$$

где α – константа самодействия.

Выпишем самосогласованные уравнения пространственно-плоской космологической модели

$$ds^2 = dt^2 - a^2(t)(dx^2 + dy^2 + dz^2)$$

– уравнение Эйнштейна

$$3\frac{\dot{a}^2}{a^2} = -\dot{\Phi}^2 + m^2\Phi^2 + \frac{\alpha}{2}\Phi^4 + \Lambda \qquad (1)$$

и уравнение массивного фантомного скалярного поля с кубической нелинейностью:

$$\ddot{\Phi} + 3\frac{\dot{a}}{a}\dot{\Phi} - m_*^2\Phi = 0. \qquad (2)$$

Пользуясь тем, что постоянную Хаббла можно выразить из уравнения Эйнштейна через функции Ф, $\dot{\Phi}$, переходя к безразмерному комптоновскому времени ($mt = \tau$) и проводя стандартную замену переменных $\Phi' = Z(t)$, приведем уравнение поля к виду нормальной автономной системы обыкновенных дифференциальных уравнений на плоскости $\{\Phi, Z\}$:

$$\Phi = x;\ Z = y; P(x,y) = y;\ Q(x,y) = -\sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m - y^2 + x^2 + \frac{\alpha_m}{2}x^4}\,y + x + \alpha_m x^3. \qquad (3)$$

Особые точки динамической системы определяются уравнениями (см., напр., [1]):

$$M:\ P(x,y) = 0;\ Q(x,y) = 0. \qquad (4)$$

При любых значениях α_m и $\Lambda_m \geq 0$ система алгебраических уравнений имеет одно тривиальное решение:

$$x = 0; y = 0 \Rightarrow M_0(0,0). \qquad (5)$$

В случае $\alpha_m < 0$ кроме того, возможны и нетривиальные симметричные решения:

$$x = x_\pm = \pm\frac{1}{\sqrt{-\alpha_m}}; y = 0 \quad \Rightarrow M_\pm(x_\pm, 0). \qquad (6)$$

Вычислим производные функций (3) в нулевой особой точке (5) при $\Lambda_m > 0$:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{M_0} = 0; \quad \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{M_0} = 1; \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{M_0} = 1; \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_0} = -\sqrt{3\Lambda_m}.$$

Таким образом, получаем характеристическое уравнение (см. [2]):

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda - \sqrt{3\Lambda_m} \end{vmatrix} = 0 \quad \Rightarrow \quad \lambda_\pm = -\frac{\sqrt{3\Lambda_m}}{2} \pm \frac{\sqrt{3\Lambda_m + 4}}{2},$$

так что:

$$\lambda_+\lambda_- = -1 \qquad (7)$$

– оба собственных значения вещественны и имеют противоположные знаки. Нетрудно видеть, что собственные векторы λ-матрицы ортогональны:

$$\mathbf{u}_\pm = (\lambda_\pm, 1) \Rightarrow (\mathbf{u}_+, \mathbf{u}_-) = 0. \qquad (8)$$

Таким образом, согласно качественной теории динамических систем на плоскости исследуемая нами динамическая система в случае $\Lambda_m > 0$ всегда имеет *седловую особую точку* (4), которая является *неустойчивой при любом направлении времени*. В случае $\alpha > 0$ эта точка является единственной особой точкой динамической системы.

Производные функций (3) в особых точках (6) при $\Lambda_m > 0$ равны:

$$\left.\frac{\partial P}{\partial x}\right|_{M_\pm} = 0; \quad \left.\frac{\partial P}{\partial y}\right|_{M_\pm} = 1; \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial x}\right|_{M_\pm} = -2; \quad \left.\frac{\partial Q}{\partial y}\right|_{M_\pm} = \sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m - \frac{1}{2\alpha_m}}.$$

Характеристические уравнения для обеих особых точек совпадают и собственные точки имеют один тип:

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 \\ 1 & -\lambda-\sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m-\dfrac{1}{2\alpha_m}} \end{vmatrix}=0\Rightarrow\lambda_{\pm}=-\frac{\sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m-\dfrac{1}{2\alpha_m}}}{2}\pm\frac{\sqrt{3}\sqrt{\Lambda_m-\dfrac{1}{2\alpha_m}-\dfrac{8}{3}}}{2}. \quad (9)$$

Подкоренное выражение в первом члене (9) строго больше нуля, поэтому возможны три случая (см. [3]):

1) $\Lambda_m - 1/2\alpha_m - 8/3 > 0$ – тогда оба собственных значения вещественны и отрицательны. В этом случае решение содержит *два симметричных притягивающих (устойчивых) невырожденных узла*. Все фазовые траектории в окрестности таких особых точек при $t \to \infty$ входят в эти точки и кроме двух исключительных касаются собственного вектора минимальной длины. Собственные векторы снова определяются формулой (8), в которую необходимо подставить соответствующие собственные значения из (9). Нетрудно показать, что таким собственным вектором минимальной длины является $\mathbf{u}_+$.

2) $\Lambda_m - 1/2\alpha_m - 8/3 = 0$ – тогда оба собственных значения отрицательны и равны. В этом случае решение содержит *два симметричных вырожденных узла*.

3) $\Lambda_m - 1/2\alpha_m - 8/3 < 0$ – тогда оба собственных значения комплексно сопряженные, причем их действительные части отрицательны. В этом случае решение содержит *два симметричных притягивающих фокуса*.

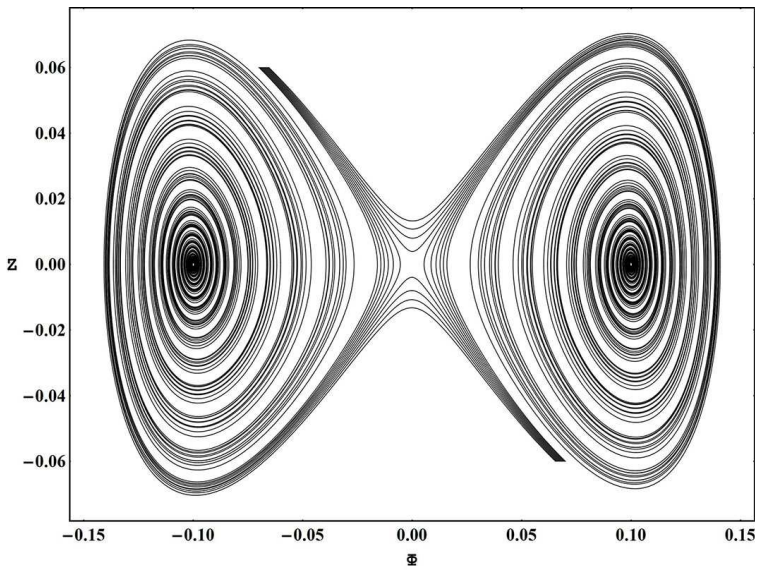


Рис. 1. Фазовый портрет системы для случая $\alpha = -100$; $\Lambda = 0.00001$; $\{\Phi(0) = -0.07 + (j-1) * .0005, j = 1..10; Z0 = 0.06\}$, $\{\Phi(0) = 0.07 + (j-1) * .0005, j = 1..10; Z0 = -0.06\}$; $t = 0 \div 90$

Литература

1. Баутин Н.Н., Леонтович Е.А. *Методы и приемы качественного исследования динамических систем на плоскости. Серия "Справочная математическая библиотека". Вып. 11.* – М.: Наука, 1989. – 489 с.

2. Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. *Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием* // Пространство, время и фунд. взаимодействия. – 2016. – Вып. 4. – С. 52–61.

3. Игнатьев Ю.Г., Агафонов А.А. *Качественный и численный анализ космологической модели, основанной на фантомном скалярном поле с самодействием. II. Сравнительный анализ моделей с классическим и фантомным полями* // Пространство, время и фунд. взаимодействия. – 2017. – Вып. 1. – С. 46–65.

QUALITATIVE ANALYSIS OF THE COSMOLOGICAL MODEL BASED ON PHANTOM SCALAR FIELD WITH SELF-ACTION

Yu.G. Ignat'ev, A.A. Agathonov

On the basis of qualitative analysis, we have identified and clarified the distinctive features of cosmological models with phantom scalar fields with self-interaction.

Keywords: phantom scalar fields, quality analysis.

УДК 517.53

О ПОРОЖДАЮЩИХ ФУНКЦИЯХ БАЗИСОВ ИЗ ЭКСПОНЕННТ И ИЗ ЗНАЧЕНИЙ ВОСПРОИЗВОДЯЩЕГО ЯДРА

К.П. Исаев[1], А.В. Луценко[2], Р.С. Юлмухаметов[3]

1 *orbit81@list.ru*; Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (ИМ с ВЦ УНЦ РАН)

2 *lutsenko.av@ya.ru*; Башкирский государственный университет (БашГУ)

3 *yulmukhametov@mail.ru*; Институт математики с вычислительным центром Уфимского научного центра Российской академии наук (ИМ с ВЦ УНЦ РАН)

Доказано, что безусловные базисы в функциональном гильбертовом пространстве H имеют порождающую функцию тогда и только тогда, когда пространство H устойчиво. Получены необходимые и достаточные условия устойчивости пространств, сопряженных к весовым пространствам на интервале.

Ключевые слова: гильбертовы пространства, целые функции, воспроизводящие ядра, безусловные базисы.

Пусть H — функциональное гильбертово пространство целых функций. Функциональность понимается в том смысле, что точечные функционалы $\delta_z : f \longrightarrow f(z),\ z \in \mathbb{C}$, непрерывны. В силу самосопряженности гильбертовых пространств эти функционалы порождаются элементами пространства H — $k_z(\lambda)$:

$$\delta_z(f) = f(z) = (f(\lambda), k_z(\lambda))_H,\ \forall f \in H.$$

Функция $K(\lambda, z) = k_z(\lambda)$ называется воспроизводящим ядром пространства H, и этот объект подробно изучен в [1]. Данная работа посвящена вопросам, связанным с базисами и безусловными базисами из значений воспроизводящего ядра $K(\lambda, z_k),\ \{z_k\}_{k=1}^{\infty} \subset \mathbb{C}$.

Базис $\{h_n\}_{n=1}^{\infty}$ в некотором гильбертовом пространстве называется безусловным базисом ([2]), если для некоторого числа $P > 1$ и для любого конечного набора $a_n \in$

$\mathbb{C}$, $n = 1, ..., N$, выполняется двусторонняя оценка

$$\frac{1}{P}\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2||h_n||^2 \le \left\|\sum_{n=1}^{N}a_n h_n\right\|^2 \le P\sum_{n=1}^{N}|a_n|^2||h_n||^2.$$

Базисы и прилегающие вопросы изучались, например, в [3]-[8]. Пространства целых функций рассматривались чаще интегрально-весовые. В работе [7] получены условия, при выполнении которых в абстрактном функциональном гильбертовом пространстве не существует безусловных базисов из значений воспроизводящего ядра.

Своим происхождением задача о (безусловных) базисах из значений воспроизводящего ядра обязана, видимо, классической теме представления рядами экспонент.

Если X — некоторое гильбертово пространство функций на множестве $G \subset \mathbb{C}$, в котором система всех экспонент e^{zt}, $z \in \mathbb{C}$, полна, то преобразование Фурье-Лапласа

$$\mathscr{L} : S \longrightarrow \widehat{S}(z) = S(e^{zt}),\ z \in \mathbb{C},$$

устанавливает изоморфизм между сопряженным пространством X^* и некоторым пространством целых функций $\widehat{X}$ с наведенной структурой гильбертового пространства. Пространство $\widehat{X}$ будет функциональным, в нем существует воспроизводящее ядро $K(\lambda, z)$. Если $e^{z_k t}$, $k \in \mathbb{N}$, — (безусловный) базис в пространстве X, то система $K(\lambda, z_k)$, $k \in \mathbb{N}$ — (безусловный) базис в пространстве $\widehat{X}$.

Частое применение этой конструкции в явном или неявном виде в теории рядов экспонент связано с тем, что в известных случаях это позволяло воспользоваться аппаратом теории целых функций. А именно, если $K(\lambda, z_k)$, $k \in \mathbb{N}$ — базис в $\widehat{X}$ и $L_k(\lambda)$ — биортогональный базис, то оказывалось, что

$$L_k(\lambda) = \frac{L(\lambda)}{L'(z_k)(\lambda - z_k)},\ k \in \mathbb{N},$$

где L — так называемая порождающая целая функция с множеством простых нулей в точках z_k и понятными ограничениями на рост в бесконечности. В общем случае порождающая целая функция может и не существовать.

Для формулировки критерия существования порождающей целой функции дадим определения кратности нуля пространства и устойчивости пространства.

Кратность нуля целой функции f в точке a обозначим через $n_f(a)$, то есть $f^{(j)}(a) = 0$ для всех неотрицательных целых чисел $j < n_f(a)$.

Определение 1. *Кратностью нуля гильбертового пространства целых функций H в точке a назовем целое число*

$$n_H(a) = \min_{f \in H} n_f(a),$$

то есть

$$f^{(j)}(a) = 0,\ 0 \le j < n_H(a), \forall f \in H.$$

Определение 2. *Пространство H будем называть устойчивым в точке a, если из $f \in H$, $n_f(a) > n_H(a)$ следует, что $f(\lambda)(\lambda - a)^{-1} \in H$. Пространство H будем называть устойчивым, если оно устойчиво в любой точке.*

Теорема 1.

1. Для того чтобы базис из значений воспроизводящего ядра $K(\lambda, z_k)$ имел порождающую функцию достаточно, чтобы хотя бы для одного элемента L_m биортогонального базиса и для всех z_k, $k \neq m$, функция $L_m(\lambda)(\lambda - z_k)^{-1}$ принадлежала пространству H.

2. Если некоторый безусловный базис в пространстве H имеет порождающую функцию, то пространство H устойчиво.

Следствие. *Для того чтобы безусловные базисы в функциональном гильбертовом пространстве H имели порождающую функцию, необходимо и достаточно устойчивости пространства H.*

Рассмотрим теперь вопрос об устойчивости пространств, сопряженных к весовым пространствам на интервале. Пусть $W(t)$ положительная функция на интервале $(-1; 1)$ и $L_2(W)$ пространство локально интегрируемых на интервале $(-1; 1)$ функций, для которых конечна норма

$$||f||^2 := \int_{-1}^{1} |f(t)|^2 W(t)\, dt.$$

Пространство $L_2(W)$ — гильбертово, такие пространство много изучались, в частности, на тему базисов из экспонент [9]. Мы будем предполагать, что все экспоненты e^{zt} входят в пространство $L_2(W)$ и система экспонент $\{e^{zt}\}_{z \in \mathbb{C}}$ полна в этом пространстве. Отсюда следует, что

$$\int_{-1}^{1} W(t)\, dt < \infty$$

и преобразование Фурье-Лапласа устанавливает изоморфизм сопряженного пространства $L_2^*(W)$ и некоторого пространства целых функций $\widehat{L}_2(W)$ с наведенной структурой гильбертового пространства. В работе [10] показано, что когда $W(t) = e^{-2h(t)}$ с выпуклой функцией h, то $\widehat{L}_2(W)$ изоморфно пространству целых функций, удовлетворяющих ограничению на рост

$$|F(z)| \leq \text{Const} \cdot e^{\widetilde{h}(\text{Re } z)},$$

с нормой

$$||F||^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|F(x + iy)|^2 \, dy \, d\widetilde{h}'(x)}{K(x)}.$$

Здесь $\widetilde{h}$ — сопряженная по Юнгу

$$\widetilde{h}(x) = \sup_{|t|<1} (xt - h(t)),$$

и

$$K(x) = \int_{-1}^{1} e^{2xt - 2h(t)}\, dt.$$

Таким образом, для таких весов пространство $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво. Из следующей теоремы видно, что для произвольных весов устойчивости может и не быть.

Теорема 2. *Если пространство $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво, то функция $\frac{1}{W}$ локально интегрируема на $(-1;1)$ и*

$$\int_{-1}\left(\int_{-1}^{t} W(x)dx\right)^2 \frac{dt}{W(t)} < \infty, \quad \int^{1}\left(\int_{t}^{1} W(x)dx\right)^2 \frac{dt}{W(t)} < \infty.$$

В следующей теореме приведены достаточные условия устойчивости таких пространств.

Теорема 3. *Если функция $\frac{1}{W}$ локально интегрируема на $(-1;1)$ и*

$$\int_{-1}\left(\int_{-1}^{t} W(x)dx\right) \frac{dt}{W(t)} < \infty, \quad \int^{1}\left(\int_{t}^{1} W(x)dx\right) \frac{dt}{W(t)} < \infty,$$

то пространство $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво.

Следствие. *Если функция $\frac{1}{W}$ локально интегрируема на $(-1;1)$ и W монотонна в окрестности точек ± 1, то пространства $\widehat{L}_2(W)$ устойчиво.*

Литература

1. Aronszajn N. *Theory of reproducing kernels* // Transactions of the American Mathematical Society. – 1950. – V. 68. – № 3. – P. 337–404.

2. Hruščev S. V., Nikol'skii N. K., Pavlov B. S. *Unconditional Bases of exponentials and of reproductional kernels* // Complex Analysis and Spectral Theory, Lecture Notes in Mathematics. – 1981. – V. 864. – P. 214–335.

3. Seip K. *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space. I* // Reine Angew. Math. – 1992. – V. 429. – P. 91–106.

4. Seip K., Wallsten R. *Density theorems for sampling and interpolation in the Bargmann-Fock space. II* // Reine Angew. Math. – 1992. – V. 429. – P. 107–113.

5. Borichev A., Dhuez R., Kellay K. *Sampling and interpolation in large Bergman and Fock spaces* // Journal of Functional Analysis. – 2007. – V. 242. – № 2. – P. 563–606.

6. Borichev A., Lyubarski Yu. *Riesz bases of reproducing kernels in Fock type spaces* // Journal of the Institute of Mathematics of Jussieu. – 2010. – V. 9. – P. 449–461.

7. Исаев К. П., Юлмухаметов Р. С. *Безусловные базисы из воспроизводящих ядер в гильбертовых пространствах целых функций* // Уфимский математический журнал. – 2013. – Т. 5. – № 3. – С. 67–77.

8. Baranov A., Belov Yu., Borichev A. *Fock type spaces with Riesz bases of reproducing kernels and de Branges spaces* // Studia Mathematica. – 2017. – V. 236. – P. 127–142.

9. Седлецкий А. М. *Классы аналитических преобразований Фурье и экспоненциальные аппроксимации.* – М.: Физматлит, 2005. – 504 с.

10. Луценко В. И., Юлмухаметов Р. С. *Обобщение теоремы Пэли–Винера на весовые пространства* // Математические заметки. – 1990. – Т. 48. – № 5. – С. 80–87.

ON GENERATING FUNCTIONS OF BASES OF EXPONENTIAL FUNCTIONS AND REPRODUCING KERNELS

K.P. Isaev, A.V. Lutsenko, R.S. Yulmukhametov

It is proved that an unconditional basis in a functional Hilbert space H have a generating function if and only if the space H is stable. Necessary and sufficient conditions for the stability of spaces conjugate to weighted spaces on an interval are obtained.

Keywords: Hilbert spaces, entire functions, reproducing kernels, unconditional bases.

УДК 517.54

УСИЛЕНИЕ НЕРАВЕНСТВА БОРА ДЛЯ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

А.А. Исмагилов[1], И.Р. Каюмов[2], С. Поннусами[3], А.В. Каюмова[4], Н.З. Шакиров[5]

1 *amir.ismagilov@list.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт механики и математики им. Н.И. Лобачевского

2 *ilgis.kayumov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт механики и математики им. Н.И. Лобачевского

3 *samy@iitm.ac*; Indian Statistical Institute

4 *anvas@inbox.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Высшая школа информационных технологий и информационных систем

5 *nail-1515@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт механики и математики им. Н.И. Лобачевского

Улучшена оценка Бора для аналитических функций f, приведенная в работах И.Р. Каюмова и С. Поннусами. А именно, доказано неравенство $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|r^k+\frac{16}{9\pi}S_r+\lambda S_r^2\le 1$, $r\le\frac{1}{3}$, где $\lambda=18.6095\ldots$ – положительный вещественный корень уравнения $5509980288x^5-97745285925x^4-87178893840x^3-37178714880x^2-6268596224x-285212672=0$ и $S_r=\pi\sum_{k=1}^{\infty}k|a_k|^2r^{2k}$ – площадь образа круга $|z|<r$ под действием функции f, аналитической в единичном круге D такой, что $|f(z)|\le 1$, $z\in D$. Оценка является неулучшаемой.

Ключевые слова: аналитические функции, геометрическая теория функций комплексного переменного, радиус Бора.

В 1914 г. Харальд Бор доказал, что если для функции $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$, определенной в области $D:=\{z\in\mathbb{C}:|z|\le 1\}$, выполняется условие $|f(z)|\le 1$, то $\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|r^k\le 1$ для всех $|z|=r\le\frac{1}{6}$. Далее в работах Н. Винера, Ф. Риса и И. Шура было доказано, что число $1/6$ может быть заменено на константу $1/3$, которая не может быть увеличена.

Недавно И.Р. Каюмовым совместно с С. Поннусами было доказано неравенство

$$\sum_{k=0}^{\infty}|a_k|r^k+\frac{16}{9\pi}S_r\le 1,\quad r\le\frac{1}{3},\tag{1}$$

где $S_r=\pi\sum_{k=1}^{\infty}k|a_k|^2r^{2k}$ – площадь образа круга $|z|<r$ под действием функции f.

Нам удалось улучшить оценку (1). А именно, справедлива

Теорема. *Пусть аналитичная в круге D функция $f(z)$, такая что $f(z)=\sum_{k=0}^{\infty}a_kz^k$*

и $|f(z)| \le 1$ *в* D. *Тогда справедливо неравенство*

$$\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k + \frac{16}{9\pi} S_r + \lambda S_r^2 \le 1, \quad r \le \frac{1}{3},$$

где $\lambda = 18.6095\ldots$ *– положительный вещественный корень уравнения*

$$5509980288x^5 - 97745285925x^4 - 87178893840x^3 - 37178714880x^2 - 6268596224x - 285212672 = 0.$$

Полученная оценка является неулучшаемой.

AN IMPROVEMENT OF BOHR'S INEQUALITY FOR ANALYTIC FUNCTIONS

A.A. Ismagilov, I.R. Kayumov, S. Ponnusamy, A.V. Kaymova, N.Z. Shakirov

We improve Bohr's inequality for analytic functions f *which was investigated by I.R. Kaymov and S. Ponnusami. Precisely, the following inequality is proved:* $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k| r^k + \frac{16}{9\pi} S_r + \lambda S_r^2 \le 1, \quad r \le \frac{1}{3}$, *where* $\lambda = 18.6095\ldots$ *is the positive solution to the equation* $5509980288x^5 - 97745285925x^4 - 87178893840x^3 - 37178714880x^2 - 6268596224x - 285212672 = 0$ *and* $S_r = \pi \sum_{k=1}^{\infty} k|a_k|^2 r^{2k}$ *is the area of the image of the disk* $|z| < r$ *under the mapping* f, *analytic in the unit disk* D *and satisfying* $|f(z)| < 1$, $z \in D$. *The number* λ *can not be improved.*

Keywords: analytic function, univalent function, Borh radius.

УДК 517.54

РАДИУСЫ ОДНОЛИСТНОСТИ ЧАСТИЧНЫХ СУММ И КОЭФФИЦИЕНТЫ ОДНОЛИСТНЫХ ГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

С. Калирай[1], С. Поннусами[2], В.В. Старков[3]

1 *sairamkaliraj@gmail.com*; Indian Statistical Institute (ISI), Chennai Centre, SETS, MGR Knowledge City, CIT Campus, Taramani, Chennai 600 113, India

2 *samy8560@gmail.com*; Indian Statistical Institute (ISI), Chennai Centre, SETS, MGR Knowledge City, CIT Campus, Taramani, Chennai 600 113, India

3 *vstarv@list.ru*; Петрозаводский государственный университет, 185910, Республика Карелия, г.Петрозаводск, пр. Ленина, 33

Обозначим S_H^0 *класс функций* $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n}$ *однолистных гармонических и сохраняющих ориентацию в открытом круге* $|z| < 1$. *Для коэффициентов функций из* S_H^0 *точная оценка не известна даже в случае* $|a_2|$. *Целью этой работы является получение оценок (не точных)* $|a_n| < 5.24 \times 10^{-6} n^{17}$ *и* $|b_n| < 2.32 \times 10^{-7} n^{17}$ *для всех* $n \ge 3$ *и* $f = \in S_H^0$, *также получены оценки радиусов однолистности частичных сумм однолистных гармонических отображений. Мы получили оценки радиуса однолистности частичных сумм нормированных однолистных гармонических отображений единичного круга на выпуклые, звездообразные, почти выпуклые, выпуклые в направлении области. В случае отображений на выпуклые области результат точный.*

Ключевые слова: гармонические однолистные функции, частичные суммы, оценки коэффициентов.

Множество всех аналитических и однолистных в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ функций $f(z) = z + \sum\limits_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ обозначают S. Обозначим через $s_n(f)(z) = z + \sum\limits_{k=2}^{n} a_k z^k$ соответствующую частичную сумму. Задача исследования частичных сумм $s_n(f)$, $n \in \mathbb{N}$, функций $f \in S$ является одной из классических задач комплексного анализа. Открытой проблемой в классе S является определение наибольшего значения $r_n \in (0,1)$, при котором $s_n(f)$ однолистны в круге $\{|z| < r_n\}$ для всех $f \in S$. Сегё [1] доказал, что $\inf_n r_n = 1/4$. Лучший результат в оценке r_n $(n > 1)$ принадлежит Дженкинсу [2]: $r_n \geq 1 - (4\log n - \log(4\log n))/n$ для $n \geq 8$.

Обозначим через S_H класс гармонических однолистных отображений $f(z)$, $f(0) = 0$, $f_z(0) = 1$. Известно, что такие отображения единственным образом представимы в виде $f(z) = h(z) + \overline{g(z)}$, h и g — аналитические в D, $h(0) = 0$, $h'(0) = 1$. Символом S_H^0 обозначают подкласс S_H, в котором $g'(0) = 0$. Подклассы функций из S_H, отображающих D на звездообразные относительно 0 или почти выпуклые области (область Ω называется почти выпуклой, если дополнение к ней может быть представлено в виде объединения лучей, пересекающихся, быть может, лишь в своих вершинах), обозначают, соответственно, S_H^* или C_H. Последние 2 класса, обладая полезными геометрическими свойствами, не являются компактными в топологии равномерной сходимости внутри D. Поэтому для удобства исследования рассматривают их компактные подклассы S_H^{*0} и C_H^0, в которых $g'(0) = 0$; между классами S_H^*, C_H и указанными их подклассами существует простая связь.

Для натуральных n и m и для функции $f \in S_H$ обозначим $s_{n,m}(f)(z) = s_n(h)(z) + \overline{s_m(g)(z)}$. Представленное здесь сообщение опирается на публикации авторов [3] и [4] и существенно использует результаты из [5]. В частности, доказана

Теорема 1 [3]. *Пусть $f = h + \overline{g} \in S_H^0$ и принадлежит одному из подклассов: S_H^*, C_H или классу выпуклых в направлении гармонических функций (т. е. каждая прямая на плоскости, параллельная некоторой фиксированной, пересекает $f(D)$ по связному множеству). Тогда частичные суммы $s_{n,m}(f)$ однолистны в круге $\{z \in D : |z| < r_{n,m}\}$, где $r_{n,m}$ – единственный положительный корень уравнения*

$$\frac{1}{12r}\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^3\left[1-\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^6\right] - R_n - T_m = 0,$$

$$R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} A_k r^{k-1}, \quad T_m = -\sum_{k=m+1}^{\infty} A_{-k} r^{k-1},$$

$A_k = \dfrac{k(k+1)(2k+1)}{6}$. *В частности, частичные суммы $s_{n,n}(f)(z)$ однолистны в круге $\{|z| < r_n\}$, где $r_n > r^L{}_n := 1 - \dfrac{7\log n - 4\log(\log n)}{n}$ при $n \geq 15$. Кроме того, $r_{n,m} \geq r^L{}_l$, где $l = \min(n,m) \geq 15$.*

Обозначим через $K_H \subset S_H$ подмножество всех выпуклых функций, т. е. функций, для которых $f(D)$ – выпуклая область. Специфика класса K_H позволяет улучшить оценки радиуса однолистности $r_{n,m}$ часичных сумм в этом классе.

Теорема 2 [3]. *Пусть $f = h + \overline{g} \in K_H \cap S_H^0$. Тогда частичная сумма $s_{n,m}(f)$ однолистна в круге $\{z \in D : |z| < r_{n,m}\}$, где $r_{n,m}$ — единственный положительный корень*

уравнения

$$\frac{1-r}{(1+r)^3} - \sum_{k=n+1}^{\infty}\left[\frac{k(k+1)}{2}r^{k-1}\right] - \sum_{k=m+1}^{\infty}\left[\frac{k(k-1)}{2}r^{k-1}\right] = 0.$$

В частности, для $n \geq 5$ и любого вещественного θ гармоническая функция

$$s_{n,n}(f;\theta)(z) = s_n(h)(z) + e^{i\theta}\overline{s_n(g)(z)}$$

будет однолистной и почти выпуклой в круге $\{z : |z| < 1 - 3n^{-1}\log n\}$. Кроме того, $r_{n,m} \geq 1 - (4\log l - 2\log(\log l))/l$, где $l = \min\{n, m\}$.

Для $r \in (0,1)$ обозначим

$$U(r) = \frac{1}{\log r}\left\{-28.5 + \log(r(\log(1/r))^{19}) + \log\left[\left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{17} - \left(\frac{1-r}{1+r}\right)^{51}\right]\right\}.$$

Рассмотрение проблемы однолистности частичных сумм в полном классе S_H^0 гармонических функций привело авторов к следующему результату.

Теорема 3 [4]. *Пусть $f \in S_H^0$, тогда для $n \geq 2$ частичная сумма $s_{n,n}(f)$ однолистна в круге $\{z : |z| < r_{n,n}\}$, где*

$$r_{n,n} = \max\{r \in (0,1) : 18\log n = -(n - U(r))\log r\}.$$

Кроме того, для фиксированного $r \in (0.016155, 1)$, частичная сумма $s_{n,n}(f)$ однолистна в круге $\{|z| < r\}$ для всех $n \geq N(r)$, где

$$N(r) = \min\{n \geq U(r) : 18\log n \leq -(n - U(r))\log r\}.$$

Для функции $f = h + \overline{g} \in K_H \cap S_H^0$ обозначим

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty}(a_n z^n + b_n \bar{z}^n)$$

— ее разложение в ряд. Проблема оценки коэффициентов в S_H^0 является еще более трудной, чем в S проблема Бибербаха. Даже для $|a_2|$ здесь нет точной оценки. Лучшей оценкой на настоящий момент является оценка Абу-Муханна, Али и Поннусами $|a_2| \leq 16,5$; она существенно использовалась при получении результатов в [4]. Для произвольных $n \geq 2$ оценка коэффициентов в S_H^0 (не точная) впервые была получена в [5]. В [4] эти оценки были существенно улучшены, доказана

Теорема 4 [4]. *Пусть $f = h + \overline{g} \in S_H^0$. Тогда для всех $n \geq 3$*

$$|a_n| < 5.24 \times 10^{-6} n^{17} \;\; u \;\; |b_n| < 2.32 \times 10^{-7} n^{17}.$$

Исследование В.В. Старкова выполнено за счет гранта Российского научного фонда (проект № 17-11-01229) в Петрозаводском государственном университете.

Литература

1. Szegö G. *Zur Theorie der schlichten Abbildungen* // Math. Ann. – 1928. – № 100(1). – P. 188–211.

2. Jenkins J.A. *On an inequality of Golusin* // Amer. J. Math. – 1951. – № 73. – P. 181–185.

3. Ponnusamy S., Kaliraj A.S., Starkov V.V. *Sections of univalent harmonic mappings* // Indagationes Mathematicae. – 2017. – V. 28, № 2. – P. 527–540.

4. Ponnusamy S., Kaliraj A.S., Starkov V.V. *Coefficients of univalent harmonic mappings* // Monatshefte fur Mathematik. – 2017. – P. 1–18.

5. Starkov V.V. *Univalence of harmonic functions, problem of Ponnusamy and Sairam, and constructions of univalent polynomials* // Probl. Anal. Issues Anal. – 2014. – V. 3, № 21. – P. 59–73.

UNIVALENCE RADIUS OF SECTIONS AND COEFFICIENTS
OF UNIVALENT HARMONIC MAPPINGS

S. Kaliraj, S. Ponnusamy, V.V. Starkov

Let S_H^0 denote the class of all functions $f(z) = h(z) + \overline{g(z)} = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n + \overline{\sum_{n=2}^{\infty} b_n z^n}$ that are sense-preserving, harmonic and univalent in the open unit disk $|z| < 1$. The coefficient conjecture for S_H^0 is still open *even for $|a_2|$. The aim of this paper is to show that if $f =\in S_H^0$ then $|a_n| < 5.24 \times 10^{-6} n^{17}$ and $|b_n| < 2.32 \times 10^{-7} n^{17}$ for all $n \geq 3$. Making use of these coefficient estimates, we also obtain radius of univalence of sections of univalent harmonic mappings. We determine the radius of univalence of sections of normalized univalent harmonic mappings for which the range is convex (resp. starlike, close-to-convex, convex in one direction). Our result on the radius of univalence of section $s_{n,n}(f)$ is sharp especially when the corresponding mappings have convex range.*

Keywords: harmonic univalent functions, partial sums, coefficient bounds.

УДК 517.9

НЕЛИНЕЙНОЕ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ БАРБАШИНА С ЧАСТНОЙ ПРОИЗВОДНОЙ ВТОРОГО ПОРЯДКА

А.С. Калитвин[1], В.А. Калитвин[2]

1 *kalitvinas@mail.ru*; Липецкий государственный педагогический университет им. П.П. Семенова-Тян-Шанского

2 *kalitvin@gmail.com*; Липецкий государственный педагогический университет им. П.П. Семенова-Тян-Шанского

В статье рассматривается задача Коши для нелинейного интегро-дифференциального уравнения Барбашина с частной производной второго порядка. Рассматриваемая задача эквивалентна интегральному уравнению Вольтерра с частными интегралами. Получены условия однозначной разрешимости интегрального уравнения, следовательно, и задачи Коши.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение Барбашина, задача Коши, интегральное уравнение Вольтерра с частными интегралами.

Интегро-дифференциальным уравнением Барбашина (ИДУБ) мы будем называть интегро-дифференциальное уравнение, в котором неизвестная функция со-

держится под знаком частной производной и под знаком интеграла, причём частная производная этой функции вычисляется по одной переменной, а ее интегрирование производится по другой переменной.

Основы теории ИДУБ с частной производной первого порядка построены в [1]. При этом ИДУБ интерпретировались как дифференциальные уравнения в банаховом пространстве или сводились к интегральным уравнениям с частными интегралами.

При интерпретации линейных ИДУБ дифференциальными уравнениями в банаховом пространстве разрешимость последних обеспечивается условиями сильной непрерывности оператор-функций, определяющих дифференциальные уравнения. Такие условия содержатся в [1] в случаях, когда оператор-функции принимают значения в пространствах линейных операторов, непрерывных в пространстве непрерывных функций, в пространствах Лебега, в банаховых идеальных пространствах.

В случае сведения задачи Коши для линейных ИДУБ к линейным интегральным уравнениям Вольтерра с частными интегралами однозначная разрешимость интегральных уравнений обеспечивается равенством нулю спектрального радиуса соответствующего линейного оператора Вольтерра с частными интегралами. Условия равенства нулю спектрального радиуса линейных операторов Вольтерра с частными интегралами в различных классах функциональных пространств приведены в [2-4]. Отметим работу [5], в которой приведён пример банахова функционального пространства и линейного оператора Вольтерра с частными интегралами и непрерывными ядрами, спектральный радиус которого в этом пространстве больше нуля.

В данной заметке рассматривается нелинейное ИДУБ

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t^2} = f(t,s,x(t,s)) + \int_c^d n(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma + g(t,s) \tag{1}$$

с начальным условием

$$x(a,s) = \varphi(s), x'_t(a,s) = \psi(s). \tag{2}$$

Предполагается, что $t \in [a,b]$, $s \in [c,d]$, $[a,b]$ и $[c,d]$ — конечные отрезки, заданные функции f, n, g, φ, ψ непрерывны, функции f и n удовлетворяют условию Липшица:

$$|f(t,s,u) - f(t,s,v)| \le f_0(t,s)|u-v|,\ |n(t,s,\sigma,u) - n(t,s,\sigma,v)| \le n_0(t,s,\sigma)|u-v|,$$

где f_0 и n_0 — некоторые непрерывные функции, интеграл в (1) понимается в смысле Лебега, а решением задачи (1)/(2) считается непрерывная на $[a,b]\times[c,d]$ вместе с $x''_{tt}(t,s)$ функция $x(t,s)$, удовлетворяющая ИДУБ (1) и начальным условиям (2).

Интегрируя обе части уравнения (1) по отрезку $[a,t]$ и учитывая второе условие в (2), получим эквивалентное задаче (1)/(2) ИДУБ с частной производной по t первого порядка и начальным условием $x(a,s) = \varphi(s)$. Интегрируя обе части полученного уравнения по отрезку $[a,t]$ и учитывая последнее начальное условие, получаем следующее эквивалентное задаче (1)/(2) интегральное уравнение Вольтерра с частными интегралами:

$$x(t,s) = \int_a^t (t-\tau)f(\tau,s,x(\tau,s))d\tau + \int_a^t\int_c^d (t-\tau)n(\tau,s,\sigma,x(\tau,\sigma))d\tau d\sigma + p(t,s), \tag{3}$$

где

$$p(t,s) = \varphi(s) + (t-a)\psi(s) + \int_a^t \int_a^\tau g(\tau_1, s)\, d\tau_1 d\tau,$$

а под решением уравнения понимается непрерывная вместе с $x'_t(t,s)$ функция $x(t,s)$.

Оператор, определяемый суммой первых двух слагаемых правой части уравнения (3), обозначим через A.

Пусть $D = [a,b] \times [c,d]$, а $C(D)$, $C(D \times [c,d] \times (-\infty, +\infty))$ и $C([c,d])$ — пространства непрерывных на D, $D \times [c,d] \times (-\infty, +\infty)$ и $[c,d]$ соответственно функций.

Теорема 1. *Если функции $f \in C(D \times (-\infty, +\infty))$, $n \in C(D \times [c,d] \times (-\infty, +\infty))$ и удовлетворяют условию Липшица, $g \in C(D)$, $\varphi, \psi \in C([c,d])$, то уравнение (3) имеет единственное непрерывное на D вместе с $x'_t(t,s)$ решение и оно может быть найдено методом последовательных приближений $x_{n+1} = Ax_n + p$ $(n = 0,1,2,\cdots)$ с произвольной функцией $x_0 \in C(D)$, для которой $x'_{0t} \in C(D)$.*

Доказательство. Пусть x и y — произвольные функции из $C(D)$. Из (3) и условий Липшица для функций f и n имеем

$$|(Ax)(t,s) + p(t,s) - (Ay)(t,s) - p(t,s)| \le \int_a^t |(t-\tau)[f(\tau,s,x(\tau,s)) - f(\tau,s,y(\tau,s))]|\, d\tau +$$

$$+ \int_a^t \int_c^d |(t-\tau)[n(\tau,s,\sigma,x(\tau,\sigma)) - n(\tau,s,\sigma,y(\tau,\sigma))]|\, d\tau\, d\sigma \le$$

$$\le \int_a^t |(t-\tau) f_0(\tau,s)[x(\tau,s) - y(\tau,s)]|\, d\tau + \int_a^t \int_c^d |(t-\tau) n_0(\tau,s,\sigma)[x(\tau,\sigma) - y(\tau,\sigma)]|\, d\tau\, d\sigma. \tag{4}$$

В силу непрерывности функций $f_0(t,s)$ и $n_0(t,s,\sigma)$ спектральный радиус линейного оператора

$$(A_0 x)(t,s) = \int_a^t |(t-\tau) f_0(\tau,s)| x(\tau,s)\, d\tau + \int_a^t \int_c^d |(t-\tau) n_0(\tau,s,\sigma)| x(\tau,\sigma)\, d\tau\, d\sigma$$

равен нулю [2, 3]. По формуле Гельфанда для спектрального радиуса отсюда следует, что некоторая степень оператора A_0 является сжимающим оператором [6]. Отсюда и (4) имеем, что некоторая степень оператора $(Bx)(t,s) \equiv (Ax)(t,s) + p(t,s)$ является сжимающим оператором. Тогда по теореме Банаха о сжимающих отображениях уравнение $x = Bx \equiv Ax + p$ имеет единственное решение в $C(D)$ и оно может быть найдено методом последовательных приближений.

В силу непрерывности заданных функций решение $x(t,s)$ уравнения (3) имеет непрерывную частную производную $x'_t(t,s)$. Теорема доказана.

Отметим, что спектральный радиус оператора A_0 равен нулю, если $|(t-\tau) f_0(\tau,s)| \in C(L^1([a,b]))$ и $|(t-\tau) n_0(\tau,s,\sigma)| \in C(L^1(D))$, где $C(L^1([a,b]))$ и $C(L^1(D))$ — пространства непрерывных по $(t,s) \in D$ вектор-функций со значениями в $L^1([a,b])$ и $L^1(D)$ соответственно [3, 4]. Поэтому утверждение теоремы 1 остаётся в силе, если в условии Липшица для заданных функций $f(t,s,u)$ и $n(t,s,\sigma,u)$ непрерывность функций $f_0(t,s)$ и $n_0(t,s,\sigma)$ заменить условиями $|(t-\tau) f_0(\tau,s)| \in C(L^1([a,b]))$ и $|(t-\tau) n_0(\tau,s,\sigma)| \in C(L^1(D))$.

Теорема 1 остаётся справедливой и в случаях, когда непрерывность функций $f_0(t,s)$ и $n_0(t,s,\sigma)$ заменяется другими условиями, при которых спектральный радиус оператора A_0 в пространстве $C(D)$ равен нулю [3, 4].

Из теоремы 1 и эквивалентности в описанном выше смысле задачи (1)/(2) уравнению (3) вытекает

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 задача (1)/(2) имеет единственное решение.*

Из приведённых теорем следует непрерывная зависимость решения уравнения (3) и задачи (1)/(2) при возмущении заданных в условии этих теорем функций функциями $\Delta f \in C(D\times(-\infty,+\infty))$, $\Delta n \in C(D\times[c,d]\times(-\infty,+\infty))$, удовлетворяющих условию Липшица, и функциями $\Delta\varphi, \Delta\psi \in C([c,d])$.

Обобщением уравнения (1) является ИДУБ

$$\frac{\partial^2 x(t,s)}{\partial t^2} + a(t,s)\frac{\partial x(t,s)}{\partial t} = f(t,s,x(t,s)) + \int_c^d n(t,s,\sigma,x(t,\sigma))d\sigma + g(t,s), \qquad (5)$$

где функция $a(t,s)$ непрерывна на D вместе с $a'_t(t,s)$, а функции f, n, g удовлетворяют приведённым выше условиям. Решением задачи (5)/(2) считается непрерывная на $[a,b]\times[c,d]$ вместе с $x''_{tt}(t,s)$ функция $x(t,s)$, удовлетворяющая ИДУБ (5) и начальным условиям (2). Так же, как и выше, задача Коши (5)/(2) сводится к эквивалентному интегральному уравнению Вольтерра с частными интегралами, под решением которого понимается непрерывная вместе с $x'_t(t,s)$ функция $x(t,s)$. Полученное интегральное уравнение имеет единственное непрерывное на D вместе с $x'_t(t,s)$ решение и оно может быть найдено методом последовательных приближений. Задача Коши (5)/(2) имеет единственное решение.

Литература

1. Appell J. M., Kalitvin A. S., Zabrejko P. P. *Partial Integral Operators and Integro-Differential Equations.* – New York-Basel: Marcel Dekker, 2000. – 560 p.

2. Калитвин А. С. *Линейные операторы с частными интегралами.* – Воронеж: ЦЧКИ, 2000. – 252 с.

3. Калитвин А. С., Калитвин В. А. *Интегральные уравнения Вольтерра и Вольтерра-Фредгольма с частными интегралами.* – Липецк: ЛГПУ, 2006. – 177 с.

4. Калитвин А. С., Фролова Е. В. *Линейные уравнения с частными интегралами. С-теория.* – Липецк: ЛГПУ, 2004. – 195 с.

5. Калитвин А. С. *Об операторах Вольтерра с частными интегралами* // Воронежская зимняя математическая школа С. Г. Крейна – 2012: Материалы межд. конф. / под редакцией В.А. Костина. – Воронеж: Издательско-полиграфический центр ВГУ, 2012. – С. 91–94.

6. Красносельский М. А. и др. *Приближённое решение операторных уравнений.* – М.: Наука, 1969. – 456 с.

NONLINEAR INTEGRO-DIFFERENTIAL BARBASHIN EQUATION WITH A PARTIAL SECOND-ORDER DERIVATIVE

A.S. Kalitvin, B.A. Kalitvin

The Cauchy problem for a nonlinear integro-differential Barbashin equation with a partial second-order derivative is considered. The problem is equivalent to the integral Volterra equation with partial integrals. Conditions for the unique solvability of the integral equation and consequently, the Cauchy

problem are obtained.

Keywords: Barbashin integro-differential equation, Chachy problem, Volterra integral equation with partial integrals.

УДК 517.956.25

О СУЩЕСТВОВАНИИ РЕШЕНИЙ АНИЗОТРОПНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ УРАВНЕНИЙ С ПЕРЕМЕННЫМИ НЕЛИНЕЙНОСТЯМИ В R^N

А.Ш. Камалетдинов[1], Л.М. Кожевникова[2]

1 *kamaletdinovaleksandr@mail.ru*; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, факультет математики и информационных технологий

2 *kosul@mail.ru*; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета, факультет математики и информационных технологий

В работе рассматривается некоторый класс анизотропных эллиптических уравнений второго порядка дивергентного вида с переменными нелинейностями. В пространстве $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, изучаются условия разрешимости уравнений. Доказано существование решений без ограничений на рост входных данных при $|x| \to \infty$.

Ключевые слова: анизотропное эллиптическое уравнение, существование решения, переменные показатели, псевдомонотонный оператор.

Рассматриваются анизотропные квазилинейные эллиптические уравнения второго порядка

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(x, u, \nabla u))_{x_i} - a_0(x, u, \nabla u) = 0, \quad x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n. \tag{1}$$

Предполагается, что функции $a_i(x, s_0, s_1, \ldots, s_n)$ имеют степенной рост по переменным s_i с показателями $p_i(x) \in (1, \infty)$, $i = 0, 1, \ldots, n$. В качестве простейшего примера можно привести уравнение

$$\sum_{i=1}^{n} (|u_{x_i}|^{p_i(x)-2} u_{x_i})_{x_i} - |u|^{p_0(x)-2} u = \sum_{i=1}^{n} (\phi_i(x))_{x_i} - \phi_0(x). \tag{2}$$

В 1984 г. Х. Брезис [1] на примере уравнения

$$-\Delta u + |u|^{p_0-2} u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad p_0 > 2,$$

и его обобщений показал, что есть эллиптические уравнения в неограниченных областях, для которых существуют единственные решения соответствующих краевых задач без предположений на их поведение и рост входных данных на бесконечности.

Л. Боккардо, Т. Галуа, Ж. Вазкез в [2] доказали существование решения уравнения

$$-\sum_{i=1}^{n} \left(|\nabla u|^{p-2} u_{x_i}\right)_{x_i} + |u|^{p_0-2} u = f(x), \quad x \in \mathbb{R}^n,$$

без условий на бесконечности при $p > 2 - 1/n,\ p_0 > p$. Кроме того, авторы показали, что условие $p_0 > p$ необходимо для существования решения, если на рост функции f на бесконечности не накладывается никаких ограничений.

Г.И. Лаптевым в [3] изучались условия существования решений уравнений

$$-\sum_{i=1}^{n}(a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u))_{x_\alpha} + a_0(\mathrm{x}, u) = f(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \mathbb{R}^n, \quad n \geq 2.$$

Функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}),\ i = 1, \ldots, n,\ a_0(\mathrm{x}, s_0),\ f(\mathrm{x})$ могут расти произвольно при $|\mathrm{x}| \to \infty$. Эти функции удовлетворяют обобщенным условиям теории монотонных операторов по аргументам $s_0 \in \mathbb{R},\ \mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$. Функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}),\ i = 1, \ldots, n,$ по переменным $s_0 \in \mathbb{R},\ \mathrm{s} \in \mathbb{R}^n$ имеют стенной рост с показателями $p - 1,\ p_0(p-1)/p$, соответственно. При условии, что $n < p < p_0$ доказана теорема существования решения $u \in W^1_{p,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$.

Л.М. Кожевниковой и А.А. Хаджи в [4] для некоторого класса анизотропных эллиптических уравнений второго порядка с нестепенными нелинейностями доказана теорема существования без ограничений на рост входных данных при $|\mathrm{x}| \to \infty$. М.М. Бокало и Е.В. Доманская в [5] исследовали краевые задачи в неограниченных областях для класса эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейностей, модельным примером которых является уравнение (2). Корректность краевых задач доказана без ограничений на поведение решений и условий на рост исходных данных на бесконечности. Следует отметить, что в [4], [5] установлено существование решений эллиптических уравнений в неограниченных областях с соответствующими операторами, удовлетворяющими условию монотонности. В настоящей работе рассматривается более широкий класс эллиптических анизотропных уравнений с переменными показателями нелинейностей с соответствующими псевдомонотонными операторами. Доказана разрешимость уравнения (1) в пространстве $\mathbb{R}^n$, никаких условий на поведение решений и рост входных данных при $|x| \to \infty$ не накладывается.

Сначала определим пространства с переменным показателями. Пусть Q произвольная область пространства $\mathbb{R}^n$. Обозначим

$$C^+(\overline{Q}) = \{p(\mathrm{x}) \in C(\overline{Q}) : 1 < p^- \leq p^+ < +\infty\},$$

где $p^- = \inf\limits_{Q} p(\mathrm{x}),\ p^+ = \sup\limits_{Q} p(\mathrm{x})$. Пусть $p(\mathrm{x}) \in C^+(\overline{Q})$, определим лебегово пространство с переменным показателем $L_{p(\cdot)}(Q)$ как множество измеримых на Q вещественнозначных функций $v(\mathrm{x})$ таких, что:

$$\rho_{p(\cdot),Q}(v) = \int\limits_{Q} |v(\mathrm{x})|^{p(\mathrm{x})}\, d\mathrm{x} < \infty,$$

с нормой Люксембурга

$$\|v\|_{p(\cdot),Q} = \|v\|_{L_{p(\cdot)}(Q)} = \inf\left\{k > 0 \;\middle|\; \rho_{p(\cdot),Q}(v/k) \leq 1\right\}.$$

Обозначим $\overrightarrow{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) = (p_1(\mathrm{x}), p_2(\mathrm{x}), \ldots, p_n(\mathrm{x})) \in (C^+(\overline{Q}))^n$ и положим $p_+(\mathrm{x}) =$

$\max_{i=\overline{1,n}} p_i(\mathrm{x})$, $\mathrm{x} \in Q$. Анизотропное пространство Соболева с переменными показателями $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ определим как пополнение пространства $C_0^\infty(Q)$ по норме

$$\|v\|_{\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)} = \sum_{i=1}^{n} \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot),Q}.$$

Пространство $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$ является рефлексивным банаховым [6].

Существенное значение в полученных результатах играет теорема вложения для пространства $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q)$, установленная Х. Фаном [6]. Пусть

$$\overline{p}(\mathrm{x}) = n\left(\sum_{i=1}^{n} 1/p_i(\mathrm{x})\right)^{-1}, \quad p_*(\mathrm{x}) = \begin{cases} \frac{n\overline{p}(\mathrm{x})}{n-\overline{p}(\mathrm{x})}, & \overline{p}(\mathrm{x}) < n, \\ +\infty, & \overline{p}(\mathrm{x}) \geq n, \end{cases}$$

$$p_\infty(\mathrm{x}) = \max\{p_*(\mathrm{x}), p_+(\mathrm{x})\}.$$

Теорема вложения. *Пусть Q — ограниченная область и $\overrightarrow{\mathrm{p}}(\mathrm{x}) = (p_1(\mathrm{x}), p_2(\mathrm{x}), \ldots, p_n(\mathrm{x})) \in (C^+(\overline{Q}))^n$. Если $q(\mathrm{x}) \in C^+(\overline{Q})$ и*

$$q(\mathrm{x}) < p_\infty(\mathrm{x}) \quad \forall\, \mathrm{x} \in Q, \tag{3}$$

то имеет место непрерывное и компактное вложение $\mathring{H}^1_{\overrightarrow{\mathrm{p}}(\cdot)}(Q) \hookrightarrow L_{q(\cdot)}(Q)$.

Сформулируем условия, которые накладываются на функции, входящие в уравнение (1). Пусть $\overrightarrow{\mathbf{p}}(\mathrm{x}) = (p_0(\mathrm{x}), p_1(\mathrm{x}), \ldots, p_n(\mathrm{x})) \in (C^+(\mathbb{R}^n))^{n+1}$ и

$$p_+(\mathrm{x}) \leq p_0(\mathrm{x}) < p_*(\mathrm{x}), \quad \mathrm{x} \in \Omega. \tag{4}$$

Предполагается, что функции $a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})$, $i = 0, \ldots, n$, измеримы по $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ для $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) = (s_0, s_1, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^{n+1}$, непрерывны по $\mathbf{s} \in \mathbb{R}^{n+1}$ для п.в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$. Кроме того, существуют измеримые положительные $\varphi(\mathrm{x}), \Phi(\mathrm{x})$ и неотрицательные функции $\phi(\mathrm{x})$, $\Phi_i(\mathrm{x})$, $i = 0, 1, \ldots, n$, такие что для п. в. $\mathrm{x} \in \mathbb{R}^n$ и любых $\mathbf{s} = (s_0, \mathrm{s}) \in \mathbb{R}^{n+1}$ справедливы неравенства

$$|a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s})| \leq \Phi(\mathrm{x})\mathbf{P}(\mathbf{s})^{1/p_i'(\mathrm{x})} + \Phi_i(\mathrm{x}), \quad i = 0, 1, \ldots, n; \tag{5}$$

$$\sum_{i=1}^{n} (a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) - a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{t}))(s_i - t_i) > 0, \quad \mathrm{s} \neq \mathrm{t}; \tag{6}$$

$$\sum_{i=0}^{n} a_i(\mathrm{x}, s_0, \mathrm{s}) s_i \geq \varphi(\mathrm{x})\mathbf{P}(\mathbf{s}) - \phi(\mathrm{x}), \tag{7}$$

$\mathbf{P}(\mathbf{s}) = \sum\limits_{i=0}^{n} |s_i|^{p_i(\mathrm{x})}$.

Введем обозначение $v_{x_0} = v$. Определим пространство Соболева с переменными показателями $W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(Q)$ как пополнение пространства $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ по норме

$$\|v\|_{W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(Q)} = \sum_{i=0}^{n} \|v_{x_i}\|_{p_i(\cdot),Q}.$$

Далее, определим $L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$, $W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot),\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$ как пространства, состоящие из измеримых функций $v(\mathrm{x})$, определенных в $\mathbb{R}^n$, и при этом $v(\mathrm{x}) \in L_\infty(Q)$, $L_1(Q)$, $W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot)}(Q)$, соответственно, для любой ограниченной $Q \subset \mathbb{R}^n$.

Будем считать, что неотрицательные функции

$$\Phi_i \in L_{p_i'(\cdot),\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n),\ \phi \in L_{1,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n), \quad i = 0, 1, \ldots, n; \tag{8}$$

$$\Phi,\ 1/\varphi,\ \varphi \in L_{\infty,\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n). \tag{9}$$

Определение. *Обобщенным решением уравнения* (1) *назовем функцию* $u(\mathrm{x}) \in W^1_{\overrightarrow{\mathbf{p}}(\cdot),\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^n)$*, удовлетворяющую интегральному тождеству*

$$\int\limits_{\Omega} \sum_{i=0}^{n} a_i(\mathrm{x}, u, \nabla u)\, v_{x_i}\, d\mathrm{x} = 0$$

для любой функции $v(\mathrm{x}) \in C_0^1(\mathbb{R}^n)$.

Теорема. *Если выполнены условия* (4) – (9)*, то существует обобщенное решение уравнения* (1).

Литература

1. Brezis H. *Semilinear equations in R_N without condition at infnity* // Appl. Math. Optim. – 1984. – Т. 12. – № 3. – P. 271–282.

2. Boccardo L. Gallouet T., Vazquez J.L. *Nonlinear elliptic equations in R_N without growth restrictions on the data* // Differential Equations. – 1993. – Т. 105. – № 2. – P. 334–363.

3. Laptev G.I. *Existence of solutions of certain quasilinear elliptic equations in R_N without conditions at infinity* // J. of Math. Sciences (New York). – 2008. – Т. 150. – № 5. – P. 2384–2394.

4. Кожевникова Л.М., Хаджи А.А. *Существование решений анизотропных эллиптических уравнений с нестепенными нелинейностями в неограниченных областях* // Матем. сборник. – 2015. – Т. 206. – № 8. – С. 99–126.

5. Bokalo M., Domanska O. *On well-posedness of boundary problems for elliptic equations in general anisotropic Lebesgue-Sobolev spaces* // Mathematychni Studii. – 2007. – Т. 28. – № 1. – P. 77–91.

6. Fan X. *Anisotropic variable exponent Sobolev spaces and p(x) Laplacian equations* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2011. – Т. 56. – № 7–9. – P. 623–642.

EXISTENCE OF SOLUTIONS OF ANISOTROPIC ELLIPTIC EQUATIONS WITH VARIABLE EXPONENTS OF NONLINEARITY IN R^N

A.Sh. Kamaletdinov, L.M. Kozhevnikova

We consider a class of anisotropic elliptic equations of the second order with divergent form and variable non-linearities. In $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, we obtain solvability conditions equations. The proof of the existence of solutions without restrictions on growth of the input data for $|\mathrm{x}| \to \infty$ is given.

Keywords: anisotropic elliptic equation, existence solution, variable exponent, pseudomonotone operator.

УДК 517.575

О ТОЖДЕСТВАХ НА СФЕРЕ ДЛЯ ПОЛИГАРМОНИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

В.В. Карачик[1]

1 *karachik@susu.ru*; Южно-Уральский государственный университет

В статье получены тождества для интегралов по единичной сфере от нормальных производных полигармонических функций в единичном шаре.

Ключевые слова: полигармонические функции, нормальные производные, тождества на сфере.

Известно, что для гармонической в единичном шаре $S \subset \mathbb{R}^n$ функции $u \in C^m(\bar{S})$ верно равенство (см. например, [1])

$$\int_{\partial S} \frac{\partial^m u}{\partial \nu^m}\, ds_x = 0, \quad m \in \mathbb{N},$$

где $\frac{\partial u}{\partial \nu}$ – производная по направлению внешней нормали к ∂S. В настоящей работе выясняется, какие еще равенства такого вида могут иметь место для нормальных производных от k-гармонических в S функций $u(x)$, т.е. таких функций, что $\Delta^k u = 0$ в S. В работе [2] исследовано свойство среднего для полигармонических функций и получены некоторые результаты, на основании которых выполнено настоящее исследование. Пусть полиномы $P_n(t)$ находятся из рекуррентного равенства

$$P_n(t) + (2n-3)P_{n-1}(t) = t^2 P_{n-2}(t), \quad n \geq 2,$$

где следует считать, что $P_0(t) = 1$, $P_1(t) = 1$.

Теорема 1. *Для всякой m-гармонической в S функции $u \in C^k(\bar{S})$ при $k \geq m$ верны равенства*

$$\int_{\partial S} P_{m-i}\Big(\frac{\partial}{\partial \nu}\Big)\frac{\partial^{2i} u}{\partial \nu^{2i}}\, ds_x = 0, \quad \int_{\partial S} \frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}\, ds_x = 0,$$

где $0 \leq i \leq m-1$ и $2m \leq j \leq k$ при $2m \leq k$.

В работе [3] при исследовании арифметического треугольника, возникающего из условий разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения, был получен арифметический треугольник, похожий на арифметический треугольник, который составляют коэффициенты полиномов $P_n(t)$.

Пример. Если k-гармоническая в S функция $u \in C^k(\bar{S})$ удовлетворяет на ∂S равенствам

$$\frac{\partial^j u}{\partial \nu^j}|_{\partial S} = \varphi_j(x), \quad j = 1, \ldots, k$$

т.е. $u(x)$ – решение однородной задачи Неймана [4] для полигармонического уравнения в S, то для функций $\varphi_j(x)$, $j = 1, \ldots, k$, по теореме 1, необходимо выполнение условия [5]

$$\int_{\partial S} \sum_{j=1}^{k} (-1)^{j+k} \binom{2k-j-1}{j-1} (2k-2j-1)!!\, \varphi_j(x)\, ds_x = 0.$$

Литература

1. Карачик В. В. *О свойстве среднего для полигармонических функций в шаре* // Математические труды. – 2013. – Т. 16. – № 2. – С. 69–88.

2. Karachik V. V. *On the mean-value property for polyharmonic functions* // Вестник Южно-Уральского государственного университета. Серия: Математическое моделирование и программирование. – 2013. – Т. 6. – № 3. – С. 59–66.

3. Карачик В. В. *Об арифметическом треугольнике, возникающем из условий разрешимости задачи Неймана* // Математические заметки. – 2014. – Т. 96. – № 2. – С. 228–238.

4. Карачик В. В. *Условия разрешимости задачи Неймана для однородного полигармонического уравнения* // Дифференциальные уравнения. – 2014. – Т. 50. – № 11. – С. 1455–1461.

5. Карачик В. В. *Об условиях разрешимости задачи Неймана для полигармонического уравнения в единичном шаре* // Сибирский журнал индустриальной математики. – 2013. – Т. XVI. – № 4(56). – С. 61–74.

ON IDENTITIES ON THE UNIT SPHERE FOR POLYHARMONIC FUNCTIONS

V.V. Karachik

Some identities for integrals over the unit sphere of the normal derivatives of polyharmonic in the unit ball functions are obtained.

Keywords: polyharmonic functions, normal derivatives, identities on the unit sphere.

УДК 517.982

ОБ УСЛОВИЯХ КОМПАКТНОСТИ В ПРОСТРАНСТВАХ $\varphi(L)$

И.Н. Катковская[1], В.Г. Кротов[2]

1 *ikatkovskaya@bntu.by*; Белорусский национальный технический университет
2 *krotov@bsu.by*; Белорусский государственный университет

В работе приводятся критерии компактности множеств в пространствах $\varphi(L)$, состоящих из классов эквивалентности измеримых функций f, для которых композиция $\varphi\circ f$ суммируема на метрическом пространстве X с мерой, удовлетворяющей условию удвоения. Здесь $\varphi:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ — четная функция, положительная, непрерывная и возрастающая на $(0,+\infty)$, причем $\varphi(+0)=0$, $\lim_{t\to\infty}\varphi(t)=\infty$. Кроме того, предполагается, что φ удовлетворяет Δ_2-условию Орлича. Критерии компактности формулируются в терминах максимальных операторов, измеряющих локальную гладкость.

Ключевые слова: условие удвоения, компактность, пространства суммируемых функций, максимальные операторы, локальная гладкость.

Пусть (X,d,μ) — ограниченное метрическое пространство с метрикой d и борелевской мерой μ, удовлетворяющее условию удвоения

$$\mu(B(x,2r))\le C_\mu\mu(B(x,r)),\quad x\in X,\ r>0,$$

где $B(x,r)=\{y\in X: d(x,y)<r\}$.

Пусть Φ — множество всех четных функций $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, положительных, непрерывных и возрастающих на $(0, +\infty)$, причем

$$\varphi(+0) = 0, \quad \lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty, \quad \varphi(2t) \le C\varphi(t), \quad t > 0.$$

Пусть Ω обозначает класс положительных возрастающих функций $\eta : (0, 1] \to (0, 1]$, для которых $\eta(+0) = 0$.

Если $\varphi \in \Phi$, то $\varphi(L)$ — множество (классов эквивалентности) измеримых функций $f : X \to \mathbb{R}$, для которых композиция $\varphi \circ f$ суммируема на X. Подробную информацию о классах $\varphi(L)$ можно найти в [1]. В частности, в [1, §6] указано, что в $\varphi(L)$ имеется естественная топология, предбазой которой является семейство множеств

$$\left\{ g \in \varphi(L) : \int_X \varphi(f - g)\, d\mu < \varepsilon \right\}, \quad f \in \varphi(L),\ \varepsilon > 0.$$

Множество $S \subset \varphi(L)$ назовем ограниченным в $\varphi(L)$, если

$$\sup_{f\in S} \int_X \varphi(f)\, d\mu < \infty.$$

Для $\eta \in \Omega$, $\varphi \in \Phi$, $q > 0$ и $f \in \varphi(L)$ обозначим

$$\mathcal{N}_\eta^{\varphi,q} f(x) = \sup_{B\ni x} \frac{1}{\eta(r_B)} \left(\fint_B \varphi^q(f(x) - f(y))\, d\mu(y) \right)^{1/q}$$

(точная верхняя граница берется по всем шарам $B \subset X$, содержащим точку x). Максимальные операторы такого рода впервые рассматривались А. Кальдероном [2] для степенных функций η. Для любых $\eta \in \Omega$ их ввел В.И. Коляда [3].

Теорема 1. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $q > 0$ и $S \subset \varphi(L)$ — ограниченное множество. Тогда если для некоторой $\eta \in \Omega$*

$$\sup_{f\in S} \int_X \mathcal{N}_\eta^{\varphi,q} f\, d\mu < +\infty, \tag{1}$$

то S вполне ограничено в $\varphi(L)$.

Утверждение, обратное к теореме 1, также справедливо, но при дополнительном ограничении $0 < q < 1$. При $q \ge 1$ условие (1) уже перестает быть необходимым для полной ограниченности множества $S \subset \varphi(L)$.

Условие (1) в теореме 1 можно несколько ослабить.

Теорема 2. *Пусть $\varphi \in \Phi$, $q > 0$ и $S \subset \varphi(L)$ — ограниченное множество. Тогда если*

$$\lim_{r\to+0} \sup_{f\in S} \int_X \left(\frac{1}{\mu(B(x,r))} \int_{B(x,r)} \varphi^q(f(x) - f(y))\, d\mu(y) \right)^{1/q} d\mu(x) = 0, \tag{2}$$

то S вполне ограничено в $\varphi(L)$.

Для неограниченных пространств X теоремы 1 и 2 неверны. Однако они остаются справедливыми и в таком случае, если от множества S дополнительно потребовать выполнения следующего условия:

$$\lim_{R\to+\infty} \sup_{f\in S} \int_{X\setminus B(x_0,R)} \varphi(f)\, d\mu = 0,$$

где $x_0 \in X$ — некоторый фиксированный элемент. Необходимость таких условий для компактности множеств в пространствах суммируемых функций впервые отметил Я.Д. Тамаркин [4].

Для степенной функции $\varphi(t) = t^p$ при $p > 0$ эти результаты были получены в [2]. Мы используем методы этой работы.

Литература

1. Ульянов П. Л. *Представление функций рядами и классы $\varphi(L)$* // Успехи матем. наук. – 1972. – Т. 27. – № 2. – С. 1–54.

2. Calderon A. P. *Estimates for singular integral operators in terms of maximal functions* // Studia Math. – 1972. – V. 44. – № 3. – С. 561–582.

3. Коляда В. И. *Оценки максимальных функций, связанных с локальной гладкостью* // Доклады АН СССР. – 1987. – Т. 293. – № 4. – С. 534–537.

4. Tamarkin J. D. *On the compactness of the space L_p* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1932. – Т. 38. – № 2. – С. 79–84.

5. Кротов В. Г. *Критерии компактности в пространствах L^p, $p \geq 0$* // Матем. сб. –2012. – Т. 203. – № 7. – С. 129–148.

ON COMPACTNESS CONDITIONS IN THE SPACES $\varphi(L)$

I.N. Katkovskaya, V.G. Krotov

In this paper, we give criteria for the compactness of sets in the spaces $\varphi(L)$ consisting of equivalence classes of measurable functions f for which the composite $\varphi \circ f$ is summable on a metric space X with a measure that satisfies the doubling condition. Here $\varphi : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is an even function, positive, continuous and increasing on $(0, +\infty)$, and $\varphi(+0) = 0$, $\lim_{t\to\infty} \varphi(t) = \infty$. In addition, it is assumed that φ satisfies the Orlicz Δ_2-condition. The compactness criteria are formulated in terms of maximal operators measuring the local smoothness.

Keywords: doubling condition, compactness, spaces of summable functions, maximal operators, local smoothness.

УДК 517.5

ПРОБЛЕМА О СКАЧКЕ НА ДУГЕ ДЛЯ β-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Б.А. Кац[1], С.Р. Миронова[2], А.Ю. Погодина[3]

1 *katsboris877@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

2 *srmironova@yandex.ru*; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

3 *apogodina@yandex.ru*; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ

Мы рассматриваем краевую задачу о скачке на жордановой дуге и ищем решение в классе функций, являющихся β-аналитическими функциями.

Ключевые слова: уравнение Бельтрами, краевая задача о скачке, β-аналитические функции.

Рассмотрим уравнение Бельтрами

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi, \quad |\mu(z)| < 1,$$

где

$$\overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right).$$

Оно является обобщением уравнения Коши-Римана $\overline{\partial}\phi = 0$ и имеет большое количество применений, см. напр., [1–3]. В 1985 г. А.Б. Тунгатаров [4] исследовал это уравнение при $\mu(z) = \beta(z/\overline{z})$, $0 \le \beta < 1$, и установил следующий аналог формулы Коши для решений этого уравнения:

$$\phi(z) = \frac{1}{2(1-\beta)\pi i}\int_\Gamma \frac{\phi(\zeta)d\zeta}{\zeta - z|z/\zeta|^\theta} + \frac{\beta}{2(1-\beta)\pi i}\int_\Gamma \frac{\zeta\phi(\zeta)d\overline{\zeta}}{\overline{\zeta}(\zeta - z|z/\zeta|^\theta)},$$

где $\theta = 2\beta/(1-\beta)$, Γ — замкнутая гладкая кривая, ограничивающая некоторую плоскую область.

Затем в статьях [5–9] были изучены краевые задачи для непрерывно дифференцируемых решений этого уравнения, называемые β-аналитическими функциями; были решены задача о скачке и задача Римана на замкнутых кривых.

Здесь мы исследуем задачу о скачке для β-аналитических функций на жордановых дугах.

Пусть Γ – ориентированная гладкая дуга, начинающаяся в точке t_1 и заканчивающаяся в точке t_2, $\Gamma' = \Gamma \setminus \{t_1, t_2\}$ и $0 \notin \Gamma$. Мы ищем β-аналитическую функцию $\Phi(z)$ такую, что в каждой точке $t \in \Gamma'$ она обладает предельными значениями слева и справа, удовлетворяющие соотношению

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = f(t), \quad t \in \Gamma', \tag{1}$$

с заданной функцией $f(t)$. Кроме того, требуется, чтобы $\Phi(\infty) = 0$ и в концевых точках дуги имеют место соотношения

$$\Phi(z) = O(|z - t_j|^{-\alpha_j}), \quad z \to t_j, \quad \alpha_j = \alpha_j(\Phi) < 1, \quad j = 1,2. \tag{2}$$

Для случая $\beta = 0$ задача о скачке на гладких дугах изучена, и ее решение хорошо известно, см., напр., [10, 11]. Основным аппаратом здесь является интеграл типа Коши. В настоящей работе мы применяем его аналог

$$\Phi(z) = C_\Gamma^\beta(f; z) := \frac{1}{2(1-\beta)\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z|z/\zeta|^\theta}(d\zeta + \beta(\zeta/\overline{\zeta})d\zeta). \tag{3}$$

Такой интеграл, взятый по замкнутой кривой, исследовался в [5–7]. Отметим некоторые свойства интеграла в (3).

Лемма 1. *Если интеграл в* (3) *существует, то правая часть этого равенства определяет β-аналитическую функцию в $\mathbb{C}\setminus\gamma$, обращающуюся в нуль на бесконечности.*

Обозначим через $H_\nu(\Gamma)$ класс функций, удовлетворяющих условию Гельдера с показателем ν, $\nu \in (0;1]$.

Лемма 2. *Если функция* $f(t) \in H_\nu(\Gamma)$*, то функция* Φ*, определенная равенством* (3)*, имеет предельные значения слева и справа* $\Phi^{\pm}(t)$ *в любой точке* $t \in \Gamma'$*, удовлетворяющие равенству* (1).

Заметим, что отображение $z \mapsto z|z|^\theta$ является взаимно однозначным. Оно билипшицево на каждом компактном подмножестве плоскости. не содержащем начало координат. обозначим через $\widetilde{\Gamma}$ образ дуги Γ при этом отображении.

Лемма 3. *Если функция* $f(t) \in H_\nu(\Gamma)$*, то в окрестности концевых точек дуги* Γ *функция* Φ*, определенная в* (3)*, имеет следующее поведение:*

$$\Phi(z) = \frac{f(t_j)}{2(1-\beta)\pi i} \ln \frac{\widetilde{z} - \widetilde{t}_2}{\widetilde{z} - \widetilde{t}_1} + c_j + o(1), \quad j = 1, 2,$$

где c_j *– константы, а ветвь логарифма определяется разрезом вдоль* $\widetilde{\Gamma}$.

На основании лемм 1–3 доказывается

Теорема. *Функция* $\Phi(z) = C_\Gamma^\beta(f; z)$ *является единственным решением задачи о скачке* (1)–(2) *на гладкой дуге* Γ*, удовлетворяющим уравнению Бельтрами* $\overline{\partial}\phi = \beta(z/\overline{z})\partial\phi$ *и обращающимся в нуль на бесконечности.*

Работа первого автора поддержана грантом РФФИ No 17-41-160345.

Литература

1. Векуа И. Н. *Обобщенные аналитические функции.* – Москва: Наука, 1988.

2. Bojarski B. *Old and new on Beltrami equations* // Functional Analytic Methods in Complex Analysis and Applications to Partial Differential Equations. Proc. of the ICTP Conference. – Trieste, Italy, Feb., 8–19, 1988.

3. Iwaniec T., Martin G. *What's new for the Beltrami equation?* // Proc. of the National Research Symposium on Geometric Analysis and Appls. June, 26-30, 2000. – Canberra, Proc. Centre Math. Appl. 2000. – V. 39. – P. 132–148.

4. Tungatarov A. B. Properties of certain integral operator in classes of summable functions // Izv. AN Kazakh. SSR, Ser. Fiz.-Mat. – 1985. – V. 132, No 5. – P. 58–62.

5. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Pena-Pena D. *On the jump problem for β-analytic functions* // Complex Var. Elliptic Equat. – 2006. – V. 51. – P. 763–775.

6. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J. *A property of the β-Cauchy type integral with continuous density* // Ukr. Math. J. – 2008. – V. 60. – P. 1683–1690.

7. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Pena-Pena D., Vilaire J.-M. *Riemann boundary value problem for analytic functions* // Int. J. Pure Appl.Math. – 2008. – V. 42. – P. 19-37.

8. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Vilaire J.-M. *A jump problem for β-analytic functions in domains with fractal boundaries* // Rev. Mat. Comput. – 2010. – V. 23. – P. 105-111.

9. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Vilaire J.-M. *The Riemann boundary value problem for β-analytic functions over D-summable closed curves* // Int. J. Pure Appl. Math. – 2012. – V. 75. – P. 441-453.

10. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи, 3-е изд.* – Москва: Наука, 1977.

11. Jian-Ke Lu *Boundary Value Problems for Analytic Functions.* – Singapore: World Scientific, 1993.

JUMP PROBLEM ON AN ARC FOR β-ANALYTIC FUNCTIONS

B.A. Kats, S.R. Mironova, A.Yu. Pogodina

We consider the jump boundary problem on a Jordan arc for β-analytic functions.
Keywords: Beltrami equation, jump problem, β-analytic functions.

УДК 517.544

ПОКАЗАТЕЛИ МАРЦИНКЕВИЧА И ЗАДАЧА О СКАЧКЕ ДЛЯ β-АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

Д.Б. Кац[1]

1 *katzdavid89@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В данной работе мы изучаем задачу о скачке и некоторые решения уравнения Бельтрами. Как задача о скачке, так и уравнения Бельтрами имеют многочисленные приложения в физике и механике. Они изученые для случаев аналитических (т.е. 0*-аналитических) функций и спрямляемых контуров. Мы обсуждаем эти вопросы для случаев β-аналитических функций и неспрямляемых кривых. Расширяя известную технику решения данных задач на такие случаи, мы получаем неизвестные ранее результаты.*

Ключевые слова: фракталы, фрактал, показатели Марцинкевича, метрические характеристики, неспрямляемые кривые.

Одним из крайне востребованных в механике и физике обобщений уравнений Коши–Римана (см., напр., [1]) является уравнение Бельтрами

$$\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi, \quad |\mu(z)| < 1$$

Здесь, как обычно,

$$\overline{\partial} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} + i\frac{\partial}{\partial y}\right), \quad \partial := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x} - i\frac{\partial}{\partial y}\right)$$

В случае

$$\mu(z) = \beta\frac{z}{\overline{z}}, \quad 0 \le \beta < 1$$

правый обратный оператор для дифференциального оператора Бельтрами $\overline{\partial} - \mu\partial$ (аналог известного оператора T из [1]) был в явном виде найден казахским математиком А. Тунгатаровым [3]. Решения соответствующего уравнения Бельтрами получили название β–аналитических функций.

В наши дни исследования аналогов краевой задачи Римана и связанных с ними вопросов для таких функций получили дальнейшее развитие в работах таких математиков, как Рикардо Абреу-Блайя, Хуан Бори-Рейес, Диксан Пенья-Пенья и Жан-Мария Вилье (см. [4], [6]).

Для аналитических (т. е. 0-аналитических) функций краевая задача Римана хорошо изучена в следующей постановке: Пусть Г есть ориентированная кривая на

комплексной плоскости, на которой заданы функции $G(t)$ и $g(t)$. Требуется найти все голоморфные в $\overline{\mathbb{C}} \setminus \Gamma$ функции $\phi(z)$, имеющие на Γ непрерывные предельные значения $\phi^+(t)$ и $\phi^-(t)$ слева и справа соответственно, исчезающие в бесконечно удаленной точке и удовлетворяющие краевому условию

$$\phi^+(t) = G(t)\phi^-(t) + g(t), \quad t \in \Gamma.$$

Классические результаты в этой области [7] получены для случая кусочно-гладкого контура. На неспрямляемых контурах задача Римана для аналитических функций была решена Б.А. Кацем [9]. Рикардо Абреу-Блайя, Хуан Бори-Рейес, Диксан Пенья-Пенья и Жан-Мария Вилье использовали предложенные в этих работах методы для решения задачи Римана и задачи о скачке для β-аналитических функций на неспрямляемых кривых. Ими получены следующие условия разрешимости таких задач.

Пусть Γ – множество на комплексной плоскости, $0 < \nu \le 1$. Класс $H_\nu(\Gamma)$ состоит из заданных на Γ функций $f(t)$, удовлетворяющих условию Гёльдера

$$h_\nu(f;\Gamma) := \sup\left\{\frac{|f(t) - f(t')|}{|t - t'|^\nu} : t, t' \in \Gamma, t \ne t'\right\} < \infty$$

Если множество Γ компактно, то его размерность Минковского [10], определяется равенством

$$\dim \Gamma := \limsup_{\varepsilon \to 0+} \frac{\log N(\Gamma;\varepsilon)}{-\log \varepsilon},$$

где $N(\Gamma;\varepsilon)$ означает наименьшее число кругов радиуса ε, образующих покрытие Γ. Такая размерность плоского континуума всегда лежит в промежутке $[1;2]$; если Γ – спрямляемая кривая, то $\dim \Gamma = 1$, а для неспрямляемой кривой размерность Минковского может превосходить единицу.

В работе [5] доказано, что задача о скачке (частный случай задачи Римана с $G \equiv 1$) для $\beta-$аналитических функций на неспрямляемом контуре Γ разрешима, если $g \in H_\nu(\Gamma)$, причём

$$\nu > \frac{1}{2}\dim \Gamma. \tag{1}$$

Далее, в [6] разрешимость задачи Римана для $\beta-$аналитических функций на неспрямляемом контуре Γ установлена в предположении, что контур является d-суммируемым, а коэффициенты задачи G и g удовлетворяют условию Гельдера с показателем

$$\nu > d/2. \tag{2}$$

Понятие d-суммируемости введено Дж. Харрисон и А. Нортоном [11]; контур Γ называется d-суммируемым, если сходится интеграл

$$\int_0 N(\Gamma;x)x^{d-1}dx.$$

Как показано в [11], d-суммируемость Γ влечет неравенство $\dim \Gamma \le d$, а при $\dim \Gamma < d$ множество Γ является d-суммируемым.

Недавно автор [12], [13] ввел новую метрическую характеристику неспрямляемых кривых — показатель Марцинкевича. Цель данного доклада — показать, что эта характеристика позволяет ослабить условия 1 и 2.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Правительства Республики Татарстан, грант № 17-41-160345

Литература

1. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические фукции*. – М.: Наука, 1988.

2. Монахов В.Н. *Краевые задачи со свободными границами для эллиптических систем уравнений*. – Новосибирск: Наука, 1977.

3. Тунгатаров А.Б. *Свойства одного интегрального оператора в классах суммируемых функций* // Известия АН Казахской ССР. Серия физико-математическая. – 1985. – Т. 132. – № 5. – С. 58–62.

4. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J., Pena-Pena D. *On the jump problem for β–analytic functions* // Complex Variables and Elliptic Equations. – 2006. – V. 51. – № 8–11. – P. 763–775.

5. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J. and Vilaire J.-M. *A jump problem for β-analytic functions in domains with fractal boundaries* // Revista Matematica Complutense. – 2010. – V. 23. – P. 105–111.

6. Abreu-Blaya R., Bory-Reyes J. and Vilaire J.-M. *The Riemann boundary value problem for β-analytic functions over D-summable closed curves* // International Journal of Pure and Applied Mathematics. – 2012. – V. 75. – № 4. – P. 441–453.

7. Гахов Ф.Д. *Краевые задачи*. – М.: Наука, 1977. – 640 с.

8. Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения*. – М.: Наука, 1962.

9. Кац Б.А. *Задача Римана на замкнутой жордановой кривой* // Известия ВУЗов. Математика. – 1984. – № 3. – С. 68–80.

10. Falconer K.J. *Fractal geometry*. – UK: Wiley and Sons, Chichester, 3rd edition, 2014.

11. Harrison J., Norton A. *The Gauss-Green theorem for fractal boundaries* // Duke Mathematical Journal. – 1992. – № 67. – P. 575–588.

12. Кац Д.Б. *Показатели Марцинкевича и их приложения в краевых задачах* // Известия ВУЗов. Математика. – 2014. – № 3. – С. 68–71.

13. Кац Д.Б. *Локальные показатели Марцинкевича и их приложение* // Учен. зап. Казан. ун-та. Сер. Физ.-матем. науки. — 2014. — Т. 156, кн. 4. — С. 31–38.

MARCINKIEWICZ EXPONENTS AND THE JUMP PROBLEM FOR β-ANALYTIC FUNCTIONS

D.B. Katz

In this paper we study the jump problem and some certain solutions of Beltrami equation $\overline{\partial}\phi = \mu\partial\phi$. The jump problem and Beltrami equation both have a lot of applications in physics and mechanics. They are already studied in previous papers for analytic (i.e. 0*-analytic) functions. Now we shall study same problems on β-analytic functions. We shall expand our technic onto those functions and obtain new results in this field.*

Keywords: fractal, Marcinkiewicz exponents, metric characteristics, non-rectifiable curves.

ОБ ОПЕРАТОРНЫХ НОРМАХ ПОДМАТРИЦ

Б.С. Кашин[1]

1 Математический Институт им. В.А. Стеклова РАН

УДК 517.54

О КРИТИЧЕСКИХ ЗНАЧЕНИЯХ ПОЛИНОМОВ

И.Р. Каюмов[1], Д.М. Хамматова[2], А. Хинкканен[3]

1 *ikayumov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *dianalynx@rambler.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

3 *aimo@math.uiuc.edu*; Department of Mathematics University of Illinois at Urbana-Champaign

Доказана дуальная гипотеза Смейла для случаев $n = 5$ *и* $n = 6$.

Ключевые слова: дуальная гипотеза Смейла, критические точки, критические значения полиномов.

В 1981 году Смейл [1] выдвинул следующую гипотезу. Пусть f - полином, $\deg f \geq 2$, такой что $f(0) = 0$ и $f'(0) = 1$. Обозначим

$$S(f) = \min\left\{\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| : f'(\zeta) = 0\right\},$$

$$K_n = \sup\{S(f) : \deg f = n, f(0) = 0, f'(0) = 1\}.$$

Гипотеза утверждает, что $K_n = 1 - 1/n$. Доказаны следующие неравенства:

$$1 - \frac{1}{n} \leq K_n < 4.$$

Существует большое количество оценок для различных частных случаев. Некоторые из них можно найти в статье [2]. Целью данной работы является изучение дуальной гипотезы Смейла.

Гипотеза. *Пусть* f *– полином,* $\deg f \geq 2$*, такой, что* $f(0) = 0$ *и* $f'(0) = 1$*. Тогда существует* ζ *– критическая точка* f*, такая что*

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| \geq \frac{1}{n}.$$

Тишлер [3] доказал, что гипотеза верна для таких полиномов, что

$$\frac{f(\zeta)}{\zeta} = \text{const}.$$

для всех критических точек f. Дубинин и Сугава [4] доказали, что существует такая критическая точка ζ, для которой

$$\left|\frac{f(\zeta)}{\zeta}\right| \geq \frac{1}{n4^n}.$$

Гипотеза легко проверяется для малых значений n, однако, уже начиная с $n = 4$ проверка представляет из себя сложную задачу, требующую длительных рассуждений.

Доказательство для $n = 4$ было представлено Тишлером в [3].
Основным результатом данной работы является доказательство дуальной гипотезы Смейла для случаев $n = 5$ и $n = 6$.

Исследования первого автора были проведены при поддержке РФФИ (проект 17-01-00282).

Литература

1. Smale S. *The fundamental theorem of algebra and complexity theory* // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) – 1981. – № 4. – P. 1–36.

2. Beardon A.F., Minda D., Ng T.W. *Smale's mean value conjecture and the hyperbolic metric* // Math. Ann. – 2002. – V. 322, № 4. – P. 623–632.

3. Tischler D. *Critical points and values of complex polynomials* // J. Complexity. – 1989. – № 5. – P. 438–456.

4. Dubinin V., Sugawa T. *Dual mean value problem for complex polynomials* // Proc. Japan Acad. Ser. A Math. Sci. – 2009. – V. 85, № 9. – P. 135–137.

ABOUT CRITICAL VALUES OF POLYNOMIALS

I.R. Kayumov, D.M. Khammatova, A. Hinkkanen

We prove dual Smale's mean value conjecture in the cases $n = 5$ and $n = 6$.

Keywords: dual Smale's mean value conjecture, critical points, critical values of polynomials.

УДК 512.583, 539.142

ПРОСТАЯ АЛГЕБРАИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ ДЛЯ МАЛОНУКЛОННЫХ СИСТЕМ ПРИ НАЛИЧИИ НЕАБЕЛЕВЫХ ПРАВИЛ СУПЕРОТБОРА

М.И. Кириллов[1], А.С. Никитин[2], А.С. Ситдиков[3]

1 *kirillov_math@mail.ru*; Казанский государственный энергетический университет
2 *drnikitin@rambler.ru*; Казанский государственный энергетический университет
3 *airat_vm@rambler.ru*; Казанский государственный энергетический университет

Дана формулировка простой алгебраической модели с правилами суперотбора по изоспину. Модель апробирована на двухнуклонной системе и показано, что физически реализуемые состояния, соответствующие связанным состояниям двух нуклонов, можно получить с помощью специального изометрического оператора.

Ключевые слова: алгебра Кунца, тензорная моноидальная C^*-категория, дибарионная система, изоспин, правила суперотбора.

В данной работе мы предлагаем простую алгебраическую модель для описания малонуклонных систем в изотопическом пространстве. В основе модели лежит категория тензорных степеней гильбертова пространства, базисом которого служат изометрии ψ_i $(i = 1,2)$, удовлетворяющие условиям (1) и (2) и которые порождают алгебру Кунца $\mathcal{O}_2$ [1]. В этих гильбертовых пространствах реализуются представления тензорных степеней группы $SU(2)$, которые индексируются с помощью квантовых чисел изоспина $\{0;1/2;1;3/2;...\}$ и правило произведения объектов категории позволяет описать сложение изоспинов и получить соответствующие суперотборные сектора. Эту модель мы применяем для описания двухнуклонной системы и показываем, что изометрические сплетающие операторы (элементы алгебры Кунца), которые поточечно не инвариантны относительно действия группы G, позволяют получать из вакуумного сектора изотопические заряды секторов.

Центральным элементом в такой модельной конструкции является построение C^*-алгебры скрещенного произведения $\mathcal{A} \rtimes\!\lhd \mathcal{T}$ [2]. Эта алгебра содержит $\mathcal{A}$ в качестве подалгебры, остающейся поточечно фиксированной относительно действия компактной группы G, причем G является группой автоморфизмов скрещенного произведения. Другими словами, группа G оказывается замкнутой подгруппой группы $aut\mathcal{A} \rtimes\!\lhd \mathcal{T}$ согласно Галуа-соответствию [3]. В случае алгебры $\mathcal{A}$ с тривиальным центром $\mathbf{C}I$ рассмотрение скрещенного произведения категории $\mathcal{T}$ с объектами вида $obj\mathcal{T} = \{\iota, \rho, \rho\otimes\rho, \rho\otimes\rho\otimes\rho, ...\}$ (где ι – тождественный эндоморфизм), приводит к алгебре Кунца $\mathcal{O}_d$, где d – размерность ρ. Действие G при этом оказывается каноническим, а эндоморфизм ρ алгебры $\mathcal{A}$ порождается фундаментальным мультиплетом (1), (2). Поэтому C^*-динамическую систему $(\mathcal{A}, \rho)$ можно отождествить с C^*-динамической системой $(\mathcal{O}_G, \sigma_G)$, где $\mathcal{O}_G$ – поточечно фиксированная подалгебра алгебры $\mathcal{O}_d$ относительно действия G.

Построим теперь моноидальную категорию $\mathbf{rep}(\mathbf{G})$ тензорных степеней неприводимого представления $\pi^{1/2}$ компактной группы $SU(2)$, объекты которой суть

$$Obj\,\mathbf{rep}(\mathbf{G}) = \{\iota, \pi^{1/2}, (\pi^{1/2})^{\otimes 2}, (\pi^{1/2})^{\otimes 3}, ..., (\pi^{1/2})^{\otimes r}, ..., (\pi^{1/2})^{\otimes s}, ...\},$$

где $\pi^{1/2}\otimes\pi^{1/2} \equiv (\pi^{1/2})^{\otimes 2}, ...$; $r, s \in \mathbf{N}_0$. Морфизмы в этой категории – сплетающие операторы таких представлений. В физическом плане бинарная операция тензорного произведения " $\otimes$ " в категории соответствует векторному сложению изоспинов.

В качестве ортонормированного базиса гильбертова пространства $\mathcal{H}_{TT_z}$, где действуют неприводимые представления $\pi^{1/2}$, выберем мультиплет ψ_i $(i = 1,2)$, удовлетворяющий соотношениям

$$\psi_i^*\psi_j = \delta_{ij} I \tag{1}$$

$$\sum_i \psi_i\psi_i^* = I. \tag{2}$$

При этом элементы ψ_i $(i = 1,2)$, удовлетворяющие соотношениям (1) и (2), порождают *-алгебру ${}^0\mathcal{O}_2$, пополнение которой по C^* норме образует алгебру Кунца $\mathcal{O}_2$. Линейная оболочка $Lin\{\psi_i\}_{i=1}^{d=2}$ данного мультиплета образует d-мерное (в данном случае двумерное) гильбертово пространство $\mathcal{H}_{TT_z}$ со скалярным произведением, представляемым как $(\psi, \psi')I = \psi^*\psi'$, где $\psi, \psi' \in \mathcal{H}_{TT_z}$. Такое гильбертово пространство назовем каноническим. Его тензорные степени $\mathcal{H}^r_{TT_z}$ $(r = 0,1,2,...)$ образуют

подкатегорию **hilb**, где морфизмы – сплетающие операторы. Объекты **hilb** образуют G-модули, в которых действуют непрерывные унитарные представления (т.е. $Obj\mathbf{rep}(\mathbf{G})$) группы G. Морфизмами в этом случае являются G-модульные гомоморфизмы $(\mathscr{H}^r_{TT_z}, \mathscr{H}^s_{TT_z})_G$). Эта конструкция позволяет нам определить подалгебру ${}^0\mathscr{O}_G \subset {}^0\mathscr{O}_d$ алгебры Кунца ${}^0\mathscr{O}_d$ – алгебру наблюдаемых – следующим образом. Поскольку индуктивный предел последовательности

$$(\mathscr{H}^r_{TT_z}, \mathscr{H}^{r+k}_{TT_z})_G \longrightarrow^{\otimes 1} (\mathscr{H}^{r+1}_{TT_z}, \mathscr{H}^{r+1+k}_{TT_z})_G \longrightarrow^{\otimes 1} \ldots \longrightarrow^{\otimes 1} (\mathscr{H}^{r+n}_{TT_z}, \mathscr{H}^{r+n+k}_{TT_z})_G \longrightarrow^{\otimes 1} \ldots,$$

где $(\mathscr{H}^r_{TT_z}, \mathscr{H}^{r+k}_{TT_z})_G \longrightarrow^{\otimes 1} (\mathscr{H}^{r+1}_{TT_z}, \mathscr{H}^{r+1+k}_{TT_z})_G$ – инъективное отображение морфизмов, определяет при фиксированном k некоторое банахово пространство ${}^0\mathscr{O}^k_G$, то суммируя по всем k получаем $\mathbf{Z}$ – градуированную C^*-алгебру ${}^0\mathscr{O}_G = \bigoplus^0_{k\in\mathbf{Z}} {}^0\mathscr{O}^k_G$, в которой действует эндоморфизм σ_G [4] (см. также [2]). Замыкание этой алгебры ${}^0\bar{\mathscr{O}}_G$ приводит к подалгебре $\mathscr{O}_G$ алгебры Кунца, играющей роль алгебры наблюдаемых.

Действие элемента

$$\left[\pi^l(g)\right](\psi_1, \psi_2) = f(\alpha\psi_1 + \gamma\psi_2, \beta\psi_1 + \delta\psi_2), g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in G = SU(2)$$

на эти базисные вектора ψ_1 и ψ_2 при $l = 1/2$ определено стандартным образом:

$$\pi^{1/2}\psi_1 = \alpha\psi_1 + \gamma\psi_2, \quad \pi^{1/2}\psi_2 = \beta\psi_1 + \delta\psi_2,$$

где $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ – матричные элементы фундаментального представления группы $SU(2)$. Образуя из базисных элементов ψ_1 и ψ_2 антисимметричный тензор

$$e_1 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1) \tag{3}$$

и симметричные тензоры

$$e_2 = \psi_1^2, \quad e_3 = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_1), \quad e_4 = \psi_2^2, \tag{4}$$

дающие ортонормированный базис в тензорном квадрате $\mathscr{H}^2_{TT_z}$ размерности 4, порожденный линейной оболочкой $Lin\{\psi_i\psi_j\}^{d=2}_{i,j=1}$, получим матрицу представления, которая представляет собой прямую сумму тривиального ($l = 0$) и трехмерного векторного ($l = 1$) представлений:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 0 & 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\delta\beta \\ 0 & \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix} = 1 \bigoplus \begin{pmatrix} \alpha^2 & \alpha\beta & \beta^2 \\ 2\alpha\gamma & \alpha\delta + \beta\gamma & 2\delta\beta \\ \gamma^2 & \gamma\delta & \delta^2 \end{pmatrix}.$$

При этом (3), (4) соответствуют равновероятным состояниям двух нуклонов, не поляризованных по изоспину, т.е. отвечают за состояния pp, nn, np и pn, где p – состояние протона, n – нейтрона.

Используя (3), (4), введем операторы проектирования для двухнуклонных состояний: SS^* на антисимметрическое, и KK^*, LL^*, MM^* на симметрическое подпространства, где $S = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 - \psi_2\psi_1)$, $K = \frac{1}{\sqrt{2}}(\psi_1\psi_2 + \psi_2\psi_1)$, $L = \psi_1^2$, $M = \psi_2^2$.

Нетрудно увидеть, что проектор SS^* оставляет неизменной нейтрон-протонное антисимметричное состояние, обращая в нуль все остальные, проектор LL^* оставляет неизменной двухнейтронное состояние, обращая в нуль все остальные, проектор KK^* не меняет симметричное нейтрон-протонное состояние, обращая в нуль все остальные и наконец, проектор MM^* оставляет двухпротонное состояние, обращая в нуль все остальные. Оператор MM^* может быть рассмотрен и как оператор двух обычных электрических зарядов. Сами изометрические операторы S, K, L, M осуществляют связь между вакуумным гильбертовым пространством $\mathscr{H}^0 \equiv \mathbf{C}$ и двухнуклонным пространством состояний $\mathscr{H}^2$, причем не инвариантные относительно действия группы $SU(2)$ операторы K, L, M порождают из вакуума изотопический заряд $T = 1$ и поэтому имеют смысл полевых операторов, а G-инвариантный оператор

$$S = \frac{1}{\sqrt{2!}} \sum_{p \in \mathbf{P}_2} \operatorname{sign}(p) \psi_{p(1)} \psi_{p(2)} = \frac{1}{\sqrt{2}} (\psi_1 \psi_2 - \psi_2 \psi_1),$$

при $d = 2$ отвечает за нулевое значение изотопического заряда и соответствует наблюдаемому дейтрону.

Переход же под действием полевого оператора из состояния с $T = 0$ в состояние с $T = 1$ соответствует переходу к симметрическим подпространствам (4), что приводит уже к нестабильным двухнуклонным состояниям.

В данной работе рассмотрена двухнуклонная система в рамках предложенной простой алгебраической модели и показано, что физически реализуемое состояние соответствует сектору с минимальным (в данном случае нулевым) значением изоспина. Такое состояние двух нуклонов строится с помощью изометрического G-инвариантного оператора S, сплетающего пространство вакуумного состояния $\mathscr{H}^0_{TT_z}$ с пространством двухнуклонных состояний $\mathscr{H}^2_{TT_z}$, где реализуются стабильные связанные состояния двух нуклонов. Проектор, построенный с помощью S, является проектирующим оператором на антисимметричное подпространство (называемое специальным объектом) связанных двухнуклонных состояний.

Также построены изометрические полевые операторы, являющиеся переносчиками изотопического заряда, которые сплетают вакуумный сектор с сектором $T = 1$. Соответствующие проекторы, составленные из этих изометрических операторов, являются проектирующими операторами на симметрические подпространства $\mathscr{H}^2_{TT_z}$ и приводят к несвязанным двухнуклонным состояниям.

Литература

1. Doplicher S., Roberts J.E. *Why there is field algebra with a compact gauge group describing the superselection structure in particle physics* // Comm. Math. Phys. – 1990. – V. 131. – P. 51–107.

2. Doplicher S., Roberts J.E. *Endomorphisms of C*-algebras, cross products and duality for compact groups* // Annals of Mathematics. – 1989. – V. 130. – P. 75–119.

3. Doplicher S., Roberts J.E. *Compact group actions on C*-algebras* // Journal of Operator Theory. – 1988. – V. 19. – P. 283–305.

4. Doplicher S., Roberts J.E. *Duals of compact Lie groups realized in the Cuntz algebras and their actions on C*-algebras* // Journal of functional analysis. – 1987. – V. 74. – P. 96–120.

A SIMPLE ALGEBRAIC MODEL FOR FEW-NUCLEON SYSTEMS
IN THE PRESENCE OF NON-ABELIAN SUPERSELECTION RULES

M.I. Kirillov, A.S. Nikitin, A.S. Sitdikov

Formulation of a simple algebraic model with isospin superselection rules is given. The model is approved on a two-nucleon system and it is shown that physically realizable states, corresponding to the bound states of two nucleons, can be obtained with a special isometric operator.

Keywords: Cuntz algebra, tensor monoidal C^*-category, dibaryon system, isospin, superselection rules.

УДК 517.95

О СХОДИМОСТИ КУСОЧНО-ПОЛИНОМИАЛЬНЫХ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ МИНИМАЛЬНОЙ ПОВЕРХНОСТИ

А.А. Клячин[1], А.Г. Панченко[2]

1 *klyachin-aa@yandex.ru*; Волгоградский государственный университет
2 *alice1051@ya.ru*; Волгоградский государственный университет

В статье рассматривается понятие кусочно-квадратичного приближенного решения уравнения минимальной поверхности, заданного над триангулированной областью. Изучается вопрос об аппроксимации функционала площади в данном классе поверхностей и сходимость таких решений при стремлении к нулю мелкости треугольной сетки. В частности, доказана равномерная сходимость кусочно-квадратичных решений и указана оценка скорости этой сходимости через шаг сетки h.

Ключевые слова: кусочно-квадратичная функция, площадь поверхности, аппроксимация функционала, триангуляция, минимальная поверхность.

Пусть задана многоугольная ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^2$. Рассмотрим некоторое разбиение этого многоугольника на невырожденные треугольники $T_1, T_2, ..., T_N$. Пусть $M_1, M_2, ..., M_m$ – все вершины этих треугольников. Будем предполагать, что ни одна из точек M_i не является внутренней точкой ни одной из сторон треугольников. Для построения кусочно-квадратичной функции добавим в имеющийся набор вершин $M_1, M_2, ..., M_m$ все середины сторон треугольников $T_1, T_2, ..., T_N$.Полученное множество точек обозначим через $M_1, M_2, ..., M_m, M_{m+1}, ..., M_r$. Для произвольного набора чисел $u_1, u_2, ..., u_m, u_{m+1}, ..., u_r$ определим кусочно-квадратичную функцию $u : \Omega \mapsto \mathbf{R}$ так, что $u(M_i) = u_i, i = 1, 2, ..., r$ и функция $u(x, y) = a_{11}^k x^2 + a_{12}^k xy + a_{22}^k y^2 + a_{10}^k x + a_{01}^k y + a_{00}^k$ на каждом треугольнике T_k, $k = 1, ..., N$. Данная функция будет непрерывной в Ω, и в каждом треугольнике T_k определен ее градиент ∇u. Поэтому площадь графика функции u вычисляется суммой

$$S(u) = \sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{T_k} \sqrt{1 + |\nabla u|^2}\, dx dy.$$

Обозначим через Q_0^r подпространство пространства $\mathbf{R}^r$ таких векторов $u = (u_1, u_2, ..., u_r)$, для которых $u_i = 0$, если $M_i \in \partial\Omega$. Отметим, что в этом случае соот-

ветствующая кусочно-квадратичная функция принимает нулевые значения на границе области $\partial\Omega$.

Поставим задачу нахождения такого вектора $u^* \in Q_0^r$, на котором достигается минимум площади $S(u+\varphi)$, т. е. задачу

$$\sum_{k=1}^{N} \iint\limits_{T_k} \sqrt{1+|\nabla(u+\varphi)|^2}\,dxdy \mapsto \min, u \in Q_0^r, \tag{1}$$

где $\varphi \in C(\overline{\Omega})$. Мы утверждаем, что задача (1) имеет единственное решение u^*.

Пусть $f(x) \in C^3(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$. Аппроксимируем данную функцию кусочно-квадратичной функцией $f^Q(x,y)$ такой, что $f^Q(M_i) = f(M_i)$, $i = 1,...,r$. Предположим, что на Ω задано решение f уравнения минимальной поверхности

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{f_x}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)+\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{f_y}{\sqrt{1+|\nabla f|^2}}\right)=0, \quad f \in C^3(\overline{\Omega}),$$

такое что $f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$. Так же как в работе [1] была получена следующая оценка градиента приближенного решения

$$|\nabla u^*(x)| \le C(P_0, \alpha),$$

где $P_0 = \max\{\sup\limits_{\Omega}|\nabla f|, \sup\limits_{\Omega}|\nabla\varphi|\}$ и

$$\alpha = \frac{S(f^Q) - S(f)}{\min\limits_k \nu(T_k)}.$$

С помощью этой оценки градиента кусочно-квадратичного решения, нами установлено следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C^3(\Omega) \cap C(\bar{\Omega})$ – решение уравнения минимальной поверхности, $f|_{\partial\Omega} = \varphi|_{\partial\Omega}$, и u^* – кусочно-квадратичная функция, являющаяся решением задачи (1). Предположим, что $P_0 = \sup\limits_{\Omega}|\nabla f| < +\infty$ и $P_1 = \sup\limits_{\Omega}|\nabla u^*|$. Тогда*

$$\max_{\Omega}|f^Q - (u^*+\varphi)| \le 4P^{4/3}\left(\frac{S(f^Q) - S(u^*+\varphi)}{\lambda(\Omega)\pi}\right)^{\frac{1}{4}},$$

где $P = \max\{1, P_0, P_1\}$ и $\lambda(\Omega)$ – основная частота области Ω.

Для выведения основного результата предположим, что имеется последовательность триангуляций $T_q = \{T_k^q\}_{k=1}^{N_q}$ и $h_q = \max\limits_{1\le k\le N_q} diam(T^q) \to 0$ при $q \to \infty$. Обозначим через θ_q минимальный угол треугольников триангуляции T^q. И будем предполагать, что θ_q не стремится к нулю при $q \to \infty$. Обозначим через u_q^* соответствующее кусочно-квадратичное решение уравнения минимальной поверхности. Тогда справедлива

Теорема 2. *Последовательность u_q^* сходится равномерно к f на Ω при $q \to \infty$. При этом*

$$\sup_{\Omega}|f(x,y) - u_q^*(x,y)| = O(h_q^{3/4}).$$

Отметим, что аналогичная теорема была доказана для кусочно-линейных решений в работе [2] с оценкой погрешности $O(h^{1/4})$.

Литература

1. Клячин А. А. *Приближение минимальных поверхностей кусочно-полиномиальными функциями* // Записки семинара «Сверхмедленные процессы». – 2009. – Т. 6. – С. 198-206.

2. Клячин А. А., Гацунаев М. А. *О равномерной сходимости кусочно-линейных решений уравнения минимальной поверхности* // Уфимский математический журнал. – 2014. – Т. 6. – № 3. — С. 3-16.

ON CONVERGENCE OF PIECEWISE POLYNOMIAL SOLUTIONS
OF THE MINIMAL SURFACE EQUATION

A.A. Klyachin, A.G. Panchenko

The concept of a piecewise-quadratic approximate solution of the minimal surface equation, defined over a triangulated domain, is considered. We study the problem of approximating the area functional in a given class of surfaces and the convergence of such solutions, as the fineness of the triangular grid tends to zero. In particular, the uniform convergence of piecewise-quadratic solutions is proved and the estimate of the rate of that convergence in terms of the step of the h grid is indicated.

Keywords: piecewise quadratic function, area of a surface, the approximation of functional, triangulation, minimal surface.

УДК 519.642

ЭФФЕКТ КЛАСТЕРИЗАЦИИ СТАЦИОНАРНЫХ ТОЧЕК ФУНКЦИОНАЛА НЕВЯЗКИ В УСЛОВНО–КОРРЕКТНЫХ ОБРАТНЫХ ЗАДАЧАХ

М.Ю. Кокурин[1]

1 *kokurinm@yandex.ru*; Марийский государственный университет

Устанавливается, что стационарные точки конечномерного функционала невязки условно корректной обратной задачи, имеющей гельдерову оценку модуля непрерывности обратного оператора, располагаются вблизи искомого решения обратной задачи.

Ключевые слова: гильбертово пространство, обратные задачи, условно корректные задачи, дифференцируемый оператор.

В работе рассматриваются нелинейные обратные задачи, моделируемые операторными уравнениями

$$F(u) = f,\ u \in D, \tag{1}$$

где $F : H_1 \to H_2$ — оператор прямой задачи, предполагаемый инъективным и дифференцируемым по Фреше на множестве $D \subset H_1$; H_1, H_2 — гильбертовы пространства. В приложениях множество D определяет априорные ограничения на искомый

элемент $u^* \in H_1$. Предполагается, что вместо точных данных в (1) доступны аппроксимации $\widetilde{f}$, $\widetilde{F}$ такие, что

$$\|\widetilde{f} - f\|_{H_2} \le \delta;\ \|\widetilde{F}(u) - F(u)\|_{H_2} \le h,\ \|\widetilde{F}'(u) - F'(u)\|_{L(H_1,H_2)} \le h\ \forall u \in D. \tag{2}$$

Исследуется конечномерный вариант метода квазирешений для задачи (1). Выберем семейство конечномерных подпространств $\{\mathscr{H}_N\}_{N=1}^{\infty} \subset H_1$ таких, что

$$1 \le \dim\mathscr{H}_N < \dim\mathscr{H}_{N+1},\ \mathscr{H}_N \subset \mathscr{H}_{N+1},\ N = 1,2,\ldots;\ \overline{\bigcup_{N=1}^{\infty} \mathscr{H}_N} = H_1. \tag{3}$$

Обозначим $D_N = D \cap \mathscr{H}_N$ и сопоставим (1) конечномерную экстремальную задачу

$$\min\{\widetilde{J}(u) : u \in D_N\},\ \widetilde{J}(u) = \|\widetilde{F}(u) - \widetilde{f}\|_{H_2}^2. \tag{4}$$

Без потери общности можем считать, что $0 \in D$, тогда $0 \in D_N$ для всех номеров $N \ge 1$. Нам потребуются следующие условия.

Условие 1. *Имеет место степенная оценка условной устойчивости задачи (1) с показателем* $1 \le p \le 2$ *на искомом решении* $u^* \in D$, $F(u^*) = f$ *:*

$$\|F(u) - F(u^*)\|_{H_2} \ge m\|u - u^*\|_{H_1}^p\ \forall u \in D\ (m > 0).$$

Условие 2. *Множество* $D \subset H_1$ *выпукло, замкнуто и ограничено,* $0 \in D$*; производная* F' *удовлетворяет условию Липшица*

$$\|F'(u) - F'(v)\|_{L(H_1,H_2)} \le L\|u - v\|_{H_1}\ \forall u, v \in D.$$

Из условия 2 следует, что с некоторой константой M выполняется неравенство:

$$\|F(u) - F(v)\|_{H_2} \le M\|u - v\|,\ \|F'(u)\|_{L(H_1,H_2)} \le M\ \forall u, v \in D.$$

Пусть точка $u_N^* \in D_N$ удовлетворяет необходимому условию минимума в задаче (4):

$$(\widetilde{J}'(u_N^*), u_N^* - u)_{H_1} \le 0\ \forall u \in D_N.$$

Ниже устанавливается оценка для $\|u_N^* - u^*\|_{H_1}$. Пусть P_{D_N} есть оператор метрического проектирования из H_1 на D_N. Обозначим $\varepsilon_N = \|u^* - P_{D_N}(u^*)\|_{H_1}$. Величина ε_N характеризует качество аппроксимации множества D его конечномерным сечением D_N.

Теорема 1. *Пусть выполняются условия 1, 2 и (2), (3). Предположим, что при* $p = 2$ *выполнено условие* $L/m < 1$*, а в случае* $1 \le p < 2$ *справедливо соотношение*

$$\|u_N^* - u^*\|_{H_1} < \frac{1}{M}\Big(\frac{m^{2/p}}{2L}\Big)^{p/(2-p)}.$$

Тогда с подходящей константой $C = C(L, m)$ *имеет место оценка*

$$\|u_N^* - u^*\|_{H_1} \le \Big(\frac{C}{m}\Big)^{1/p}(M\varepsilon_N + \delta + h^2)^{1/p}.$$

В случае $1 \le p < 2$ теорема 1 утверждает, что если величины ε_N, δ, h достаточно малы, то все стационарные точки задачи (3), (4), лежащие в шаре

$$B_N(u^*; m, L) = \Big\{ u \in \mathscr{H}_N : \| u - u^* \|_{H_1} \le \frac{1}{M} \Big(\frac{m^{2/p}}{2L} \Big)^{p/(2-p)} \Big\},$$

реально находятся от u^* на расстоянии порядка $O((\varepsilon_N + \delta + h^2)^{1/p})$. Тем самым, при малых ε_N, δ, h возможная многоэкстремальность задачи (3), (4) оказывается несущественной, если ограничиться указанным шаром. В частности, любая стационарная предельная точка из $B_N(u^*; m, L)$, порожденная произвольным итерационным процессом конечномерной минимизации, служит хорошим приближением для u^*. В случае $p = 2$ при выполнении условия $L/m < 1$ дополнительных ограничений на u_N^* нет, т.е. можно положить $B_N(u^*; m, L) = \mathscr{H}_N$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00039а), поддержана Министерством образования и науки РФ в рамках государственного задания (проект 1.5420.2017/8.9).

CLUSTERING EFFECT FOR STATIONARY POINTS OF DISCREPANCY FUNCTIONAL IN CONDITIONALLY WELL–POSED INVERSE PROBLEMS

M.Yu. Kokurin

We prove that stationary points of finite dimensional discrepancy functional related to a conditionally well–posed inverse problem with the Holder type estimate for the continuity modulus of the inverse operator, belong to a small neighborhood of the solution to the inverse problem.

Keywords: Hilbert space, inverse problems, conditionally well–posed problems, differentiable operator.

УДК 517.983.54

ОЦЕНКИ СКОРОСТИ СХОДИМОСТИ РАЗНОСТНЫХ СХЕМ ДЛЯ НЕКОРРЕКТНЫХ ЗАДАЧ КОШИ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКА

М.М. Кокурин[1]

1 *kokurin@nextmail.ru*; Марийский государственный университет, физико–математический факультет

Устанавливаются степенные оценки скорости сходимости разностных методов решения некорректных задач Коши первого и второго порядка в гильбертовом пространстве. Для этих оценок найдены близкие друг к другу необходимые и достаточные условия в терминах показателя истокопредставимости искомого решения.

Ключевые слова: некорректная задача Коши, гильбертово пространство, разностная схема, скорость сходимости.

Изучаются некорректные задачи Коши для дифференциально–операторных уравнений первого и второго порядка:

$$\dot{x}(t) = Ax(t),\ t \in [0, T]; \quad x(0) = f \in D(A); \tag{1}$$

$$\ddot{x}(t) = Ax(t),\ t \in [0,T]; \quad x(0) = f \in D(A), \quad \dot{x}(0) = 0. \tag{2}$$

Здесь $A : H \to H$ — неограниченный, плотно определенный, самосопряженный линейный оператор в гильбертовом пространстве H со спектром $\sigma(A) \in [a, +\infty)$, $a > 0$. Для каждой из задач (1), (2) ставится вопрос о дискретной аппроксимации классического решения $x : [0,T] \to H$ на отрезке $[0,T]$; существование этого решения предполагается. Известно, что обе задачи не могут иметь более одного классического решения.

Для аппроксимации решения задачи (1) строится класс одношаговых разностных схем с параметром $\beta > 0$, имеющих порядок аппроксимации $m = 1$:

$$-x_n + x_{n+1} = \Delta t A\big((1+\beta)x_n - \beta x_{n+1}\big), \quad 0 \le n \le N-1, \quad x_0 = f. \tag{3}$$

Кроме того, изучается класс двушаговых разностных схем с параметрами $\beta_1 \in (0,1)$, $\beta_2 > 0$ для задачи (1), имеющих порядок аппроксимации $m = 2$:

$$(1-2\beta_1)x_n + (2\beta_1 - 2)x_{n+1} + x_{n+2} = \Delta t A\big((\beta_1 - \beta_2 - 1)x_n + \\ + (\beta_1 + 2\beta_2 + 1)x_{n+1} - \beta_2 x_{n+2}\big), \quad 0 \le n \le N-2, \quad x_0 = f, \quad x_1 = 2f - (E + \Delta t A)^{-1} f. \tag{4}$$

Для аппроксимации решения задачи (2) предлагается класс двушаговых разностных схем с параметром $\beta > 0$, имеющих порядок аппроксимации $m = 2$:

$$x_n - 2x_{n+1} + x_{n+2} = (\Delta t)^2 A(-\beta x_n + (1+2\beta)x_{n+1} - \beta x_{n+2}), \quad 0 \le n \le N-2, \\ x_0 = f, \quad x_1 = \frac{3}{2} f - \frac{1}{2}\big(E + (\Delta t)^2 A\big)^{-1} f. \tag{5}$$

В формулах (3)–(5) $\Delta t = T/N$ есть шаг дискретизации, $x_n \in H$ — приближение к значению $x(n\Delta t)$ искомой функции $x(t)$ в n–м узле дискретизации, E — единичный оператор в H.

Если $x(t)$ — классическое решение задачи (1) или (2), то элемент $x(T)$ допускает истокообразное представление $x(T) = A^{-p} w$ с некоторыми $p \ge 1$, $w \in H$. Следующие теоремы устанавливают степенные оценки скорости сходимости схем (3)–(5) в зависимости от показателя истокопредставимости p соответствующего решения.

Теорема 1. *Для разностных схем (3) решения задачи (1) имеет место оценка скорости сходимости*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \le \begin{Bmatrix} C_1(\Delta t)^{p/2}, & 1 \le p < 2 \\ C_1 \Delta t, & p \ge 2 \end{Bmatrix}, \quad 0 \le n \le N, \quad C_1 = C_1(p).$$

Теорема 2. *Для разностных схем (4) решения задачи (1) справедлива оценка скорости сходимости*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \le \begin{Bmatrix} C_2(\Delta t)^{2p/3}, & 1 \le p < 3 \\ C_2(\Delta t)^2, & p \ge 3 \end{Bmatrix}, \quad 0 \le n \le N, \quad C_2 = C_2(p).$$

Теорема 3. *Для разностных схем (5) решения задачи (2) имеет место оценка скорости сходимости*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \le \begin{Bmatrix} C_3(\Delta t)^{4p/3}, & 1 \le p < 3/2 \\ C_3(\Delta t)^2, & p \ge 3/2 \end{Bmatrix}, \quad 0 \le n \le N, \quad C_3 = C_3(p).$$

Теоремы 1–3 относятся к случаю, когда входные данные f известны точно. При изучении некорректных задач более актуален случай, когда вместо элемента f задано его приближение f_δ, $\|f_\delta - f\| \le \delta$. В этом случае количество отрезков дробления N в (3)–(5) следует выбирать в зависимости от δ.

Теорема 4. *Для разностных схем (3)–(5) в условиях приближённых входных данных при подходящем выборе зависимости $N(\delta)$ справедлива оценка*

$$\|x_n - x(n\Delta t)\| \le C_4 \ln^{-q} \frac{1}{\delta}, \quad 0 \le n \le N, \quad C_4 = C_4(p),$$

где показатель q совпадает с показателем степени при Δt в соответствующей теореме 1, 2 или 3.

Справедливы следующие теоремы, обратные к теоремам 1–3.

Теорема 5. *Пусть для схемы (3) решения задачи (1) справедлива оценка $\|x_N - x(T)\| \le C_5(\Delta t)^q$. Тогда имеет место истокообразное представление вида $x(T) = A^{-p}w$ с любым $p \in (0, 2q)$. Более того, если $q > 1$, то $f = 0$ и $x(t) \equiv 0$.*

Теорема 6. *Пусть для схемы (4) решения задачи (1) справедлива оценка $\|x_N - x(T)\| \le C_6(\Delta t)^q$. Тогда имеет место истокообразное представление вида $x(T) = A^{-p}w$ с любым $p \in (0, 3q/2)$. Более того, если $q > 2$, то $f = 0$ и $x(t) \equiv 0$.*

Теорема 7. *Пусть для схемы (5) решения задачи (2) справедлива оценка $\|x_N - x(T)\| \le C_7(\Delta t)^q$. Тогда имеет место истокообразное представление вида $x(T) = A^{-p}w$ с любым $p \in (0, 3q/4)$. Более того, если $q > 2$, то $f = 0$ и $x(t) \equiv 0$.*

Теоремы 1–7 допускают частичное обобщение на случай некорректных задач Коши с секториальными операторами в банаховом пространстве. В доказательствах данных теорем широко используются операторные исчисления и техника интерполяции банаховых пространств. Эти результаты частично изложены в [1], [2], [3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16–01–00039а).

Литература

1. Кокурин М. М. *Об оптимизации оценок скорости сходимости некоторых классов разностных схем решения некорректной задачи Коши* // Вычислительные методы и программирование. – 2013. – Т. 14. – С. 58–76.

2. Кокурин М. М. *Разностные схемы решения задачи Коши для линейного дифференциально–операторного уравнения второго порядка* // ЖВМ и МФ. – 2014. – Т. 54, – № 4. – С. 569–584.

3. Кокурин М. М. *Необходимые и достаточные условия степенной сходимости метода квазиобращения и разностных методов решения некорректной задачи Коши в условиях точных данных* // ЖВМ и МФ. – 2015. – Т. 55. – № 12. – С. 2027–2041.

CONVERGENCE RATE ESTIMATES FOR FINITE–DIFFERENCE SCHEMES OF SOLVING ILL-POSED FIRST ORDER AND SECOND ORDER CAUCHY PROBLEMS

M.M. Kokurin

We establish power rate–of–convergence estimates for finite–difference methods of solving ill–posed

Cauchy problems of the first and the second order in a Hilbert space. We find sufficient conditions for these estimates in terms of the sourcewise index of the solution, and also necessary conditions which are close to the sufficient ones.

Keywords: ill–posed Cauchy problem, Hilbert space, finite-difference scheme, rate of convergence.

УДК 517.542

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ ПОЛУПЛОСКОСТИ НА КРУГОВОЙ МНОГОУГОЛЬНИК

И.А. Колесников[1]

1 *ia.kolesnikov@mail.ru*; Национальный исследовательский Томский государственный университет

В работе получено интегро-дифференциальное уравнение для отображения комплексной полуплоскости на круговой многоугольник. С помощью этого уравнения и дифференциального уравнения Шварца записано представление для акцессорных параметров M_k.

Ключевые слова: конформное отображение, акцессорные параметры, круговой многоугольник.

Пусть Δ – круговой n-угольник с вершинами в точках $A_1, A_2, ..., A_n$, $\alpha_1\pi, \alpha_2\pi, ..., \alpha_n\pi$ – углы при этих вершинах. Пусть сторона A_1A_n кругового n-угольника Δ лежит на вещественной оси. Кривая $L = \{\zeta : \zeta = \zeta(\tau), \tau \in [t_1, t_n]\} = \partial\Delta\backslash(A_1, A_n)$ – кусочно гладкая, $\zeta(t_k) = A_k$, кривизна кривой L постоянна при $\tau \in (t_k, t_{k+1})$, $t = 1, ..., n-1$. Касательная к кривой L в точке $\zeta(\tau)$ образует с вещественной осью угол $\theta(\tau)$.

Обозначим через f, $f : \Pi^+ \to \Delta$ – голоморфное и однолистное отображение верхней полуплоскости Π^+ на круговой n-угольник Δ. Прообразы вершин $A_1, A_2, ..., A_n$, при отображении f обозначим через $a_1, a_2, ..., a_n$, прообраз точки $\zeta(\tau) \in L$ обозначим через $\omega(\tau)$, $\omega(t_k) = a_k$.

Теорема. *Отображение f удовлетворяет уравнению*

$$\ln f'(z) = \sum_{k=1}^{n} \gamma_k \ln(z - a_k) - \frac{1}{\pi} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \ln(\omega(\tau) - z) d\theta(\tau) + c, \qquad (1)$$

где c – константа, $\gamma_k = \alpha_k - 1$.

Формула (1) получена с помощью интегральной формулы Коши. Заметим, что в случае, когда все стороны кругового n-угольника – прямолинейные отрезки, т. е. $\theta(\tau) = 0$, $\tau \in (t_1, t_n)$, формула (1) примет вид формулы Кристоффеля-Шварца. Частный случай формулы (1), когда круговой n-угольник представляет собой плоскость с разрезом по гладкой кривой, состоящей из двух дуг окружностей, получен в работе [1] (см. также [2]).

Известно, что отображение f удовлетворяет дифференциальному уравнению

Шварца

$$\frac{f'''(z)}{f'(z)} - \frac{1}{2}\left(\frac{f''(z)}{f'(z)}\right)^2 = \sum_{k=1}^{n} \frac{1-\alpha_k^2}{2(z-a_k)^2} - \frac{M_k}{z-a_k}. \tag{2}$$

Находя производную Шварца отображения f из уравнения (1) и сравнивая ее с правой частью уравнения (2), получаем следующее представление для параметров M_k:

$$M_k = -\sum_{j=1, j\neq k}^{n} \frac{\gamma_k \gamma_j}{a_k - a_j} + \frac{1}{\pi} \lim_{z\to a_k} (z-a_k) \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\gamma_k}{z-a_k} \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{\omega(\tau)-z} d\theta(\tau) - \right.$$
$$\left. - \frac{1}{2\pi} \left(\sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{\omega(\tau)-z} d\theta(\tau) \right)^2 + \sum_{k=1}^{n-1} \int_{t_k}^{t_{k+1}} \frac{1}{\big(\omega(\tau)-z\big)^2} d\theta(\tau) \right).$$

Настоящая работа выполнена при поддержке Программы повышения международной конкурентоспособности Томского государственного университета на 2013-2020 гг.

Литература

1. Куфарев П. П. *Об одном специальном семействе однолистных функций* // Ученые записки Томского университета. – 1947. – Т. 5. – С. 22–36.

2. *Труды П.П. Куфарева. К 100 летию со дня рождения* / Под общ. ред. И.А. Александрова. – Томск: Изд-во НТЛ, 2009. – 372 с.

CONFORMAL MAPPING OF A HALF-PLANE ONTO A CIRCULAR POLYGON

I.A. Kolesnikov

In this paper we obtain an integro-differential equation for mapping of half-plane onto a circular polygon. Using this equation and the Schwarz differential equation, we get a representation for the accessory parameters M_k.

Keywords: conformal mapping, accessory parameters, circular polygon.

УДК 514.752.44:514.772:517.548

ИЗОТЕРМИЧЕСКИЕ КООРДИНАТЫ НА НЕГЛАДКИХ СКЛЕЙКАХ ДВУМЕРНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

А.Н. Кондрашов[1]

1 *alexander.kondrashov@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет

Исследуется вопрос о существовании и единственности изотермических координат на склеенных поверхностях в $\mathbb{R}^m$. Такие поверхности являются специальным случаем негладких поверхностей; для них установлен аналог известной теоремы В.М. Миклюкова (2004).

Ключевые слова: изотермические координаты, склееные поверхности, функции склейки.

Вопрос о существовании изотермических координат на гладких поверхностях хорошо изучен, а возможность их введения оказывается чрезвычайно полезной во многих вопросах. В то же время вопрос о введении изотермических координат на негладких поверхностях оказывается весьма тонким. В основном конформные отображения негладких поверхностей изучались лишь в специальных случаях [3]–[7].

Новейшие исследования казалось бы классической задачи о существовании изотермических координат на двумерных поверхностей в $\mathbb{R}^m$, только на современном этапе негладких или имеющих разного рода патологию в строении, была инициирована в [1, 2]. Интерес к изотермическим координатам на негладких поверхностях вполне объективен ввиду перспектив практического применения в вычислительных задачах, поскольку именно в таких координатах во многих случаях удобно производить построение расчётных сеток. С другой стороны, как отмечалось в предисловии к монографии [2]: ”Это просто удивительно, что при наличии наикрасивейшей и богатейшей теории конформных отображений плоских областей соответствующая теория конформных отображений поверхностей вплоть до настоящего времени так и не представлена связным изложением.” Наше исследование направлено на развитие такой теории.

Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область и $\mathscr{X}$ – двумерная поверхность в $\mathbb{R}^m$, $(m \geq 3)$, заданная посредством непрерывной вектор-функции

$$y = f(x) = (f_1(x_1, x_2), \ldots, f_m(x_1, x_2)) : D \to \mathbb{R}^m, \tag{1}$$

реализующей гомеоморфное отображение области D на множество $f(D)$ с метрикой (и, тем самым, топологией!), индуцированной из $\mathbb{R}^m$.

Далее всегда предполагаем, что отображение f имеет полный дифференциал df п.в. в D, причём п.в. в D выполнено

$$\operatorname{rank}(df) = 2. \tag{2}$$

Символами $f_{x_1}(x)$, $f_{x_2}(x)$ будем обозначать частные производные вектор-функции f:

$$f_{x_1}(x) = (f_{1x_1}(x), \ldots, f_{mx_1}(x)), \quad f_{x_2}(x) = (f_{1x_2}(x), \ldots, f_{mx_2}(x)).$$

Пользуясь стандартными обозначениями $E = |f_{x_1}|^2$, $F = \langle f_{x_1}, f_{x_2} \rangle$, $G = |f_{x_2}|^2$, определяем в D метрику (первую квадратичную форму)

$$ds^2 = E dx_1^2 + 2F dx_1 dx_2 + G dx_2^2$$

с измеримыми коэффициентами E, F, G.

Определение 1. *Пусть $\mathscr{X}$ – поверхность, заданная над областью $D \subset \mathbb{R}^2$ посредством вектор-функции* (1)*, подчиненной условию* (2)*. Переменные x_1, x_2 называются изотермическими координатами на поверхности $\mathscr{X}$, если*

$$E(x) = G(x), \;\; F(x) = 0$$

п.в. в D.

В случае, когда x_1, x_2 – изотермические координаты на поверхности $\mathscr{X}$, мы имеем

$$ds^2 = \lambda^2(x)(dx_1^2 + dx_2^2), \text{ где } \lambda^2(x) = E(x) = G(x).$$

Нам потребуется также понятие $W^{1,2}$-мажорируемой функции.

Определение 2. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область. Будем говорить, что функция $P : D \to \mathbb{R}$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой в D, если найдется функция $K \in W^{1,2}(D)$ такая, что*

$$P(x) \le K(x) \quad \text{для п.в. } x \in D.$$

Определение 3. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область. В случае когда функция $P : D \to \mathbb{R}$ является $W^{1,2}$ -мажорируемой во всякой подобласти $D' \Subset D$ будем говорить, что функция P является $W^{1,2}_{\text{loc}}$ -мажорируемой в D.*

$W^{1,2}$ -мажорируемость (см. [1, замечание §6]) означает, что равенство

$$\lim_{\xi \to x} P(\xi) = +\infty$$

может выполняться на очень редком множестве. Можно утверждать, например, что при любом $\alpha > 0$ его α-ёмкость равна нулю.

Всюду далее будем использовать обозначения: $O = (0,0)$, $\Xi = (1,0) \in \mathbb{R}^2$, $B(O,R)$ – открытый круг радиуса $R > 0$ в $\mathbb{R}^2$ с центром в начале координат O.

В [1] была установлена теорема о существовании и единственности изотермических координат на односвязной негладкой поверхности.

Теорема 1 (В.М. Миклюков). *Пусть $\mathscr{X}$ – двумерная поверхность, заданная вектор-функцией* (1) *над односвязной ограниченной областью $D \subset \mathbb{R}^2$ и удовлетворяющая условию* (2). *Предположим, что функция P, определяемая соотношением*

$$P(x) = \frac{E(x) + G(x)}{\sqrt{E(x)G(x) - F^2(x)}},$$

является $W^{1,2}_{\text{loc}}$-мажорируемой в области D.

Тогда существует гомеоморфизм $x = \Phi(\xi) : B(O,R) \to D$, где $R > 1$, $\Phi(\xi) \in W^{1,2}_{\text{loc}}(B(O,R))$, вводящий на $\mathscr{X}$ изотермические координаты ξ_1, ξ_2.

Гомеоморфизм $x = \Phi(\xi)$ определяется единственным образом заданием пары точек $a, b \in D$ таких, что $a = \Phi(O)$, $b = \Phi(\Xi)$.

Установлены аналоги теоремы Миклюкова для поверхностей, склеенных из нескольких кусков.

В дальнейшем поверхности $\mathscr{X} = (D, f)$, заданные над односвязной областью $D \subset \mathbb{R}^2$, у которых отображение $f : D \to f(D)$ взаимно однозначно, дифференцируемо п.в. и выполняется условие (2), будем называть *элементарными*.

Мы будем предполагать, что односвязная поверхность $\mathscr{X} \subset \mathbb{R}^m$ представляет собой склейку элементарных односвязных поверхностей $\mathscr{X}_i = (G_i, f_i)$, заданных гомеоморфизмами $f_i : G_i \to f_i(G_i) \subset \mathbb{R}^m$. Если $\{\mathscr{X}_i\}_{i=1}^n$ набор элементарных односвязных поверхностей занумерованный в порядке склейки, то результат их склейки обозначим $\mathscr{X}_{1\dots n}$.

Будем обозначать $\Gamma_{ij} \subset \partial G_i$ – множество точек по которым G_i склеивается с G_j и $\Gamma_i \subset \partial G_i$ – множество *всех* точек участвующих в склейке.

Для учёта поведения поверхности $\mathscr{X}_{1\dots n}$ вблизи мест склеек нам необходимо дать несколько определений.

Определение 4. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – область и $\mathscr{C} \subset \partial D$ – множество составленное из набора непересекающихся открытых дуг. Пусть $F \subset D$ подмножество. Будем говорить, что F* компактно примыкает *к $\mathscr{C}$, если $\overline{F} \bigcap \partial D \Subset \mathscr{C}$. Здесь $\overline{F}$ замыкание F в $\mathbb{R}^2$, а отношение "$\Subset$" берется в смысле топологии $\mathscr{C}$.*

Факт компактного примыкания будем записывать в виде "$F \Subset \mathscr{C}|D$".

Определение 5. *Пусть D – область в $\mathbb{R}^2$, граница которой ∂D содержит множество Γ, представляющее собой некоторую совокупность непересекающихся открытых дуг. Будем говорить, что функция $P : D \to \mathbb{R}$ является $W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma}$-*мажорируемой*, если для всякой подобласти $D' \subset D$ предкомпактной в $\mathbb{R}^2$ и такой, что или $D' \Subset D$, или $D' \Subset \Gamma|D$, найдется функция $K \in W^{1,2}(D')$ такая, что*

$$P(x) \le K(x) \quad \text{для п.в. } x \in D.$$

Определение 6. *Пусть $D \subset \mathbb{R}^2$ – односвязная область, граница ∂D которой содержит дугу γ являющуюся частью некоторой квазипрямой Γ. Если D целиком лежит в одной из компонент связности $\mathbb{R}^2 \setminus \Gamma$, то будем называть γ,* Γ внешне расположенными *по отношению к D.*

Теорема 2. *Пусть определена склейка $\mathscr{X}_{1\dots n}$, где $\mathscr{X}_i = (G_i, f_i)$, для которой $\Gamma_i, \Gamma_{ij} \subset \partial G_i$ – соответствующие множества склейки, а $\varphi_{ij} : \Gamma_{ij} \to \Gamma_{ji}$ – склеивающие граничные гомеоморфизмы.*

Предположим, что: 1) все компоненты связности Γ_i являются дугами квазипрямых внешне расположенных по отношению к G_i; 2) имеется набор квазиконформных гомеоморфизмов $\varphi_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, склеивающих области $\{G_i\}_{i=1}^n$; 3) каждая функция

$$P_i(x^{(i)}) = \frac{E_i(x^{(i)}) + G_i(x^{(i)})}{\sqrt{E_i(x^{(i)})G_i(x^{(i)}) - F_i^2(x^{(i)})}}$$

$W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma_i}$-мажируема в G_i.

Тогда на поверхности $\mathscr{X}_{1\dots n}$ существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in B(O, R)$, $R > 1$, определяемые единственным образом выбором соответствия: $a \longleftrightarrow O$, $b \longleftrightarrow \Xi$. Здесь $a \in G_{i_0} \bigcup \Gamma_{i_0}$, $b \in G_{j_0} \bigcup \Gamma_{j_0}$ – некоторые фиксированные точки, при этом, либо $i_0 = j_0$ и $a \ne b$, либо $i_0 \ne j_0$ и $b \ne \varphi_{i_0 j_0}(a)$.

Определение 7. *Пусть определена склейка $\mathscr{X}_{1\dots n}$, где $\mathscr{X}_i = (G_i, f_i)$, $(i = 1, \dots, n)$. Пусть Γ_i, $\Gamma_{ij} \subset \partial G_i$, $\varphi_{ij} : \Gamma_{ij} \to \Gamma_{ji}$ – соответствующие множества склейки и склеивающие граничные гомеоморфизмы. Предположим, что для Γ_i, Γ_{ij}, φ_{ij} определена склейка областей $\{G_i\}_{i=1}^n$, осуществляемая набором квазиконформных гомеоморфизмов $h_i : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ таких, что отображения $\widehat{\varphi}_{ij} : h_i(\Gamma_{ij}) \to h_j(\Gamma_{ji})$ делающие диаграмму*

$$\begin{array}{ccc} \Gamma_{ij} & \xrightarrow{\varphi_{ij}} & \Gamma_{ji} \\ {\scriptstyle h_i}\big\downarrow & & \big\downarrow{\scriptstyle h_j} \\ h_i(\Gamma_{ij}) & \xrightarrow{\widehat{\varphi}_{ij}} & h_j(\Gamma_{ji}) \end{array}$$

коммутативной, являются квазиизометриями. Такую склейку областей будем называть специальной квазиконформной склейкой.

Теорема 3. *Пусть $\mathscr{X}_{1\dots n}$ – склейка поверхностей $\mathscr{X}_i = (G_i, f_i)$, $(i = 1, \dots, n)$, причём всякая область из набора $\{G_i\}_{i=1}^n$ является квазидиском. Пусть Γ_i, $\Gamma_{ij} \subset \partial G_i$ – соответствующие множества склейки, а $\varphi_{ij} : \Gamma_{ij} \to \Gamma_{ji}$ – соответствующие склеивающие граничные гомеоморфизмы. Предположим, что каждая функция*

$$P_i(x^{(i)}) = \frac{E_i(x^{(i)}) + G_i(x^{(i)})}{\sqrt{E_i(x^{(i)})G_i(x^{(i)}) - F_i^2(x^{(i)})}}$$

$W^{1,2}_{\mathrm{loc},\Gamma_i}$-мажорируема в G_i.

Если для Γ_i, Γ_{ij}, φ_{ij} определена специальная квазиконформная склейка областей $\{G_i\}_{i=1}^n$, то на поверхности $\mathscr{X}_{1\dots n}$ существуют изотермические координаты $\xi = (\xi_1, \xi_2) \in B(O, R)$, $R > 1$, определяемые единственным образом выбором соответствия: $a \longleftrightarrow O$, $b \longleftrightarrow \Xi$. Здесь $a \in G_{i_0} \bigcup \Gamma_{i_0}$, $b \in G_{j_0} \bigcup \Gamma_{j_0}$ – некоторые фиксированные точки, при этом, либо $i_0 = j_0$ и $a \neq b$, либо $i_0 \neq j_0$ и $b \neq \varphi_{i_0 j_0}(a)$.

Литература

1. Миклюков В. М. *Изотермические координаты на поверхностях с особенностями* // Матем. сб. – 2004. – Т. 195, № 1. – С. 69–88.

2. Миклюков В. М. *Конформное отображение нерегулярной поверхности его применения.* – Волгоград: Изд-во ВолГУ, 2005. – 272 с.

3. Carathéodory C. *Conformal representation.* – London: Cambridge Univ. Press, 1932. – 105 p.

4. Решетняк Ю Г. *Двумерные многообразия ограниченной кривизны* // Геометрия - 4, Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. 1989. – Т. 70. – М.: ВИНИТИ, 1989. – С. 7–189.

5. Toro T. *Surfaces with generalized second fundamental form in L^2 are Lipschitz manifolds* // J. Differential Geom. – 1994. – V. 39. – P. 65-101.

6. Müller S., Sverák V. *On surfaces of finite total curvature* // J. Differential Geom. – 1995. – V. 42. – P. 229-258.

7. Грудский И. М. *Построение внутренних координат на составных римановых поверхностях* // В сб.: Дифференциальные, интегральные уравнения и комплексный анализ. – Элиста, 1986. – С. 30–45.

ISOTHERMIC COORDINATES ON IRREGULAR SEWING SURFACES

A.N. Kondrashov

We investigate existence and uniqueness of isothermic coordinates on sewing surfaces in $\mathbb{R}^m$. The such surfaces form is special case of irregular surfaces. We obtaine an analog of the famous theorem of V.M. Miklukov (2004) for such surfaces.

Keywords: isothermic coordinates, sewing surfaces, sewing functions.

УДК 517.984

ТЕОРЕМА РАВНОСХОДИМОСТИ ДЛЯ ОДНОГО КЛАССА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

О.А. Королева[1]

1 *korolevaoart@yandex.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г.Чернышевского

В настоящей работе изучается равносходимость разложений в тригонометрческие ряды Фурье и по собственным и присоединенным функциям (с.п.ф.) интегрального оператора, ядро которого терпит скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат.

Ключевые слова: равносходимость, резольвента, характеристические числа, собственные и присоединенные функции.

Рассмотрим интегральный оператор:

$$y = Af = \int_0^1 A(x,t)\, f(t)\, dt. \tag{1}$$

Обозначим:
$A_1(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le 1/2 - x,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_2(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 + x \le t \le 1,\ 0 \le x \le 1/2\}$,
$A_3(x,t) = A(x,t)$, если $\{0 \le t \le -1/2 + x,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_4(x,t) = A(x,t)$, если $\{3/2 - x \le t \le 1,\ 1/2 \le x \le 1\}$,
$A_5(x,t) = A(x,t)$, если $\{1/2 - x \le t \le 1/2 + x,\ 0 \le x \le 1/2\}$ и
$\{-1/2 + x \le t \le 3/2 - x,\ 1/2 \le x \le 1\}$.

Будем предполагать, что $\frac{\partial^{k+l}}{\partial x^k \partial t^l} A_i(x,t)$, $(i = 1,...,5)$ непрерывны в своих областях, $(k + l \le 2$, причем, если $k + l = 2$, то $k = l = 1)$; $\frac{\partial}{\partial x} A_i(x,t)$, $(i = 1,...,5)$ непрерывно дифференцируемы в своих областях, причем
$A_5(x, \frac{1}{2} - x + 0) - A_1(x, \frac{1}{2} - x - 0) = a$,
$A_5(x, \frac{1}{2} + x - 0) - A_2(x, \frac{1}{2} + x + 0) = b$,
$A_5(x, -\frac{1}{2} + x + 0) - A_3(x, -\frac{1}{2} + x - 0) = c$,
$A_5(x, \frac{3}{2} - x - 0) - A_4(x, \frac{3}{2} - x + 0) = d$,
где a, b, c, d – постоянные.

Ядро $A(x,t)$ может быть имеет скачки на сторонах квадрата, вписанного в единичный квадрат. В пространстве вектор–функций рассматривается оператор

$$z = Bg = \int_0^{\frac{1}{2}} B(x,t) g(t)\, dt, \quad 0 \le x \le \frac{1}{2}, \tag{2}$$

где $z(x) = (z_1(x), z_2(x), z_3(x), z_4(x))^T$, $g(x) = (g_1(x), g_2(x), g_3(x), g_4(x))^T$,

$$B(x,t)=\begin{pmatrix} 0 & A(x,\frac{1}{2}-t) & A(x,\frac{1}{2}+t) & 0 \\ A(\frac{1}{2}-x,t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}-x,1-t) \\ A(\frac{1}{2}+x,t) & 0 & 0 & A(\frac{1}{2}+x,1-t) \\ 0 & A(1-x,\frac{1}{2}-t) & A(1-x,\frac{1}{2}+t) & 0 \end{pmatrix}.$$

В [1] доказывается, что (1) эквивалентно (2).

Теорема 1. *Для оператора B^{-1} справедливо представление:*

$$B^{-1}z(x)=Pz'(x)+a_1(x)z(0)+a_2(x)z(1/2)+a_3(x)z(x)+\int_0^{\frac{1}{2}}a(x,t)z(t)\,dt, \tag{3}$$

$$Sz(0)+Tz(1/2)+\int_0^{\frac{1}{2}}a(t)z(t)\,dt=0. \tag{4}$$

где $a_i(x)$, $i=\overline{1,3}$, $a_3'(x)$, $a(x)$ – непрерывные матрицы–функции, каждая компонента матрицы a(x,t) имеет такой же характер гладкости, что и компоненты $B_x(x,t)$, S, T –некоторые постоянные матрицы порядка 4×4.

Находится резольвента оператора A:

Теорема 2. *Если R_λ существует, то $R_\lambda f=v(x)$, где*

$$v(x)=z_1(x)\ при\ x\in[0,1/2],\ и\ v(x)=z_3\left(x-\frac{1}{2}\right)\ при\ x\in[1/2,1], \tag{5}$$

где z_1, z_3 – первая и третья компоненты вектора $z(x)$, удовлетворяющего системе (3), (4).

Также доказывается обратное утверждение:

Теорема 3. *Если λ таково, что однородная краевая задача для (3), (4)) имеет только нулевое решение, то R_λ существует и определяется по формуле (5).*

Рассмотрим систему

$$\begin{aligned} w'(x)&=\lambda Dw(x)+m(x),\\ U(w)&=0, \end{aligned} \tag{6}$$

где $m(x)$ произвольная вектор-функция с компонентами из $L[0,\frac{1}{2}]$.

Если удалить все собственные значения краевой задачи (6) вместе с круговыми окрестностями одного и того же достаточно малого радиуса δ, то в получившейся области S_δ для решения системы (6) $w=R_{1\lambda}m$ доказываются оценки:

$$\|R_{1\lambda}m\|_\infty=O(\|m\|_1),\quad \|R_{1\lambda}m\|_\infty=O(\psi(\lambda)\,\|m\|_\infty),\quad \|R_{1\lambda}m\|_1=O(\psi(\lambda)\,\|m\|_1),$$
$$\left\|R_{1\lambda}\chi\right\|_\infty=O(\tfrac{1}{\lambda}),$$

где $\|\cdot\|_\infty$, $\|\cdot\|_1$ – нормы в пространстве вектор функций $L_\infty(0,\frac{1}{2})$, $L(0,\frac{1}{2})$, $\chi(x)$ – вектор функция, у которой каждая компонента есть характеристическая функция какого-нибудь отрезка, содержащегося в $\left[0,\frac{1}{2}\right]$, $\psi(\lambda)=\sum_{j=1}^4\kappa\left(\left|\mathrm{Re}\,\lambda\omega_j\right|\right)$, $\kappa(y)=\frac{1-e^{-y}}{y}$ при $y\geq 0$ ($\mathrm{Re}\,t$ обозначает действительную часть комплексного числа t).

Основной результат – теорема равносходимости:

Теорема 4. *Пусть существует* A^{-1}*, ядро* $A(x,t)$ *удовлетворяет описанным выше условиям. Тогда в* S_δ *для любой* $f(x) \in L[0,1]$

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \gamma_{1j}\sigma_{r|\omega_j|}(\varphi_j,x)\|_{[\varepsilon,\frac{1}{2}-\varepsilon]} = 0,$$

$$\lim_{r\to\infty} \|S_r(f,x) - \sum_{j=1}^{4} \gamma_{3j}\sigma_{r|\omega_j|}\left(\varphi_j, x-\frac{1}{2}\right)\|_{[\frac{1}{2}+\varepsilon,1-\varepsilon]} = 0,$$

где $S_r(f,x)$ *– частичная сумма ряда Фурье, по с.п.ф. оператора* A *для тех характеристических чисел* λ_k*, для которых* $|\lambda_k| < r, \sigma_r(f,x)$ *– частичная сумма тригонометрического ряда Фурье на* $[0,\frac{1}{2}]$ *по системе* $\{e^{4k\pi ix}\}$ *для тех* k*, для которых* $|4k\pi| < r$*,* $\gamma_{ij}\,(\delta_{ij})$ *компоненты некоторой постоянной матрицы* $\Gamma(\Gamma^{-1})$*,*

$$\varphi_j(x) = \delta_{j1}f(x) + \delta_{j2}f(\frac{1}{2}-x) + \delta_{j3}f(\frac{1}{2}+x) + \delta_{j4}f(1-x).$$

Литература

1. Королева О. А., Хромов А П. *Интегральный оператор с ядром, имеющим скачки на ломаных линиях* // Известия Сарат. ун-та. Новая серия. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та – 2012. – Т. 12(2). –С. 6–13.

INTEGRAL OPERATOR WITH KERNEL HAVING JUMPS ON BROKEN LINES

O.A. Koroleva

We study equiconvergence expansions in trigonometric Fourier series and series by eigenfunctions and associated functions of an integral operator whose kernel has jumps at the sides of a square inscribed in the unit square.

Keywords: equiconvergence, resolvent, characteristic number, eigenfunctions and associated functions.

УДК 517.934+517.92:62-50

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ НАВЬЕ-СТОКСА

П.А. Котов[1]

1 *petercotov@yandex.ru*; Воронежский государственный университет, Воронеж

Рассматривается гидродинамическая задача о неустановившемся течении несжимаемой маловязкой жидкости с ограниченными измеримыми краевыми условиями и предлагаются содержательные аспекты устойчивости решения вещественной системы уравнений Навье-Стокса из класса гладких убывающих на бесконечности функций.

Ключевые слова: неустановившееся течение несжимаемой немагнитной жидкости, действительные нулевые граничные условия.

Рассматривается гидродинамическая задача о неустановившемся течении несжимаемой маловязкой жидкости с ограниченными измеримыми краевыми

условиями и предлагаются содержательные аспекты устойчивости решения вещественной системы уравнений Навье-Стокса из класса гладких убывающих на бесконечности функций.

Пусть вещественная система уравнений неустановившегося течения несжимаемой маловязкой жидкости представляется исходной системой уравнений [1, 2]

$$\begin{aligned}
\rho\frac{\partial u}{\partial t}+\rho\frac{\partial u}{\partial x}u+\rho\frac{\partial u}{\partial y}v+\rho\frac{\partial u}{\partial z}w &= X-\frac{\partial p}{\partial x}+\mu\triangle u,\\
\rho\frac{\partial v}{\partial t}+\rho\frac{\partial v}{\partial x}u+\rho\frac{\partial v}{\partial y}v+\rho\frac{\partial u}{\partial z}w &= Y-\frac{\partial p}{\partial y}+\mu\triangle v,\\
\rho\frac{\partial w}{\partial t}+\rho\frac{\partial w}{\partial x}u+\rho\frac{\partial w}{\partial y}v+\rho\frac{\partial w}{\partial z}w &= Z-\frac{\partial p}{\partial z}+\mu\triangle w,
\end{aligned} \qquad (1)$$

с фиксированными краевыми условиями и выделяется тем, что в рассматриваемом классе функций для любого $\varepsilon>0$ и $t\geq t_0$ найдется такое $\delta=\delta(\varepsilon,t_0)$, $t_0=0$ что при

$$\left\| V_0-\cos 3\mu^{-\frac{1}{2}}x+y+z\right\|<\delta$$

следует

$$\left\| V(t,x,y,z)-\exp-\rho^{-1}t\cos 3\mu^{-\frac{1}{2}}x+y+z\right\|<\varepsilon,$$

где V_0 – начальное условие исходной системы уравнений (1.1) неустановившегося течения с учетом

$$1=\frac{d3^{-1}p/dx}{X}+\frac{d3^{-1}p/dy}{Y}+\frac{d3^{-1}p/dz}{Z}.$$

Тогда решение исходной системы уравнений (1) убывает и стремится к 0 асимптотически.

Литература

1. Котов П.А. *Устойчивость динамических состояний детерминированных систем* // Моделирование систем и процессов. – 2011, вып. 4. – С. 35–40.

2. Котов П.А. *О неустановившемся течении ограниченной несжимаемой жидкости. Особенности формирования системы действительных краевых условий* // Тез. докл. межд. конф. по дифф. урав. и дин. системам. Суздаль, 26 июня – 2 июля 2008.г. – Владимир: Изд-во Владимирского гос. унив., 2008. – С. 146.

ABOUT THE STABILITY OF THE SOLUTION OF NAVIER-STOKES EQUATIONS

P.A. Kotov

The hydrodynamic problem about the unsteady flow of incompressible nonmagnetic liquid with the fixed valid zero boundary conditions is considered, and the solid aspects of stability of the solution of material system of Navier-Stokes equations from the class of smooth functions decreasing at infinity are proposed.

Keywords: unsteady flow of incompressible nonmagnetic liquid, valid zero boundary conditions.

УДК 517.52, 517.53

ФУНДАМЕНТАЛЬНЫЙ ПРИНЦИП В ИНВАРИАНТНОМ ПОДПРОСТРАНСТВЕ

О.А. Кривошеева[1]

1 *kriolesya2006@yandex.ru*; Башкирский государственный университет

В работе изучаются комплексные последовательности первого порядка с конечной максимальной угловой плотностью. Получен критерий того, когда такая последовательность является частью правильно распределенного множества с заданной угловой плотностью. На этой основе приводятся полные решения проблем фундаментального принципа и базиса для инвариантного подпространства аналитических функций в ограниченной выпуклой области.

Ключевые слова: инвариантное подпространство, базис, фундаментальный принцип.

Пусть D — выпуклая область в $\mathbb{C}$, $H(D)$ — пространство функций, аналитических в D, с топологией равномерной сходимости на компактах, и $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ — последовательность комплексных чисел λ_k и их кратностей n_k такая, что система $\mathscr{E}(\Lambda) = \{z^n exp(\lambda_k z)\}$, $k \geq 1$, $n = 0, \ldots, n_k - 1$, не полна в $H(D)$. Через $W(\Lambda, D)$ обозначим замыкание в $H(D)$ линейной оболочки системы $\mathscr{E}(\Lambda)$. Тогда $W(\Lambda, D)$ — нетривиальное замкнутое подпространство в $H(D)$, инвариантное относительно оператора дифференцирования (Λ — его кратный спектр, а $\mathscr{E}(\Lambda)$ — совокупность собственных и присоединенных функций в $W(\Lambda, D)$).

Пусть $\tilde{\Lambda} = \{\mu_m, s_m\}_{m=1}^{\infty}$. Будем говорить, что $\tilde{\Lambda}$ является пополнением Λ, если существуют натуральные числа $m(k)$ такие, что $\mu_{m(k)} = \lambda_k$ и $n_k \leq s_{m(k)}$, $k \geq 1$.

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$. Символом $n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)$ обозначим число точек λ_k с учетом их кратностей, попавших в сектор $\{\lambda = te^{i\varphi} : \varphi \in (\varphi_1, \varphi_2), t \in (0, r)\}$. Говорят ([1], гл. II, § 1), что Λ имеет угловую плотность (при порядке один), если для всех φ_1, φ_2 за исключением, быть может, счетного множества существует предел $n(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \lim_{r\to\infty} n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda)/r$. Положим

$$n^0(\varphi_1, \varphi_2, \Lambda) = \overline{\lim}_{\delta\to 0} \overline{\lim}_{r\to\infty} \frac{n(\varphi_1, \varphi_2, r, \Lambda) - n(\varphi_1, \varphi_2, (1-\delta)r, \Lambda)}{\delta r}.$$

Множество Λ называется правильно распределенным (см. [1], гл. II, § 1), если оно имеет угловую плотность и выполнено условие Линделефа, т.е. существует предел $\lim_{r\to\infty} \sum_{|\lambda_k|<r} n_k/\lambda_k$. Правильно распределенные множества тесно связаны с функциями регулярного роста. Пусть f — целая функция экспоненциального типа (т.е. существуют $A, B > 0$ такие, что $|f(z)| \leq A + B|z|$, $z \in \mathbb{C}$). Верхним индикатором f называется функция

$$h_f(\lambda) = \overline{\lim_{t\to\infty}} \ln|f(t\lambda)|/t, \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Индикатор h_f является выпуклой положительно однородной порядка один функцией, которая совпадает с комплексной опорной функцией некоторого выпуклого компакта K (т.е. с обычной опорной функцией комплексно сопряженного с K компакта), называемого сопряженной диаграммой f (см., напр., [2], гл. I, § 5, теоре-

ма 5.4):

$$h_f(\lambda) = H_K(\lambda) = \sup_{z\in K} \mathrm{Re}(\lambda z), \quad \lambda \in \mathbb{C}.$$

Говорят (см. [1], гл. III), что f имеет регулярный рост, если

$$h_f(\lambda) = \lim_{t\to\infty, t\notin E} \ln|f(t\lambda)|/t, \quad \lambda \in \mathbb{C},$$

где E — множество нулевой относительной меры на луче $(0,+\infty)$, т.е. мера Лебега его пересечения с интервалом $(0,r)$ бесконечна мала по сравнению с r при $r \to +\infty$. Пусть K — выпуклый компакт и z_1, z_2 — точки его границы ∂K. Через $s(z_1,z_2,K)$ обозначим длину дуги ∂K, соединяющей z_1 и z_2, движение по которой от z_1 к z_2 осуществляется в отрицательном направлении (по часовой стрелке). Для каждого $\varphi \in \mathbb{R}$ пересечение $\Gamma(\varphi)$ опорной прямой $l(\varphi) = \{z : \mathrm{Re}(ze^{i\varphi}) = H_K(e^{i\varphi})\}$ и границы ∂K является либо точкой $z(\varphi)$ либо отрезком. Множество $\Phi(K)$ направлений φ, для которых $\Gamma(\varphi)$ — отрезок, не более чем счетное. Положим

$$S_K(\varphi_1,\varphi_2) = \sup_{z_1\in\Gamma(\varphi_1), z_2\in\Gamma(\varphi_2)} s(z_1,z_2,K).$$

Функция $S_K(\varphi_1,\varphi_2)$ является неубывающей по φ_2 и невозрастающей по φ_1, а множество ее точек разрыва по обеим переменным совпадает с $\Phi(K)$. Если $\varphi_1,\varphi_2 \in \Phi(K)$, то $S_K(\varphi_1,\varphi_2) = s(z(\varphi_1),z(\varphi_2),K)$.

Согласно теореме 4 главы III книги [1] функция f имеет регулярный рост тогда и только тогда, когда ее нулевое множество является правильно распределенным. При этом для всех $\varphi_1,\varphi_2 \notin \Phi(K)$, $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < 2\pi$, верно равенство (см. [1], гл. II, § 1, формула (2.07))

$$n(\varphi_1,\varphi_2,\widetilde{\Lambda}) = S_K(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi, \tag{1}$$

где K — сопряженная диаграмма, а $\widetilde{\Lambda}$ — кратное нулевое множество f.

Теорема 1. *Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и K — выпуклый компакт. Равносильны утверждения:*

1) Существует $\gamma > 0$ такое, что для всех $\varphi_1,\varphi_2 \notin \Phi(K)$ с условием $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ выполнено неравенство $n^0(\varphi_1,\varphi_2,\Lambda) \le S_K(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi$.

2) Существует пополнение $\widetilde{\Lambda}$ последовательности Λ, которое является правильно распределенным множеством, и при этом верно (1).

Пусть $\Lambda = \{\lambda_k, n_k\}$ и D — ограниченная выпуклая область. Напомним (см. [3]), что последовательность Λ совместима с D, если она является частью нулевого множества (с учетом кратностей n_k) целой функции f экспоненциального типа и регулярного роста, сопряженная диаграмма которой является замыканием $\bar{D}$ области D (т.е. $h_f = H_{\bar{D}} = H_D$). Пусть $K = \bar{D}$. Если $\widetilde{\Lambda}$ — правильно распределенное пополнение Λ, удовлетворяющее (1), то его каноническая функция f имеет индикатор h_f, совпадающий с $H_{\bar{D}}$ (см. [1], гл. II, теорема 4). Отсюда следует, что утверждение 2) теоремы 1 эквивалентно совместимости Λ с областью D. Таким образом, верно

Следствие. *Следующие утверждения эквивалентны:*

1) Λ совместима с D.

2) Существует $\gamma > 0$ такое, что для всех $\varphi_1,\varphi_2 \notin \Phi(\bar{D})$ с условием $0 < \varphi_2 - \varphi_1 < \gamma$ выполнено неравенство $n^0(\varphi_1,\varphi_2,\Lambda) \le S_{\bar{D}}(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi$.

Пусть $B(w,r)$ — открытый круг с центром в точке w и радиуса r. Следуя работе [4], введем функцию

$$q_\Lambda^m(\lambda,\delta)=\prod_{\lambda_k\in B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|),k\neq m}\left(\frac{\lambda-\lambda_k}{3\delta|\lambda_k|}\right)^{n_k},\quad m\geq 1.$$

Если круг $B(\lambda_m,\delta|\lambda_m|)$ не содержит точек λ_k, $k\neq m$, то $q_\Lambda^m(z,\delta)\equiv 1$. Положим (см. [4])

$$S_\Lambda=\lim_{\delta\to 0}\varlimsup_{m\to\infty}\frac{\ln|q_\Lambda^m(\lambda_m,\delta)|}{|\lambda_m|}.$$

Для $\delta\in(0,1/3)$ величина $S_\Lambda\leq 0$. Равенство $S_\Lambda=0$ означает, что точки λ_k в каком-то смысле отделены друг от друга. Характер этой отделенности проясняется в лемме 2.3 работы [5].

Теперь мы можем сформулировать результаты, полностью решающие проблемы базиса и фундаментального принципа для произвольного нетривиального замкнутого инвариантного подпространства в $H(D)$, которое допускает спектральный синтез, в случае ограниченной выпуклой области D.

Теорема 2.*Пусть $\Lambda=\{\lambda_k,n_k\}$ и D — ограниченная выпуклая область такие, что $W(\Lambda,D)$ нетривиально. Тогда следующие утверждения эквивалентны:*

1) Система $\mathscr{E}(\Lambda)$ является базисом в $W(\Lambda,D)$;

2) $S_\Lambda=0$ и существует $\gamma>0$ такое, что для всех $\varphi_1,\varphi_2\notin\Phi(\bar{D})$ с условием $0<\varphi_2-\varphi_1<\gamma$ выполнено неравенство $n^0(\varphi_1,\varphi_2,\Lambda)\leq(S_{\bar{D}}(\varphi_1,\varphi_2)/2\pi$.

Литература

1. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: Гостехиздат, 1956.

2. Леонтьев А. Ф. *Целые функции. Ряды экспонент.* – М.: Наука, 1983.

3. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. *Базис в инвариантном подпространстве аналитических функций* // Матем. сб. – 2013. – Т. 204. – № 12. – С. 49–104.

4. Кривошеев А. С. *Фундаментальный принцип для инвариантных подпространств в выпуклых областях* // Изв. РАН. Сер. мат. – 2004. – Т. 68. – № 2. – С. 71–136.

5. Кривошеев А. С., Кривошеева О. А. *Базис в инвариантном подпространстве целых функций* // Алгебра и анализ –2015. – Т. 27. – № 2. – С. 132–195.

FUNDAMENTAL PRINCIPLE IN INVARIANT SUBSPACE

O.A. Krivosheeva

In the paper, first-order complex sequences with finite maximal angular density are studied. A criterion for such a sequence to be a part of a regularly distributed set with a given angular density is obtained. Using this criterion, we present complete solutions of the fundamental principle problem and the basis problem for an invariant subspace of analytic functions in a bounded convex domain.

Keywords: invariant subspace, basis, fundamental principle.

УДК 517.5

СТУПЕНЧАТАЯ МАСШТАБИРУЮЩАЯ ФУНКЦИЯ НА ЛОКАЛЬНЫХ ПОЛЯХ ПОЛОЖИТЕЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ И АЛГОРИТМ ЕЕ ПОСТРОЕНИЯ

Ю.С. Крусс[1]

1 *krussus@gmail.com*; СГУ имени Н.Г. Чернышевского

В работе приводится алгоритм построения ступенчатой масштабирующей функции с компактным носителем на локальных полях положительной характеристики.

Ключевые слова: кратномасштабный анализ, масштабирующая функция, локальное поле положительной характеристики.

Локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p изоморфно пространству бесконечных в обе стороны последовательностей, где лишь конечное число членов с отрицательными номерами имеют ненулевое значение: $(\dots,\mathbf{0}_{i-1},\mathbf{x}_i,\mathbf{x}_{i+1},\dots)$, $\mathbf{x}_i \in GF(p^s)$, $GF(p^s)$ – конечное поле [1]. Нулевой элемент поля $GF(p^s)$ имеет вид $\mathbf{0} = (0_0, 0_1, \dots, 0_{s-1})$. Окрестностями нулевого элемента поля $F^{(s)}$ – $0 = (\dots,\mathbf{0},\mathbf{0},\mathbf{0},\dots)$, являются множества $F_n^{(s)}$ ($F_n^{(s)} \subset F_{n-1}^{(s)}$):

$$F_n^{(s)} = \{a = (\dots, \mathbf{0}, \mathbf{a}_n, \mathbf{a}_{n+1}, \dots) : \mathbf{a}_j \in GF(p^s)\},\ n \in \mathbb{Z}.$$

В 2004 году в работе H. Jiang, D. Li, N. Jin [2] появилось определение КМА на локальных полях положительной характеристики.

Определение 1. [2] *Пусть $F^{(s)}$ локальное поле положительной характеристики. Совокупность замкнутых подпространств $\{V_n\}_{n\in\mathbb{Z}} \in L_2(F^{(s)})$ называется КМА в $L_2(F^{(s)})$, если выполнены следующие аксиомы:*

A1) $V_n \subset V_{n+1}$;

A2) $\overline{\bigcup\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n} = L_2(F^{(s)})$;

A3) $\bigcap\limits_{n\in\mathbb{Z}} V_n = \{0\}$;

A4) $f(x) \in V_n \Leftrightarrow f(\mathscr{A}x) \in V_{n+1}$, $\mathscr{A}$ *– оператор растяжения;*

A5) существует функция $\varphi \in V_0$ такая, что система сдвигов $\{\varphi(x \dot{-} h)\}_{h\in H_0}$ образует ортонормированный базис в V_0, где H_0 – множество сдвигов.

Функция φ из аксиомы A5 называется *масштабирующей функцией* для данного КМА. Пусть φ масштабирующая функция, тогда из аксиомы A1 следует, что

$$\varphi(x) = \sum_{h\in H_0} c_h \varphi(\mathscr{A}x \dot{-} h),\ \sum_{h\in H_0} |c_h|^2 < +\infty, \tag{1}$$

где $c_h \in \mathbb{C}$. Уравнение (1) называется масштабирующим уравнением.

Теорема 1. [2] *Пусть $F^{(s)}$ – локальное поле положительной характеристики p, p – простое число. Если система замкнутых подпространств $\{V_j\}_{j\in\mathbb{Z}}$ в $L_2(F^{(s)})$ удовлетворяет аксиомам A1-A5 КМА и существуют интегрально-периодические функции $m^{(\mathbf{l})}$, $\mathbf{l} \in GF(p^s)$,$\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, такие что матрица $M(\chi) = [m^{(\mathbf{l})}(\chi\mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0})]$ ($\mathbf{l}$, $\mathbf{a}_0 \in GF(p^s)$, $\mathbf{r}_0$ – функция Радемахера) унитарна, то существует ортонормированный базис вейвлетов $\psi^{(\mathbf{l})}(\mathscr{A}^n x \dot{-} h)$, $\mathbf{l} \in GF(p^s)$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, $h \in H_0$, в $L_2(F^{(s)})$, где $\hat{\psi}^{(\mathbf{l})}(\chi) = m^{(\mathbf{l})}(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1})$, $\mathbf{l} \in GF(p^s)$, $\mathbf{l} \neq \mathbf{0}$, $m^{(\mathbf{0})}$ – маска масштабирующего уравнения.*

В [2] предполагается, что φ нам известна. Стоить отметить, что поиск подходящей функции φ является отдельной задачей.

В 2012 году B. Behera и Q. Jahan [3] опубликовали необходимое и достаточное условия для того, чтобы функция $\varphi \in L_2(F^{(s)})$ порождала КМА.

Теорема 2. [3] *Обозначим через* $U = \{\mathbf{r}_1^{\mathbf{a}_1} \dots \mathbf{r}_\nu^{\mathbf{a}_\nu},\ \mathbf{a}_j \in GF(p^s),\ \nu \in \mathbb{N}_0\}$, $\mathbf{r}_j$ *– функции Радемахера. Функция* $\varphi \in L_2(F^{(s)})$ *удовлетворяет аксиоме A5 КМА тогда и только тогда, когда для любых* $\chi \in F_1^{(s)\perp}$

$$\sum_{\xi \in U} |\hat{\varphi}(\chi\xi)|^2 = 1, \quad \lim_{j\to\infty} |\hat{\varphi}(\chi \mathscr{A}^{-j})| = 1, \text{ для п.в. } \chi \in X$$

и существует интегрально-периодическая функция $m^{(\mathbf{0})}(\chi) \in L_2(F_1^{(s)\perp})$ *такая, что для п.в.* $\chi \in X$ *справедливо равенство* $\hat{\varphi}(\chi) = m^{(\mathbf{0})}(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1})$.

В 2014 году С.Ф. Лукомский и А.М. Водолазов [1, 4] предложили другой подход к локальным полям положительной характеристики. Они рассматривают локальное поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p как линейное пространство над конечным полем $GF(p^s)$. При этом произведение элемента $a \in F^{(s)}$ на элемент $\boldsymbol{\lambda} \in GF(p^s)$ определяется покоординатно.

В [4] установлена связь между локальными полями $F^{(s)}$ положительной характеристики и группами Виленкина G. При $s = 1$ аддитивная группа $F^{(1)+}$ локального поля $F^{(s)}$ положительной характеристики p есть группа Виленкина с постоянной образующей последовательностью $p_n = p$. А при $s > 1$ аддитивная группа $F^{(s)+}$ изоморфна произведению групп Виленкина [1].

Обозначим через $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ множество ступенчатых функций $f \in L_2(F^{(s)})$ таких, что $\operatorname{supp} f \subset F_{-N}^{(s)}$ и f постоянна на множествах вида $F_M^{(s)} \dot{+} g$.

Для функций с компактным носителем, масштабирующее уравнение (1) содержит сумму с конечным числом слагаемых.

$$\varphi(x) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} c_h \varphi(\mathscr{A}x \dot{-} h), \tag{2}$$

где

$$H_0^{(N)} = \{x \in F^{(s)} : x = \mathbf{a}_{-1}g_{-1} \dot{+} \mathbf{a}_{-2}g_{-2} \dot{+} \dots \dot{+} \mathbf{a}_{-N}g_{-N}, N \in \mathbb{N}, \mathbf{a}_{-j} \in GF(p^s)\}.$$

Уравнение (2) может быть записано в виде

$$\hat{\varphi}(\chi) = m^{(\mathbf{0})}(\chi)\hat{\varphi}(\chi\mathscr{A}^{-1}),$$

где $m^{(\mathbf{0})}(\chi) = \sum_{h \in H_0^{(N+1)}} c_h \overline{(\chi\mathscr{A}^{-1}, h)}$ – маска уравнения (2).

В [1] был предложен алгоритм построения масштабирующей функции из класса $\mathfrak{D}_M(F_{-1}^{(s)})$, с дополнительным ограничением: абсолютные значения преобразования Фурье масштабирующей функции это 0 либо 1. В 2016 году в [5] данный алгоритм был обобщен для функций из класса $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, кроме того удалось избавиться от ограничения на абсолютные значения преобразования Фурье, которые теперь могут принимать значения из [0,1]. Изложим алгоритм построения ступенчатой масштабирующей функции с компактным носителем на локальных полях положительной характеристики.

Шаг 1. Выберем простое число p и зафиксируем. Построим N-валидное дерево T.

Определение 2. [5] *Пусть $F^{(s)}$ – локальное поле положительной характеристики p, N – натуральное число. Построим дерево T, удовлетворяющее следующим условиям:*

1) Каждая вершина представляет собой элемент конечного поля $GF(p^s)$, т.е. имеет вид: $\mathbf{a}_i = (a_i^{(0)}, a_i^{(1)}, \dots, a_i^{(s-1)})$, $a_i^{(j)} = \overline{0, p-1}$.

2) Корень и все вершины вплоть до $N-1$-го уровня имеют значение равное нулевому элементу поля $GF(p^s)$: $\mathbf{0} = (0^{(0)}, 0^{(1)}, \dots, 0^{(s-1)})$.

3) Дерево содержит всевозможные пути $(\mathbf{a}_{k+1}, \dots, \mathbf{a}_{k+N})$, $\mathbf{a}_k \in GF(p^s)$ длины $N-1$, причем каждый из них встречается только один раз. При этом рассматриваем только те пути, которые идут от вершин большего уровня к вершинам меньшего уровня.

Такое дерево называется N-валидным деревом на локальном поле $F^{(s)}$ положительной характеристики p.

Шаг 2. По дереву T строим новое дерево $\tilde{T}$. Каждая вершина дерева $\tilde{T}$ представляет собой N-мерный вектор элементов поля $GF(p^s)$: $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$. Строятся эти вершины следующим образом: если в дереве T с вершины $\mathbf{a}_N$ начинался путь из N элементов в направлении к корню $\mathbf{a}_N \to \mathbf{a}_{N-1} \to \dots \to \mathbf{a}_1$, то в новом дереве $\tilde{T}$ образуем вершину, которая имеет значение, равное N-мерному вектору $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$. Таким образом, корнем дерева $\tilde{T}$ является N-мерный вектор $\mathbf{O} = (\mathbf{0}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, составленный из нулевых элементов поля $GF(p^s)$. Вершины 1-го уровня дерева $\tilde{T}$ представляют собой N-мерные векторы, у которых на всех местах, кроме первого, стоят нулевые элементы поля $GF(p^s)$: $(\mathbf{a}_i, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, $\mathbf{a}_i$ – какая-то вершина N-го уровня дерева T. Вершины 2-го уровня дерева $\tilde{T}$ представляют собой N-мерные векторы: $(\mathbf{a}_{i_2}, \mathbf{a}_{i_1}, \mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})$, где $\mathbf{a}_{i_2}$ и $\mathbf{a}_{i_1}$ – какие-то связанные друг с другом вершины дерева T уровней $N+1$ и N соответственно. Причем в данном примере $\mathbf{a}_{i_1} \neq \mathbf{0}$, а $\mathbf{a}_{i_2}$ уже может быть нулевым элементом поля $GF(p^s)$. Если мы обозначим через H высоту дерева T, а через $\tilde{H}$ высоту дерева $\tilde{T}$, то очевидно $\tilde{H} = H - N + 1$.

Шаг 3. Теперь преобразуем дерево $\tilde{T}$ к графу Г, добавив некоторое количество новых ребер по следующим правилам:

1) достраивать ребра можно только из вершин более высокого уровня к вершинам более низкого уровня,

2) вершину $\mathbf{A} = (\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ дерева $\tilde{T}$ можно связывать только с вершинами, имеющими вид $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$, то есть первые $(N-1)$ элементов которых совпадают с последними $(N-1)$ элементами вершины $\mathbf{A}$.

Вершины, с которыми вершина $\mathbf{A}_N$ связана, мы будем обозначать $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$. То есть $\mathbf{a}_0 \in \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}$ тогда и только тогда, когда вершина $\mathbf{A}_N$ связана с вершиной $(\mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1, \mathbf{a}_0)$ в графе Г.

Шаг 4. Если вершина $(\mathbf{a}_N, \mathbf{a}_{N-1}, \dots, \mathbf{a}_1)$ в графе Г связана с вершинами $(\mathbf{a}_{N-1}, \mathbf{a}_{N-2} \dots, \mathbf{a}_1, \tilde{\mathbf{a}}_0)$, то значения маски определяем так, чтобы

$$\sum_{\tilde{\mathbf{a}}_0} |m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}} \dots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\tilde{\mathbf{a}}_0})|^2 = 1 \text{ и}$$

$$m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp} \mathbf{r}_{-N}^{\mathbf{a}_{-N}} \mathbf{r}_{-N+1}^{\mathbf{a}_{-N+1}} \dots \mathbf{r}_{-1}^{\mathbf{a}_{-1}} \mathbf{r}_0^{\mathbf{a}_0}) = 0 \text{ для всех } \mathbf{a}_0 \notin \{\tilde{\mathbf{a}}_0\}. \quad (3)$$

Также, определим $m^{(\mathbf{0})}(F_{-N}^{(s)\perp}) = 1$.

Теорема 3. [5] *Пусть по N-валидному дереву T построены дерево $\tilde{T}$, граф Γ и определены значения маски $m^{(\mathbf{0})}(\chi)$ так, как указано в равенствах (3). Пусть Пусть $\tilde{H}$– высота дерева $\tilde{T}$. Тогда равенство*

$$\hat{\varphi}(\chi) = \prod_{k=0}^{\infty} m^{(\mathbf{0})}(\chi \mathscr{A}^{-k}) \in \mathfrak{D}_{-N}(F_M^{(s)\perp})$$

определяет ортогональную масштабирующую функцию $\varphi(x) \in \mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$, порождающую КМА, причем M не превышает $\tilde{H} - N$.

Открытым остается вопрос: все ли масштабирующие функции их класса $\mathfrak{D}_M(F_{-N}^{(s)})$ можно построить с помощью данного алгоритма? Существует предположение, что данный алгоритм позволяет строить действительно все функции из данного класса.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

Литература

1. Lukomskii S., Vodolazov A. *Non-Haar MRA on local fields of positive characteristic* // J. Math. Anal. Appl. – 2016. V. 433, № 2. – P. 1415-–1440.

2. Jiang H., Li D., Jin N. *Multiresolution analysis on local fields* // J. Math. Anal. Appl. – 2004. – V. 294. – P. 523–532.

3. Behera B, Jahan Q. *Wavelet packets and wavelet frame packets on local fields of positive characteristic* // J. Math. Anal. Appl. – 2012. – V. 39. – P. 1–14.

4. Водолазов А.М., Лукомский С.Ф. *КМА на локальных полях положительной характеристики* // Изв. Сарат. ун-та. Нов. сер. Сер. Математика. Механика. Информатика. – 2014. – Т. 14, № 4(2). – С. 511-–518.

5. Berdnikov G., Kruss Iu., Lukomskii S. *On orthogonal systems of shifts of scaling function on local fields of positive characteristic* // Turk. J. Math. – 2017. – V. 41, № 2. – P. 244–253.

REFINABLE STEP FUNCTION ON LOCAL FIELDS OF POSITIVE CHARACTERISTIC AND ALGORITHM FOR CONSTRUCTING SUCH FUNCTION

Iu.S. Kruss

The algorithm for constructing compactly supported refinable step function on local fields of positive characteristic is discussed.

Keywords: multiresolution analysis, refinable function, local fields of positive characteristic.

УДК 517.52

О МАКСИМАЛЬНОЙ ПЛОТНОСТИ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТИ ЧИСЕЛ

А.Ф. Кужаев[1]

1 *arsenkuzh@outlook.com*; Башкирский государственный университет

В работе анонсируются взаимосвязи между различными плотностями положительной последовательности и связанными с ними величинами. А именно, даётся формула для вычисления максимальной плотности положительной последовательности.

Ключевые слова: последовательность положительных чисел, максимальная плотность, верхняя плотность.

Через $\Lambda = \{\lambda_n, m_n\}_{n=1}^{\infty}$ будем обозначать кратную последовательность положительных чисел. Точнее: $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ — неограниченная строго возрастающая положительная последовательность, и m_n — натуральное число, называемое кратностью элемента $\lambda_n, n \geqslant 1$.

Напомним, что *верхней плотностью* последовательности Λ называется величина

$$\bar{n}(\Lambda) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(t,\Lambda)}{t}, \quad n(t,\Lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} m_n.$$

Кроме того, нам понадобится характеристика, введённая Дж. Полиа (см. [1]) — *максимальная плотность* последовательности Λ:

$$\bar{n}_0(\Lambda) = \lim_{\delta\to+0} \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{n(t,\Lambda) - n(t(1-\delta),\Lambda)}{\delta t}, \ \ \delta \in (0;1).$$

Согласно лемме параграфа E3 главы IV книги [2] предел по $\delta \to +0$ всегда существует, так что максимальная плотность определена корректно.

Помимо этого, нам также будут необходимы следующие величины:

$$\bar{L}(\Lambda,\delta) = \varlimsup_{t\to+\infty} \frac{\lambda(t) - \lambda(t(1-\delta))}{-\ln(1-\delta)}, \quad \lambda(t) = \sum_{\lambda_n \leqslant t} \frac{m_n}{\lambda_n}, \quad \delta \in (0;1).$$

Величина $\bar{L}(\Lambda,\delta)$ была впервые введена, по-видимому, Л.А. Рубелем в [3], и тесно связана с логарифмической блок-плотностью положительной последовательности. По определению это

$$\bar{L}(\Lambda) = \inf_{\delta\in(0;1)} \bar{L}(\Lambda,\delta).$$

В дальнейшем Рубель и П. Маллиавен в своей совместной работе [4] показали, что в случае конечной верхней плотности логарифмическую блок-плотность можно определить так:

$$\bar{L}(\Lambda) = \lim_{\delta\to 1} \bar{L}(\Lambda,\delta),$$

то есть данный предел всегда существует. Логарифмическая блок-плотность оказалась важнейшей характеристикой положительной последовательности в решении вопроса полноты системы экспонент в горизотальной полосе (см. [3]).

С использованием этих обозначений формулируется следующая

Теорема. *Пусть последовательность Λ имеет конечную верхнюю плотность. Тогда праведливы равенства*

$$\bar{n}_0(\Lambda) = \lim_{\delta \to +0} \bar{L}(\Lambda, \delta) = \sup_{\delta \in (0;1)} \bar{L}(\Lambda, \delta).$$

Литература

1. Polya G. *Untersuchungen über Lücken und Singularitäten von Potenzreihen* // Math. Zeitschr. – 1929. – V. 29. – P. 549-640.

2. Koosis P. *The logarithmic integral I.* – Cambridge University Press, 1997. – P. 625.

3. Rubel L. A. *Necessary and sufficient conditions for Carlson's theorem on entire functions* // Trans. Amer. math. Soc. – 1956. – T. 83. – p. 4I7-429.

4. Malliaven P., Rubel L. A. *On small entire functions of exponential type with given zeros.* // Bull. Soc. Math. France. – 1961. – T. 89 – p. 175-201.

ON MAXIMAL DENSITY OF NUMBERS SEQUENCE

A.F. Kuzhaev

In this work we announce relations between different densities of a positive sequence and variables related to them. Namely, given the formula for calculating the maximal density of the positive sequence.

Keywords: sequence of positive numbers, maximal density, upper density.

УДК 517.98

C^*-АЛГЕБРА, ПОРОЖДЕННАЯ ОТОБРАЖЕНИЕМ, КОТОРОЕ ИНДУЦИРУЕТ ИНВЕРСНУЮ ПОЛУГРУППУ

А.Ю. Кузнецова[1]

1 *alla/kuznetsova@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье рассматриваются C^*-алгебры, порожденные отображениями специального вида. Заданное на счетном множестве отображение индуцирует семейство операторов частичной изометрии, порождающее исследуемую алгебру. В работе приводятся условия, при которых это семейство мультипликативно порождает инверсную полугруппу, и изучаются соответствующие алгебры.

Ключевые слова: C^*-алгебра, инверсная полугруппа, инвариантное подпространство, оператор обобщенного сдвига, алгебра Теплица.

Пусть $\varphi : X \longrightarrow X$ отображение счетного множества X в себя, удовлетворяющее условию $\operatorname{card} \varphi^{-1}[x] < \infty$ для любого $x \in X$. С парой (X, φ) связан граф (X, φ) с вершинами в точках множества X и ребрами $(x, \varphi(x))$. C^*-алгебра $C^*_\varphi(X)$, порожденная отображением φ, ассоциирована с данным графом. Конструкция $C^*_\varphi(X)$ была предложена в [1]. Мы предполагаем, что граф (X, φ) является связным. Кроме того, считаем, что $\varphi^n(x) \neq x$ ни при каких $n \in \mathbb{N}$ и $x \in X$.

Заданное на X отображение индуцирует на нем частичный порядок (φ-порядок) и отношение φ-эквивалентности.

Скажем, что $x \prec y$, если найдется такое $n \in \mathbb{N}$, что $\varphi^n(y) = x$.

Скажем, что элементы x и y n-эквивалентны, $x \overset{n}{\sim} y$, если $\varphi^n(x) = \varphi^n(y)$, и φ-эквивалентны, $x \overset{\varphi}{\sim} y$, если они n-эквивалентны для некоторого $n \in \mathbb{N}$.

Семейство функций $\{e_x\}_{x \in X}$, где $e_x(y) = \delta_{x,y}$ ($\delta_{x,y}$ — символ Кронекера), образует естественный ортонормированный базис в $l^2(X)$. На базисные векторы можно распространить отношения φ-порядка и φ-эквивалентности, отождествляя элемент базиса e_x с соответствующим элементом $x \in X$.

Отображение φ индуцирует замыкаемый оператор

$$T_\varphi : l^2(X) \longrightarrow l^2(X); \quad T_\varphi f = f \circ \varphi,$$

с которым связано семейство операторов частичной изометрии $\mathscr{U} = \{U_k\}_{k \in \mathbb{N}}$,

$$T_\varphi = U_1 + \sqrt{2}U_2 + \ldots + \sqrt{m}U_m + \ldots,$$

где U_k частичная изометрия с начальным пространством $l^2(X_k) = \{f \in l^2(X) : T_\varphi^* T_\varphi f = kf\}$ и конечным $l^2_k = \{f \in l^2(X) : T_\varphi T_\varphi^* f = kf\}$.

Под *алгеброй, порожденной отображением* φ, понимается операторная алгебра $C^*_\varphi(X)$, порожденная указанным семейством частичных изометрий.

Семейства $\mathscr{U}$ и $\mathscr{U}^*$ мультипликативно порождают инволютивную полугруппу $\mathrm{Mon}(X)$, элементы которой назовем мономами. Очевидно, что линейные комбинации мономов плотны в $C^*_\varphi(X)$. В [2] приведен критерий неприводимости $C^*_\varphi(X)$.

Теорема 1. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *$C^*_\varphi(X)$ неприводима на $l^2(X)$;*

2) *из равенства $(We_x, e_x) = (We_y, e_y)$ для любого $W \in \mathrm{Mon}(X)$ следует $e_x = e_y$.*

Данный критерий позволяет ввести на базисных векторах еще одно отношение эквивалентности. Скажем, что базисные векторы e_x и e_y являются ω-эквивалентными, $e_x \overset{\omega}{\sim} e_y$, если для любого $W \in \mathrm{Mon}(X)$ выполняется $(We_x, e_x) = (We_y, e_y)$. Нетрудно проверить, что ω действительно является отношением эквивалентности и разбивает множество $\{e_x\}_{x \in X}$ на непересекающиеся классы. Пусть $J_{x_0} = \{e_x : e_x \overset{\omega}{\sim} e_{x_0}\}$ — класс эквивалентности базисного вектора e_{x_0}.

Нас интересует, когда полугруппа $\mathrm{Mon}(X)$ является инверсной, то есть состоит только из частичных изометрий. Подробно об инверсных полугруппах и связанных с ними алгебраических конструкциях см. в [3], [4].

Теорема 2. *Следующие условия эквивалентны:*

1) *Полугруппа $\mathrm{Mon}(X)$ является инверсной.*

2) *Из условия $e_x \overset{\varphi}{\sim} e_y$ следует $e_x \overset{\omega}{\sim} e_y$.*

Предыдущую теорему можно сформулировать и следующим образом:

Для того чтобы полугруппа $\mathrm{Mon}(X)$ *была инверсной, необходимо и достаточно, чтобы для любых двух* φ*-эквивалентных элементов* x *и* y *существовало взаимно однозначное отображение* $\chi : X \longrightarrow X$ *такое, что* $\chi \circ \varphi = \varphi \circ \chi$ *и* $\chi(x) = y$.

Предположим, что множество $\mathscr{U}$ является ручным, то есть совместно с $\mathscr{U}^*$ порождает инверсную полугруппу.

Зададим на мономах следующее действие единичной окружности

$$\alpha : S^1 \longrightarrow \mathrm{Aut}\, C^*_\varphi(X); \quad \alpha(z)V = z^{\mathrm{ind}\, V} V,\ V \in \mathrm{Mon}(X)$$

и продолжим по непрерывности. Обозначим через $C_{\varphi,0}$, неподвижную подалгебру относительно действия окружности α.

Следствие. *Подалгебра* $C_{\varphi,0}$ *коммутативна тогда и только тогда, когда* $\mathscr{U}$ *порождает инверсную полугруппу.*

Заметим, что $C_{\varphi,0}$ является AF-алгеброй. Если $\mathscr{U}$ — ручное множество, то $C_{\varphi,0}$ порождается подполугруппой идемпотентов $\mathrm{Mon}(X)$.

Множество X назовем φ-ручным, если соответствующее семейство частичных изометрий $\mathscr{U}$ является ручным. Пусть $\mathscr{E}(x) = \{y \in X : x \prec y\}$, and $\mathfrak{E}(x) = \{y \in X : x \overset{\varphi}{\sim} y\}$.

Предложение. *Пусть* X *—* φ*-ручное множество. Пусть найдется хотя бы один* $x \in X$*, такой, что множество* $\mathfrak{E}(x)$ *конечное. Тогда* $\mathfrak{E}(x)$ *является конечным множеством для любого* $x \in X$ *и* $J_x = \{e_y : y \in \mathfrak{E}(x)\}$.

Если X является φ-ручным множеством, то можно полностью описать инвариантные подпространства для $C^*_\varphi(X)$ и структуру алгебры.

Теорема 3.
Пусть X *—* φ*-ручное множество и* φ *не сюръективно. Пусть* $\mathfrak{E}(x)$ *— счетное множество для всех* $x \in X$*. Тогда*

1) $l^2(X) \simeq \overset{+\infty}{\underset{n=1}{\oplus}} \big(\underset{i \in I_n}{\oplus} H_i \big)$*, где* I_n *счетно;*
2) *подпространства* H_i *являются конечномерными и изоморфными при фиксированном* n*;*
3) $C^*_\varphi(X)$ *изоморфна некоторой подалгебре* $\overset{\infty}{\underset{k=1}{\oplus}} M_{n_k}(\mathbb{C})$.

Теорема 4. *Пусть* X *—* φ*-ручное множество и* φ *не сюръективно. Пусть* $\mathfrak{E}(x)$ *— конечное множество для всех* $x \in X$*. Тогда*

1) $l^2(X) \simeq l^2(\mathbb{Z}_+) \oplus \Big(\underset{\mathrm{fin}}{\oplus} \big(\underset{i \in I_n}{\oplus} H_i \big) \Big)$*, где* I_n *конечно;*
2) *подпространства* H_i *являются конечномерными и изоморфными при фиксированном* n*;*
3) $C^*_\varphi(X)$ *изоморфна прямой сумме* $\mathscr{T} \oplus \big(\underset{k}{\oplus} M_{n_k} \big)$*, где* $\mathscr{T}$ *— алгебра Теплица.*

Теорема 5. *Пусть* X *—* φ*-ручное множество и* φ *сюръекция. Пусть* $\mathfrak{E}(x)$ *— счетное множество для всех* $x \in X$*. Тогда*

1) $l^2(X) \simeq \overset{+\infty}{\underset{n=-\infty}{\oplus}} \left(\underset{i \in I_n}{\oplus} H_i \right)$, *где* I_n *счетно;*

2) *каждое* $H_i \simeq l^2(\mathbb{Z}_+)$*;*

3) *Сужение* $C^*_\varphi(X)$ *на* H_i *изоморфно* C^**-алгебре, порожденной оператором обобщенного сдвига, причем коэффициенты операторов для различных подпространств связаны друг с другом. Если* $H_{(n)}$ ($H_{(m)}$) *слагаемое в* $\underset{i \in I_n}{\oplus} H_i$ *(соотв.* $\underset{i \in I_m}{\oplus} H_i$*),* $n > m$*, тогда соответствующие операторы обобщенного сдвига имеют коэффициенты* $(\alpha_1, \alpha_2, \ldots)$ *и* $(\beta_1, \ldots, \beta_{n-m}, \alpha_1, \alpha_2, \ldots)$*.*

Теорема 6. *Пусть* X *—* φ*-ручное множество и* φ *сюръекция. Пусть* $\mathfrak{E}(x)$ *— конечное множество для всех* $x \in X$*. Тогда*

1) $l^2(X) \simeq l^2(\mathbb{Z}) \oplus \left(\overset{\infty}{\underset{n=0}{\oplus}} \left(\underset{i \in I_n}{\oplus} H_i \right) \right)$*, где* I_n *конечно;*

2) *каждое* $H_i \simeq l^2(\mathbb{Z}_+)$*;*

3) *Сужение* $C^*_\varphi(X)$ *на* H_i *описывается пунктом 3) теоремы 5. Сужение* $C^*_\varphi(X)$ *на* $l^2(\mathbb{Z})$ *изоморфно* C^**-алгебре, порожденной двусторонним оператором обобщенного сдвига.*

Литература

1. Григорян С. А., Кузнецова А. Ю. *C^*-алгебры, порожденные отображениями* // Мат. Заметки. – 2010. – Т. 87. – № 5. – С. 694–703.

2. Григорян С. А., Кузнецова А. Ю. *C^*-алгебры, порожденные отображениями. Критерий неприводимости* // Известия вузов. Матем., в печати.

3. Exel R. *Inverse semigroups and combinatorial C^*-algebras* // Bull. Bras. Math. Soc. (N.S.) – 2008. – V. 39. – № 2. – P. 191–313.

4. Paterson A. *Groupoids, inverse semigroups, and there operator algebras.* – Boston-Basel-Berlin: Birkhauser, 1999. – 275 p.

C^*-ALGEBRA GENERATED BY A MAPPING THAT INDUCES THE INVERSE SEMIGROUP

A.Yu. Kuznetsova

We consider C^*-algebras generated by mappings of special kind. A given mapping on a countable set induces a family of partial isometries which generates the algebra. We give conditions for ensuring that the family multiplicatively generates an inverse semigroup and study the corresponding C^*-algebras.

Keywords: C^*-algebra, inverse semigroup, invariant subspace, weighted shift operator, Toeplitz algebra.

УДК 517.958

ПОСТРОЕНИЕ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ РЕШЕНИЙ НЕКОТОРЫХ ТРЁХМЕРНЫХ ЗАДАЧ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ

М.Ф. Кулагина[1], Р.А. Румянцев[2]

1 *kulagina_mf@mail.ru*; Академический лицей им. Н.И.Лобачевского
2 *rarumyantsev@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В настоящей работе с помощью обобщённого дискретного преобразования Фурье строятся почти-периодические в смысле Бора решения задач Дирихле и Неймана для полупространства и пространственного слоя, задач о свободном колебании большой мембраны, колебании тонкой упругой пластины, теплопроводности в бесконечной среде в отсутствии источников. Все решения получены в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье, коэффициенты которых выражаются через заданные функции.

Ключевые слова: обобщённое дискретное преобразование Фурье, задача Дирихле, задача Неймана, полупространство, пространственный слой, колебания, теплопроводность.

В работах [1]- [3] с помощью ОДФ, введённого и изученного в [4] и [5], построены почти-периодические в смысле Бора решения некоторых задач математической физики для функций двух переменных, то есть плоских задач.

В настоящей работе строятся почти-периодические в смысле Бора решения задач Дирихле и Неймана для полупространства и пространственного слоя, задач о свободном колебании большой мембраны, колебании тонкой упругой пластины, теплопроводности в бесконечной среде в отсутствии источников. Решение этих задач, но в других классах функций, приводится почти во всех учебниках и учебных пособиях по математической физике.

Будем говорить, что $f(x,y) \in \prod_w$, если

$$f(x,y) = f_0 + \sum_{\mu^2+\lambda^2 \neq 0} f_{\lambda\mu} e^{i\lambda x} e^{i\mu y}$$

и $\{f_{\lambda\mu}\} \in l_1$.

Если последовательность $\{f_{\lambda\mu}(z)\}$ такова, что существует $\{a_{\lambda\mu}\}$ такая, что $| f_{\lambda\mu}(z) | \leq a_{\lambda\mu}$, то будем говорить, что

$$\Phi(x,y,z) = \sum_{\lambda,\mu} f_{\lambda,\mu}(z) e^{i\lambda x} e^{i\mu y} \in \prod\nolimits_w^z$$

Задача Дирихле для слоя

Надо найти функцию $\Phi(x,y,z) \in \prod_w^z$, которая:

1. определена и непрерывна в слое $0 \leq z \leq h$;
2. удовлетворяет уравнению Лапласа $\triangle\Phi = 0$ в $0 < z < h$;
3. удовлетворяет на границах условиям $\Phi(x,y,z)|_{z=0} = f(x,y), \Phi(x,y,z)|_{z=h} = g(x,y)$.

Если $f(x,y) \in \prod_w$ и $g(x,y) \in \prod_w$, то единственное решение этой задачи даётся формулой

$$\Phi(x,y,z) = f_0 + \frac{g_0 - f_0}{h} z + \sum_{\mu^2+\lambda^2 \neq 0} \left(g_{\lambda\mu} \frac{e^{nz} - e^{-nz}}{e^{nh} - e^{-nh}} - f_{\lambda\mu} \frac{e^{n(z-h)} - e^{-n(z-h)}}{e^{nh} - e^{-nh}} \right) e^{i\lambda x} e^{i\mu y}$$

где $n = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$. Рассмотрена также задача Дирихле для полупространства.

Задача Неймана для полупространства

Надо найти функцию $\Phi(x,y,z) \in \prod_w^z$, которая:

1. определена и непрерывна в $z \geq 0$;
2. удовлетворяет уравнению Лапласа $\triangle\Phi = 0$ в $z > 0$;
3. производная принимает на границе заданные значения:

$$\frac{\partial \Phi(x,y,z)}{\partial z}|_{z=0} = f(x,y).$$

Для разрешимости задачи Неймана необходимо, чтобы $f_0 = 0$.Тогда решение $\Phi(x,y,z)$ равномерно стремящиеся к нулю по x и y при $z \to +\infty$ даётся формулой:

$$\Phi(x,y,t) = -\sum_{\mu^2+\lambda^2 \neq 0} \frac{1}{n} f_{\lambda\mu} e^{-nz} e^{i\lambda x} e^{i\mu y},$$

где $n = \sqrt{\mu^2 + \lambda^2}$.

Задача о теплопроводности в бесконечной среде

Надо найти функцию изменения температуры Q(x,y,t), которая удовлетворяет начальному условию $Q(x,y,z)|_{t=0} = f(x,y) \in \prod_w$ и дифференциальному уравнению

$$\frac{\partial Q}{\partial t} = \upsilon \triangle_1 Q,$$

где $\triangle_1$ – оператор Лапласа по x и y, υ – коэффициент теплопроводности.

Решение задачи в классе $\prod_w^t$ даётся формулой

$$Q(x,y,t) = f_0 + \sum_{\mu^2+\lambda^2 \neq 0} f_{\lambda\mu} e^{-lt} e^{i\lambda x} e^{i\mu y},$$

где $l = \upsilon(\mu^2 + \lambda^2)$.

Задача о свободных колебаниях очень большой мембраны.

Смещение мембраны $z = z(x,y,t)$ в случае свободных колебаний описывается уравнением:

$$\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} = \triangle_1 z$$

с начальными условиями $z(x,y,t)|_{t=0} = f(x,y)$, $\frac{\partial z}{\partial t}|_{t=0} = g(x,y)$. В уравнении $\triangle_1$ – оператор Лапласа по x и y.

Если $f(x,y) \in \prod_w$ и $g(x,y) \in \prod_w$, то единственное решение этой задачи даётся формулой:

$$z(x,y,t) = \sum_{\mu^2+\lambda^2 \neq 0} (f_{\lambda\mu}\cos(mt) + g_{\lambda\mu}\sin(mt))e^{i\lambda x}e^{i\mu y},$$

где $m = c\sqrt{\mu^2+\lambda^2} \geq \alpha > 0$.

Задача о свободных колебаниях тонкой упругой пластины.

Здесь для определения смещения $\omega = \omega(x,y,t)$ точки (x,y) надо решить уравнение:

$$D\Big(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}\Big)^2 \omega + 2\rho h\frac{\partial^2 \omega}{\partial t^2} = 0$$

с начальными условиями $\omega(x,y,t)|_{t=0} = f(x,y)$, $\frac{\omega}{\partial t}|_{t=0} = g(x,y)$.

Через D обозначен коэффициент жесткости пластины, который связан с модулем Юнга E и коэффициентом Пуассона σ формулой $D = \frac{2Eh^2}{3(1-\sigma^2)}$, h-толщина пластины.

Если $f(x,y) \in \prod_w$ и $g(x,y) \in \prod_w$, то единственное решение этой задачи класса $\prod_w^t$ даётся формулой:

$$\omega(x,y,t) = \sum_{\mu^2+\lambda^2 \neq 0} (f_{\lambda\mu}\cos(kt) + \frac{1}{k}g_{\lambda\mu}\sin(kt))e^{i\lambda x}e^{i\mu y},$$

где $k = (\mu^2+\lambda^2)\sqrt{\frac{D}{2ph}} \geq \alpha > 0$.

Как правило, все эти задачи решаются с помощью преобразования Фурье, и решения их записываются в виде интегралов Фурье, что вызывает большие вычислительные трудности. В данной работе все решения задач получены в виде абсолютно сходящихся рядов Фурье, коэффициенты которых выражаются через заданные функции.

Литература

1. Кулагина М.Ф. *Построение почти-периодических решений некоторых краевых задач о распространении поверхностных волн* // Изв. ВУЗов. Математика. – 2001. – №9. – С. 38-42.

2. Кулагина М.Ф., Иванова В.И. *Первая основная задача теории упругости для области, состоящей из полосы и полуплоскости* // Вестник СамГТУ. Серия “Физ-мат науки”. – Самара: Изд-во СамГТУ. – 2003. – С. 45-51.

3. Кулагина М.Ф., Микишанина Е.А. *Построение почти-периодических решений некоторых систем дифференциальных уравнений* // Математические заметки СВФУ. – 2015. – Т. 22. – № 3(87). – С. 11-20.

4. Кулагина М.Ф. *О некоторых бесконечных системах с разностными индексами* // Изв.ВУЗов. Математика. – 1992. – № 3. – С. 18-23.

5. Кулагина М.Ф. *Об интегральных уравнениях в средних значениях в пространствах почти-периодических функций* // Изв. ВУЗов. Математика. – 1993. – № 8. – С. 19-29.

CONSTRUCTION OF ALMOST PERIODIC SOLUTIONS TO SOME THREE-DIMENSIONAL PROBLEMS OF MATHEMATICAL PHYSICS

M.F. Kulagina, R.A. Rumyancev

By using the generalized discrete Fourier transforms, they are constructed almost-periodic in the sense of Bohr solutions of the Dirichlet and Neumann problems for half-space and spatial layer problems on the free oscillation of a large membrane vibration of a thin elastic plate, heat conduction in an infinite medium in absence of sources. All solutions of the problems are obtained in the form of absolutely convergent Fourier series whose coefficients are expressed through the given functions.

Keywords: generalized discrete Fourier transform, Dirichlet problem, Neumann problem, half-space, spatial layer, fluctuations, thermal conductivity.

УДК 517.923

О РЕЖИМАХ ХАОТИЧЕСКИХ КОЛЕБАНИЙ В РЕШЕНИИ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

А.Ф. Курин[1]

1 *afkurin@mail.ru*; Воронежский государственнvй университет

В статье доказывается существование режимов хаотических колебаний в решении неоднородного уравнения Дуффинга без затухания с малой нелинейностью и малой амплитудой внешней периодической силы. Выводится соотношение, связывающее параметры уравнения, которые обеспечивают настройку осциллятора Дуффинга на указанные режимы.

Ключевые слова: метод усреднения, осциллятор, бифуркации.

В литературе (см., напр., [1, 2]) приведены примеры систем, в которых имеются режимы хаотических колебаний. В настоящей работе такие колебания описаны для хорошо известного квазилинейного варианта уравнения Дуффинга.

Неоднородное без затухания при наличии линейной составляющей упругой силы уравнение Дуффинга

$$\ddot{z} + \Omega^2 z = \varepsilon \nu z^3 + \varepsilon a \cos \Omega_1 t = \varepsilon \varphi(z, t), \tag{1}$$

где $\Omega^2 > 0$, $a > 0$, $\Omega_1 > 0$, ν – постоянные величины, $\varepsilon > 0$ – малый параметр, будем интегрировать методом усреднения, используя второе приближение метода [3, 4]. Для этого воспользуемся переменными ван дер Поля (b – амплитуда, ψ – фаза, при этом $z = b\cos\psi$), для которых из (1) получаем систему

$$\begin{aligned} \dot{b} &= -\frac{\varepsilon}{\Omega}(\nu b^3 \cos^3\psi \sin\psi + a\cos\Omega_1 t \sin\psi), \\ \dot{\psi} &= \Omega - \frac{\varepsilon}{\Omega b}(\nu b^3 \cos^4\psi + a\cos\Omega_1 t \cos\psi). \end{aligned} \tag{2}$$

Введя фазу $\phi = \Omega_1 t$, дополним систему третьим уравнением $\dot{\phi} = \Omega_1$. Далее, в системе (2) после тригонометрических преобразований появляется фаза $\theta = \psi - \phi$. Если считать частоты Ω и Ω_1 близкими и обозначить частотную расстройку как $\Omega - \Omega_1 = \varepsilon h$, эта фаза будет медленной. Для нее запишем уравнение $\dot{\theta} = \dot{\psi} - \dot{\phi}$. Окончательно приходим к системе четырех дифференциальнvх уравнений

$$\begin{aligned}
\dot{b} &= -\frac{\varepsilon}{\Omega}\left\{\frac{\nu b^3}{8}(2\sin 2\psi + \sin 4\psi) + \frac{a}{2}\left[\sin(\psi+\phi) + \sin\theta\right]\right\},\\
\dot{\theta} &= \varepsilon h - \frac{\varepsilon}{\Omega b}\left\{\frac{\nu b^3}{8}(3 + 4\cos 2\psi + \cos 4\psi) + \frac{a}{2}\left[\cos(\psi+\phi) + \cos\theta\right]\right\},\\
\dot{\psi} &= \Omega - \frac{\varepsilon}{\Omega b}\left\{\frac{\nu b^3}{8}(3 + 4\cos 2\psi + \cos 4\psi) + \frac{a}{2}\left[\cos(\psi+\phi) + \cos\theta\right]\right\},\\
\dot{\phi} &= \Omega_1.
\end{aligned} \tag{3}$$

Система имеет известный в методе усреднения вид [3]

$$\begin{aligned}
\dot{x} &= \varepsilon X(x, y),\\
\dot{y} &= \omega + \varepsilon Y(x, y),
\end{aligned}$$

где $x = (b, \theta)$ – вектор медленных переменных, $y = (\psi, \phi)$ – вектор быстрых переменных (быстрые фазы), $\omega = (\Omega, \Omega_1)$. Система интегрируется по известной схеме [3,4]. В частности, поскольку $\omega \neq \omega(x)$, во втором приближении метода неизвестные функции имеют вид

$$x = \bar{x} + \varepsilon u_1(\bar{x}, \bar{y}), \qquad y = \bar{y} + \varepsilon v_1(\bar{x}, \bar{y}). \tag{4}$$

Здесь $\bar{x}$, $\bar{y}$ – новые переменные, а функции u_1, v_1 вычисляются интегрированием по $\bar{y}$. Отметим, что возникающие при интегрировании произвольные функции, зависящие от $\bar{x}$, полагаются равными нулю. Тогда в (4) u_1, v_1 описывают только быстрые колебания, которые накладываются на движение $\bar{x}(t)$. В результате для средних значений $\bar{x}$ медленных переменных x во втором приближении получаем систему

$$\begin{aligned}
\dot{\bar{b}} &= -\left(\varepsilon\frac{a}{2\Omega} + \varepsilon^2\frac{3\nu a\bar{b}^2}{32\Omega^3}\right)\sin\bar{\theta},\\
\dot{\bar{\theta}} &= \varepsilon\left(h - \frac{3\nu\bar{b}^2}{8\Omega}\right) - \varepsilon^2\frac{51\nu^2\bar{b}^4}{256\Omega^3} - \left(\varepsilon\frac{a}{2\Omega\bar{b}} + \varepsilon^2\frac{9\nu a\bar{b}}{32\Omega^3}\right)\cos\bar{\theta},
\end{aligned} \tag{5}$$

из которой следует интеграл

$$\cos\bar{\theta} = \frac{h\bar{b} - \dfrac{3\nu\bar{b}^3}{16\Omega} - \varepsilon\dfrac{17\nu^2\bar{b}^5}{256\Omega^3}}{\dfrac{a}{\Omega} + \varepsilon\dfrac{3\nu a\bar{b}^2}{16\Omega^3}} + \frac{C_1}{\bar{b}\left(1 + \varepsilon\dfrac{3\nu\bar{b}^2}{16\Omega^2}\right)},$$

где C_1 – произвольная постоянная.

Исключая $\bar{\theta}$ из системы (5) с помощью интеграла, приходим к уравнению осциллятора

$$\begin{aligned}
\ddot{\bar{b}} = &\left(-\frac{\varepsilon^2h^2}{4} + \frac{3\varepsilon^2\nu aC_1}{32\Omega^2} + \frac{3\varepsilon^3\nu a^2}{32\Omega^4}\right)\bar{b} + \left(\frac{3\varepsilon^2\nu h}{16\Omega} + \frac{9\varepsilon^4\nu^2a^2}{512\Omega^6} + \frac{17\varepsilon^3\nu^2aC_1}{256\Omega^4}\right)\bar{b}^3 +\\
&+\left(-\frac{27\varepsilon^2\nu^2}{1024\Omega^2} + \frac{51\varepsilon^3\nu^2h}{512\Omega^3}\right)\bar{b}^5 - \frac{51\varepsilon^3\nu^3}{2048\Omega^4}\bar{b}^7 - \frac{1445\varepsilon^4\nu^4}{512^2\Omega^6}\bar{b}^9 + \frac{\varepsilon^2a^2C_1^2}{4\Omega^2\bar{b}^3}.
\end{aligned} \tag{6}$$

Установим закономерности колебаний осциллятора (6), ограничиваясь здесь первым приближением метода усреднения. В этом случае, как известно [3], $b = \bar{b}$, $\theta = \bar{\theta}$. Система (5) упрощается

$$\begin{aligned} \dot{b} &= -\frac{p}{2}\sin\theta, \\ \dot{\theta} &= s - \frac{3q}{8}b^2 - \frac{p}{2b}\cos\theta, \end{aligned} \tag{7}$$

где $p = \varepsilon a/\Omega$, $q = \varepsilon\nu/\Omega$, $s = \varepsilon h$. Интеграл приобретает вид

$$\cos\theta = \frac{s}{p}b - \frac{3q}{16p}b^3 + \frac{C_1}{b}.$$

Используя произвольные начальные значения $b(0), \theta(0)$, из интеграла получаем

$$C_1 = b(0)\cos\theta(0) - \frac{s}{p}b(0)^2 + \frac{3q}{16p}b(0)^4.$$

Далее будем считать $C_1 \neq 0$.

Уравнение осциллятора (6) записывается как

$$\ddot{b} = -\frac{p}{2}\cos\theta\cdot\dot{\theta} = \left(-\frac{s^2}{4} + \frac{3pqC_1}{32}\right)b + \frac{3sq}{16}b^3 - \frac{27q^2}{1024}b^5 + \frac{p^2C_1^2}{4b^3} = F(b). \tag{8}$$

Перечислим неотрицательные корни уравнения $F(b) = 0$, которые определяют положения равновесия осциллятора

$$b_{1,2} = \sqrt{\frac{8\alpha}{3} \pm \sqrt{D_1}}, \quad b_{3,4} = \sqrt{\frac{8\alpha}{9} \pm \sqrt{D_2}}, \quad D_1 = \frac{64\alpha^2}{9} + \frac{16\beta}{3}, \quad D_2 = \frac{64\alpha^2}{81} - \frac{16\beta}{9},$$

где $\alpha = s/q$, $\beta = pC_1/q$.

Из анализа неравенств $D_{1,2} > 0$ и знака подкоренных выражений в $b_{1,2,3,4}$ заключаем, что на плоскости параметров α^2, β из шести областей имеются две области с тремя положениями равновесия: в области B ($\alpha > 0$, $0 < \beta < 4\alpha^2/9$) положения равновесия b_1, b_3, b_4, в области C ($\alpha > 0$, $0 < \beta > -4\alpha^2/3$) – это b_1, b_2, b_3.

Из закона сохранения энергии осциллятора (8) следует, что потенциал

$$\Pi(b) = \frac{q^2}{8}\left(\alpha b - \frac{3}{16}b^3 + \frac{\beta}{b}\right)^2$$

имеет минимумы при $b = b_1$ и $b = b_4$, максимум – при $b = b_3$. В точках экстремума потенциалы равны

$$\Pi(b_4) = \Pi_{min1} = \frac{q^2}{8}\left(\frac{32\alpha^3}{81} + \frac{8\alpha\beta}{3} - \frac{9D_2\sqrt{D_2}}{16}\right),$$
$$\Pi(b_3) = \Pi_{max} = \frac{q^2}{8}\left(\frac{32\alpha^3}{81} + \frac{8\alpha\beta}{3} + \frac{9D_2\sqrt{D_2}}{16}\right), \quad \Pi(b_1) = \Pi_{min2} = 0.$$

В области C получаем минимумы при $b = b_1$ и $b = b_2$, максимум – при $b = b_3$ с потенциалами

$$\Pi(b_2) = \Pi_{min1} = 0, \quad \Pi(b_3) = \Pi_{max} = \frac{q^2}{8}\left(\frac{32\alpha^3}{81} + \frac{8\alpha\beta}{3} + \frac{9D_2\sqrt{D_2}}{16}\right), \quad \Pi(b_1) = \Pi_{min2} = 0.$$

Таким образом, в каждой из указанных двух областей существуют две потенциальные ямы, разделенные потенциальным барьером. Как показывают вычисления, для обеих областей бифуркационные значения параметров, соответствующие настройке осциллятора (8) на максимум П, связаны соотношением

$$\tilde{\alpha} = \frac{-Q + \sqrt{Q^2 - 4PR}}{2P},$$

в котором

$$P = \tilde{\gamma} - 4, \quad Q = -\left(\frac{81\tilde{\gamma}^3}{64} + 6\tilde{\gamma} - \frac{27\tilde{\gamma}^2}{4}\right), \quad R = -\frac{9\tilde{\gamma}^2}{4}.$$

Здесь введены обозначения параметров

$$\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{C_1^2} = \frac{\Omega(\Omega - \Omega_1)}{\varepsilon\nu C_1^2}, \qquad \tilde{\gamma} = \frac{p}{sC_1} = \frac{\varepsilon a}{\Omega(\Omega - \Omega_1)C_1}.$$

Система уравнений (7) с использованием параметров $\tilde{\alpha}$, $\tilde{\gamma}$ приобретает вид

$$\begin{aligned} \frac{d\tilde{b}}{d\tau} &= -\frac{\tilde{\gamma}}{2}\sin\theta, \\ \frac{d\theta}{d\tau} &= 1 - \frac{3}{8\tilde{\alpha}}\tilde{b}^2 - \frac{\tilde{\gamma}}{2\tilde{b}}\cos\theta, \end{aligned} \tag{9}$$

где $\tilde{b} = b/C_1$, $\tau = s\,t$.

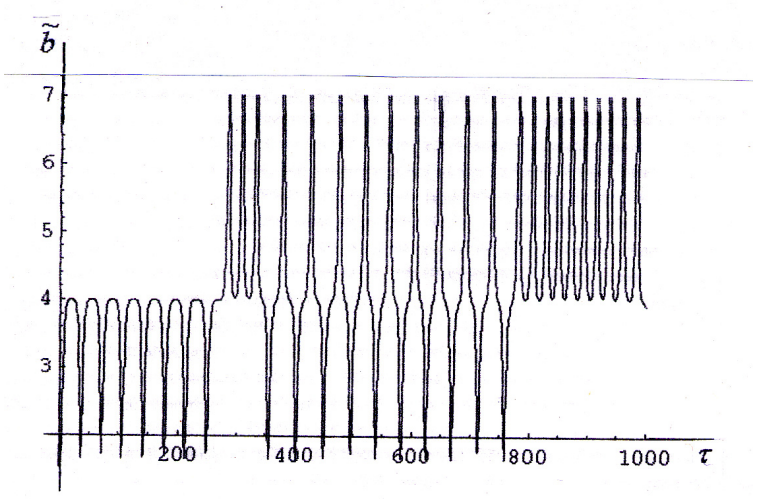


Рис. 1. Хаотические колебания

На рис. 1 представлен график хаотических колебаний амплитуды $\tilde{b}$, полученный численным решением системы (9) при $\tilde{\alpha} = 12$, $\tilde{\gamma} = 4.0000025$, когда осциллятор (8) настроен на вершину потенциального барьера в области B.

Литература

1. Кузнецов С. П. *Динамический хаос.* – М.: Физматлит, 2006. – 355 с.

2. Гукенхеймер Дж., Холмс Ф. *Нелинейные колебания, динамические системы и бифуркации векторных полей.* – Москва-Ижевск: Институт компьютерных исследований, 2002. – 560 с.

3. Моисеев Н. Н. *Асимптотические методы нелинейной механики.* – М.: Наука, 1981. – 400 с.

4. Гребеников Е. А. *Метод усреднения в прикладных задачах.* – М.: Наука, 1986. – 256 с.

ON REGIMES OF CHAOTIC OSCILLATIONS FOR A SOLUTION OF THE DUFFING EQUATION

A.F. Kurin

In this paper, the existence of regimes of chaotic oscillations for a solution of the inhomogeneous Duffing equation, without attenuation, with a small nonlinearity and a small amplitude of the external periodic force, is proved. A relation connecting the parameters of the equation is derived, which ensure the tuning of the Duffing oscillator to the considered regimes.

Keywords: averaging method, oscillator, bifurcations.

УДК 512.579

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ ГРАДУИРОВАННЫХ ИДЕАЛОВ ПОЛУГРУППОВЫХ C^*–АЛГЕБР

Е.В. Липачева[1], Т.А. Григорян[2]

1 *elipacheva@gmail.com*; Казанский государственный энергетический университет
2 *tkhorkova@gmail.com*; Казанский государственный энергетический университет

В статье продолжается начатое ранее исследование C^*–алгебры, порожденной левым регулярным представлением абелевой полугруппы. Изучаются идеалы этой C^*–алгебры, инвариантные относительно представления компактной группы G в группе автоморфизмов рассматриваемой алгебры. Доказывается, что инвариантность идеала равносильна тому, что он является градуированной C^*–алгеброй. Отдельно изучается класс примитивных градуированных идеалов, порожденных одним проектором.

Ключевые слова: C^*–алгебра, градуированная C^*–алгебра, полугруппа, левое регулярное представление, инвариантные подпространства, представление в группе автоморфизмов, инвариантный идеал, коммутаторный идеал.

В работах [1,2] было начато исследование C^*–алгебры, порожденной регулярным изометрическим представлением абелевой полугруппы S, так называемой приведенной полугрупповой C^*–алгебры $C^*_{red}(S)$, которую можно рассматривать как естественное обобщение алгебры Теплица. В частности, было доказано, что C^*–алгебра $C^*_{red}(S)$ является градуированной C^*–алгеброй, были описаны некоторые свойства этой алгебры, было начато исследование ее идеалов и автоморфизмов. В настоящей работе продолжено исследование идеалов C^*–алгебры $C^*_{red}(S)$, инвариантных относительно представления компактной группы G в группе автоморфизмов $\mathrm{Aut}(C^*_{red}(S))$.

Пусть S — аддитивная абелева полугруппа с сокращением, содержащая нейтральный элемент. Рассмотрим гильбертово пространство

$$l^2(S) = \{f\colon S \to \mathbb{C} \ : \ \sum_{a\in S} |f(a)|^2 < \infty\}$$

со скалярным произведением $(f,g) = \sum\limits_{a\in S} f(a)\overline{g(a)}$. Семейство функций $\{e_a\}_{a\in S}$, $e_a(b) = \delta_{a,b}$ образует ортонормированный базис в $l^2(S)$.

Рассмотрим представление $\pi : S \to B(l^2(S))$ полугруппы S в алгебру операторов на $l^2(S)$, заданное следующим образом: $\pi(a)e_b = e_{a+b}$. Очевидно, оператор $\pi(a)$ является изометрией и представление π является изометрическим представлением полугруппы S. Будем обозначать операторы $\pi(a)$ через T_a, $a \in S$.

Представление π называется *левым регулярным представлением* полугруппы S.

C^*–алгебра, порожденная левым регулярным представлением полугруппы S, обозначается $C^*_{red}(S)$ и называется *приведенной полугрупповой C^*–алгеброй полугруппы S*.

Операторы вида T_a и T_a^* называются *элементарными мономами*, а конечное произведение элементарных мономов — *мономом*.

Пусть Г — *группа Гротендика*, порожденная полугруппой S. С помощью группы Гротендика вводится понятие индекса монома следующим образом.

В работе [2] было показано, что если V — моном из S^*_{red}, то найдутся такие элементы $a, b \in S$, что

$$\varinjlim_{c\in S} T_c^* V T_c = T_a^* T_b,$$

где $\varinjlim\limits_{c\in S}$ — предел по направлению S. Тогда *индексом монома* V называется элемент $b-a$ группы Г. При этом используется обозначение $\mathrm{ind}V = b-a$.

Понятие индекса монома позволяет построить градуировку алгебры $C^*_{red}(S)$ по группе Г. Обозначим через $\mathfrak{A}_c$ замкнутое линейное подпространство в $C^*_{red}(S)$, порожденное линейными комбинациями мономов индекса c, $c \in \Gamma$. Тогда C^*–алгебра $C^*_{red}(S)$ является Г–градуированной C^*–алгеброй [2]

$$C^*_{red}(S) = \overline{\bigoplus_{c\in\Gamma} \mathfrak{A}_c},$$

где $\mathfrak{A}_c = T_b^* \mathfrak{A}_0 T_a$ для $c = a-b$, $\mathfrak{A}_0$ — коммутативная подалгебра, и каждый элемент $A \in C^*_{red}(S)$ представляется в виде формального ряда: $A \simeq \sum\limits_{c\in\Gamma} A_c$, где $A_c \in \mathfrak{A}_c$.

Пусть K — *коммутаторный идеал* алгебры $C^*_{red}(S)$, т.е. идеал, порожденный коммутантами $AB - BA$, где $A, B \in C^*_{red}(S)$. Идеал K также является Г–градуированной C^*–алгеброй.

Поскольку $C^*_{red}(S)$ является Г–градуированной C^*–алгеброй, то существует представление $\tau : G \to \mathrm{Aut}(C^*_{red}(S))$ такое, что подпространства $\mathfrak{A}_c$ инвариантны относительно этого представления:

$$\mathfrak{A}_c = \{A \in C^*_{red}(S) : \tau(g)(A) = \chi^c(g)A, g \in G\}.$$

Идеал J алгебры $C^*_{red}(S)$ назовем *инвариантным*, если он инвариантен относительно представления $\tau : G \to \mathrm{Aut}(C^*_{red}(S))$, то есть $\tau(g)(J) = J$ для любого $g \in G$.

Лемма 1. *Пусть J — идеал алгебры $C^*_{red}(S)$. Тогда следующие условия эквивалентны:*

1. *J — инвариантный идеал;*

2. *J является* Γ*–градуированной* C^**–алгеброй*

$$J = \overline{\bigoplus_{c\in\Gamma} J_c},$$

где $J_c = J \cap \mathfrak{A}_c$ *и* $J_c = T_b^* J_0 T_a$*, если* $c = a - b$*. Причем каждый элемент* $A \in J$ *представляется в виде:* $A \simeq \sum\limits_{c\in\Gamma} A_c$*, где* $A_c \in J_c$*.*

Таким образом, инвариантность идеала относительно представления τ равносильна тому, что этот идеал является Γ–градуированным. Коммутаторный идеал также является инвариантным идеалом. Нетрудно видеть, что объединение и пересечение инвариантных идеалов снова является инвариантным идеалом. Поэтому все инвариантные идеалы образуют решетку.

Обозначим через $\mathrm{Inv}(S)$ совокупность всех инвариантных идеалов алгебры $C^*_{red}(S)$. Как показывается в следующей теореме, коммутаторный идеал является максимальным элементом в $\mathrm{Inv}(S)$.

Теорема 1. *Коммутаторный идеал K является максимальным идеалом среди всех инвариантных идеалов алгебры* $C^*_{red}(S)$.

Ниже приводится пример полугрупповой C^*–алгебры, имеющей единственный нетривиальный инвариантный идеал — коммутаторный.

Пример 1. *Пусть* Γ *— аддитивная подгруппа группы вещественных чисел* $\mathbb{R}$ *и* $S = \{a \in \Gamma : a \geq 0\}$*. Тогда коммутаторный идеал — единственный инвариантный идеал алгебры* $C^*_{red}(S)$.

Алгебра Теплица $\mathcal{T}$ также содержит единственный нетривиальный инвариантный идеал — идеал компактных операторов (см. [1]).

Как определить, является ли некоторый идеал инвариантным? В следующем утверждении получен критерий инвариантности для идеала, порожденного линейной комбинаций проекторов.

Теорема 2. *Пусть* $A = \sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i W_i$*, где* $W_1, \ldots, W_n$ *— мономы индекса 0, и* $\sum\limits_{i=1}^{n} \alpha_i = 0$*. Тогда идеал, порожденный элементом A, является инвариантным.*

Пусть $J = \overline{\bigoplus\limits_{c\in\Gamma} J_c}$ — инвариантный идеал C^*–алгебры $C^*_{red}(S)$. Отметим, что J_0 является коммутативной C^*-подалгеброй и идеалом в коммутативной C^*–алгебре $\mathfrak{A}_0$. В работе [1] было показано, что любой инвариантный идеал J однозначно определяется своей коммутативной подалгеброй J_0. А именно, если $J = \overline{\bigoplus\limits_{c\in\Gamma} J_c}$ и $J' = \overline{\bigoplus\limits_{c\in\Gamma} J'_c}$ — два инвариантных идеала C^*–алгебры $C^*_{red}(S)$, то $J = J'$ тогда и только тогда, когда $J_0 = J'_0$.

Обозначим через $\mathrm{Inv}_0(S)$ множество всех тех идеалов L алгебры $\mathfrak{A}_0$, для которых существует $J \in \mathrm{Inv}(S)$ такой, что $J_0 = J \cap \mathfrak{A}_0 = L$. Отметим, что $\mathrm{Inv}_0(S)$, вообще говоря, не совпадает с множеством всех идеалов алгебры $\mathfrak{A}_0$. Однако, если идеал $L \subset \mathfrak{A}_0$ порождает некоторый собственный идеал J в C^*–алгебре $C^*_{red}(S)$, то он будет инвариантным, причем $L \subseteq J_0$. В следующей теореме приводится критерий принадлежности произвольного идеала алгебры $\mathfrak{A}_0$ классу $\mathrm{Inv}_0(S)$.

Теорема 3. *Пусть $L \subset \mathfrak{A}_0$ является идеалом в $\mathfrak{A}_0$. Тогда $L \in \mathrm{Inv}_0(S)$ тогда и только тогда, когда $T_a L T_a^* \subseteq L$ и $T_a^* L T_a \subseteq L$ для любого $a \in S$.*

Пусть W — некоторый моном индекса 0. Назовем идеал, порожденный проектором $P_W = I - W$ в алгебре $C_{red}^*(S)$, *примитивным* идеалом. Будем обозначать его I_W. Согласно теореме 2, идеал I_W является инвариантным, а, следовательно, градуированным.

Частным примером примитивного идеала является идеал I_a, порожденный проектором $P_a = I - T_a T_a^*$ для некоторого $a \in S$.

Все идеалы I_W условно можно разделить на два класса: для которых W представляется в виде $W = V T_a^*$, где V — моном индекса a, и для которых W не представляется в таком виде. Идеал I_a относится к первому классу.

Теорема 4. *Если моном W представляется в виде $W = V T_a^*$, где V — моном индекса a, то фактор–алгебра $C_{red}^*(S)/I_W$ содержит нетривиальный центр.*

В частности, фактор–алгебра $C_{red}^*(S)/I_a$, $a \in S$, содержит нетривиальный центр. Изучим структуру этой фактор–алгебры. Рассмотрим полугруппу

$$S_a = \{b - na : b \in S, n \in \mathbb{Z}_+\}$$

и ее приведенную полугрупповую C^*–алгебру $C_{red}^*(S_a)$. Отметим, что $S \subset S_a$.

Теорема 5. *Имеет место изоморфизм $C_{red}^*(S)/I_a \cong C_{red}^*(S_a)$, и короткая последовательность*

$$0 \to I_a \to C_{red}^*(S) \to C_{red}^*(S_a) \to 0$$

точна.

Пусть G — компактная абелева группа характеров группы Г. Через χ^c будем обозначать характер группы G, соответствующий элементу $c \in \Gamma$. Пусть $C(G)$ – C^*–алгебра всех непрерывных комплекснозначных функций на G, наделенная равномерной нормой $\|f\|_\infty = \sup_G \|f\|$. Обозначим через Γ_a максимальную группу, содержащуюся в S_a. Очевидно, эта группа не тривиальна, так как она содержит элементы $na, -na$ для любого $n \in \mathbb{Z}_+$. Ясно, что $\Gamma_a \subset \Gamma$. Пусть G_a — компактная группа характеров группы Γ_a. Вложение $\Gamma_a \hookrightarrow \Gamma$ порождает гомоморфизм $\varphi : G \to G_a$ такой, что $\varphi(\chi^c) = \chi^c$ для $c \in \Gamma_a$.

Теорема 6. *Имеет место изоморфизм $\mathbb{Z}(C_{red}^*(S_a)) \cong C_{red}^*(\Gamma_a) \cong C(G_a)$, где $\mathbb{Z}(C_{red}^*(S_a))$ — центр алгебры $C_{red}^*(S_a)$, а $C_{red}^*(\Gamma_a)$ — C^*–алгебра, порожденная регулярным представлением группы Γ_a на $l^2(\Gamma_a)$.*

Ранее мы рассматривали пример полугрупповой C^*–алгебры, имеющей единственный инвариантный идеал — коммутаторный. Приведем еще один пример полугрупповой C^*–алгебры, имеющей два инвариантных идеала: коммутаторный и идеал компактных операторов. Кроме того, этот пример показывает, что если моном W не представляется в виде $W = V T_a^*$, где V — моном индекса a, то фактор–алгебра $C_{red}^*(S)/I_W$ не обязана иметь нетривиальный центр.

Пример 2. *Пусть $S = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 1\} \cup \{0\}$. Идеал алгебры $C_{red}^*(S)$, порожденный проектором $I - T_{1+\alpha}^* T_1 T_1^* T_{1+\alpha}$, где $0 < \alpha < 1$, совпадает с алгеброй компактных операторов $K(l^2(S))$ и является инвариантным идеалом в $C_{red}^*(S)$. Имеет место изоморфизм*

$C^*_{red}(S)/K(l^2(S)) \cong C^*_{red}(\mathbb{R}_+)$ *и, как следствие, короткая последовательность*

$$0 \to K(l^2(S)) \to C^*_{red}(S) \to C^*_{red}(\mathbb{R}_+) \to 0$$

точна.

Следствие. *Алгебра* $C^*_{red}(S)$*, где* $S = \{a \in \mathbb{R} : a \geq 1\} \cup \{0\}$*, имеет только два инвариантных идеала — коммутаторный и идеал компактных операторов.*

Литература

1. Григорян С. А., Салахутдинов А. Ф. *C^*–алгебры, порожденные полугруппами с сокращением* // Сиб. матем. журн. – 2010. – Т. 50. – № 1. – С. 16—25.

2. Аухадиев М. А., Григорян С. А., Липачева Е. В. *Операторный подход к квантованию полугрупп* // Матем. сб. – 2014. – Т. 205. – № 3. – С. 15—40.

ON A CLASS OF GRADED IDEALS OF SEMIGROUP C^*–ALGEBRAS

E.V. Lipacheva, T.A. Grigoryan

The article continues the previously initiated research of the C^*–algebra generated by the left regular representation of an Abelian semigroup. We study invariant ideals of this C^*–algebra invariant with respect to the representation of a compact group G in the automorphism group of this algebra. It is proved that the invariance of the ideal is equivalent to the fact that this ideal is a graded C^*–algebra. It is studied a class of graded primitive ideals generated by a single projector.

Keywords: C^*–algebra, graded C^*–algebra, semigroup, left regular representation, invariant subspaces, representation in the automorphism group, invariant ideal, commutator ideal.

УДК 517.956

РАЗМЕРНОСТЬ ПРОСТРАНСТВ РЕШЕНИЙ УРАВНЕНИЯ ШРЕДИНГЕРА И ВАРИАЦИИ ПОТЕНЦИАЛА

А.Г. Лосев[1]

1 *allosev59@gmail.com*; Волгоградский государственный университет

Работа посвящена изучению решений стационарного уравнения Шредингера $\Delta u - q(x)u = 0$ *на некомпактных римановых многообразиях. А именно, рассматривается вопрос изменения размерности пространства ограниченных решений данного уравнения при различных вариациях потенциала* $q(x)$*. В частности, показано, что уменьшение потенциала* $q(x)$ *не уменьшает размерности пространства ограниченных решений данного уравнения.*

Ключевые слова: стационарное уравнение Шредингера, теоремы типа Лиувилля, некомпактные римановы многообразия, массивные множества.

Данная работа посвящена изучению ограниченных решений стационарного уравнения Шредингера

$$Lu = \Delta u - q(x)u = 0 \tag{1}$$

на произвольном некомпактном римановом многообразии M. Здесь $q(x)$ – непрерывная неотрицательная на M функция. Далее решения уравнения (1) будем называть q-гармоническими функциями.

В теории эллиптических уравнений на некомпактных римановых многообразиях наиболее популярными являются следующие постановки задач:
1) найти условия выполнения терем типа Лиувилля о тривиальности классов решений рассматриваемого уравнения;
2) найти условия однозначной разрешимости краевых задач.

Остановимся на первой задаче. Традиционно осуществляется следующий подход к теоремам типа Лиувилля. Пусть на римановом многообразии M задан класс функций A и эллиптический оператор L. Будем говорить, что на M выполнено (A, L)-лиувиллево свойство, если любое решение уравнения $Lu = 0$, принадлежащее функциональному классу A, является тождественной постоянной.

Заметим, что в случае, когда $q(x)$ нетривиальна, ненулевая постоянная не является решением уравнения (1), и лиувиллево свойство формулируется для него несколько иначе. А именно, говорят что на M выполнено лиувиллево свойство для ограниченных решений уравнения (1), если любое такое решение есть тождественный нуль.

В последнее время наметилась тенденция к более общему подходу к теоремам типа Лиувилля. В ряде исследований оцениваются размерности различных пространств решений линейных уравнений эллиптического типа. В частности, в [1] была доказана точная оценка размерностей пространств ограниченных гармонических функций на некомпактных римановых многообразиях в терминах массивных множеств. Аналогичный результат для решений стационарного уравнения Шредингера (1) недавно был доказан в [2]. Остановимся подробнее на понятии массивных множеств.

Пусть M – гладкое связное некомпактное риманово многообразие. Непрерывную функцию u, определенную на открытом множестве $\Omega \subset M$, будем называть q-субгармонической, если для любой области $G \Subset \Omega$ и q-гармонической функции

$$v \in C(\overline{G}), \quad u|_{\partial G} = v|_{\partial G},$$

выполнено $u \le v$ в G.

Следуя [3], открытое собственное подмножество $\Omega \subset M$ будем называть q-массивным, если на M существует нетривиальная q-субгармоническая функция такая, что $u = 0$ на $M \setminus \Omega$ и $0 \le u \le 1$ (в случае $q \equiv 0$ множество Ω называется массивным). Такую функцию u будем называть *внутренним потенциалом множества* Ω.

Свойства q-массивных множеств вполне аналогичны свойствам массивных множеств, подробно изложены в [1] и [3]. Сформулируем некоторые из них.

Лемма. *Пусть $\Omega_1 \subset \Omega_2$ – открытые собственные подмножества M. Тогда*
1) если Ω_1 – q-массивно, то и Ω_2 – q-массивно;
2) если Ω_2 – q-массивно и $\overline{\Omega}_2 \setminus \Omega_1$ – компакт, то и Ω_1 – q-массивно.

Основным результатом [2] является следующее утверждение.

Теорема 1. *Пусть $q(x)$ – нетривиальная, неотрицательная на M функция, а $m \ge 1$ – натуральное число. Следующие утверждения эквивалентны:*

1) размерность пространства ограниченных q-гармонических функций на M не менее m;
2) в M найдется m попарно не пересекающихся q-массивных подмножеств.

Заметим, что в случае $q(x) \equiv 0$, данное утверждение верно только для $m \geq 2$.

Ряд исследований, выполненных в рамках данной тематики, был посвящен вопросам сохранения лиувиллева свойства при различных вариациях геометрии многообразия или коэффициентов рассматриваемых уравнений. В частности, рассматривался вопрос сохранения лиувиллева свойства и сохранения условия однозначной разрешимости краевых задач при изменении потенциала $q(x)$ (см. [4], [5]). В данной работе доказано следующее утверждение.

Теорема 2. *Пусть на M выполнено неравенство $0 \leq q_1(x) \leq Aq(x)$, где $A = \text{const} > 0$ и $q_1(x)$ не является тождественным нулем. Кроме того, пусть размерность пространства ограниченных q-гармонических функций на M равна m, где m – целое неотрицательное число. Тогда размерность пространства ограниченных q_1-гармонических функций на M не меньше m.*

Отметим, что случай $m = 0$ рассмотрен в [4]. Также заметим, что условие отличия потенциала от тождественного нуля является существенным, что показывает пример, приведенный в [6].

В основе доказательства теоремы 2 лежит следующее свойство подмножеств римановых многообразий. Если Ω не является q_1-массивным подмножеством многообразия, то оно не является q-массивным подмножеством данного многообразия. Также используется теорема 1.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ и Администрации Волгоградской области (проект 15-41-02479 р_поволжье_а).

Литература

1. Григорьян А. А. *О размерности пространств гармонических функций* // Мат. заметки. – 1990. – Т. 48. – № 5. – С. 55–60.

2. Григорьян А. А., Лосев А. Г. *О размерности пространств решений стационарного уравнения Шредингера на некомпактных римановых многообразиях* // Матем. физика и комп. моделирование. – 2017. – Т. 20. – № 3. – С. 34–42.

3. Grigor'yan A. *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* // Bulletin of Amer. Math. Soc. – 1999. – № 36. – P.135–249.

4. Григорьян А. А., Надирашвили Н. С. *Лиувиллевы теоремы и внешние краевые задачи* // Изв. вузов. Матем. – 1987. – № 5. – С. 25–33.

5. Мазепа Е. А. *Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. –№ 3. – С. 591–599.

6. Лосев А. Г. *О некоторых лиувиллевых теоремах на некомпактных римановых многообразиях* // Сиб. матем. журн. – 1998. – Т. 39. – № 1. – С. 87–93.

DIMENSION OF SPACES OF SOLUTIONS OF THE SCHRODINGER EQUATION AND POTENTIAL VARIATIONS

A.G. Losev

The paper is devoted to the study of solutions of the stationary Schrodinger equation $\Delta u - q(x)u = 0$

on noncompact Riemannian manifolds. Namely, we study changing of the dimension of the space of bounded solutions of the given equation for various variations of potential $q(x)$. In particular, it is shown that a decrease in the potential does not decrease the dimension space of bounded solutions of the given equation.

Keywords: stationary Schrodinger equation, Liouville type theorems, noncompact Riemannian manifolds, massive sets.

УДК 517.5

ИНТЕРПОЛЯЦИЯ ДВОИЧНЫМИ БАЗИСНЫМИ СПЛАЙНАМИ

С.Ф. Лукомский[1], М.Д. Мушко[2]

1 *lukomskiisf@info.sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет

2 *dart-maximus@yandex.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет

Рассматривается новый класс базисных сплайнов, которые получаются двукратным интегрированием функции Уолша. Приведены формулы построения интерполяционного сплайна по равномерной сетке, указана величина отклонения сплайна от интерполируемой функции. Доказано, что построенный базисный сплайн являетсяя решением масштабирующего уравнения.

Ключевые слова: двоичные базисные сплайны, интерполяция, масштабирующее уравненеие.

Пусть $If(x) = \int\limits_0^x f(t)\,dt$ $(x \in [0,1])$ – оператор интегрирования, $r_n(t) = \operatorname{sign}\sin 2^n t$ – функции Радемахера, $W_{2^n-1}(x) = \prod\limits_{k=0}^{n-1} r_k(x)$ – функции Уолша.

Определение 1. *Функцию $\tilde{\varphi}(x) = (4I)^2 W_3(x)$ $(x \in [0,1])$ будем называть двоичным базисным сплайном 2-й степени.*

Очевидно, что $\tilde{\varphi}(x)$ есть кусочно-монотонная функция, совпадающая с многочленом 2-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{k}{4}, \frac{k+1}{4}\right]$ $(k = 0,1,2,3)$.

Определение 2. *Обозначим через $Q_2^{(N)}$ совокупность кусочно-многочленных функций 2-й степени, имеющих непрерывные производные на отрезке $\left[0, \frac{N}{4}\right]$, $N \geq 4$, и которые на каждом отрезке $\left[\frac{k}{4}, \frac{k+1}{4}\right]$ совпадают с некоторым многочленом второй степени.*

Теорема 1. *При всех $x \in \mathbb{R}$ справедливы равенства*

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\varphi}\left(x + \frac{n}{4}\right) = 2; \ \sum_{n\in\mathbb{Z}} \tilde{\varphi}\left(x + \frac{n}{2}\right) = 1.$$

Теорема 2. *Совокупность функций $\tilde{\varphi}\left(x - \frac{n}{4}\right)$ $(-3 \leq n \leq \frac{N-1}{3}, n \neq 1)$ образуют базис в пространстве $Q_2^{(N)}$*

Базисный сплайн $\tilde{\varphi}(\frac{x}{4})$ удовлетворяет масштабирующему уравнению.

Теорема 3. *Обозначим* $F(x) = \tilde{\varphi}(\frac{x}{4})$. *Справедливо равенство*

$$F(x) = \frac{1}{4}F(2x) + \frac{1}{2}F(2x-1) + \frac{1}{2}F(2x-2) + \frac{1}{2}F(2x-3) + \frac{1}{4}F(2x-4).$$

При фиксированном $n \in \mathbb{N}, n \geq 4$ определим функцию $\varphi(x) := \tilde{\varphi}\left(\frac{n}{x}x\right)$. Для нее $\operatorname{supp}\varphi = \left[0, \frac{4}{n}\right]$, $\varphi(n)$ есть многочлен 2-й степени на каждом отрезке $\left[\frac{i-1}{n}, \frac{i}{n}\right]$, $\varphi'(0) = \varphi'\left(\frac{2}{n}\right) = \varphi'\left(\frac{4}{n}\right) = 0$, $\varphi'\left(\frac{1}{n}\right) = n$, $\varphi'\left(\frac{3}{n}\right) = -n$.

Рассмотрим следующую интерполяционную задачу. Пусть $f(x)$ непрерывна на $[0,1]$, $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = \overline{0,n})$ – равномерная сетка на $[0,1]$. Через $S(x)$ обозначим интерполяционный сплайн 2-й степени, совпадающий с $f(x)$ в узлах x_k, который построим следующим образом:

-1-й шаг. Пусть $M_0 \in \mathbb{R}$ произвольно. Полагаем $S_{-1}(x) = -\frac{M_0}{n}\varphi\left(x + \frac{3}{n}\right)$.

В этом случае $S'_{-1}(0) = M_0$.

0-шаг. Определим $S_0(x)$ равенством

$$S_0(x) = S_{-1}(x) + \varphi\left(x - \frac{2}{n}\right)\left(f\left(\frac{0}{n}\right) - S_{-1}\left(\frac{0}{n}\right)\right).$$

В этом случае $S_0(0) = f(0)$, $S'_0(0) = M_0$.

k-й шаг. $(1 \leq k \leq n)$

$$S_k(x) = S_{k-1}(x) + 2\varphi\left(x - \frac{k-1}{n}\right)\left(f\left(\frac{k}{n}\right) - S_{k-1}\left(\frac{k}{n}\right)\right).$$

После k-го шага, $S_k\left(\frac{j}{n}\right) = f\left(\frac{j}{n}\right)$, $(j = 1, 2, \ldots, k)$.

Наконец, полагаем $S(x) = S_n(x)$. Очевидно, что $S(x)$ интерполирует функцию $f(x)$ в узлах $x_k = \frac{k}{n}$ $(k = 0, 1, \ldots, n)$ и $S'(0) = M_0$.

Для оценки погрешности интерполяции определим функции

$$\psi_k(x) = f(x_{k-1} + x) + f(x_{k-2} + x) + \cdots + (-1)^{k-1} f(x_0 + x), \;\; x \in \left[0, \frac{1}{n}\right]; k = \overline{1,n}.$$

Теорема 4. *Выберем* $M_0 = \frac{2}{h}(f(x_1) - f(x_0))$ *и пусть* $h = x_k - x_{k-1}$. *Тогда для* $x \in [x_{k-1}, x_k]$ $(k = \overline{1,n})$ *справедливо неравенство*

$$|S(x) - f(x)| \leq \omega(h, \psi_{k-1}) + \omega(h, \psi_k) + \omega(h, f).$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

Литература

1. Кашин Б. С., Саакян А. А. *Ортогональные ряды.* – М.: АЦФ, 1999. – 550 с.

2. Новиков И. Я., Протасов В. Ю., Скопина М. А. *Теория всплесков*. – М.: Физматлит, 2005. – 616 с.

BINARY BASIC SPLINES OF THE SECOND ORDER

S.F. Lukomskii, M.D. Myshko

We define binary basic splines of the second order, indicate an algorithm for constructing an interpolation polynomial of the second degree, and give an estimated deviation of the interpolation polynomial. We also prove that the constructed basic spline is a solution of some refinement equation.

Keywords: binary basic spline, interpolation polynomial, refinement equation.

УДК 517.982

ЭКСТРАПОЛЯЦИОННЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ШКАЛ

К.В. Лыков[1]

1 *alkv@list.ru*; Самарский национальный исследовательский университет имени академика С.П. Королева

В статье описывается связь между интерполяционными и экстраполяционными конструкциями. Показано, что для некоторого класса интерполяционных пространств, получаемых $\mathscr{K}$-методом вещественной интерполяции, имеет место также и экстраполяционное описание, получаемое заменой в интерполяционной конструкции $\mathscr{K}$-функционала на параметризованный набор норм точных интерполяционных пространств с характеристическими функциями t^θ, $\theta \in (0,1)$ (в частности, на набор норм пространств Петре).

Ключевые слова: интерполяционное пространство, интерполяционный функтор, экстраполяционное пространство, пространства Петре, вещественный метод интерполяции.

Предположим, что $\vec{A} = (A_0, A_1)$ — *банахова пара*, т.е. такая пара банаховых пространств, что для некоторого хаусдорфова топологического пространства $\mathscr{T}$ имеют место непрерывные вложения $A_0 \subset \mathscr{T}$ и $A_1 \subset \mathscr{T}$. Тогда для любого элемента $x \in \mathscr{T}$, представимого в виде $x = x_0 + x_1$, где $x_0 \in A_0$ и $x_1 \in A_1$, можно определить *$\mathscr{K}$-функционал*:

$$\mathscr{K}(t, x; \vec{A}) := \inf_{x_0, x_1 : x_0 + x_1 = x} (\|x_0\|_{A_0} + t\|x_1\|_{A_1}), \quad t > 0.$$

С помощью $\mathscr{K}$-функционала строятся *пространства вещественного $\mathscr{K}$-метода интерполяции*. Если F — банахова решетка измеримых функций на $(0, +\infty)$, то пространство $\vec{A}_F^{\mathscr{K}}$ определяется условием конечности нормы

$$\|x\|_{\vec{A}_F^{\mathscr{K}}} := \left\| \mathscr{K}(t, x; \vec{A}) \right\|_F.$$

Частным случаем таких пространств являются *пространства Петре* $\vec{A}_{\theta,q}^{\mathscr{K}}$, $\theta \in (0,1)$, $q \in [1, \infty]$, для которых мы будем использовать следующую норму:

$$\|x\|_{\theta,q} := (q\theta(1-\theta))^{\frac{1}{q}} \left(\int_0^{+\infty} \left(t^{-\theta} \mathscr{K}(t, x; \vec{A}) \right)^q \frac{dt}{t} \right)^{\frac{1}{q}} \text{при } q < \infty, \text{ и } \|x\|_{\theta,\infty} := \sup_{0<t<\infty} t^{-\theta} \mathscr{K}(t, x; \vec{A}).$$

Напомним еще, что *интерполяционный функтор* I — это отображение из категории всех банаховых пар в категорию банаховых пространств, обладающее свойством: если линейный оператор T, определенный на $A_0 + A_1$ и принимающий значения в $B_0 + B_1$, ограничен из A_i в B_i, $i = 1,2$, то этот же оператор ограничен из $I(\vec{A})$ в $I(\vec{B})$. Если при этом

$$\|T\|_{I(\vec{A})\to I(\vec{B})} \leqslant \max\{\|T\|_{A_0\to B_0}, \|T\|_{A_1\to B_1}\},$$

то интерполяционный функтор называется *точным*. *Характеристической функцией* интерполяционного функтора называется функция $\rho : t \in (0,\infty) \to (0,\infty)$, определяемая из соотношения

$$I\left(\mathbb{R}, \frac{1}{t}\mathbb{R}\right) = \frac{1}{\rho(t)}\mathbb{R}.$$

Докажем теперь теорему, связывающую интерполяционную и экстраполяционную конструкцию. Запись $\|x\|_1 \asymp \|x\|_2$ для двух норм будет означать, что с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от элемента x, выполняются неравенства $C^{-1}\|x\|_1 \leqslant \|x\|_2 \leqslant C\|x\|_1$ (при этом неопределенность одной из норм означает то же самое и для другой нормы).

Теорема. *Предположим, что $\vec{A} = (A_0, A_1)$ такая банахова пара, что $A_0 \subset A_1$ и $\tilde{A}_0 = A_0$, где $\tilde{A}_0$ — совокупность всех пределов в A_1 ограниченных последовательностей из A_0 (так называемое пополнение по Гальярдо). Пусть X — пространство $\mathscr{K}$-метода вещественной интерполяции:*

$$\|x\|_X := \|\mathscr{K}(t, x; \vec{A})\|_F,$$

и, кроме того, в банаховой решетке F действует ограниченно оператор $S: f(t) \to f(t^2)$. Тогда для любого семейства $\{I_\theta\}_{\theta\in(0,1)}$ точных экстраполяционных функторов с характеристическими функциями $\rho_{I_\theta}(t) = t^\theta$, имеет место экстраполяционное соотношение

$$\|x\|_X \asymp \left\| \|x\|_{I_{\log^{-1} t}(\vec{A})} \cdot \chi_{(e,+\infty)}(t) \right\|_F.$$

Доказательство. Напомним (см. [1, p. 11, (2.10)]), что имеют место следующие вложения

$$\vec{A}^{\mathscr{J}}_{\theta,1} \overset{1}{\subset} I_\theta(\vec{A}) \overset{1}{\subset} \vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,\infty}.$$

Здесь $\vec{A}^{\mathscr{J}}_{\theta,1}$ — пространство $\mathscr{J}$-метода вещественной интерполяции, определяемое с помощью $\mathscr{J}$-функционала $\mathscr{J}(t, x; \vec{A}) := \max\{\|x\|_{A_0}, t\|x\|_{A_1}\}$ условием конечности нормы

$$\|x\|_{\vec{A}^{\mathscr{J}}_{\theta,1}} := \inf \int_0^\infty t^{-\theta} \mathscr{J}(t, u(t); \vec{A}) \frac{dt}{t} < \infty,$$

где инфимум берется по всем представлениям $a = \int_0^\infty u(t)\frac{dt}{t}$ (сходимость в $A_0 + A_1$) со строго измеримой функцией $u(t) : (0,\infty) \to A_0 \bigcap A_1$ (см. [2, параграф 3.2]).

Покажем сначала, что

$$\vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,1} \overset{C}{\subset} \vec{A}^{\mathscr{J}}_{\theta,1},$$

с некоторой константой $C > 0$, не зависящей от $\theta \in (0,1)$. Нужное вложение легко получить, используя сильную форму фундаментальной леммы теории интерполяции (см. [3]). Согласно фундаментальной лемме для любого $x \in \vec{A}^{\mathscr{J}}_{\theta,1}$ найдется такое представление $x = \int_0^\infty u(s)\,\frac{ds}{s}$, что

$$\int_0^\infty \min(1, t/s)\,\mathscr{J}(s, u(s); \vec{A})\,\frac{ds}{s} \leqslant \gamma \mathscr{K}(t, x; \vec{A}), \quad t > 0,$$

с некоторой универсальной константой γ. Для такого представления получаем

$$\|x\|_{\theta,1} = \theta(1-\theta)\int_0^\infty t^{-\theta}\mathscr{K}(t,x;\vec{A})\,\frac{dt}{t} \geqslant \theta(1-\theta)\gamma^{-1}\int_0^\infty t^{-\theta}\int_0^\infty \min(1,t/s)\,\mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\,\frac{ds}{s}\,\frac{dt}{t}$$

$$\theta(1-\theta)\gamma^{-1}\int_0^\infty\left(\int_0^\infty t^{-\theta}\min(1,t/s)\,\frac{dt}{t}\right)\mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\,\frac{ds}{s}$$

$$\theta(1-\theta)\gamma^{-1}\int_0^\infty \frac{s^{-\theta}}{\theta(1-\theta)}\,\mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\,\frac{ds}{s} = \gamma^{-1}\int_0^\infty s^{-\theta}\,\mathscr{J}(s,u(s);\vec{A})\,\frac{ds}{s} \geqslant \gamma^{-1}\|x\|_{\vec{A}^{\mathscr{J}}_{\theta,1}}.$$

Объединяя приведенные выше соображения, приходим к вложениям

$$\vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,1} \overset{\gamma}{\subset} I_\theta(\vec{A}) \overset{1}{\subset} \vec{A}^{\mathscr{K}}_{\theta,\infty}.$$

Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$C^{-1}\left\|\|x\|_{\theta(t),1}\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\right\|_F \leqslant \|x\|_X \leqslant C\left\|\|x\|_{\theta(t),\infty}\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\right\|_F, \quad \text{где } \theta(t) = \log^{-1} t.$$

Отметим, что в силу вложения $A_0 \subset A_1$

$$\|x\|_X \asymp \|\mathscr{K}(t,x;\vec{A})\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\|_F,$$

и при $\theta = \theta(t) = \log^{-1} t$

$$\|x\|_{\theta,\infty} = \sup_{0<s<\infty} s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A}) \geqslant s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\Big|_{s=t=e^{\frac{1}{\theta}}} = e^{-1}\mathscr{K}(t,x;\vec{A}).$$

Поэтому

$$\left\|\|x\|_{\theta(t),\infty}\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\right\|_F \geqslant e^{-1}\|\mathscr{K}(t,x;\vec{A})\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\|_F \geqslant c\|x\|_X.$$

В силу вложения $A_0 \subset A_1$ имеют место также неравенства

$$\min\{C^{-1}, s\}\|x\|_{A_1} \leqslant \mathscr{K}(s,x;\vec{A}) \leqslant s\|x\|_{A_1},$$

где C — константа вложения $A_0 \subset A_1$. Далее,

$$\begin{aligned}\theta(1-\theta)\int_0^e s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s} &\leqslant \theta e^{1-\theta}\|x\|_{A_1} \leqslant \theta e^{1-\theta}\max\left\{C,\frac{1}{e}\right\}\mathscr{K}(e,x;\vec{A})\\ &\leqslant C_1\theta^2\int_e^{+\infty} s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s}\end{aligned}$$

Поэтому

$$\|x\|_{\theta,1} = \theta(1-\theta)\left(\int\limits_0^e s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s} + \int\limits_e^{+\infty} s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s}\right) \leqslant C_2\theta\int\limits_e^{+\infty} s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s}.$$

При этом если $t = e^{\frac{1}{\theta}}$, то

$$\begin{aligned}
\theta\int\limits_e^{+\infty} s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s} &= \theta\int\limits_e^{t} s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s} + \theta\sum_{k=1}^{\infty}\int\limits_{t^{2^{k-1}}}^{t^{2^k}} s^{-\theta}\mathscr{K}(s,x;\vec{A})\frac{ds}{s} \\
&\leqslant \theta\mathscr{K}(t,x;\vec{A})\int\limits_e^{t} s^{-\theta}\frac{ds}{s} + \theta\sum_{k=1}^{\infty}\mathscr{K}(t^{2^k},x;\vec{A})\int\limits_{t^{2^{k-1}}}^{t^{2^k}} s^{-\theta}\frac{ds}{s} \\
&\leqslant e^{-\theta}\mathscr{K}(t,x;\vec{A}) + \sum_{k=1}^{\infty} t^{-\theta 2^{k-1}}\mathscr{K}(t^{2^k},x;\vec{A}) \leqslant \sum_{k=0}^{\infty} e^{1-2^{k-1}}\mathscr{K}(t^{2^k},x;\vec{A}).
\end{aligned}$$

Следовательно,

$$\begin{aligned}
\left\|\|x\|_{\theta(t),1}\cdot\chi_{(e,+\infty)}(t)\right\|_F &\leqslant C_2\left\|\sum_{k=0}^{\infty} e^{1-2^{k-1}}\mathscr{K}(t^{2^k},x;\vec{A})\right\|_F \leqslant C_2\sum_{k=0}^{\infty} e^{1-2^{k-1}}\left\|\mathscr{K}(t^{2^k},x;\vec{A})\right\|_F \\
&\leqslant C_2\sum_{k=0}^{\infty} e^{1-2^{k-1}}\|S\|_{F\to F}^{k}\left\|\mathscr{K}(t,x;\vec{A})\right\|_F \leqslant C_3\|x\|_X.
\end{aligned}$$

Доказанная теорема объединяет и обобщает некоторые результаты работ [1, 4–6]. Ее следствиями являются, например, [4, theorem 4.5] (в случае $\tilde{A}_0 = A_0 \subset A_1$), [5, теорема 2] и [6, теорема 2.3].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проекты № 17-01-00138 а и № 16-41-630676 р_а) и Министерства образования и науки РФ (проект 5-100).

Литература

1. Jawerth B., Milman M. *Extrapolation Spaces with applications* // Mem. of the Amer. Math. Soc. – 1991. – V. 89. – No. 440. – 82 p.

2. Берг Й., Лёфстрём Й. *Интерполяционные пространства. Введение.* – М.: Мир, 1980. – 264 с.

3. Cwikel M., Jawerth B. and Milman M. *On the fundamental lemma of interpolation theory.* // J. Approx. Theory. – 1990. – V. 60. – No. 1. – P. 70–82.

4. Karadzhov G., Milman M. *Extrapolation theory: new results and applications* // J. Approx. Theory. – 2005. – V. 133. – No. 1. – P. 38–99.

5. Асташкин С. В. *Экстраполяционные функторы на семействе шкал, порожденных вещественным методом интерполяции* // Сиб. матем. журн. – 2005. – Т. 46. – № 2. – С. 264–289.

6. Асташкин С. В., Лыков К. В. *Сильно экстраполяционные пространства и интерполяция* // Сиб. матем. журн. – 2009. – Т. 50. – № 2. – С. 250–266.

EXTRAPOLATION PROPERTIES OF INTERPOLATION SCALES

K.V. Lykov

The paper describes the relationship between interpolation and extrapolation constructs. For some class of interpolation spaces obtained by the real interpolation method, an extrapolation description is presented. It is shown that for such spaces it is possible to replace the $\mathcal{K}$-functional in the interpolation description by a parametrized family of norms of exact interpolation spaces with characteristic functions t^θ, $\theta \in (0,1)$ (in particular, by the family of norms of Peetre's spaces).

Keywords: interpolation spaces, interpolation functor, extrapolation spaces, Peetre's spaces, the real interpolation method.

УДК 517.53: 517.947.942

ОБ АНАЛОГЕ УРАВНЕНИЯ ЭЙЛЕРА ДЛЯ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ С $K_{I,S}$- ИЛИ $K_{O,S}$-УСРЕДНЕННОЙ ХАРАКТЕРИСТИКОЙ

А.Н. Малютина[1], К.А. Алипова[2]

1 *nmd@math.tsu.ru*; Национальный исследовательский Томский государственный университет
2 *aka@math.tsu.ru*; Национальный исследовательский Томский государственный университет

В настоящей работе продолжается исследование дифференциальных и экстремальных свойств негомеоморфных отображений с $(K_{I,s}, K_{O,s})$-усредненной характеристикой. В теории плоских квазиконформных отображений для решения экстремальных задач развит и с успехом применяется вариационный метод [2, 3, 9]. Мы предлагаем попытку применить этот классический метод для решения экстремальных задач в классе отображений с s-усредненной характеристикой.

Ключевые слова: отображение с s-усредненной характеристикой, дифференциальные свойства, вариация, экстремальное отображение.

Пусть $f\colon D \to R^n$ — отображение класса $W^1_{n,loc}(D)$. Тогда почти всюду в D определены величины $|\nabla f(x)| = \left(\sum\limits_{i,j=1}^{n} \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)^2 \right)^{\frac{1}{2}}$, $J(x,f) = \det\left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}(x)\right)$, и если $J(x,f) \geq 0$ почти всюду, тогда определены локальные характеристики $H_I(x,f) = \frac{J(x,f)}{l^n(x,f)}$, $H_O(x,f) = \frac{L^n(x,f)}{J(x,f)}$.

Рассмотрим две ограниченные области D и D^* в евклидовом пространстве R^n, для которых существует отображение $f\colon D \to D^*$, $f(x) = \big(f_1(x), f_2(x), ..., f_n(x)\big)$ — открытое, непрерывное, удовлетворяющее условиям $f_i(x) \in W^1_{n,loc}(D^*)$, т.е. $\forall x \in D$ существует U-окрестность точки $x \in D$ такая, что $f_j|_U \in W^1_n(U)$, $f^{-1}_{i,j}(x) \in W^1_{n,loc}(D^*)$.

Отображение f называется отображением с $K_{I,s}(D,D^*)$–усредненной характеристикой (с $K_{O,s}(D,D^*)$–усредненной характеристикой), если

$$K_{I,s}(x,f) = \left(\frac{1}{|D|} \int\limits_D \left(\frac{J(x,f)}{l^n(x,f)} \right)^s d\sigma_x \right)^{\frac{1}{s}} \leq K_{I,s}(f), \tag{1}$$

$$K^*_{I,s}(x,f)=\left(\frac{1}{|D|}\int\limits_D\left(\frac{J(x,f)}{l^n(x,f)}\right)^s|J(x,f)|d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}}\le K^*_{I,s}(f),$$

$$K_{O,s}(x,f)=\left(\frac{1}{|D|}\int\limits_D\left(\frac{L^n(x,f)}{|J(x,f)|}\right)^s d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}}\le K_{O,s}(f), \qquad (2)$$

$$K^*_{O,s}(x,f)=\left(\frac{1}{|D|}\int\limits_D\left(\frac{L^n(x,f)}{|J(x,f)|}\right)^s|J(x,f)|d\sigma_x\right)^{\frac{1}{s}}\le K^*_{O,s}(f),$$

здесь $s\ge 1$, $|D|$ — n-мерная мера Лебега области D.

Обозначим через $K_{I,s}(D,D^*)$ и $K^*_{I,s}(D,D^*)$ совокупность отображений $f\colon D\to D^*$, таких что $K_{I,s}(f)$ и, соответственно, $K^*_{I,s}(f)$ конечны ($K_{O,s}(f)$ и, соответственно, $K^*_{O,s}(f)$ конечны). Дифференцируемость таких отображений доказана в [1].

Отображение $f\colon D\to D^*$ называется экстремальным в некотором классе K из $K_{I,s}$ (или из $K^*_{I,s}$), если $f\in K$ и $K_{I,s}(f)\le K_{I,s}(g)$ (или $K^*_{I,s}(f)\le K^*_{I,s}(g)$) для всех $g\in K$.

Функционалы (1), (2) являются интегральной характеристикой отображения с s–усредненной характеристикой. Эти функционалы инвариантны относительно мебиусовых преобразований.

Лемма 1. *Для любого $f\in K_{I,s}(D,D^*)$ $\left(K^*_{I,s}(D,D^*)\right)$ класс допустимых вариаций не пуст. Для квазиконформных отображений это утверждение доказано в [4].*

Лемма 2. *Пусть $f\colon D\to D^*$ — экстремальное отображение с s–усредненной характеристикой. Тогда для него справедливы тождества*

$$\int\limits_D\sum_{i,j}^n\frac{\partial}{\partial a^i_j}\left(\lambda^s(x,f)\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}dx=0,$$

$$\int\limits_D\sum_{i,j}^n\frac{\partial}{\partial a^i_j}\left(K_{O,s}(x,f)\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}dx=0,$$

$$\int\limits_D\sum_{i,j}^n\frac{\partial}{\partial a^i_j}\left(K_{I,s}(x,f)\right)\frac{\partial\omega}{\partial x_j}dx=0,$$

для любой функции $\omega(x)=\zeta(f(|x|))$, где $\zeta(y)$ — гладкая вещественная функция с носителем в D^*.

Лемма 3. *Пусть $f\colon D\to D^*$ — экстремальное отображение с s-усредненной характеристикой. Тогда для него справедливы тождества*

$$\int\limits_D\sum_{i,j}^n\frac{\partial}{\partial a^i_j}(K^*_{I,s}(x,f))\cdot\frac{\partial\omega}{\partial x_j}d\sigma_x=0,\ i=1,2,\dots,n,$$

где $\omega(x)=\zeta(f(x))$, ζ — гладкая вещественная функция с носителем в D^*.

Лемма 4. *Пусть $f\colon D \to R^n$ — непрерывное отображение с s-усредненной характеристикой класса $C^1(D)$ и $J(x_0, f) \neq 0$ в некоторой точке $x_0 \in D$. Тогда существует шар $B(x_0, \rho)$ такой, что $\forall h$, $|h| < \rho$, с соответственным выбором ρ [5, lemma 2.12] $\forall t$, $0 \leq t \leq 1$, отображение*

$$f_t(x, h, p) = f(x) + t(f(x + he_p) - f(x)),$$

где e_p — p-ый единичный координатный вектор в R^n, определено и является гомеоморфизмом в $B(x_0, \rho)$ для любого $p = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1. *Пусть $s \geq \frac{2}{n-2}$ и отображение $f\colon D \to D^*$ есть экстремальное отображение в классе $K_{I,s}(D, D^*)$. Тогда $f \in W_2^2(D')$ для любой подобласти D' такой, что $J(x, f) > 0$ на замыкании $\overline{D'}$ и $\overline{D'} \subset D$.*

Теорема 2. *Пусть $f\colon D \to D^*$ есть экстремальное отображение в классе $K^*_{I,s}(D, D^*)$ и $s \geq 1$. Тогда $f \in W_2^2(D')$ для любой подобласти D' такой, что $J(x, f) > 0$ на замыкании $\overline{D'}$ и $\overline{D'} \subset D$.*

Замечание 1. *Аналогичные утверждения справедливы и для других характеристик в силу связывающих их неравенств [6].*

Замечание 2. *В [7] теорема 1 доказана для отображений квазиконформных в среднем.*

Замечание 3. *Нами доказано [8], что существует такое число r_0, что в окрестности радиуса r_0 существуют обратное отображение f_j^{-1}, причем из сходимости интеграла с характеристикой $K_{I,s}$ для отображения f следует сходимость интеграла с $K_{O,s}$ для f_j^{-1}, теперь можно определить характеристики вида*

$$K(f) = \frac{1}{|D|}\int\limits_D K_I(x, f)\, d\sigma_x + \frac{1}{|D^*|}\int\limits_D K_I(x, f^{-1})\, d\sigma_y.$$

Замечание 4. *Для характеристики $\lambda(x, f) = n^{-\frac{n}{2}} \frac{|\nabla f(x)|^n}{|J(x,f)|}$ отображений с ограниченным искажением см. [2].*

В [10] приведены примеры отображений с s-усредненной характеристикой, а также показано отличие данного класса отображений от класса отображений с ограниченным искажением.

Литература

1. Малютина А. Н., Елизарова М. А. *Дифференциальные свойства отображений с s-усредненной характеристикой* // Вест. Томск. ун-та. Математика и механика. – № 300 (1). – 2007. – С. 124–129.

2. Стругов Ю. Ф. *Вариационные задачи в классе квазиконформных в среднем отображений.* Учебное пособие. – Омск, 2005. – 125 с.

3. Стругов Ю. Ф. *Вопросы метрической теории отображений и её применение.* – Киев, Наук. думка. – 1978. – Т. 243. – № 5. – С. 135–142.

4. Стругов Ю. Ф. *Об одном дифференциальном свойстве экстремального отображения, квазиконформном в среднем* // ДАН СССР. – Т. 243. – № 5. – 1978. – С. 1138–1141.

5. Martio O., Rickman S., Vaisala J. *Definitions for quasiregular mappings* // Ann. Acad. Sci. Fenn. Ser. A I. – No. 448. – 1969. – 40 p.

6. Сычев А. В. *Пространственные квазиконформные отображения.* – Новосибирск: Наука, 1975.

7. Стругов Ю. Ф. *Вариации пространственных квазиконформных отображений и экстремальные отображения* // В сб. Динамика сплошной среды, вып. 25. – 1976. – С. 154–157.

8. Елизарова М. А., Малютина А. Н. *Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства.* – LAMBERT Academic Publishing. – 2013. – 121 с.

9. Малютина А. Н., Алипова К. А. *Вариации пространственных негомеоморфных отображений с s-усредненной характеристикой* // Матер. 19-й межд. Сарат. зимней школы. – Саратов: Научная книга, 2016. – С. 178–181.

10. Alipova K., Elizarova M., Malyutina A. *Examples of the mappings with s-averaged characteristic* // Компл. анализ и его прил.: Матер. VII Петрозаводской межд. конф. (29 июня – 5 июля 2014 г.) / под ред. проф. В. В. Старкова; ПетрГУ. Петрозаводск: Изд-во ПетрГУ, 2014. – С. 12–17.

ANALOG TO THE EULER EQUATION FOR EXTREMAL MAPPINGS WITH $K_{I,S}$- OR $K_{O,S}$-AVERAGED CHARACTERISTICS

A.N. Malyutina, K.A. Alipova

In this paper we consider extremal properties of mappings with s-averaged characteristic. Variational method is developed and successfully applied for solutions of extremal problems in the theory of plane quasiconformal mappings. We suggest to apply this classical method to solve extremal problems in the class of mappings with s-averaged characteristic.

Keywords: mapping with s-averaged characteristics, differential properties, variation, extremal mapping.

УДК 517.518

О РАВНОМЕРНОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЗНАЧНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ, ЗАДАННОГО ДВУМЯ СЕГМЕНТНЫМИ ФУНКЦИЯМИ, ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ВЕКТОР-ФУНКЦИЕЙ

А.В. Макаров[1], С.И. Дудов[2]

1 *alexander-makarov93@yandex.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

2 *dudovsi@info.sgu.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

Рассматривается задача равномерного приближения многозначного отображения, заданного декартовым произведением двух сегментных функций, полиномиальной вектор-функцией. Сформулированные необходимые и достаточные условия решения являются обобщением результата С.И. Зуховицкого - М.Г. Крейна для приближения непрерывной вектор-функции.

Ключевые слова: равномерное приближение, многозначное отображение, полиномиальная вектор-функция, субдифференциал.

Пусть $\Phi(\cdot) : T \to 2^{R^2}$ – многозначное отображение, заданное на ограниченном замкнутом множестве $T \subset R$, со значениями, заданными в виде:

$$\Phi(t) = \{x \in R^2 : x \in f(t) \times g(t)\},$$

где $f(t) = [f_1(t), f_2(t)], g(t) = [g_1(t), g_2(t)]$ – сегментные функции, заданные непрерывными функциями $f_i(t), g_i(t), i = 1,2$, причём $f_1(t) \le f_2(t), g_1(t) \le g_2(t)$ для всех $t \in T$.

Рассматривается задача

$$\max_{t\in T} \max_{v\in\Phi(t)} \|v - \Pi_n(A,t)\| \longrightarrow \min_{A=(A_1,A_2)\in R^{2n+2}}. \tag{1}$$

Здесь $\Pi_n(A,t) = (P_n(A_1,t), P_n(A_2,t)) \in R^2$, где $P_n(A_i,t) = a_{0i} + a_{1i}t + \cdots + a_{ni}t^n$ – алгебраический полином степени n, $A_i = (a_{0i}, a_{1i}, \ldots, a_{ni}) \in R^{n+1}$ – вектор его коэффициентов, $i = \overline{1,2}$, $\|\cdot\|$ – евклидова норма.

Теорема 1. *Задача (1) эквивалентна задаче*

$$\varphi(A) \equiv \max_{t\in T}\{F(A_1,t) + G(A_2,t)\} \longrightarrow \min_{A=(A_1,A_2)\in R^{2n+2}}, \tag{2}$$

где

$$F(A_1,t) = \max\{(P_n(A_1,t) - f_1(t))^2, (P_n(A_1,t) - f_2(t))^2\},$$
$$G(A_2,t) = \max\{(P_n(A_2,t) - g_1(t))^2, (P_n(A_2,t) - g_2(t))^2\}.$$

Функции $F(A_1,t)$ и $G(A_2,t)$ являются выпуклыми и конечными на R^{n+1} по A_1 и A_2 соответственно. В соответствии с субдифференциальным исчислением ([1, гл.1]) формулы их субдифференциалов можно выразить в виде

$$\partial_{A_1}F(A_1,t) = \begin{cases} 2(P_n(A_1,t) - f_1(t))(1,t,,\ldots,t^n), \text{если } |P_n(A_1,t) - f_1(t)| > |P_n(A_1,t) - f_2(t)|, \\ 2(P_n(A_1,t) - f_2(t))(1,t,,\ldots,t^n), \text{если } |P_n(A_1,t) - f_1(t)| < |P_n(A_1,t) - f_2(t)|, \\ 2(P_n(A_1,t) - f_1(t))[-(1,t,,\ldots,t^n),(1,t,,\ldots,t^n)], \\ \qquad\qquad \text{если } |P_n(A_1,t) - f_1(t)| = |P_n(A_1,t) - f_2(t)|; \end{cases}$$

$$\partial_{A_2}G(A_2,t) = \begin{cases} 2(P_n(A_2,t) - g_1(t))(1,t,,\ldots,t^n), \text{если } |P_n(A_2,t) - g_1(t)| > |P_n(A_2,t) - g_2(t)|, \\ 2(P_n(A_2,t) - g_2(t))(1,t,,\ldots,t^n), \text{если } |P_n(A_2,t) - g_1(t)| < |P_n(A_2,t) - g_2(t)|, \\ 2(P_n(A_2,t) - g_1(t))[-(1,t,,\ldots,t^n),(1,t,,\ldots,t^n)], \\ \qquad\qquad \text{если } |P_n(A_2,t) - g_1(t)| = |P_n(A_2,t) - g_2(t)|; \end{cases}$$

Теорема 2. *Для того чтобы вектор $A^* = (A_1^*, A_2^*) \in R^{2n+2}$ являлся решением задачи (2), необходимо и достаточно, чтобы*

$$\max_{t\in Q(A^*)} \left\{ \max_{v_1\in\partial_{A_1}F(A_1^*,t)} < v_1, A_1 > + \max_{v_2\in\partial_{A_2}G(A_2^*,t)} < v_2, A_2 > \right\} \ge 0, \quad \forall A_1, A_2 \in R^{n+1},$$

где $Q(A) = \{t \in T : \varphi(A) = F(A_1,t) + G(A_2,t)\}$, $< \cdot, \cdot >$ – скалярное произведение.

Отметим, что если $f_1(t) \equiv f_2(t), g_1(t) \equiv g_2(t)$ для $t \in T$, то из теоремы 2 следует известный критерий [2] для задачи равномерного приближения вектор-функции полиномиальной вектор-функцией в форме А.Н. Колмогорова (в двумерном случае).

Литература

1. Демьянов В. Ф., Васильев Л. В. *Недифференцируемая оптимизация*. – М.: Наука, 1981. – 384 с.

2. Зуховицкий С. И., Крейн М. Г. *Замечание об одном возможном обобщении теорем А. Хаара и А.Н. Колмогорова* // УМН. – 1950. – Т. 5. – Вып. 1 (35). – С. 217-229.

ON UNIFORM APPROXIMATION OF MULTI-VALUED MAP, GIVEN BY TWO SEGMENT FUNCTIONS, BY POLYNOMIAL VECTOR FUNCTION

A.V. Makarov, S.I. Dudov

The problem of uniform approximation of a multi-valued map, given by Cartesian product of two segment functions, by polynomial vector function is considered. The necessary and sufficient conditions for the solution of the problem are formulated. They are a generalization of the known result of S.I. Zukhovitsky and M.G. Krein.

Keywords: uniform approximation, multi-valued map, polynomial vector-function, subdifferential.

УДК 514.822

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ НЕРАВЕНСТВА, РОДСТВЕННЫЕ ПРИНЦИПУ НЕОПРЕДЕЛЕННОСТИ ГЕЙЗЕНБЕРГА

Р.В. Макаров[1]

1 *ruva2007@ya.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В статье рассматривается классическое неравенство Гейзенберга. Нами получены модификации этого неравенства.

Ключевые слова: принцип неопределенности Гейзенберга, интегральные неравенства.

В 1927 г. Вернер Гейзенберг открыл принцип неопределенности. Сейчас это – один из фундаментальных принципов в квантовой механике, устанавливающий предел точности одновременного определения пары характеризующих систему квантовых наблюдаемых, описываемых некоммутирующими операторами (например, координаты и импульса, тока и напряжения, электрического и магнитного поля). Более доступно он звучит так: чем точнее измеряется одна характеристика частицы, тем менее точно можно измерить вторую.

Принцип неопределенности может быть записан в виде:

$$\triangle x \cdot \triangle p \geqslant \hbar/2,$$

где $\triangle x$ – величина среднеквадратического отклонения координаты, $\triangle p$ – среднеквадратическое отклонение импульса, $\hbar$ – постоянная Планка.

В общем случае принцип неопределенности применим не только к координате и импульсу (как это показал Гейзенберг), но и к парам сопряженных переменных.

Неравенство Гейзенберга имеет фундаментальную важность во многих областях математического анализа и математической физики, и интенсивно изучалось с мо-

мента его открытия. Богатая история связана с оригинальным неравенством, которое было расширено и уточнено во многих направлениях.

Когда требуется точная количественная оценка принципа неопределенности, то наиболее используемая из них называется неравенством Гейзенберга. Появляется оно в работе Гейзенберга, посвященной теоретическому анализу принципа неопределенности. В этой работе оно получило недостаточное математическое обоснование, это упущение было исправлено позднее Кеннардом и Вейлом.

Классическое неравенство Гейзенберга выглядит таким образом:

Теорема 1. *Для* $\forall f \in L^2(\mathbb{R}^n)$ *и* $\forall a, b \in \mathbb{R}$ *верно соотношение:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} (x-a)^2 |f(x)|^2 \, dx \cdot \int_{\mathbb{R}^n} (\xi - b)^2 |\hat{f}(\xi)|^2 d\xi \geqslant \frac{\|f\|_4^2}{16\pi^2} \cdot n^2 .$$

Приведем еще одно утверждение.

Формулировка Вейла принципа неопределенности. *Для любой функции* $f \in S(\mathbb{R})$ *при условии* $\|f\|_2 = 1$ *верно соотношение:*

$$-\int_{\mathbb{R}} |f(x)|^2 \ln(|f(x)|^2) \, dx - \int_{\mathbb{R}} |\hat{f}(\xi)|^2 \ln(|\hat{f}(\xi)|^2) \, d\xi \geqslant \ln \frac{e}{2} .$$

Эта теорема имеет непосредственную связь с физическими величинами, а именно с энтропией Шеннона:

$$E(\rho) = -\int \rho(x) \ln \rho(x) \, dx .$$

Нами обоснованы следующие неравенства, близкие принципу неопределенности Гейзенберга.

Теорема 2. *Для любой функции* $f \in L^2(\mathbb{R})$ *с компактным носителем* $\operatorname{supp} f \in \mathbb{R}$ *выполняются следущие неравенства:*

$$\left\| \frac{f(x)}{x^2+1} \right\|_2 + \frac{\pi}{2} \|\xi |\hat{f}(\xi)|\|_2 \geqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{2x \operatorname{arctg} x - 1}{(x^2+1)^2} \cdot |f(x)|^2 \, dx,$$

$$\left\| \frac{f(x)}{4x(x+1)^2} \right\|_2 + \frac{\pi}{2} \|\xi |\hat{f}(\xi)|\|_2 \geqslant \int_{\mathbb{R}} \frac{(3x+1) \operatorname{arctg} \sqrt{x} - \sqrt{x}}{4x^{3/2}(x+1)^2} \cdot |f(x)|^2 \, dx.$$

Теорема 3. *Пусть* $a, b, k \in \mathbb{R}$. *Тогда для любой функции* $f \in L^2(\mathbb{R})$, *удовлетворяющей условию* $\|f\|_2 = 1$, *справедливо неравенство:*

$$\int_{\mathbb{R}} e^{k(x-a)^2} |f(x)|^2 \, dx \cdot \int_{\mathbb{R}} e^{k(\xi-b)^2} |\hat{f}(\xi)|^2 \, d\xi \geqslant e^{k/2\pi}.$$

Выражаю благодарность своему научному руководителю проф. Ф.Г. Авхадиеву за постановку задачи и полезные замечания.

Литература

1. Folland G., Sitaram A. *The uncertainty principle: a mathematical survey* // J. Fourier Anal. Appl. – 1997. – № 3. – P. 207-238.

2. Beckner W. *Pitt's inequality and the uncertainty principle* // Proc. Amer Math. Soc. – 1995. – № 123. – P. 1897-1905.

INTEGRAL INEQUALITIES RELATED TO UNCERTAINTY PRINCIPLE OF HEISENBERG

R.V. Makarov

We describe the classical Heisenberg inequality and its modifications. Also we obtain some new similar estimates and inequalities.

Keywords: uncertainty principle, integral inequality.

УДК 517.95

О ВЗАИМОСВЯЗИ РАЗРЕШИМОСТИ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ ПУАССОНА НА НЕКОМПАКТНЫХ РИМАНОВЫХ МНОГООБРАЗИЯХ

Е.А. Мазепа[1]

1 *elena.mazepa@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет

В данной работе, используя достаточно новый подход к постановке краевых задач на произвольном некомпактном римановом многообразии M, основанный на введении классов эквивалентных на M функций, устанавливаем зависимость между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для уравнения Пуассона на M в классе неограниченных непрерывных функций.

Ключевые слова: уравнение Пуассона, краевая и внешняя краевая задачи, некомпактные римановы многообразия, задача Дирихле.

В последние годы опубликовано большое количество работ, посвященных вопросам разрешимости различных краевых задач для гармонических функций, для решений стационарного уравнения Шредингера, для некоторых других однородных линейных и квазилинейных эллиптических уравнений. При этом исследования неоднородных эллиптических уравнений носят единичный характер и посвящены преимущественно изучению асимптотического поведения решений этих уравнений [1]- [2], а не вопросам разрешимости для них краевых задач.

В настоящей работе предлагаем, используя достаточно новый подход к постановке краевых задач на некомпактных римановых многообразиях, основанный на введении понятия классов эквивалентных на многообразии M непрерывных функций (в том числе неограниченных), исследовать вопросы разрешимости краевых и внешних краевых задач для уравнения Пуассона

$$\Delta u = g(x), \tag{1}$$

где функция $g(x) \in C^{\gamma}(\Omega)$ для любого подмножества $\Omega \subset\subset M$, $0 < \gamma < 1$.

В частности, в работе устанавливается зависимость между разрешимостью краевых и внешних краевых задач для уравнения (1) на произвольном некомпактном римановом многообразии.

Под решением уравнения (1) на многообразии M будем понимать функцию $u \in C^2(\Omega)$, удовлетворяющую этому уравнению на любом компактном подмножестве $\Omega \subset M$.

Ранее описываемый ниже подход был использован для изучения вопросов разрешимости краевых задач для уравнений Лапласа-Бельтрами, уравнения Шредингера, ряда полулинейных и квазилинейных эллиптических уравнений на произвольных некомпактных римановых многообразиях (см., напр., [3]– [5]).

Пусть $B \subset M$ — произвольное связное компактное подмножество с гладкой границей ∂B и непустой внутренностью, $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M, то есть последовательность предкомпактных открытых подмножеств риманова многообразия M таких, что $\overline{B}_k \subset B_{k+1}$, $M = \bigcup_{k=1}^{\infty} B_k$.

Пусть $f_1(x)$ и $f_2(x)$ — произвольные непрерывные (в том числе, неограниченные) на M функции.

Определение 1. Будем говорить, что функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ *эквивалентны на* M (и обозначать $f_1(x) \sim f_2(x)$), если для некоторого исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ многообразия M выполнено

$$\lim_{k\to\infty} ||f_1(x) - f_2(x)||_{C^0(M\setminus B_k)} = 0,$$

где $||f(x)||_{C^0(G)} = \sup_G |f(x)|$.

Обозначим класс эквивалентных f функций через $[f]$. Введенное отношение действительно является отношением эквивалентности (т. е. оно рефлексивно, симметрично и транзитивно), не зависит от выбора исчерпания многообразия M и характеризует поведение функций вне произвольного компактного подмножества $B \subset M$ (см., напр., [3]– [5]).

Определение 2. Будем называть функцию f *асимптотически неотрицательной на* M (и обозначать $f \gtrsim 0$), если на M существует непрерывная функция $w \geq 0$ такая, что $w \sim f$.

Определение 3. Будем говорить, что функция g *асимптотически не превосходит функцию* f на M (и обозначать $g \lesssim f$), если разность $f - g$ на M является асимптотически неотрицательной функцией.

Имеют место следующие вспомогательные утверждения.

Лемма 1. *Если* $g \lesssim f$ *и* $f \lesssim g$ *на* M, *то* $g \sim f$ *на* M. *Обратное утверждение также верно.*

Лемма 2 (Принцип сравнения 1). *Пусть* $\Delta v \leq \Delta u$ *на* $M \setminus B$, $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $v \sim u$. *Тогда* $v \geq u$ *на* $M \setminus B$.

Пусть $\Delta v \leq \Delta u$ *на* M *и* $v \sim u$. *Тогда* $v \geq u$ *на* M.

Лемма 3 (Принцип сравнения 2). *Пусть* $\Delta v \leq \Delta u$ *на* $M \setminus B$, $v|_{\partial B} \geq u|_{\partial B}$, $v \gtrsim u$. *Тогда* $v \geq u$ *на* $M \setminus B$.

Пусть $\Delta v \leq \Delta u$ *на* M *и* $v \gtrsim u$. *Тогда* $v \geq u$ *на* M.

Определение 4. Будем говорить, что на M *разрешима краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями из класса* $[f]$, если на M существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$.

Определение 5. Пусть $\Phi(x) \in C(\partial B)$ — произвольная функция. Будем говорить, что на $M \setminus B$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями* $(\Phi, [f])$, если на $M \setminus B$ существует решение $u(x)$ уравнения (1) такое, что $u \in [f]$ и $u|_{\partial B} = \Phi|_{\partial B}$.

Сформулируем теорему единственности решения краевых и внешних краевых задач для уравнения (1) в заданном классе эквивалентных функций.

Теорема 1 (Теорема единственности). *Пусть* $\Delta v = g(x)$ *и* $\Delta u = g(x)$ *на* $M \setminus B$ *и* $v|_{\partial B} = u|_{\partial B}$, $v \sim u$. *Тогда* $w = u$ *на* $M \setminus B$.

Пусть $\Delta v = g(x)$, $\Delta u = g(x)$ *на* M *и* $v \sim u$. *Тогда* $v = u$ *на* M.

Доказательство этой теоремы непосредственно следует из принципов сравнения 1 и 2.

Далее пусть $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ — исчерпание многообразия M с гладкими границами ∂B_k. Обозначим через v_k — гармоническая в $B_k \setminus B$ функция, удовлетворяющее условиям

$$v_k|_{\partial B} = 1, \qquad v_k|_{\partial B_k} = 0.$$

Как и в [3] легко показать, что при $k \to \infty$ она монотонно возрастает и сходится к гармонической на $M \setminus B$ функции такой, что

$$v = \lim_{k \to \infty} v_k, \qquad 0 < v \leq 1, \qquad v|_{\partial B} = 1.$$

Заметим также, что функция v не зависит от выбора исчерпания $\{B_k\}_{k=1}^{\infty}$ и для уравнения Лапласа-Бельтрами функция v есть не что иное, как емкостный потенциал компакта B относительно многообразия M (см. [6]).

Определение 6. Многообразие M будем называть Δ-*строгим* многообразием, если для некоторого компакта $G \subset M$ существует емкостный потенциал v такой, что $v \in [0]$.

Следующие утверждения в некоторой степени обобщают для уравнения Пуассона результаты, полученные ранее для однородных линейных уравнений на произвольном некомпактном римановом многообразии M.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 2. *Пусть на* $M \setminus B$ *для любой константы* $\grave{\mathrm{A}}$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями* $(A, [f])$. *Тогда на* M *для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$.

Следствие. *Пусть на* $M \setminus B$ *для произвольной непрерывной на* ∂B *функции* $\Phi(x)$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями* $(\Phi, [f])$. *Тогда на* M *для уравнения* (1) *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$.

Теорема 3. *Пусть на* Δ-*строгом многообразии* M *разрешима краевая задача с граничными условиями из класса* $[f]$. *Тогда на* $M \setminus B$ *для произвольной непрерывной на* ∂B

функции $\Phi(x)$ *разрешима внешняя краевая задача для уравнения* (1) *с граничными условиями* $(\Phi, [f])$.

Доказательство вспомогательных и основных представленных выше результатов работы опирается на классические утверждения теории уравнений в частных производных: принцип максимума, теоремы сравнения и единственности для решений линейных эллиптических дифференциальных уравнений. Их справедливость на предкомпактных подмножествах многообразия M доказывается так же как и для ограниченных областей в R^n.

Замечание. Представленные результаты обобщают аналогичные утверждения, полученные ранее для классов $[f]$ ограниченных непрерывных функций (см. [7]).

Работа выполнена при финансовой поддержке гранта РФФИ (проект № 15-41-02479 р_поволжье_а).

Литература

1. Ni L., Shi Y., Tam L.-F. *Poisson equation, Poincare-Lelong equation and curvature decay on complete Kahler manifolds* // J. Diff. Geom. – 2001. – V. 57. – P. 733-388.

2. Grigor'ya A. A., Verbitsky I.*Pointwise estimates of solutions to semilinear elliptic equations and inequalities* // arXiv: 1511.03188v1. – 2015. – P. 1-32.

3. Мазепа Е. А. *Краевые задачи для стационарного уравнения Шредингера на римановых многообразиях* // Сиб. матем. журн. – 2002. – Т. 43. – № 3. – С. 591–599.

4. Losev A. G., Mazepa E. A., Chebanenko V. Y. *Unbounded solutions of the stationary Schrodinger equation on Riemannian manifolds* // CMFT. – 2003. – V. 3. – № 2. – P. 443-451.

5. Корольков С. А., Лосев А. Г. *Решения эллиптических уравнений на римановых многообразиях с концами* // Вест. Волгогр. гос. ун-та. Сер. 1. Математика. Физика. – 2011. – № 1. – С. 23–40.

6. Grigor'yan A. *Analytic and geometric background of recurrence and non-explosion of the Brownian motion on Riemannian manifolds* // Bulletin of Amer. Math. Soc. – 1999. – № 36. – P. 135-249.

7. Мазепа Е. А. *О разрешимости краевых задач для уравнения Пуассона на некомпактных римановых многообразиях* // Математическая физика и компьютерное моделирование. – 2017. – Т. 20. – № 3. – С. 135–145.

ON INTERRELATION BETWEEN SOLVABILITY OF BOUNDARY VALUE PROBLEMS FOR THE POISSON EQUATION ON NONCOMPACT RIEMANNIAN MANIFOLDS

E.A. Mazepa

We study questions of existence and belonging to a given functional class of bounded and unbounded solutions of the Poisson equation on a noncompact Riemannian manifold M *without boundary. Of keen interest is the interrelation between problems of existence of solutions of the Poisson equation on* M *and off some compact* $B \subset M$ *with the same growth "at infinity". In our research we use a new approach which is based on consideration of equivalence classes of functions on* M.

Keywords: Poisson equation, boundary value problem, noncompact Riemannian manifolds, the Dirichlet problem.

УДК 517.984

НЕРАВЕНСТВО ТИПА СЕГЁ ДЛЯ ПРОИЗВОДНЫХ РАЦИОНАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

Т.С. Мардвилко[1], А.А. Пекарский[2]

1 *mardvilko@mail.ru*; Белорусский государственный университет
2 *pekarskii@gmail.com*; Белорусский государственный университет

В работе рассматриваются сопряженные функции на отрезке и обсуждается доказанное нами неравенство типа Сегё для рациональных функций. К необходимости получения такого неравенства авторы пришли, изучая связь между скоростями наилучших равномерных приближений функции посредством рациональных функций и кусочно-полиномиальных функций.

Ключевые слова: алгебраические полиномы, рациональные функции, неравенство Бернштейна, неравенство Сегё, сопряженные функции, наилучшие равномерные полиномиальные приближения, наилучшие равномерные рациональные приближения, наилучшие равномерные кусочно-полиномиальные приближения.

Неравенства С.Н. Бернштейна и Г. Сегё для производных тригонометрических многочленов, а также их обобщения (см., например, [1]) для тригонометрических рациональных функций играют важную роль в теории аппроксимации функций. В [1] приводится также неравенство типа Бернштейна для производных рациональных функций на отрезке. В связи с изучением соотношений между наилучшими равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями функций, в [2] было получено неравенство типа Сегё для производных рациональных функций на отрезке. Для формулировки этого неравенства введём необходимые обозначения.

Через $C(I)$ обозначим банахово пространство непрерывных функций, определённых на отрезке $I := [-1,1]$ и наделенных стандартной max-нормой $\|\cdot\|_{C(I)}$, через $L_p(I)$, $0 < p < \infty$, – пространство Лебега измеримых функций g на I таких, что $|g|^p$ суммируема на I.

Пространсво $L_p(I)$ является квазибанаховым относительно квазинормы

$$\|g\|_{L_p(I)} := \left(\int_I |g(x)|^p dx\right)^{1/p}.$$

Пусть функция $g(t)$ определена на отрезке I и интегрируема на нём с весом $1/\sqrt{1-t^2}$. Тогда $\hat{g}$ – функция, сопряжённая к g, определяется следующим образом

$$\hat{g}(x) = \frac{\sqrt{1-x^2}}{\pi} \int_I \frac{g(t)}{t-x} \cdot \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}, \quad x \in I,$$

где сингулярный интеграл понимается в смысле главного значения по Коши.

Теорема 1 [2]. *Пусть r – рациональная функция степени $n, n \in \mathbb{N}$, не имеющая полюсов на I. Тогда для $s \in \mathbb{N}$ выполняется неравенство*

$$\|\hat{r}^{(s)}\|_{L_{1/s}(I)} \le cn^s \|r\|_{C(I)},$$

где $c > 0$ и зависит лишь от s.

Отметим также работу [3], в которой получено неравенство типа Сегё для алгебраического полинома. Это неравенство используется для изучения связи между наилучшими равномерными полиномиальными приближениями сопряжённых функций, заданных на отрезке.

Работа выполнена в рамках программы ГПНИ НАН Беларуси “Конвергенция”.

Литература

1. Pekarskii A. A. *Approximation by rational functions with free poles* // East J. on Approxim. – 2007. – V. 13. – № 3. – P. 227–319.

2. Мардвилко Т. С., Пекарский А. А. *Сопряжённые функции на отрезке и их связь с равномерными рациональными и кусочно-полиномиальными приближениями* // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99. – № 2. – С. 248–261.

3. Мисюк В. Р., Пекарский А. А. *Сопряжённые функции на отрезке и соотношения для их наилучших равномерных полиномиальных приближений* // Изв. НАН Беларуси. Сер. физ.-мат. наук. – 2015. – № 2. – С. 37–40.

A SZEGÖ-TYPE INEQUALITY FOR THE DERIVATIVES OF THE CONJUGATE RATIONAL FUNCTION ON A SEGMENT

T.S. Mardvilko, A.A. Pekarskii

In the present paper, the conjugate function is considered. A Szegö-type inequality for the derivatives of the conjugate rational function on a closed interval was obtained. This inequality was proved when we investigated the relationship between the rate of the best uniform rational approximations of a function and the rates of the best uniform piecewise polynomial approximations.

Keywords: algebraic polinomials, rational functions, Bernstein-type inequality, Szegö-type inequality, the conjugate functions, the best uniform polinomial approximations, the best uniform rational approximations, the best piecewise polinomials approximations.

УДК 517.95

ПОСТРОЕНИЕ ОБЩЕГО РЕШЕНИЯ ОБЫКНОВЕННОГО ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА С ПЕРЕМЕННЫМ ЗНАКОМЕНЯЮЩИМ КОЭФФИЦИЕНТОМ

Н.В. Мартемьянова[1]

1 *ninamartem@yandex.ru*; Самарский государственный социально-педагогический университет

В статье строится общее решение обыкновенного дифференциального уравнения второго порядка с переменным знакоменяющим коэффициентом, возникающего при решении обратных задач для вырождающихся уравнений смешанного типа спектральным методом. Установлены некоторые свойства общего решения, которое определяется через функции Бесселя.

Ключевые слова: обыкновенное дифференциальное уравнение с переменным

знакоменяющим коэффициентом, общее решение, частное решение, функции Бесселя.

При построении решения обратных задач для вырождающихся уравнений смешанного типа методом разделения переменных [1 – 8] возникает необходимость построения общего решения уравнения

$$T''(y) - \lambda^2(\operatorname{sgn} y)|y|^n T(y) = f(y), \tag{1}$$

из класса

$$T(y) \in C^2(I) \cap C^1(\bar{I}), \tag{2}$$

где $I = \{y| -\alpha < y < \beta,\ y \neq 0\}$, n, α, β – заданные положительные числа, $f(y) = f_1(y)$ при $y > 0$ и $f(y) = f_2(y)$ при $y < 0$, $f_1(y)$, $f_2(y)$ – заданные непрерывные функции.

Следуя [9], общее решение дифференциального уравнения (1) будем искать в виде

$$T(y) = \begin{cases} a(y)\sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(py^q) + b(y)\sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(py^q), & y > 0, \\ c(y)\sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) + d(y)\sqrt{-y} Y_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q), & y < 0, \end{cases}$$

где $p = \frac{\lambda}{q}$, $q = \frac{n+2}{2}$. На основании метода вариации найдем представления для неизвестных функций

$$a(y) = -\frac{1}{q}\int_y^\beta \sqrt{t} f_1(t) K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt + a, \quad b(y) = -\frac{1}{q}\int_0^y \sqrt{t} f_1(t) I_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt + b,$$

$$c(y) = \frac{\pi}{2q}\int_0^y \sqrt{-t} f_2(t) Y_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)dt + c, \quad d(y) = -\frac{\pi}{2q}\int_0^y \sqrt{-t} f_2(t) J_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)dt + d,$$

где a, b, c, d – произвольные постоянные, и подставим их в общее решение

$$T(y) = \begin{cases} a\sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(py^q) + b\sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(py^q) + \omega^+(y), & y > 0, \\ c\sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) + d\sqrt{-y} Y_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) + \omega^-(y), & y < 0, \end{cases} \tag{3}$$

где

$$\omega^+(y) = -\frac{1}{q}\sqrt{y} I_{\frac{1}{2q}}(py^q)\int_y^\beta f_1(t)\sqrt{t} K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt - \frac{1}{q}\sqrt{y} K_{\frac{1}{2q}}(py^q)\times$$
$$\times \int_0^y f_1(t)\sqrt{t} I_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt, \quad y > 0, \tag{4}$$

$$\omega^-(y) = \frac{\pi}{2q}\sqrt{-y} J_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q)\int_0^y f_2(t)\sqrt{-t} Y_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)dt -$$
$$-\frac{\pi}{2q}\sqrt{-y} Y_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q)\int_0^y f_2(t)\sqrt{-t} J_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)dt, \quad y < 0. \tag{5}$$

Поскольку решение $T(y)$ принадлежит классу (2), то для него должны быть выполнены условия сопряжения:

$$T(0-0)=T(0+0),\quad T'(0-0)=T'(0+0). \tag{6}$$

Предварительно рассмотрим функции $\omega^+(y)$, $\omega^-(y)$ и изучим их свойства. Основываясь на формулах дифференцирования функций Бесселя [10, с. 305], найдем первые и вторые производные:

$$\omega^{+\prime}(y)=-py^{q-\frac{1}{2}}I_{\frac{1}{2q}-1}(py^q)\int_y^\beta f_1(t)\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt+py^{q-\frac{1}{2}}K_{\frac{1}{2q}-1}(py^q)\times$$

$$\times\int_0^y f_1(t)\sqrt{t}I_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt, \tag{7}$$

$$\omega^{-\prime}(y)=-\frac{\pi}{2}p(-y)^{q-\frac{1}{2}}J_{\frac{1}{2q}-1}(p(-y)^q)\int_0^y f_2(t)\sqrt{-t}Y_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)dt+$$

$$+\frac{\pi}{2}p(-y)^{q-\frac{1}{2}}Y_{\frac{1}{2q}-1}(p(-y)^q)\int_0^y f_2(t)\sqrt{-t}J_{\frac{1}{2q}}(p_k(-t)^q)dt, \tag{8}$$

$$\omega^{+\prime\prime}(y)=-(pq)^2y^n\frac{1}{q}\sqrt{y}I_{\frac{1}{2q}}(py^q)\int_0^y f_1(t)\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(p(t)^q)dt+$$

$$-(pq)^2y^n\frac{1}{q}\sqrt{y}K_{\frac{1}{2q}}(py^q)\int_0^y f_1(t)\sqrt{t}I_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt+f_1(y)=(pq)^2y^n\omega^+(y)+f_1(y), \tag{9}$$

$$\omega^{-\prime\prime}(y)=-(pq)^2q(-y)^n\left[\frac{\pi}{2q}\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q)\int_0^y f_2(t)\sqrt{-t}Y_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)dt-\right.$$

$$\left.-\frac{\pi}{2q}\sqrt{-y}Y_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q)\int_0^y f_2(t)\sqrt{-t}J_{\frac{1}{2q}}(p(-t)^q)dt\right]+f_2(y)=-(pq)^2(-y)^n\omega^-(y)+f_2(y). \tag{10}$$

Из формул (9), (10) получаем, что функции $\omega^+(y)$ и $\omega^-(y)$ являются решениями уравнения (1) при $y>0$ и $y<0$ соответственно.

Теперь определим поведение функций $\omega^+(y)$ и $\omega^-(y)$ и их производных в нуле.

С учетом асимптотических оценок для функций Бесселя при $z\to 0$ [10, с. 307] из (4), (5), (7), (8) найдем

$$\omega^+(0+0)=0,\quad \omega^-(0-0)=0, \tag{11}$$

$$\omega^{+\prime}(0+0)=-\frac{p}{\Gamma(\frac{1}{2q})}\left(\frac{p}{2}\right)^{\frac{1}{2q}-1}\int_0^\beta f_1(t)\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt,\quad \omega^{-\prime}(0-0)=0. \tag{12}$$

Таким образом, установлена следующая

Лемма. *Функции $\omega^+(y)$ и $\omega^-(y)$ являются решениями соответственно неоднородного уравнения (1) при $y>0$, $y<0$, удовлетворяют граничным условиям (11), (12) и*

$$\omega_k^{+\prime\prime}(0+0)=f_1(0),\quad \omega_k^{-\prime\prime}(0-0)=f_2(0).$$

Используя доказанную лемму и асимптотические оценки в нуле для функций Бесселя, получим, что функция (3) удовлетворяет условиям сопряжения (6) только тогда, когда

$$d = -\frac{\pi}{2}b, \quad c = \frac{\pi}{2}\operatorname{ctg}\frac{\pi}{4q}b - a + \frac{1}{q}\int_0^\beta f_1(t)\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt.$$

Подставив найденные значения c, d в (3), получим окончательный вид общего решения уравнения (1) из класса (2):

$$T(y) = \begin{cases} a\sqrt{y}I_{\frac{1}{2q}}(py^q) + b\sqrt{y}K_{\frac{1}{2q}}(py^q) + \omega^+(y), & y > 0, \\ -a\sqrt{-y}J_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) + b\sqrt{-y}\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p(-y)^q) + \widetilde{\omega}^-(y), & y < 0, \end{cases}$$

где

$$\overline{Y}_{\frac{1}{2q}}(p(-y^q)) = \frac{\pi}{2\sin\frac{\pi}{2q}}(J_{\frac{1}{2q}}(p(-y^q)) + J_{-\frac{1}{2q}}(p(-y^q))),$$

$$\widetilde{\omega}^-(y) = \omega^-(y) + \frac{1}{q}\int_0^\beta f_1(t)\sqrt{t}K_{\frac{1}{2q}}(pt^q)dt.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16-31-00421).

Литература

1. Сабитов К. Б., Рахманова Л. Х. *Начально-граничная задача для уравнения смешанного параболо-гиперболического типа в прямоугольной области* // Дифференциальные уравнения. – 2008. – Т.44. – № 9. – С. 1175–1181.

2. Сабитова Ю. К. *Критерий единственности решения нелокальной задачи для вырождающегося уравнения смешанного типа в прямоугольной области* // Дифференциальные уравнения. – 2010. – Т. 46. – № 8. – С. 1205–1208.

3. Бурханова (Хаджи) И. А. Критерий единственности решения обратной задачи уравнения смешанного типа с оператором типа Чаплыгина // Дифф. уравнения и смежные проблемы: Труды межд. научн. конф.: В 2 т. Уфа: РИЦ БашГУ, 2013. – Т. 1. – С. 140–144.

4. Сабитова Ю. К. *Краевая задача с нелокальным интегральным условием для уравнений смешанного типа с вырождением на переходной линии* // Матем. заметки. – 2015. – Т. 98. – Вып. 3. – С. 393–406.

5. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. *Обратная задача для вырождающегося параболо- гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием* // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 1. – С. 46–59.

6. Мартемьянова Н. В. *Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором типа Чаплыгина* // Совр. пробл. матем. физики и выч. матем.: Межд. конф. – М.: Издательский отдел факультета ВМК МГУ им. М.В. Ломоносова; МАКС Пресс, 2016. – С.168.

7. Мартемьянова Н. В. *Необходимое и достаточное условие единственности решения нелокальной обратной задачи для уравнения типа Чаплыгина* // Матем. моделирование процессов и систем: Матер. V Всеросс. научно-практ. конф. – Ч. III. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2016. – С. 19–23.

8. Мартемьянова Н. В. *Нелокальная обратная задача для уравнения смешанного типа с оператором Чаплыгина* // Современная математика и ее приложения: Матер. Межд. научно-практ. конф. – Ч. II. – Стерлитамак: Стерлитамакский филиал БашГУ, 2017. – С. 66–69.

9. Сабитов К. Б *Задача Дирихле для уравнений смешанного типа в прямоугольной области* // Докл. РАН. – 2007. – Т. 413(1). – С. 23–26.

10. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики* – М.: ФИЗМАТЛИТ, 2013. – 352 с.

CONSTRUCTION OF GENERAL SOLUTION OF SECOND ORDER ORDINARY DIFFERENTIAL EQUATION WITH A VARIABLE CHANGING SIGN COEFFICIENT

N.V. Martemyanova

While solving inverse problems for a degenerate mixed type equation we obtain a inhomogeneous ordinary equation with a variable changing sign coefficient. We construct general solution of this equation and prove some its properties.

Keywords: inhomogeneous ordinary differential equation with a variable changing sign coefficient, general solution, particular solution.

УДК 517.53

ОБ НАИЛУЧШЕМ ПРИБЛИЖЕНИИ СТЕПЕННОЙ ФУНКЦИИ В ПРОСТРАНСТВЕ БЕРГМАНА

В.Р. Мисюк[1]

1 *misiuk@grsu.by*; Гродненский государственный университет им. Янки Купалы, г. Гродно, Беларусь

В статье рассматривается вопрос о наилучшем приближении степенной функции в пространстве Бергмана.

Ключевые слова: наилучшее полиномиальное приближение, прямые теоремы, пространство Бергмана.

Пусть S – спрямляемая кривая Жордана (простая или замкнутая) в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Для $0 < p \le \infty$ через $L_p(S)$ обозначим пространство Лебега комплекснозначных на S относительно линейной меры Лебега с обычной квазинормой $\|L_p(S)\|$ (нормой при $1 \le p \le \infty$). Именно, $f \in L_p(S)$, если

$$\|f\|_p = \|f\|_{L_p(S)} := \left(\int\limits_D \left|f(\xi)\right|^p |d\xi| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \text{при} \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty(S)} := \sup_{\xi \in S} \left|f(\xi)\right| < \infty \qquad \text{при} \quad p = \infty.$$

Согласно определению [1-3], функция f, аналитическая в круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$, принадлежит пространству Харди H_p, $0 < p \le \infty$, если конечна квазинорма

$$\|f\|_{H_p} = \sup_{r \in (0,1)} \|f\|_{L_p(S_r)},$$

где S_r – окружность $|\xi| = r$. Как известно, почти для всех $\xi \in D$ функция $f(z)$, $z \in D$ имеет некасательные предельные значения. Таким образом, функция $f \in H_p$ определена не только в D, но и почти всюду на ∂D – границе D. При этом оказывается, что $\|f\|_{H_p} = \|f\|_{L_p(\partial D)}$.

Пусть $\mathscr{P}_n$ – множество алгебраических многочленов степени не выше n. Для функции $f \in H_p$ введём

$$E_n(f)_p = \inf_{P_n \in \mathscr{P}_n} \|f - P_n\|_{H_p}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots$$

— наилучшее приближение f посредством множества $\mathscr{P}_n$.

В теории полиномиальных приближений хорошо известна следующая импликация, так называемая теорема типа Джексона:

$$f^{(s)} \in H_p \implies E_n(f)_p \leqslant \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{H_p} \qquad \text{при} \qquad n \geqslant s, \tag{1}$$

где $c > 0$ и зависит лишь от p и s, а $f^{(s)}$ – s-ая производная ($s \in \mathbb{N}$) функции f.

В случае $1 \leq p \leq \infty$ соотношение (1) доказывается аналогично теореме Джексона для периодических функций [5]. Далее, Э.А. Стороженко [4] приводит аналог первой теоремы Джексона для пространств H_p при $0 < p < 1$ для модулей непрерывности первого порядка и проводит обобщение на случай модулей гладкости произвольных порядков [6].

Для $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Z}$ введем в рассмотрение функцию $f_\alpha(z) = (1 - z)^\alpha$, где главная ветвь берется в области $\mathbb{C} \setminus [1, \infty]$. Из импликации (1) немедленно получаем, что при $n \to \infty$ имеет место слабая эквивалентность

$$E_n(f_\alpha)_p \approx n^{-\alpha - \frac{1}{p}}, \qquad \alpha \in \left(-\frac{1}{p}, \infty\right) \setminus \mathbb{Z}. \tag{2}$$

На случай плоской меры Лебега достаточно глубокие исследования в данном направлении не проводились. Однако можно отметить, что в 1961 г. С.Я. Альпер [7] изучал вопросы, связанные с приближения аналитических функций в среднем, в частности, им был получен аналог неравенства (1) при условиях $s = 0$, $p \geq 1$. Обобщения (1) на другие значения параметра на случай плоской меры были получены автором [8].

Пусть m_2 – плоская мера Лебега. Через $A_p = A_p(D)$, $0 < p \leqslant \infty$, обозначим пространство Бегмана[1] аналитических функций f в D, наделённых конечной квазинормой $\|f\|_{A_p} = \|f\|_{L_p(D)}$ (нормой при $1 \leqslant p \leqslant \infty$) относительно плоской меры Лебега. Именно,

$$\|f\|_{A_p} = \|f\|_{L_p(D)} := \left(\int\limits_D \left| f(\xi) \right|^p dm_2(\xi) \right)^{\frac{1}{p}} < \infty \qquad \text{при} \quad 0 < p < \infty,$$

$$\|f\|_{A_\infty} = \|f\|_{L_\infty(D)} := \sup_{\xi \in D} \left| f(\xi) \right| < \infty \qquad \text{при} \quad p = \infty.$$

Ясно, что пространства H_∞ и A_∞ совпадают. Поэтому далее мы рассматриваем случай $0 < p < \infty$. Для $f \in A_p(D)$ введём

$$E_n(f)_{A_p} = \inf_{P_n \in \mathscr{P}_n} \|f - P_n\|_{A_p(D)}, \qquad n = 0, 1, 2, \ldots,$$

1 Иногда это пространство называют *пространством М.М. Джрбашяна*.

— наилучшее приближение функции f в пространстве A_p посредством множества $\mathscr{P}_n$.

Следующий результат [8] можно рассматривать как соответствующую теорему типа Джексона для пространства A_p: *если* $s \in \mathbb{N}$ *и* $f^{(s)} \in A_p(D)$, $0 < p < \infty$, *то*

$$E_n(f)_{A_p} \leqslant \frac{c}{n^s} \left\| f^{(s)} \right\|_{A_p}, \qquad n = s, s+1, \dots, \tag{3}$$

где $c > 0$ *и не зависит от* f *и* n.

Исходя из соотношения (3), нами показано, что слабая эквивалентность (2) при $n \to \infty$ примет соответственно вид

$$E_n(f_\alpha)_p \approx n^{-\alpha-\frac{2}{p}}, \qquad \alpha \in \left(-\frac{2}{p}, \infty\right) \setminus \mathbb{Z}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке государственной программы научных исследований "Конвергенция - 2020".

Литература

1. Привалов И. И. *Граничные свойства аналитических функций*. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1950. – 431 с.

2. Кусис П. *Введение в теорию пространств* H^p. – М.: Мир, 1984. – 368 с.

3. Гарнетт Дж. *Ограниченные аналитические функции*. – М.: Мир, 1984.. – 469 с.

4. Стороженко Э. А. *Приближение функций класса* H_p, $0 < p \leq 1$ // Мат. сборник. – 1978. – Т. 105(147). – № 4. – С. 600–621.

5. Тиман А. Ф. *Теория приближений функций действительного переменного*. – М.: ГИФМЛ, 1960. – 624 с.

6. Стороженко Э. А. *О приближении функций класса* H_p *(*$0 < p \leq 1$*)* // Сообщ. АН Груз. ССР. – 1977. – Т. 88. – № 4. – С. 45–48.

7. Альпер С. Я. *О приближении аналитических функций в среднем по области* // Докл. АН СССР. – 1961. – Т. 136. – № 2. – С. 265–268.

8. Мисюк В. Р. *Теоремы типа Джексона и Бернштейна для наилучших полиномиальных приближений в пространстве Бергмана* // Веснік ГрДУ імя Я. Купалы. Сер.2. Фізыка. Матэматыка. Інфарматыка. – 2006. – № 1. – С. 58–62.

ON THE BEST APPROXIMATION OF A POWER FUNCTION IN THE BERGMAN SPACE

V.R. Misiuk

In this paper we consider the best approximation of a power function in the Bergman space.

Keywords: best polynomial approximation, direct theorems, Bergman space.

УДК 517.956

ЗАДАЧА ДАРБУ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ БИАНКИ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА

А.Н. Миронов[1]

1 *miro73@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Елабужский институт

Доказаны существование и единственность решения задачи Дарбу. Построено решение задачи Дарбу в терминах функции, аналогичной функции Римана-Адамара.

Ключевые слова: уравнение Бианки, задача Дарбу, функция Римана-Адамара.

Задача Дарбу для гиперболического уравнения второго порядка с двумя независимыми переменными рассматривалась многими авторами. Можно указать работы [1, с. 228–233], [2]–[7].

Здесь изучается существование и единственность решения задачи Дарбу, а также вопрос о построении соответствующей функции Римана-Адамара для уравнения Бианки третьего порядка

$$u_{xyz} + \sum_{\substack{i=0 \\ i+j+k<3}}^{1} \sum_{j=0}^{1} \sum_{k=0}^{1} a_{ijk}(x,y,z)\, u_{x^i y^j z^k} = f(x,y,z), \tag{1}$$

которое рассмотрено, например, в работах [8]–[13]. При этом в [9], [11] рассмотрены постановки задач типа Дарбу для некоторых частных случаев уравнения Бианки.

Определим класс функций $C^{(k,l,m)}$ следующим образом: функция $u \in C^{(k_1,k_2,k_3)}$, если существуют непрерывные производные $\dfrac{\partial^{r_1+r_2+r_3} u}{\partial x^{r_1} \partial y^{r_2} \partial z^{r_3}}$ $(r_i = 0, \ldots, k_i)$. Решение класса $C^{(1,1,1)}$ назовем регулярным. Пусть D — область, ограниченная плоскостями $x = 0$, $y = 0$, $y = y_0 > 0$, $z = x$, $z = z_0 > 0$. Считаем, что коэффициенты уравнения (1) удовлетворяют условиям гладкости $a_{ijk} \in C^{(i,j,k)}(\overline{D})$. Обозначим через X, Y, T грани D при $x = 0$, $y = 0$, $z = x$ соответственно.

Задача Дарбу. *В области D найти регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее граничным условиям*

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \quad u|_{\overline{T}} = \psi(x,y), \\ \varphi_1(y,0) = \psi(0,y),\ \varphi_2(x,x) = \psi(x,0),\ \varphi_1(0,z) = \varphi_2(0,z), \\ \varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y}), \quad \psi \in C^{(1,1)}(\overline{T}). \end{gathered} \tag{2}$$

С использованием известную формулу решения задачи Гурса для уравнения Бианки [12, с. 28] как представление произвольного регулярного решения уравнения (1), получено интегральное уравнение Вольтерры второго рода для определения условия Гурса $u(x,y,z_0)$, из существования и единственности решения которого следует существование и единственность решения задачи Дарбу (1)–(2).

Задача Гурса. *Найти в параллелепипеде $G = \{x_1 < x < x_2,\ y_1 < y < y_2,\ z_1 < z < z_2\}$ регулярное решение уравнения (1), удовлетворяющее условиям*

$$\begin{gathered} u|_{\overline{X}} = \varphi_1(y,z), \quad u|_{\overline{Y}} = \varphi_2(x,z), \quad u|_{\overline{Z}} = \varphi_3(x,y), \\ \varphi_1(y,z_1) = \varphi_3(x_1,y),\ \varphi_2(x,z_1) = \varphi_3(x,y_1),\ \varphi_1(x_1,z) = \varphi_2(x_1,z), \\ \varphi_1 \in C^{(1,1)}(\overline{X_1}), \quad \varphi_2 \in C^{(1,1)}(\overline{Y_1}), \quad \varphi_3 \in C^{(1,1)}(\overline{Z_1}). \end{gathered}$$

Здесь X_1, Y_1, Z_1 — грани G при $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$.

Решение задачи Гурса существует и единственно [12, с. 25–26].

Кратко опишем построение формулы решения задачи Гурса [8], [12, с. 28]. Рассмотрим интегральное уравнение

$$v(x,y,z) - \int_\zeta^z a_{110}(x,y,\gamma)v(x,y,\gamma)d\gamma -$$
$$- \int_\xi^x a_{011}(\alpha,y,z)v(\alpha,y,z)d\alpha - \int_\eta^y a_{101}(x,\beta,z)v(x,\beta,z)d\beta +$$
$$+ \int_\eta^y\int_\zeta^z a_{100}(x,\beta,\gamma)v(x,\beta,\gamma)d\gamma d\beta + \int_\xi^x\int_\zeta^z a_{010}(\alpha,y,\gamma)v(\alpha,y,\gamma)d\gamma d\alpha +$$
$$+ \int_\xi^x\int_\eta^y a_{001}(\alpha,\beta,z)v(\alpha,\beta,z)d\beta d\alpha -$$
$$- \int_\xi^x\int_\eta^y\int_\zeta^z a_{000}(\alpha,\beta,\gamma)v(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha = 1. \qquad (3)$$

Решение v указанного уравнения существует и единственно, это решение называют функцией Римана для (1) [8], [9]. Очевидно, v зависит от ξ, η, ζ. Если нужно подчеркнуть эту зависимость, пишут $v = R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$.

Непосредственным вычислением можно убедиться в справедливости тождества

$$(uR)_{xyz} \equiv RL(u) + ([R_z - a_{110}R]u)_{xy} + ([R_x - a_{011}R]u)_{yz} +$$
$$+ ([R_y - a_{101}R]u)_{xz} - ([R_{yz} - (a_{110}R)_y - (a_{101}R)_z + a_{100}R]u)_x -$$
$$- ([R_{xz} - (a_{110}R)_x - (a_{011}R)_z + a_{010}R]u)_y - ([R_{xy} - (a_{011}R)_y - (a_{101}R)_x + a_{001}R]u)_z, \qquad (4)$$

где a_{ijk} зависят от (x,y,z), $R = R(x,y,z,\xi,\eta,\zeta)$ — функция Римана, а $u(x,y,z)$ — любая функция из $C^{(1,1,1)}$.

Введем обозначения

$$A_{100} = R_x - a_{011}R, \quad A_{010} = R_y - a_{101}R, \quad A_{001} = R_z - a_{110}R,$$
$$A_{110} = R_{xy} - (a_{011}R)_y - (a_{101}R)_x + a_{001}R,$$
$$A_{101} = R_{xz} - (a_{110}R)_x - (a_{011}R)_z + a_{010}R,$$
$$A_{011} = R_{yz} - (a_{110}R)_y - (a_{101}R)_z + a_{100}R.$$

Путем дифференцирования уравнения (3) нетрудно убедиться в справедливости тождеств

$$A_{100} \equiv 0 \text{ при } y = \eta,\ z = \zeta; \qquad A_{010} \equiv 0 \text{ при } x = \xi,\ z = \zeta;$$
$$A_{001} \equiv 0 \text{ при } x = \xi,\ y = \eta; \qquad A_{110} \equiv 0 \text{ при } z = \zeta; \qquad (5)$$
$$A_{101} \equiv 0 \text{ при } y = \eta; \qquad A_{011} \equiv 0 \text{ при } x = \xi.$$

Считая в тождестве (4) функцию $u(x,y,z)$ решением уравнения (1), меняя ролями переменные (x,ξ), (y,η), (z,ζ) и вычисляя затем тройной интеграл по ξ, η, ζ в пределах $x_1 < \xi < x$, $y_1 < \eta < y$, $z_1 < \zeta < z$ с учетом (5), получим

$$u(x,y,z) = R(x,y,z_1)\varphi_3(x,y) + R(x,y_1,z)\varphi_2(x,z) +$$

$$+R(x_1,y,z)\varphi_1(y,z)-R(x,y_1,z_1)\varphi_3(x,y_1)-$$

$$-R(x_1,y,z_1)\varphi_3(x_1,y)-R(x_1,y_1,z)\varphi_2(x_1,z)+R(x_1,y_1,z_1)\varphi_1(y_1,z_1)+$$

$$+\int_{x_1}^{x}[A_{100}(\alpha,y_1,z_1)\varphi_3(\alpha,y_1)-A_{100}(\alpha,y,z_1)\varphi_3(\alpha,y)-A_{100}(\alpha,y_1,z)\varphi_2(\alpha,z)]d\alpha+$$

$$+\int_{y_1}^{y}[A_{010}(x_1,\beta,y_1)\varphi_3(x_1,\beta)-A_{010}(x,\beta,z_1)\varphi_3(x,\beta)-A_{010}(x_1,\beta,z)\varphi_1(\beta,z)]d\beta+$$

$$+\int_{z_1}^{z}[A_{001}(x_1,y_1,\gamma)\varphi_2(y_1,\gamma)-A_{001}(x,y_1,\gamma)\varphi_2(x,\gamma)-A_{001}(x_1,y,\gamma)\varphi_1(y,\gamma)]d\gamma+$$

$$+\int_{x_1}^{x}\int_{y_1}^{y}A_{110}(\alpha,\beta,z_1)\varphi_3(\alpha,\beta)d\beta d\alpha+\int_{x_1}^{x}\int_{z_1}^{z}A_{101}(\alpha,y_0,\gamma)\varphi_2(\alpha,\gamma)d\gamma d\alpha+$$

$$+\int_{y_1}^{y}\int_{z_1}^{z}A_{011}(x_1,\beta,\gamma)\varphi_1(\beta,\gamma)d\gamma d\beta+ \tag{6}$$

$$+\int_{x_1}^{x}\int_{y_1}^{y}\int_{z_1}^{z}R(\alpha,\beta,\gamma)f(\alpha,\beta,\gamma)d\gamma d\beta d\alpha.$$

Здесь у R, A_{ijk} указана только первая тройка аргументов, вторая всегда есть (x,y,z).

Докажем теперь существование и единственность решения задачи Дарбу путем ее редукции к задаче Гурса в области D: найти регулярное решение уравнения (1) в D по условиям на плоскостях $x=0$, $y=0$, $z=z_0$. Для этого по данным задачи Дарбу надо однозначно определить недостающее условие задачи Гурса, то есть функцию $u(x,y,z_0)$.

Положим в формуле (6) $x_1=0$, $y_1=0$, $z_1=z_0$, $z=x$. Тогда левая часть формулы (6) $u(x,y,z)$ обращается в $\psi(x,y)$, а сама формула (6) записывается в виде

$$R(x,y,z_0)u(x,y,z_0)-\int_0^x A_{100}(\alpha,y,z_0)u(\alpha,y,z_0)d\alpha-$$

$$-\int_0^y A_{010}(x,\beta,z_0)u(x,\beta,z_0)d\beta+\int_0^x\int_0^y A_{110}(\alpha,\beta,z_0)u(\alpha,\beta,z_0)d\beta d\alpha=F, \tag{7}$$

где правая часть F — известная функция (выражающаяся через $\varphi_1(y,z)$, $\varphi_2(x,z)$). Уравнение (7) — интегральное уравнение Вольтерры второго рода, решение которого $u(x,y,z_0)$ существует и единственно [12, с. 20–25]. Действительно, из интегрального уравнения (3) для функции Римана следует

$$R(x,y,z,x,y,\zeta)=\exp\Big(\int_\zeta^z a_{110}(x,y,\gamma)d\gamma\Big)>0.$$

Таким образом, задача Дарбу однозначно редуцируется к задаче Гурса, то есть решение задачи Дарбу существует и единственно.

Далее построена формула решения задачи Дарбу для произвольного уравнения (1) в терминах функции, аналогичной функции Римана-Адамара [7].

Литература

1. Бицадзе А. В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.

2. Моисеев Е. И. *Об одном интегральном представлении решения задачи Дарбу* // Матем. заметки. – 1982. – Т. 32. – Вып. 2. – С. 175–186.

3. Моисеев Е. И. *О приближении классического решения задачи Дарбу гладкими решениями* // Дифференц. уравнения. – 1984. – Т. 20. – № 1. – С. 73–87.

4. Моисеев Е. И. *Уравнения смешанного типа со спектральным параметром.* – М.: Изд-во МГУ, 1988. – 150 с.

5. Сабитов К. Б. *Построение в явном виде решений задач Дарбу для телеграфного уравнения и их применение при обращении интегральных уравнений. I* // Дифференц. уравнения. – 1990. – Т. 26. – № 6. – С. 1023–1032.

6. Сабитов К. Б., Шарафутдинова Г. Г. *Задачи Коши–Гурса для вырождающегося гиперболического уравнения* // Изв. вузов. Математика. – 2003. – № 5. – С. 21–29.

7. Джохадзе О. М., Харибегашвили С. С. *Некоторые свойства функций Римана и Римана-Адамара для линейных гиперболических уравнений второго порядка и их приложения* // Дифференц. уравнения. – 2011. – Т. 47. – № 4. – С. 477–492.

8. Жегалов В. И. *Трехмерный аналог задачи Гурса* // Неклассические уравнения и уравнения смешанного типа. Новосибирск, ИМ СО АН СССР. – 1990. – С. 94–98.

9. Волкодавов В. Ф., Николаев Н. Я., Быстрова О. К., Захаров В. Н. *Функции Римана для некоторых дифференциальных уравнений в n-мерном евклидовом пространстве и их применения.* – Самара: Самарский университет, 1995. – 76 с.

10. Севастьянов В. А. *Метод Римана для трехмерного гиперболического уравнения третьего порядка* // Изв. вузов. Математика. – 1997. – № 5. – С. 69–73.

11. Джохадзе О. М. *Задача типа Дарбу в трехгранном угле для уравнения третьего порядка гиперболического типа* // Изв. вузов. Математика. – 1999. – № 3. – С. 22–30.

12. Жегалов В. И., Миронов А. Н. *Дифференциальные уравнения со старшими частными производными.* – Казань: Изд-во Казанск. матем. общ-ва, 2001. – 226 с.

13. Миронов А. Н. *Некоторые классы уравнений Бианки третьего порядка* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94. – Вып. 3. – С. 389–400.

THE DARBOUX PROBLEM FOR THE BIANCHI EQUATION OF THIRD ORDER

A.N. Mironov

We prove existence and uniqueness of solutions of the Darboux problem. We construct a solution of the problem in terms of an analog of the Riemann-Hadamard function.

Keywords: Bianchi equation, Darboux problem, Riemann-Hadamard function.

УДК 517.955

КОРРЕКТНО РАЗРЕШИМЫЕ ЗАДАЧИ ДЛЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

В.С. Мокейчев[1], А.М. Сидоров[2]

1 *valery.mokeychev@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *anatoly.sidorov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Используя теорию φ_B-распределений, мы рассматриваем задачу Коши для линейного дифференциального уравнения в частных производных.

Ключевые слова: линейное дифференциальное уравнение в частных производных, задача Коши, φ_B – распределение.

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$P(t,u,D)u = D_t^N u + \sum_{j=1}^{M} \sum_{\alpha\in\Phi} C_{\alpha,j}(t) D_t^j D_x^\alpha u = f(t,x), \tag{1}$$

где $t \in \mathrm{R}$, $x \in \mathrm{R}^n$, D_y – символ дифференцирования по y, Ф – конечное множество мультииндексов, $C_{\alpha,j}(t)$ – квадратная матрица, не зависящая от x и u, $f(t,x)$ – известная функция. не зависящая от u.

Если (1) описывает математическую модель динамического процесса, то решение должно удовлетворять начальным и краевым условиям. При этом получаемая задача должна быть корректно поставленной по Адамару [1].

Пусть

$$f(t,x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} f_k(t) \exp\left(\frac{ikx}{T}\right), \tag{2}$$

где $k = (k_1,\dots,k_n)$ – вектор с целочисленными координатами, $f_k(t)$ – известная функция, не зависящая от x и принадлежащая некоторому банаховому пространству B, $\frac{ikx}{T} = \frac{ik_1x_1}{T_1} + \dots + \frac{ik_nx_n}{T_n}$, $T_j > 0$, $x = (x_1,\dots,x_n) \in \mathrm{R}^n$, i – мнимая единица. В [2], [3] было введено понятие φ_B-распределений, т. е. φ-распределений со значениями в заданном банаховом пространстве B. Эти распределения оказались весьма удобными в том числе и при решении задач для линейных дифференциальных уравнений в частных производных.

Было показано, что пространство φ_B-распределений является наиболее широким пространством, в котором справедливо равенство (2). Решение u уравнения (1) ищется в пространстве φ_B-распределений, т. е.

$$u = \sum_{|k|=0}^{\infty} u_k(t) \exp\left(\frac{ikx}{T}\right). \tag{3}$$

Если $u_k(t) \in C^N_{loc}(\mathrm{R})$, то $u_t^{(m)} = \sum_{|k|=0}^{\infty} u_k^{(m)}(t) \exp\left(\frac{ikx}{T}\right)$, $m = 0,\dots,N$.

Решение u должно удовлетворять условиям Коши

$$u_t^{(m)}(0,x) = g_m(x), \quad m = 0,\dots,N-1, \tag{4}$$

в которых $g_m(x)$ – известные φ_{C^n}-распределения, т. е.

$$g_m(x) = \sum_{|k|=0}^{\infty} g_{m,k} \exp\left(\frac{ikx}{T}\right), \quad g_{m,k} \in \mathrm{C}^n.$$

Определение. *φ_B – распределение и (3) называется решением задачи (1), (4), если*

$$\sum_{|k|=0}^{\infty} P(t,x,D)\left(u_k(t)\exp\left(\frac{ikx}{T}\right)\right) = f(t,x)$$

и выполнены условия (4).

Теорема. *Если $C_{\alpha,j}(t) \in L^1_{loc}(R)$, то задача (1), (4) корректно разрешима по Адамару в пространстве φ_B-распределений.*

Литература

1. Hadamard J. *Le problème de Cauchy et les équattions aux dérivées partielles linéares hyperbaliques.* – Paris: Hermann, 1932. – 542 p.

2. Mokeichev V. S., Sidorov A. M. *On an expansiion in the series by given system of elements* // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Казанский госуниверситет. – 2004. – Вып. 25. – С. 163–167.

3. Мокейчев В. С. *О разложении в ряды по заданной системе элементов* // Исследования по прикладной математике и информатике. – Казань: Изд-во Казанского федерального университета. – 2011. – Вып. 27. – С. 144–152.

CORRECTLY SOLVABLE PROBLEMS IN LINEAR PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS

V.S. Mokeychev, A.M. Sidorov

By use of the theory of φ_B – distributions we consider Cauchy's problem for linear partial differential equations.

Keywords: linear partial differential equation, Cauchy's problem, φ_B-distribution.

УДК 514.822

НЕРАВЕНСТВА, ВКЛЮЧАЮЩИЕ ВКЛЮЧАЮЩИЕ ДРОБНЫЕ ИНТЕГРАЛЫ ФУНКЦИИ И ЕЕ ПРОИЗВОДНУЮ

Р.Г. Насибуллин[1]

1 *nasibullinramil@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Доказаны новые неравенства, включающие дробные интегралы функции и ее производную. Предварительно мы получаем нижние оценки весовых норм производной через выражения, зависящие от дробных интегралов Римана-Лиувилля.

Ключевые слова: неравенство Харди, дробный интеграл Римана-Лиувилля, функция Бесселя.

Пусть $\rho > 0$ и абсолютно непрерывная функция $u : [0, \rho] \to \mathbb{R}$ удовлетворяет граничному условию $u(0) = 0$ и $u \not\equiv 0$.

В статье [1] Ф.Г. Авхадиев и Р.Г. Насибуллин показали, что для таких функций u при условиях $r \in [1, \infty), s \in (-\infty, r)$ и $u'/t^{r-1} \in L^1(0,1)$ выполнено неравенство

$$\int_0^\rho \frac{|u(t)|}{t^s} dt < M(s, r)\rho^{r-s} \int_0^\rho \frac{|u'(t)|}{t^{r-1}} dt, \tag{1}$$

где

$$M(s, r) := \begin{cases} (1-s)^{-1}, & \text{если } r = 1; \\ (r-1)^{-1} e^{-1}, & \text{если } s = 1; \\ (r-s)^{-1} ((r-1)/(r-s))^{(r-1)/(1-s)}, & \text{если } r \neq 1, s \neq 1. \end{cases}$$

Постоянная $M(s, r)$ является точной для всех допустимых s и r, т. е. не может быть уменьшена без дополнительных ограничений на функцию u.

С использованием неравенства Гельдера, из неравенства (1) при $s < 1$ и $p \geq 1$ несложно получить его L^p-аналог, а именно, следующее соотношение

$$\int_0^\rho \frac{|u(t)|^p}{t^s} dt \leq \rho^{p(1-s)} \left(\frac{p}{1-s}\right)^p \int_0^\rho \frac{|u'(t)|^p}{t^{s(1-p)}} dt. \tag{2}$$

Константа в неравенстве (2) является неулучшаемой только при $p = 1$ (см. подробнее [1]). Это легко заметить, если сравнить (2) с точным неравенством из статьи [2].

Отметим, что константа в L^p-аналоге неравенства (2) при $s = 1$ также не является оптимальной в силу точного неравенства

$$\int_0^1 \frac{|u(t)|^2}{t} dt \leq \frac{4}{j_0^2} \int_0^1 |u'(t)|^2 dt, \tag{3}$$

в котором равенство достигается на функции $u(t) = C'\sqrt{t} J_1(j_0\sqrt{t})$, причем $j_0 \approx 2.404826$ — это наименьший положительный корень функции Бесселя нулевого порядка J_0, J_1 — функция Бесселя первого порядка. Напомним, что функции Бесселя порядка ν определяется следующим образом

$$J_\nu(t) = \sum_{k=0}^\infty \frac{(-1)^k t^{2k+\nu}}{2^{2k+\nu} k! \Gamma(k+1+\nu)}, t > 0, \nu \geq 0.$$

Здесь и далее через Γ обозначена гамма-функция Эйлера, т.е. $\Gamma(\alpha) = \int_0^\infty t^{\alpha-1} e^{-t} dt$.

В данной работе мы обобщим и получим L^p-аналоги неравенства (1).

Справедливы следующие теоремы.

Теорема 1. *Пусть $\rho > 0, s \in [0, \alpha), \alpha \in (0, 1]$ и $p > 1$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $f : [0, \rho] \to \mathbb{R}$, такой что $f(0) = 0$ и $f'(x)/x^{\frac{s(1-p)}{p}} \in L^p(0, \rho)$, выполнено неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{dx}{x^s} \int_0^x \frac{|f(t)|^{p-1} |f'(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \leq \frac{\rho^{(p-1)(1-s)-\alpha+s}}{p(1-s)^{p-1}(\alpha-s)} \int_0^\rho \frac{|f'(x)|^p}{x^{s(1-p)}} dx.$$

Теорема 2. *Пусть $\rho > 0, \alpha \in (0,1], s < 1$ и $p > 1$. Тогда для любой абсолютно непрерывной функции $f : [0,\rho] \to \mathbb{R}$, такой что $f(0) = 0$ и $f' \in L^2(0,\rho)$, справедливо следующее неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{dx}{x^\alpha} \int_0^x \frac{|f(t)||f'(t)|}{(x-t)^{1-\alpha}} dt \le \left(\frac{1}{\alpha} - H(\alpha)\right) \frac{\rho^{1-s}}{2(1-s)} \int_0^\rho \frac{|f'(x)|^2}{x^{-s}} dx + \frac{2}{j_0^2} \int_0^\rho |f'(x)|^2 dx,$$

где гармоническое число

$$H(\alpha) = \int_0^1 \frac{1-t^\alpha}{1-t} dt.$$

Следствие 1. *Пусть $\rho > 0$. Тогда для абсолютно непрерывной функции $f : [0,\rho] \to \mathbb{R}$, такой что $f(0) = 0$ и $f' \in L^2(0,\rho)$, справедливо следующее точное неравенство*

$$\int_0^\rho |f'(t) f(t)| \log \frac{\rho}{t} dt \le \frac{2}{j_0^2} \int_0^\rho |f'(t)|^2 dt.$$

Следствие 2. *Наименьшим собственным числом следующей граничной задачи*

$$u''(t) = -\lambda \frac{1}{t} u(t), \quad u(0) = 0$$

является число $\lambda_0 = \frac{j_0^2}{4}$ и соответствующая этому собственному числу собственная функция

$$u_0(t) = \frac{2}{j_0} C_1 \sqrt{x} J_1\left(j_0 \sqrt{x}\right).$$

Введем следующие обозначения:

$$M_{s,r,\alpha} = \max_{0 \le t \le 1} \left\{ t^{r-s} \left(B_1(s-\alpha,\alpha) - B_{t/\rho}(s-\alpha,\alpha) \right) \right\},$$

где

$$B_z(s-\alpha,\alpha) = \int_0^z \tau^{s-\alpha-1} (1-\tau)^{\alpha-1} d\tau,$$

а через $(I_{0+}^\alpha \varphi)(x)$ обозначим дробный интеграл Римана-Лиувилля функции $\varphi \in L^1(0,\rho)$, который определяется как

$$(I_{0+}^\alpha \varphi)(x) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)} \int_0^x \frac{\varphi(t)}{(x-t)^{1-\alpha}} dt, \ x > 0,$$

где $0 < \alpha < 1$. Отметим, что полную информацию о свойствах дробных интегралов можно найти в [3], а примеры неравенств типа Харди с дробными интегралами приведены в [3], [4].

Теорема 3. *Пусть $\rho > 0, r > s$ и $\alpha \in (0,1]$. Тогда для любой функции $\varphi \in L^1(0,\rho)$ выполнено следующее неравенство*

$$\int_0^\rho \frac{\left|(I_{0+}^\alpha \varphi)(x)\right|}{x^s}\,dx \le \frac{M(s,r,\alpha)}{\Gamma(\alpha)}\rho^{r-s}\int_0^\rho \frac{|\varphi(x)|}{x^{r-\alpha}}\,dx,$$

где

$$M(s,r,\alpha) = \begin{cases} (\alpha - s)^{-1}, & \text{если } r = \alpha,\ 0 \le s < \alpha; \\ \max\limits_{x\in[0,\rho]} \{1/\alpha - H(\alpha) + \log \rho/x\}, & \text{если } r > \alpha, s = \alpha; \\ M_{s,r,\alpha}, & \text{если } r > s > \alpha, \end{cases}$$

и Γ — гамма функция Эйлера.

Отметим, что при $\alpha = 1$ теорема 1 дает как следствие неравенство (2) с меньшей постоянной, теорема 2 — неравенство (3) и из теоремы 3 как следствие получим неравенство (1).

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 17-01-00282) и за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

Литература

1. Авхадиев Ф. Г., Насибуллин Р. Г. *Неравенства типа Харди в произвольных областях с конечным внутренним радиусом* // Сиб. матем. журн. – 2014. – Т. 55. – № 2. – С. 239–250.

2. Avkhadiev F. G., Wirths K.-J. *Sharp Hardy-type inequalities with Lamb's constants* // Bull. Belg. Math. Soc. Simon Stevin. – 2011. – V. 18. – P. 723–736.

3. Самко С. Г. , Килбас А. А., Маричев О. И. *Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения*. – Минск: Наука и техника, 1987. – 688 с.

4. Stepanov V. D. *Weighted inequalities of Hardy type for Riemann-Liouville fractional integrals* // Sibirsk. Mat. Zh. –1990. – V. 31. – № 3. – P. 513–522.

INEQUALITIES INVOLVING FRACTIONAL INTEGRALS OF FUNCTION AND ITS DERIVATIVE

R.G. Nasibullin

We obtain new inequalities involving fractional integrals of function and its derivative. Preliminary, we prove lower estimates of weighted norms of the derivative through some expressions using the Riemann-Liouville fractional integrals.

Keywords: Hardy inequality, Riemann-Liouville fractional integral, Bessel function.

УДК 517.572

УСЛОВИЯ *P*-ЛИСТНОСТИ ТИПА АВХАДИЕВА–БЕККЕРА ДЛЯ ГАРМОНИЧЕСКИХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА

Р.Г. Насибуллин[1], И.К. Шафигуллин[2]

1 *rnasibul@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт механики и математики им. Н.И. Лобачевского

2 *ilnar.shafigullin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт механики и математики им. Н.И. Лобачевского

Получены достаточные условия p-листности типа Авхадиева–Беккера для гармонических отображений круга.

Ключевые слова: гармоническое отображение, условие однолистности Беккера, условие многолистности.

Пусть h и g — голоморфные функции в единичном круге $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$. Рассмотрим гармоническое отображение вида

$$f(z) = h(z) + \overline{g(z)}, \quad z \in D.$$

В теории функций комплексного переменного большое значение имеет исследование однолистности функций. В этом смысле основополагающее значение имеет результат Й. Беккера (см. напр., [1]– [3]).

Теорема 1. *Пусть $h : D \to \mathbb{C}$ — голоморфная функция, удовлетворяющая условию $h'(z) \neq 0$. Если для всех $z \in D$ имеет место неравенство*

$$(1 - |z|^2)|zh''(z)/h'(z)| \leq 1,$$

то функция h однолистна в D.

В [4] получено следующее обобщение указанного результата на случай гармонических отображений:

Теорема 2. *Пусть функции h и g являются голоморфными в единичном круге D и удовлетворяют условиям $h'(z) \neq 0$ и $|\omega(z)| < 1$ в любой точке $z \in D$, где $\omega(z) := g'(z)/h'(z)$. Если выполняется неравенство*

$$|\omega(z)| + (1 - |z|^2)\left|z\frac{h''(z)}{h'(z)}\right| \leq 1 \quad \forall z \in D,$$

то отображение $f = h + \overline{g}$ является однолистным в D.

Широкий интерес представляют не только достаточные условия однолистности, но и достаточные условия p-листности, где p — натуральное число. Будем говорить, что функция f является p-листной в некоторой области, если

а) для любого $w \in \mathbb{C}$ уравнение $f(z) = w$ имеет не более чем p корней,

б) существует $w_0 \in \mathbb{C}$ такое, что уравнение $f(z) = w_0$ имеет в точности p корней с учетом их кратности.

Для аналитических функций Ф.Г. Авхадиевым [5] получена

Теорема 3. *Пусть h аналитична при $0 < |z| < 1$, n — целое число, $n \neq 0$, и*

$$\lim_{z \to 0} z^{-n} h(z) = a_1 \in \mathbb{C} \setminus \{0\}.$$

Функция h будет $|n|$-листной в D, если

$$\sup_{z\in D}\left|\left(1-|z|^{2n}\right)\left(n-1-z\frac{h''(z)}{h'(z)}\right)\right|\le|n|,\ \ |z|<1.$$

В данной работе, следуя схеме доказательств из [6], [7], мы получили достаточные условия многолистности типа Авхадиева–Беккера для гармонических отображений круга.

Теорема 4. *Пусть $D=\{z\in\mathbb{C}:|z|<1\}$, n — целое число, $n\neq 0$. Предположим, что h и g являются голоморфными в $D\setminus\{0\}$, $h'(z)\neq 0$ и $|\omega(z)|<1$ для любого $z\in D\setminus\{0\}$, где $\omega(z)=g'(z)/h'(z)$, кроме того, h удовлетворяет условию*

$$\lim_{z\to 0} z^{-n}h(z)=1.$$

Тогда гармоническая функция $f(z)=h(z)+\overline{g(z)}$ будет $|n|$-листной в D, если

$$|n|\,|\omega(z)|+\left|\left(1-|z|^{2n}\right)\left(n-1-z\frac{h''(z)}{h'(z)}\right)\right|\le|n|,\ \ |z|<1.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 14-01-00351-а), а также при финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований и Правительства Республики Татарстан в рамках научного проекта № 15-41-02433.

Литература

1. Becker J. *Löwnersche Differentialgleichung und quasikonform fortsetzbare schlichte Functionen* // J. Reine Angew. Math. – 1972. – V. 255. – P. 23–43.

2. Becker J. *Löwnersche Differentialgleichung und Schlichtheitskriterien* // Math. Ann. – 1973. – V. 202. – P. 321–335.

3. Авхадиев Ф.Г., Аксентьев Л.А. *Основные результаты в достаточных условиях однолистности аналитических функций* // УМН. – 1975. – Т. 4, № 30. – С. 3–60.

4. Авхадиев Ф.Г., Насибуллин Р.Г., Шафигуллин И.К. *Условия однолистности типа Беккера для гармонических отображений* // Изв. вузов. Матем. – 2016. – № 11. – С. 1–6.

5. Авхадиев Ф.Г. *Функционал Минковского по областям значений логарифма производной и условия однолистности* // Тр. семин. по краев. задачам. – 1992. – № 27. – С. 3–21.

6. Авхадиев Ф.Г. *Достаточные условия однолистности квазиконформных отображений* // Матем. заметки. – 1975. – № 18 (6). – С. 793–802.

7. Авхадиев Ф.Г. *Допустимые функционалы в условиях однолистности для дифференцируемых отображений n-мерных областей* // Изв. вузов. Матем. – 1989. – № 4. – С. 3–12.

AVKHADIEV–BECKER TYPE P-VALENT CONDITIONS FOR HARMONIC MAPPINGS OF A DISC

R.G. Nasibullin, I.K. Shafigullin

We obtain Avkhadiev–Becker type p-valence conditions for locally univalent harmonic mappings defined in the unit disc.

Keywords: harmonic mapping, Becker univalence condition, multivalence condition.

УДК 519.21, 517.98

О НЕКОТОРЫХ ФУНКЦИОНАЛАХ НА ПРОСТРАНСТВЕ КОНФИГУРАЦИЙ, АССОЦИИРОВАННЫХ СО СПЕЦИФИКАЦИЯМИ СЛУЧАЙНЫХ ПОЛЕЙ

Б.С. Нахапетян[1], Л.А. Хачатрян[2]

1 *nahapet@instmath.sci.am*; Институт математики Национальной академии наук Армении
2 *linda@instmath.sci.am*; Институт математики Национальной академии наук Армении, Российско–Армянский (Славянский) университет

В докладе показывается, что задача описания случайных полей в терминах подсистемы спецификации, состоящей только из одноточечных распределений вероятностей (проблема Добрушина), сводится к вопросу продолжения некоторого функционала, определенного на парах конфигураций, отличающихся только в одной точке, на все пространство пар конфигураций. Такое продолжение возможно при выполнении определенных условий симметрии функционала.

Ключевые слова: спецификация, случайные поля.

Основополагающую роль в вопросах описания случайных полей имеет введенное Р. Добрушиным ([1,2]) понятие спецификации — согласованной системы конечномерных распределений с бесконечными граничными условиями. В этих работах были сформулированы условия, при которых случайное поле с заданной спецификацией существует, а также условия, при которых оно единственно. При этом существует определенная дисгармония в полученных Добрушиным условиях существования и единственности случайного поля, совместимого с заданной спецификацией (говорят, что случайное поле совместимо со спецификацией Q, если его условное распределение почти всюду совпадает с Q). Дело в том, что условие единственности случайного поля накладывает ограничения только на подсистему одноточечных распределений спецификации, в то время как условие существования накладывает ограничения на все ее элементы.

В связи с этим Добрушиным была высказана гипотеза о том, что описание случайных полей может быть дано в терминах подсистемы спецификации, состоящей только из одноточечных распределений вероятностей (проблема Добрушина). Данная задача была решена в работах [3, 4] С. Дашяна и Б. Нахапетяна, где были найдены необходимые и достаточные условия (условия согласованности), при которых система одноточечных распределений является подсистемой некоторой спецификации.

В настоящей работе показывается, что проблема Добрушина сводится к вопросу продолжения некоторого функционала, определенного на парах конфигураций, отличающихся только в одной точке, на все пространство пар конфигураций ([5, 6]). Указанный подход может быть применен при исследовании свойств случайных полей (слабая зависимость компонент, единственность), а также к некоторым задачам математической статистической физики, в частности, к вопросу описания гиббсовских случайных полей.

Введем необходимые обозначения. Пусть $X \subset \mathbb{R}$ — некоторое непустое конечное множество, $\mathbb{Z}^d$ — d-мерная целочисленная решетка (совокупность d-мерных век-

торов с целочисленными компонентами), $d \geq 1$, и $W = \{V \subset \mathbb{Z}^d, |V| < \infty\}$ — множество всех конечных подмножеств $\mathbb{Z}^d$. При обозначении одноточечных множеств $\{t\}$, $t \in \mathbb{Z}^d$, в некоторых случаях фигурные скобки будут опускаться. Далее, обозначим через $X^S = \{(x_t, t \in S)\}$, $x_t \in X$, множество конфигураций на S, $S \subset \mathbb{Z}^d$, т.е. совокупность всех функций, определенных на S со значениями в X. Для любых $S, T \subset \mathbb{Z}^d$, таких что $S \cap T = \text{ffl}$, и любых $x \in X^S$ и $y \in X^T$ через xy будем обозначать конкатенацию x и y, т.е. такую конфигурацию на $S \cup T$, которая совпадает с x на S и с y на T. Для $S \subset T$, $x \in X^T$, запись x_S означает сужение конфигурации x на S.

Совокупность функций $\mathrm{Q} = \left\{q_V^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}, V \in W\right\}$ на пространстве конфигураций назовем спецификацией, если:

1. для каждого $V \in W$ и конфигурации $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$ совокупность $\{q_V^{\bar{x}}(x), x \in X^V\}$ является распределением вероятностей на X^V (с бесконечными граничными условиями $\bar{x}$), т.е. $q_V^{\bar{x}}(x) \geq 0$ для всех $x \in X^V$ и $\sum\limits_{x \in X^V} q_V^{\bar{x}}(x) = 1$; 2. элементы Q удовлетворяют следующим условиям согласованности: для всех $I \subset V \in W$, $x \in X^I$, $y \in X^{V \setminus I}$ и $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$

$$q_V^{\bar{x}}(xy) = q_I^{\bar{x}y}(x) \sum_{z \in X^I} q_V^{\bar{x}}(zy).$$

По заданной спецификации Q однозначным образом определяется ее одноточечная подсистема $\mathrm{Q}^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\} \subset \mathrm{Q}$. Решение обратной задачи — восстановление спецификации Q по ее одноточечной подсистеме $\mathrm{Q}^{(1)}$ — было получено в работе [4], в которой указаны необходимые и достаточные условия (условия согласованности), при которых система одноточечных распределений $\mathrm{Q}^{(1)}$ является подсистемой некоторой спецификации Q, а также приводится формула восстановления элементов спецификации Q по элементам $\mathrm{Q}^{(1)}$.

Теорема 1. *Пусть* $Q^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus t}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ *— совокупность одноточечных условных распределений вероятностей с бесконечными граничными условиями. Для того чтобы совокупность* $Q^{(1)}$ *была подсистемой некоторой спецификации, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия согласованности: для любых* $t, s \in \mathbb{Z}^d$, $x, u \in X^{\{t\}}$, $y, v \in X^{\{s\}}$ *и* $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t,s\}}$

$$q_t^{\bar{x}y}(x) q_s^{\bar{x}x}(v) q_t^{\bar{x}v}(u) q_s^{\bar{x}u}(y) = q_s^{\bar{x}x}(y) q_t^{\bar{x}y}(u) q_s^{\bar{x}u}(v) q_t^{\bar{x}v}(x). \tag{1}$$

Соответствующая спецификация Q *восстанавливается по* $\mathrm{Q}^{(1)}$ *однозначно, причем для всех* $V \in W$, $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$ *и* $x \in X^V$

$$q_V^{\bar{x}}(x) = \frac{1}{Z} \cdot \frac{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,\ldots,t_n\}}}(x_{t_1}) q_{t_2}^{\bar{x}x_{t_1}u_{\{t_3,\ldots,t_n\}}}(x_{t_2}) \cdot \ldots \cdot q_{t_n}^{\bar{x}x_{\{t_1,\ldots,t_{n-1}\}}}(x_{t_n})}{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,\ldots,t_n\}}}(u_{t_1}) q_{t_2}^{\bar{x}x_{t_1}u_{\{t_3,\ldots,t_n\}}}(u_{t_2}) \cdot \ldots \cdot q_{t_n}^{\bar{x}x_{\{t_1,\ldots,t_{n-1}\}}}(u_{t_n})}, \tag{2}$$

где

$$Z = \sum_{z \in X^V} \frac{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,\ldots,t_n\}}}(z_{t_1}) q_{t_2}^{\bar{x}z_{t_1}u_{\{t_3,\ldots,t_n\}}}(z_{t_2}) \cdot \ldots \cdot q_{t_n}^{\bar{x}z_{\{t_1,\ldots,t_{n-1}\}}}(z_{t_n})}{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,\ldots,t_n\}}}(u_{t_1}) q_{t_2}^{\bar{x}z_{t_1}u_{\{t_3,\ldots,t_n\}}}(u_{t_2}) \cdot \ldots \cdot q_{t_n}^{\bar{x}z_{\{t_1,\ldots,t_{n-1}\}}}(u_{t_n})},$$

$V = \{t_1, t_2, \ldots, t_n\}$ *— некоторая нумерация точек множества* V, $n = |V|$, *а* $u \in X^V$ *— произвольная конфигурация.*

Далее будет показано, что задача восстановления спецификации Q по ее одноточечной подсистеме $Q^{(1)}$ сводится к вопросу продолжения некоторого функционала, определенного на парах конфигураций, отличающихся только в одной точке, на все пространство пар конфигураций.

Пусть $V \in W$. Рассмотрим следующее функциональное уравнение

$$a(x) = A(x, y)a(y), \tag{3}$$

где $a(x)$ — искомая функция, а $A(x, u)$ — известная функция, определенная на упорядоченных парах конфигураций, $x, u \in X^V$. Для того чтобы уравнение (3) имело бы решение, необходимо, чтобы функция $A(x, u)$ удовлетворяла следующему очевидному соотношению

$$A(x, u) = A(x, z)A(z, u). \tag{4}$$

Отсюда следует, что $A(x, x) = 1$, и, кроме того, для любых двух последовательностей конфигураций $z_1, z_2, ..., z_n$ и $z'_1, z'_2, ..., z'_m$ выполняется равенство

$$A(x, z_1)A(z_1, z_2) \cdot ... \cdot A(z_n, u) = A(x, z'_1)A(z'_1, z'_2) \cdot ... \cdot A(z'_m, u).$$

Утверждение. *Пусть выполнено условие* (4). *Тогда при любом* $z_0 \in X^V$ *и постоянной* $C(z_0)$ *функция*

$$a(x) = A(x, z_0)C(z_0), \qquad x \in X^V,$$

является решением уравнения (3). *Обратно, если функция* $a(x)$ *является решением уравнения* (3), *тогда* $a(x)$ *с необходимостью имеет следующий вид*

$$a(x) = A(x, z_0)a(z_0),$$

где z_0 *— любая конфигурация из* X^V.

Введем оператор $K_t^{u_t} : X^V \to X^V$, который при действии на конфигурацию $x \in X^V$ присваивает ее компоненте в точке t значение u_t, $u_t \in X^{\{t\}}$, $t \in V$. Пусть $M \subset X^V \times X^V$ — подмножество пар конфигураций на X^V, отличающихся только в одной точке. Пусть заданная на M функция $A^*(x, u)$ удовлетворяет соотношению (4). Приведем условия, при которых функция $A^*(x, u)$ может быть продолжена на все пространство $X^V \times X^V$.

Теорема 2. *Пусть функция* $A^*(x, u)$ *удовлетворяет следующим условиям согласованности: для всех* $x \in X^V$ *и любых* $t, s \in V$, $u_t \in X^{\{t\}}$, $v_s \in X^{\{s\}}$

$$A^*(x, K_t^{u_t}x)A^*(K_t^{u_t}x, K_s^{v_s}K_t^{u_t}x) = A^*(x, K_s^{v_s}x)A^*(K_s^{v_s}x, K_t^{u_t}K_s^{v_s}x).$$

Тогда функция $A^*(x, u)$ *имеет продолжение* $A(x, u)$ *на все пространство* $X^V \times X^V$, *такое, что для* $A(x, u)$ *выполняется условие* (4).

Теорема 1 является прямым следствием Теоремы 2. Действительно, пусть $Q^{(1)} = \left\{q_t^{\bar{x}}, \bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus \{t\}}, t \in \mathbb{Z}^d\right\}$ — совокупность одноточечных распределений вероятностей с бесконечными граничными условиями, удовлетворяющая условиям согласованности (1). Пусть $V \in W$, $t, s \in V$, $x, u \in X^{\{t\}}$, $y, v \in X^{\{s\}}$, $z \in X^{V \setminus \{t,s\}}$ и $\bar{x} \in X^{\mathbb{Z}^d \setminus V}$. Положим

$$A^*(xyz, uyz) = \frac{q_t^{\bar{x}zy}(x)}{q_t^{\bar{x}zy}(u)}.$$

Поскольку в силу (1)

$$\begin{aligned} A^*(xyz,uyz)A^*(uyz,uvz) &= \frac{q_t^{\bar{x}zy}(x)}{q_t^{\bar{x}zy}(u)}\cdot\frac{q_s^{\bar{x}zu}(y)}{q_s^{\bar{x}zu}(v)} = \\ &= \frac{q_s^{\bar{x}zx}(y)}{q_s^{\bar{x}zx}(v)}\cdot\frac{q_t^{\bar{x}zv}(x)}{q_t^{\bar{x}zv}(u)} = A^*(xyz,xvz)A^*(xvz,uvz), \end{aligned}$$

то функционал A^* удовлетворяет условию Теоремы 2. Далее, пусть $V \in W$ и $V = \{t_1, t_2, ..., t_n\}$ — некоторая нумерация его точек, $n = |V|$. Продолжение A^* на $X^V \times X^V$ может быть записано в следующем виде

$$A(x,u) = A^*(x_{\{t_1,...,t_n\}}, x_{\{t_1,...,t_{n-1}\}}u_{t_n})\cdot$$

$$\cdot A^*(x_{\{t_1,...,t_{n-1}\}}u_{t_n}, x_{\{t_1,...,t_{n-2}\}}u_{\{t_{n-1},t_n\}})\cdot ...\cdot A^*(x_{t_1}u_{\{t_2,...,t_n\}}, u_{\{t_1,...,t_n\}}) =$$

$$= \frac{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,...,t_n\}}}(x_{t_1})\,q_{t_2}^{\bar{x}x_{t_1}u_{\{t_3,...,t_n\}}}(x_{t_2})\cdot ...\cdot q_{t_n}^{\bar{x}x_{\{t_1,...,t_{n-1}\}}}(x_{t_n})}{q_{t_1}^{\bar{x}u_{\{t_2,...,t_n\}}}(u_{t_1})\,q_{t_2}^{\bar{x}x_{t_1}u_{\{t_3,...,t_n\}}}(u_{t_2})\cdot ...\cdot q_{t_n}^{\bar{x}x_{\{t_1,...,t_{n-1}\}}}(u_{t_n})},$$

где $x, u \in X^V$. Кроме того, решение уравнения

$$a(x) = A(x,u)a(u), \qquad x,u \in X^V,$$

удовлетворяющее требованию $\sum\limits_{x\in X^V} a(x) = 1$, единственно и имеет вид

$$a(x) = \frac{A(x,u)}{\sum\limits_{z\in X^V} A(z,u)},$$

который совпадает с формулой восстановления спецификации (2).

Исследование выполнено, в том числе, за счет средств, выделенных в рамках субсидии МОН РФ на финансирование научно–исследовательской деятельности Российско–Армянского (Славянского) университета.

Литература

1. Добрушин Р. Л. *Описание случайных полей при помощи условных вероятностей и условия его регулярности* // Теор. вер. и ее примен. – 1968. – Т. 113. – № 2. – С. 201–229.

2. Dobrushin R. L. *Prescribing a system of random variables by conditional distributions* // Theory Probab. Appl. – 1970. – Т. 15. – P. 458–486.

3. Dachian S., Nahapetian B. S. *Description of random fields by means of one-point conditional distributions and some applications* // Markov Processes and Related Fields. – 2001. – Т. 7. – P. 193–214.

4. Dachian S., Nahapetian B. S. *Description of specifications by means of probability distributions in small volumes under condition of very week positivity* // Journal of Statistical Physics – 2004. – Т. 111. – № 1–2. – P. 281–300.

5. Horomyan G. T., Nahapetian B. S. *An algebraic approach to the problem of specification description by means of one-point subsystems* // Journal of Contemporary Mathematical Analysis – 2013. – Т. 48. – № 1. – P. 46–49.

6. Нахапетян Б. С., Хачатрян Л. А. *Вероятностные методы в дискретных задачах.* – Ереван: Гитутюн, 2016. – 395 с.

ON SOME FUNCTIONALS ON THE SPACE OF CONFIGURATIONS ASSOCIATED WITH THE SPECIFICATIONS OF RANDOM FIELDS

B.S. Nahapetyan, L.A. Khachatryan

We show that the problem of description of random fields in terms of a subsystem of a specification, consisting only of one-point probability distributions (the Dobrushin problem), reduces to the problem of extension of functionals defined on pairs of configurations that differ only in one point to the whole space of pairs of configurations. Such continuation is possible under certain symmetry conditions of the functional.

Keywords: specification, random field.

УДК 514.822

СВОЙСТВА СФЕРИЧЕСКОГО МОДУЛЯ СЕМЕЙСТВА КРИВЫХ

А. Новик[1], А.Н. Малютина[2]

1 *novik.anastasiia@mail.ru*; Томский государственный университет, Механико-математический факультет

2 *nmd@math.tsu.ru*; Томский государственный университет, Механико-математический факультет

Работа посвящена изучению свойств и вычислению сферического модуля семейства кривых, а также искажению его при отображениях с s-усредненной характеристикой [1].

Ключевые слова: пространственный модуль, пространственное отображение, модуль семейства кривых.

Нахождение экстремальных метрик и модулей семейств кривых даже на плоскости нередко связано с трудностями т.к приводящие к решению системы дифференциальных уравнений в частных производных. Поэтому для отыскания экстремальной метрики не существует универсального метода. До сих пор известно мало пространственных задач, для которых модули найдены. Существенный вклад в развитию теории модулей внесли В.А. Зорич, И.П. Митюк, В.М. Миклюков, Г.Д. Суворов, А.В. Сычев, Б. Фюгледе, Дж. Дженкинс, Ф. Геринг, Ю.Г. Решетняк, O. Martio, S. Rickman, Ju. Väisälä и др.

Определение 1. *Пусть* Γ *– некоторое семейство кривых в* $\bar{R}^n$. *Борелевскую функцию* p: $R^n \to [0;\infty]$ *назовем допустимой метрикой семейства* Γ, *если* $\int_\gamma p dl_x \geq 1$ *для каждой кривой* $\gamma \in \Gamma$, *где* $dl_x = \frac{dl}{1+|x|^2}$. *В дальнейшем запись* $p \wedge \Gamma$ *будет означать, что* p *есть допустимая метрика семейства* Γ.

Определение 2. *Сферический модуль семейства* Γ *определим по формуле* $M_\alpha(\Gamma) = \inf \int_{R^n} p^\alpha d\sigma_x$, *где* $d\sigma_x = \frac{dx}{(1+|x|^2)^n}$ *и* inf *берется над классом всевозможных метрик* p.

Заметим, что n-мерный интеграл в определении модуля может быть сужен до наименьшего борелевского множества E, содержащего семейство Γ, так как inf в

этом определении достигается на метриках, обращающихся в нуль на CE. Очевидно, $0 \le M(\Gamma) \le \infty$. Если класс метрик $p \wedge \Gamma$ пуст, то полагаем $M(\Gamma) = \infty$.

Определение 3. *Семейство* Γ *назовем исключительным, если* $M(\Gamma) = 0$. *Будем говорить, что некоторое свойство имеет место для почти всех кривых семейства* Γ*, если подсемейство* Γ*, на котором оно не имеет места, является исключительным.*

Теорема 1. *Семейство всевозможных неспрямляемых кривых* γ *в* $\bar{R}^n$ *исключительно.*

Доказательство. Пусть Γ_∞ – семейство всевозожных неспрямляемых кривых γ в $\bar{R}^n$. Введем функцию

$$p_0(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|\ln|x|}, |x| \ge 2, \\ 1, |x| < 2. \end{cases} \tag{1}$$

Для нее

$$\int_{R^n} p_0^n \, dl_x = 2^n \Omega_n + \frac{\Omega_{n-1}}{(n-1)\ln^{n-1} 2} < \infty, \quad \int_{R^n} p_0^n \, d\Sigma_x = 2^n \Omega_n + \frac{\Omega_{n-1}}{(n-1)\ln^{n-1} 2} < \infty,$$

и кроме того, $\int_\gamma p_0 \, dl_x = 0$ для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$. В самом деле, если кривая γ ограничена, то $p_0(x) \ge a > 0$ на γ и утверждение очевидно. Если же γ неограничена, то, выбрав точку x на γ с $|x| \ge 2$, имеем $\int_\gamma p_0 \, dl_x \ge \int_{|x|}^{\infty} \frac{dr}{r \ln r} = \infty$. Таким образом, функция p_0 является допустимой метрикой, и следовательно семейство Γ_∞ является исключительным. Теорема доказана.

Теорема 2. *Семейство* Γ *всевозможных кривых, проходящих через произвольную точку* P *пространства* $\bar{R}^n$*, исключительно.*

Пусть $f : \bar{R}^n \to \bar{R}^n$ – преобразование Мебиуса, т. е. отображение, представимое в виде суперпозиции конечного числа следующих известных элементарных преобразований: 1) параллельного переноса $f(x) = x + a$, $a \in R^n$; 2) гомотетии $f(x) = rx$, $r > 0$; 3) ортогонального преобразования $f(x)$ вида : $f(x)$ – линейное преобразование и $|f(x)| = |x|$ для всех $x \in R^n$; 4) инверсии относительно сферы $S^{(n-1)}(a, r) : f(x) = a + \frac{r^2(x-a)}{|x-a|^2}$.

Определение 4. *Если для некоторой метрики* $p_0 \wedge \Gamma$ *имеем* $M_\alpha(\Gamma) = \int_{R^n} p_0^\alpha \, d\Sigma_x$*, то метрику* p_0 *назовем экстремальной.*

Укажем основные свойства модулей.

1. Если $\Gamma_1 \subset \Gamma_2$, то $M_\alpha(\Gamma_1) \le M_\alpha(\Gamma_2)$.
2. $M_\alpha(\cup_{i=1}^\infty \Gamma_i) \le \sum_{i=1}^\infty M_\alpha(\Gamma_i)$ – свойство полуаддитивности.

Теорема 3. *Экстремальная метрика семейства* Γ *определяется единственным образом (с точностью до значений на множестве* n*-мерной лебеговой меры нуль).*

Доказательство. Пусть p_{01} и p_{02} – две экстремальные метрики семейства Γ. Введем функцию $p = \frac{p_{01}+p_{02}}{2}$. Докажем, что $p \wedge \Gamma$ допустимая мера. Для каждой кривой $\gamma \in \Gamma$ имеем $\int_\gamma p_{01} \, dl_x \ge 1$ и $\int_\gamma p_{02} \, dl_x \ge 1$, тогда $\int_\gamma p \, dl_x = \frac{1}{2}\int_\gamma p_{01} \, dl_x + \frac{1}{2}\int_\gamma p_{02} \, dl_x \ge 1$.

С другой стороны, так как функция $(\frac{a^t+b^t}{2})^{\frac{1}{t}}$, $a>0$, $b>0$, является возрастающей функцией от t, $t>0$, выполняется неравенство $\frac{p_{01}+p_{02}}{2} \le (\frac{p_{01}^\alpha+p_{02}^\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}}$, причем знак равенства имеет место в тех и только тех точках x, в которых $p_{01}(x)=p_{02}(x)$. Отсюда следует, что $\int_{R^n} p^\alpha d\Sigma_x = \int_{R^n}(\frac{p_{01}+p_{02}}{2})^\alpha d\Sigma_x \le \frac{1}{2}\int_{R^n} p_{01}^\alpha d\Sigma_x + \int_{R^n} p_{02}^\alpha d\Sigma_x = M_\alpha(\Gamma)$, а так как, по определению модуля, знак неравенства здесь не может иметь места, то почти всюду в $\frac{p_{01}+p_{02}}{2} \le (\frac{p_{01}^\alpha+p_{02}^\alpha}{2})^{\frac{1}{\alpha}}$ имеет место знак равенства. Следовательно, $p_{01}=p_{02}$ почти всюду в R^n.

Пример 1. *Пусть D – прямоугольный параллелепипед $\{x: 0<x_1<a, 0<x_2<b, 0<x_3<c\}$, Γ – семейство всевозможных кривых γ, соединяющих в D основания $x_3=0$ и $x_3=c$. Тогда $M(\Gamma)=ab/C^2$.*

Пример 2. *Пусть E – измеримое множество в R^{n-1}, D – цилиндр $\{x\in R^n : (x_1,\dots,x_{n-1})\in E, 0<x_n<H\}$ и Γ – семейство всевозможных кривых, соединяющих основания цилиндра E и $F=E+He_n$. Тогда $M(\Gamma)=\frac{m_{n-1}(E)}{H^{n-1}}=\frac{m_n(D)}{H^n}$.*

Пример 3. *Пусть D есть цилиндрическое кольцо $\{x=(r,\phi,x_3): 0<\phi\le 2\pi, r_1<r<r_2, 0<x_3<H\}$, где (r,ϕ,x_3) – цилиндрические координаты в R^3, и Γ – семейство всевозможных кривых γ, соединяющих в D внутреннюю и внешнюю боковые поверхности D. Тогда $M(\Gamma)=\frac{\pi H}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})^2}$. В самом деле, функция*

$$p_0=\begin{cases}\frac{1+|x|^2}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})\sqrt{r}}, x\in D\\ 0, x\notin D\end{cases} \tag{2}$$

является допустимой и экстремальной метрикой для семейства Γ: $\int p_0\frac{dl}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})\sqrt{r}} = \frac{1}{2(\sqrt{r_2}-\sqrt{r_1})}\int_{r_1}^{r_2}\frac{dr}{\sqrt{r}}=1$.

Наряду с модулем семейства кривых $M_\alpha(\Gamma)$ иногда рассматривается величина $\lambda(\Gamma)=M_\alpha(\Gamma)^{\frac{1}{1-n}}$, называемая экстремальной длиной семейства Γ [3]. Заметим, что преобразование Мебиуса всегда можно представить в виде одной из двух следующих форм : $f(x)=rT(x)+a$ или $f(x)=I(rT(x)+a)$, где $r>0$, $a\in R^n$, T – ортогональное отображение, I-инверсия. Первый случай имеет место, когда $f(\infty)=\infty$, и тогда $f(x)$ называется преобразованием подобия.

Теорема 4. *Если $f:\bar{R}^n\to\bar{R}^n$ – преобразование Мебиуса, то $M_\alpha(f(\Gamma))=M_\alpha(\Gamma)$ для всякого семейства кривых Γ из $\bar{R}^n$.*

Литература

1. Елизарова М.А., Малютина А.Н. *Отображения с s-усредненной характеристикой. Определение и свойства.* – LAMBERT Academic Publishing, 2013. – 121 с.

2. Сычев А.В. *Модули и пространственные квазиконформные отображения.* – Новосибирск: Наука, 1983.

3. Кановей В.Г., Любецкий В.А. *Современная теория множеств: борелевские и проективные множества.* – М.: МЦНМО, 2010.

PROPERTIES OF THE SPHERICAL MODULE OF A FAMILY OF CURVES

A. Novik, A.N. Malyutina

The paper is devoted to the study of properties and calculation of the spherical module of a family of curves, as well as to module's distorting under mappings with s-averaged characteristic.

Keywords: space module, space mapping, module of a family of curves.

УДК 517.982

ОБОБЩЕНИЕ L_1-ПОЛУНОРМ

Ан.Ан. Новиков[1], З.Ш. Холматова[2]

1 *a.hobukob@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

2 *zamira.kholmatova@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В работе рассматривается отображение, являющееся обобщением L_1-полунорм, ассоциированных с операторами, присоединенными к алгебре фон Неймана, и весами, определенными на алгебре фон Неймана.

Ключевые слова: упорядоченное векторное пространство, порядок, некоммутативное интегрирование, двойственность.

Пусть K – порождающий конус в векторном пространстве E. Элемент f векторного пространства E будем называть положительным и писать $f \geq \vec{0}$, если $f \in K$. Также будем писать $f \geq g$, если $f - g \in K$.

Пусть частично упорядоченные векторные пространства E и F (с конусами положительных элементов E^+ и F^+ соответственно) находятся в двойственности $\langle E, F\rangle$ и согласованы в смысле порядка, т. е. если $x \in E^+$, $f \in F^+$, то $\langle x, f\rangle \geq 0$.

Определим

$$p(x,f) := \inf\left\{\langle x_1 + x_2, f_1 + f_2\rangle \;\middle|\; \begin{array}{l} x = x_1 - x_2,\ x_1, x_2 \in E^+ \\ f = f_1 - f_2,\ f_1, f_2 \in F^+ \end{array}\right\}.$$

Очевидно, что для любых $x \in E$, $f \in F$ выполняется неравенство $p(x,f) \geq 0$.

Предложение 1. *Для любых $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $x \in E$, $f \in F$ выполняется равенство*

$$p(\lambda x, \mu f) = |\lambda||\mu| p(x,f).$$

В случае, если зафиксировать один из аргументов положительным, то относительно другого аргумента отображения $p(x,\cdot)$ и $p(\cdot,f)$ становятся полунормами [1–4].

Предложение 2. *Если $x \in E^+$, то*

$$p(x,f) = \inf\{(f_1 + f_2)(x) \mid f = f_1 - f_2\} \quad \textit{для любого } f \in F.$$

Аналогично, если $f \in F^+$, то $p(x,f) = \inf\{f(x_1) + f(x_2) \mid x = x_1 - x_2\}$ для любого $x \in E$.

Однако, в общем случае это свойство полунормальности не сохраняется. Обратим также внимание, на то, что при определенных условиях должны выполняться неравенства супераддитивности.

Предложение 3. *Для любых* $x, y \in E^+$, $f \in F$

$$p(x+y, f) \geq p(x, f) + p(y, f).$$

Аналогично, для произвольных $f, g \in F^+$ *и* $x \in E^+$ *выполняется неравенство*

$$p(x, f+g) \geq p(x, f) + p(x, g).$$

Следствие 1. *Для* $x \in E^+$, $f \in F^+$ *выполняется равенство* $p(x, f) = \langle x, f \rangle$.

Рассмотрим два примера, как работают указанные констркуции в конкретных пространствах.

Пример 1. Пусть $E = L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, $F = L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ с естественным порядком находятся в двойственности (для $x \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$, $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ двойственность определяется равенством $\langle x, f \rangle = \int\limits_\Omega f x d\mu$).

Для любых $x \in L_1(\Omega, \Sigma, \mu)$ и $f \in L_\infty(\Omega, \Sigma, \mu)$ верно равенство $p(x, f) = \langle |x|, |f| \rangle$. В этом случае для любых $x, y \in E$, $f, g \in F$ верны неравенства

$$p(x+y, f) \leq p(x, f) + p(y, f);\ p(x, f+g) \leq p(x, f) + p(x, g).$$

Пример 2. Пусть $E = F = M_{2\times 2}(\mathbb{C})$. Порядок определим стандартно: $\mathbf{0} \leq A \in M_{2\times 2}(\mathbb{C})$ тогда и только тогда, когда $\overline{A^t} = A$ и все собственные значения A положительны. Двойственность определяется равенством $\langle X, F \rangle = \mathrm{Tr}(\overline{F^t} X)$ $(X, F \in M_{2\times 2}(\mathbb{C}))$.

Тогда для

$$A = \begin{pmatrix} 2 & i \\ -i & 2 \end{pmatrix},\ B = \begin{pmatrix} 4 & i \\ -i & 1 \end{pmatrix},\ X = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$$

непосредственным решением задачи оптимизации получаем, что

$$p(A, X) = 2\sqrt{3},\ p(B, X) = \sqrt{21},\ p(A+B, X) = 9.$$

Таким образом,

$$p(A+B, X) > p(A, X) + p(B, X).$$

Литература

1. Novikov A.A, Tikhonov O.E., *Characterization of central elements of operator algebras by inequalities* // Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 36. – № 2. – P. 208-210.

2. Novikov A. *L_1-space for a positive operator affiliated with von Neumann algebra* // Positivity. – 2017. – V. 21. – № 1. – P. 359–375.

3. Trunov N.V., Sherstnev A.N. *Introduction to the theory of noncommutative integration* // Math. Sci. – 1987. – V. 37 – № 6. – P. 1504–1523.

4. Шерстнев А. Н. *Методы билинейных форм в некоммутативной теории интегрирования* –М.: ФИЗМАТЛИТ. – 2008. – 259 с.

GENERALIZATION OF L_1-SEMINORM

An.An. Novikov, Z.Sh. Holmatova

In this paper we consider generalization of L_1-seminorms associated with operators affiliated with von

Neuman algebra and with weights on von Neuman algebras.

Keywords: partialy ordered vector space, order, noncommutative integration, duality.

УДК 517.51

ИСПРАВЛЕНИЕ ФУНКЦИЙ И ЛАКУНАРНАЯ ИНТЕРПОЛЯЦИЯ

В.В. Новиков[1]

1 *vvnovikov@yandex.ru*; Саратовский государственный технический университет им. Ю.А. Гагарина, Энгельсский технологический институт (филиал)

Показано, что существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к матрице равноотстоящих узлов $T = \{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1) : -n \le k \le n,\ n = 1,2,\dots\}$, такая что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C_{2\pi}$ на множестве как угодно малой меры (0,2,3)–интерполяционный процесс с узлами $\mathfrak{M}\gamma$ будет сходится к исправленной функции равномерно на $[-\pi,\pi]$.

Ключевые слова: лакунарная интерполяция, ряды Фурье, исправление функций.

Обозначим через $L_n(T,f,x)$, $n = 1,2,\dots$, тригонометрический интерполяционный полином Лагранжа функции $f \in C_{2\pi}$ с узлами $\{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1)\}_{k=-n}^{n}$, а через $Q_n(T,f,x)$, $n = 1,2,\dots$, (0,2,3)–интерполяционный полином Биркгофа такой, что

$$Q_n(T,f,x_{k,n}) = f(x_{k,n}),\ Q_n''(T,f,x_{k,n}) = Q_n'''(T,f,x_{k,n}) = 0,\ k = \overline{-n,n}.$$

Хорошо известно [1], что интерполяционный процесс $\{L_n(T,f,x)\}_{n=1}^{\infty}$ для $f \in C_{2\pi}$ может расходиться при всех $x \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$, подобно ряду Фурье суммируемой функции. В то же время, известно (см., напр. [2]), что любую измеримую (конечную п. в.) функцию можно исправить на множестве сколь угодно малой меры так, что ее ряд Фурье станет равномерно сходящимся (усиленное C-свойство, по терминологии Н.К. Бари). Возникает вопрос, не обладает ли класс непрерывных функций подобным свойством по отношению к тому или иному интерполяционному процессу? В настоящей заметке показано, что существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma$, как угодно близкая к матрице равноотстоящих узлов $T = \{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1) : -n \le k \le n,\ n = 1,2,\dots\}$, такая что после исправления (с сохранением непрерывности) функции $f \in C_{2\pi}$ на множестве как угодно малой меры (0,2,3)–интерполяционный процесс с узлами $\mathfrak{M}\gamma$ будет сходится к исправленной функции g равномерно на $[-\pi,\pi]$.

Теорема. *Пусть последовательность $\gamma = \{\gamma_n\}_{n=1}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ такова, что $\gamma_n \to 0$ при $n \to \infty$. Тогда существует матрица узлов интерполирования $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{k,n}\}_{k=-n,n=1}^{n,\infty}$ со следующими свойствами:*

1) $|x_{k,n} - y_{k,n}| < \gamma_n$, $-n \le k \le n$, $n \in \mathbb{N}$;

2) для любых $f \in C_{2\pi}$, и $0 < \delta < 2\pi$ найдутся функция $g \in C_{2\pi}$ и множество $E \subset [-\pi,\pi]$, $\mathrm{mes}E > 2\pi - \delta$ такие, что $f = g$ на E и $\lim\limits_{n\to\infty} \left|Q_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g\right|_{C_{2\pi}} = 0$.

Для дальнейшего изложения нам понадобятся некоторые обозначения и леммы. Пусть $f \in C_{2\pi}$, $n \ge 3$, и $\mathfrak{M}$: $-\pi < y_{-n,n} < y_{-n+1,n} < \dots < y_{n,n} < \pi -$

произвольная матрица узлов интерполирования. Положим $\Delta_{i,n} = (y_{2i-1,n}, y_{2i+1,n})$, $\Delta^2 f_i = f(y_{2i+1,n}) - 2f(y_{2i,n}) + f(y_{2i-1,n})$, $|\Delta_{i,n}| = y_{2i+1,n} - y_{2i-1,n}$, $d_1(\mathfrak{M}, n) = \min\limits_i |\Delta_{i,n}|$, $d_2(\mathfrak{M}, n) = \max\limits_i |\Delta_{i,n}|$, и пусть

$$R_{n,p}(\mathfrak{M}, f) = \left| \sum_{i=-[n/2]+1}^{[n/2]-1}{}' \frac{\Delta^2 f_i}{\varphi(2i+1, n, p)} \right|, \; R_n(\mathfrak{M}, f) = \max_{-n-1 \le p \le n} R_{n,p}(\mathfrak{M}, f),$$

где

$$\varphi\left(m, n, p\right) = \begin{cases} p - m, & \text{если } \left|p - m\right| \le 3\left([n/2] + 1\right), \\ 2n - \left(p - m\right), & \text{если } p - m > 3\left([n/2] + 1\right), \\ -2n - \left(p - m\right), & \text{если } p - m < -3\left([n/2] + 1\right). \end{cases}$$

Здесь штрих у знака суммы указывает на отсутствие (не более двух) слагаемых, у которых индекс i является решением уравнения $\varphi(2k+1, n, p) = 0$; кроме того, считаем, что $y_{n+1,n} = \pi$, $y_{-n-1,n} = -\pi$. Для произвольного конечного множества $A = \{a_1; a_2; \ldots; a_m\} \subset \mathbb{R}$ через $d(A) := \min\limits_{i,j}\{|a_i - a_j| : a_i \ne a_j\}$ будем обозначать наименьшее положительное расстояние между его точками. Кроме того, как обычно, через C обозначаются абсолютные, вообще говоря различные, постоянные.

Лемма 1. *Существует последовательность $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+$ такая, что для любой $f \in C_{2\pi}$ и любой матрицы узлов $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$, для которой*

$$|y_{i,n} - x_{i,n}| < \gamma_n, \; i = -n, \ldots, n; \; n \ge 3, \tag{1}$$

равенство

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, f) = 0$$

будет необходимым и достаточным условием для равномерной сходимости к f на $[-\pi, \pi]$ интерполяционного процесса $\{L_n(\mathfrak{M}_\gamma, f, x)\}$.

Утверждение леммы 1 является аналогом критерия сходимости из [3]. Оно может быть получено с использованием представление для разности $f(x) - L_n(T, f, x)$ из указанной работы, а также факта непрерывной зависимости фундаментальных многочленов интерполяции от узлов и $x \in [-\pi, \pi]$.

Следующую лемму технического характера также приведем без доказательства.

Лемма 2. *Пусть $\gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность из леммы 1 и $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$ — любая фиксированная матрица узлов, удовлетворяющая условию (1). Пусть, далее, $\sigma > 0$ — произвольное достаточно малое число и конечный набор точек $\Lambda = \{\lambda_i\}_{i=0}^{m+1}$ таков, что $\lambda_0 := -\pi < \lambda_1 < \cdots < \lambda_m < \lambda_{m+1} := \pi$, $d(\Lambda) > \sigma$. Тогда найдется номер $n_0 = n_0(\sigma)$, зависящий только от σ, такой, что при $n > n_0$ равномерно по $p = -n-1, \ldots, n$ будут верны неравенства*

$$Q_{p,n}(\Lambda) := \sum_i |\varphi(2i+1, n, p)|^{-1} \le 5, \tag{2}$$

где суммирование идет по тем i, для которых $\varphi(2i+1, n, p) \ne 0$ и $\Delta_{i,n} \cap \Lambda \ne \varnothing$.

Лемма 3. *Существует последовательность $\gamma = \{\gamma_n\} \subset \mathbb{R}_+$, для которой верно утверждение леммы 1 и, кроме того, обладающая следующим свойством: найдется*

функция $\mu_n(x) \in C_{2\pi}$ *такая, что для любой* $f \in C_{2\pi}$

$$\lim_{n\to\infty} \left[f(x) - Q_n(\mathfrak{M}_\gamma, f, x) - \mu_n(x) \left(f(x) - L_n(\mathfrak{M}_\gamma, f, x) \right) \right] = 0$$

равномерно на $\mathbb{R}$.

Утверждение леммы 3 является вариантом теоремы о равносходимости интерполяции Лагранжа и лакунарной интерполяции из [4].

Перейдем к доказательству теоремы. Пусть $f \in C_{2\pi}$ — произвольная непрерывная функция и $0 < \delta < 2\pi$ — сколь угодно малое фиксированное число. Пусть, далее, $\gamma = \{\gamma_n\}$ — последовательность, для которой выполнены все сделанные выше предположения и $\mathfrak{M}_\gamma = \{y_{i,n}\}$ — любая матрица такая, что верно (1). Потребуем, чтобы все точки $\{y_{i,n}\}$ были попарно различными и не совпадали с узлами сетки $t_{k,j} := -\pi + 2\pi k 2^{-j}$, $k = 1, \ldots, 2^j$, $j \in \mathbb{N}$. Положим

$$I_{k,j} := [-\pi + 2\pi(k-1)2^{-j}, -\pi + 2\pi k 2^{-j}],$$

$$\tilde{f}_j(x) := \min_{t \in I_{k,j}} f(t),\ x \in I_{k,j}, k = 1, \ldots, 2^j,\ j \in \mathbb{N},\ x \in [-\pi, \pi].$$

Последовательность $\{\tilde{f}_j(x)\}_{j=1}^{\infty}$ не убывает по j и равномерно сходится к f на $[-\pi, \pi]$. Положим $f_j(x) = \tilde{f}_j(x) - \tilde{f}_{j-1}(x) \geq 0$, $\tilde{f}_0(x) \equiv 0$. Тогда ряд $\sum\limits_{j=1}^{\infty} f_j(x)$ равномерно и абсолютно сходится к f на $[-\pi, \pi]$. Докажем, что $\forall j = 1, 2\ldots$ и для любого $N_j \in \mathbb{N}$ существует функция $g_j \in C_{2\pi}$ такая, что

$$0 \leq g_j(x) \leq f_j(x),\ x \in [-\pi, \pi]; \tag{3}$$

$$\operatorname{mes}\{t \in [-\pi, \pi] : f_j(t) \neq g_j(t)\} < 2^{-j}\delta; \tag{4}$$

$$\max_n R_n(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) \leq C \left\| f_j \right\|_{C_{2\pi}} \to 0 \text{ при } j \to \infty; \tag{5}$$

$$R_n(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = 0,\ n = 1, \ldots, N_j;\ j = 1, 2, \ldots; \tag{6}$$

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) = 0. \tag{7}$$

После того как функции $g_j(x)$ будут построены, мы покажем что $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j(x)$ — искомая.

Обозначим через L множество точек разрыва функции f_j, лежащих в $[-\pi, \pi]$. Выберем и зафиксируем произвольный номер $M_j > N_j$ и пусть $D_0 := L \cup \{y_{i,s} \in [-\pi, \pi] : 1 \leq s \leq M_j\}$. В силу леммы 2 найдется номер $\mu(0)$ для которого

$$Q_{n,p}(D_0) \leq 5\ \forall n \geq \mu(0).$$

Здесь и всюду в дальнейшем мы не будем явно указывать область изменения p, подразумевая, что соответствующие соотношения верны для всех $p \in \{-n-1; \ldots; n\}$. Пусть $\{\sigma_l\}_{l=0}^{\infty} \subset \mathbb{R}_+$ — последовательность такая, что $\sigma_l \downarrow 0$ при $l \to \infty$, причем $\sigma_l / \sigma_{l-1} < 2^{-l}$, $l = 1, 2, \ldots$; окончательно мы подберем ее позже.

Для каждого $t \in D_0$ построим замкнутую окрестность $[t - \sigma_0, t + \sigma_0]$, при этом σ_0 выберем настолько малым, что:

1) $\sigma_0 < 4^{-1} d(\tilde{D}_0)$, где $\tilde{D}_0 := D_0 \cup \{y_{i,s} \in [-\pi,\pi] : M_j + 1 \le s \le \mu(0)\}$;
2) общая длина окрестностей всех точек t из D_0 меньше, чем $2^{-j-1}\delta$;
3) $\max\{n : d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_0\} > \mu(0)$.

Если $t = \pm\pi$, то рассматриваем соответствующую одностороннюю окрестность.

Для $x \in [-\pi,\pi]$ положим

$$g_{0,j}(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } x \in D_0; \\ f_j(x), & \text{если } x \in [-\pi,\pi] \setminus \cup_{t\in D_0} (t-\sigma_0, t+\sigma_0); \\ \text{линейная} & \text{на } [t-\sigma_k, t] \text{ и } [t, t+\sigma_k],\ t \in D_0. \end{cases}$$

Предположим, что уже определены множества $D_0,\dots,D_{l-1}$, выбраны числа $\sigma_0,\dots,\sigma_{l-1}$ и построены функции $g_{0,j},\dots,g_{l-1,j}$, $l \ge 1$. Определим D_l, σ_l и построим $g_{l,j}$. Пусть $E_{u,v} := \cup_{s=u}^{v} \cup_{t\in D_s} [t-\sigma_s, t+\sigma_s]$ и $D_l := \{y_{i,s} : s = M_j + l,\ y_{i,s} \in [-\pi,\pi] \setminus E_{0,l-1}\}$. Для конечного множества $D_l \cup P_{l-1}$, где $P_{l-1} := \cup_{s=0}^{l-1} \cup_{t\in D_s} \{t-\sigma_s;\ t;\ t+\sigma_s\}$, найдем, применяя лемму 2, число $\mu(l)$ такое, что:

1) $Q_{n,p}(D_l \cup P_{l-1}) < 5$, $\forall n \ge \mu(l)$;
2) $\mu(l) > \min\{n : d_2(\mathfrak{M}_\gamma, n) \le \sigma_{l-1}\}$.

Теперь строим окрестности $[t-\sigma_l, t+\sigma_l]$, $t \in D_l$, выбирая σ_l так, что:

1) $\sigma_l < 4^{-1} d(\tilde{D}_l)$, где $\tilde{D}_l := D_l \cup \{y_{i,s} \in [-\pi,\pi] \setminus E_{0,l-1} : M_j + l \le s \le \mu(l)\}$;
2) общая длина окрестностей всех точек t из D_l меньше, чем $2^{-j-l}\delta$;
3) $\max\{n : d_1(\mathfrak{M}_\gamma, n) > \sigma_l\} > \mu(l)$.

Обозначим $h_{k,j} := f_j(x)$, $x \in I_{k,j}$ и для $x \in [-\pi,\pi]$ положим

$$g_{l,j}(x) = \begin{cases} h_{k,j} \sum_{s=1}^{l} 2^{-l}, & \text{если } x \in D_l \cap I_{k,j}; \\ g_{l-1,j}(x), & \text{если } x \in [-\pi,\pi] \setminus \cup_{t\in D_l} (t-\sigma_l, t+\sigma_l); \\ \text{линейная} & \text{на } [t-\sigma_l, t] \text{ и } [t, t+\sigma_l],\ t \in D_l. \end{cases}$$

Определим функцию $g_j(x) := \lim\limits_{l\to\infty} g_{l,j}(x)$, $x \in [-\pi,\pi]$, $j \in \mathbb{N}$. Выполнение (3)–(3) и (5), а также условия $g_j \in C_{2\pi}$ очевидно. Кроме того, используя определение g_j, можем проверить выполнение для нее условия $R_{n,p}(\mathfrak{M}_\gamma, g_j) \le C 2^{-l} \|f_j\|_{C_{2\pi}}$, из которого следуют соотношения (4) и (6).

Положим $g(x) = \sum\limits_{j=1}^{\infty} g_j(x)$, $x \in [-\pi,\pi]$. Так как $g_j \in C_{2\pi}$ и в силу (3) ряд сходится равномерно на $[-\pi,\pi]$, имеем $g \in C_{2\pi}$. Далее, из (3) следует, что

$$\operatorname{mes}\{x \in [-\pi,\pi] : f(x) \ne g(x)\} < \delta. \tag{8}$$

Наконец, с использованием (6), с помощью индукции по j нетрудно подобрать последовательность $\{N_j\}_{j=1}^{\infty}$ так, чтобы для функции g выполнялось условие

$$\lim_{n\to\infty} R_n(\mathfrak{M}_\gamma, g) = 0. \tag{9}$$

В силу лемм 1 и 3 из (9) следует равенство

$$\lim_{n\to\infty} \|Q_n(\mathfrak{M}_\gamma, g, \cdot) - g\|_{C_{2\pi}} = 0,$$

которое совместно с (8) показывает, что функция g является искомой. Теорема доказана.

Литература

1. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды.* Т. 2 – М.: Мир, 1965. – 537 с.

2. Бари Н. К. *Тригонометрические ряды.* – М.: Физматлит, 1961. – 936 с.

3. Привалов А. А. *Теория интерполирования функций.* Кн. 2. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та. – 1990. – 424 с.

4. Varma A. K.,Vertesi P. *Equiconvergence of some lacunary trigonometric interpolation polynomials* // J. Approx. Theory. – 1987. – V. 50. – P. 185–191.

ADJUSTMENT OF FUNCTIONS AND LACUNARY INTERPOLATION

V.V. Novikov

We prove that there exists a matrix of interpolation nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ with the properties: 1) $\mathfrak{M}_\gamma$ is arbitrarily close to the matrix of equidistant nodes $T = \{x_{k,n} = 2\pi k/(2n+1) : \ -n \le k \le n, \ n = 1,2,\ldots\}$; 2) any function $f \in C_{2\pi}$ can be adjusted in a set of arbitrarily small measure such that the (0,2,3)-interpolation process of adjusted continuous function g based on the nodes $\mathfrak{M}_\gamma$ will be uniformly convergent to g on $[-\pi,\pi]$.

Keywords: lacunary interpolation, Fourier series, adjustment of functions.

УДК 519.642

О РАВНОМЕРНОЙ АППРОКСИМАЦИИ РЕШЕНИЯ ИНТЕГРО-ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ЛОГАРИФМИЧЕСКОЙ ОСОБЕННОСТЬЮ В ЯДРЕ

А.В. Ожегова[1], Л.Э. Хайруллина[2]

1 *alla.ozhegova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И.Лобачевского

2 *lxayrullina@yandex.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт вычислительной математики и информационных технологий

В статье исследуется слабосингулярное интегро-дифференциальное уравнение. Авторы вводят пару весовых пространств для доказательства корректности поставленной задачи. Далее к указанной задаче применяется итерационный метод и метод Галеркина и устанавливаются равномерные оценки погрешности.

Ключевые слова: интегро-дифференциальное уравнение с логарифмической особенностью в ядре, приближенное решение, корректность задачи.

Рассматривается интегро-дифференциальное уравнение вида

$$a(t)x(t) - \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - t| \frac{x'(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\, d\tau = y(t), \quad -1 < t < 1, \tag{1}$$

где $a(t)$, $y(t)$ - известные непрерывно-дифференцируемые функции, $x(\tau)$ – искомая функция, удовлетворяющая условиям

$$x(-1) = x(1) = 0, \tag{2}$$

а слабосингулярный интеграл понимается как несобственный.

Традиционно такие уравнения относятся к классу некорректно поставленных задач во многих известных функциональных пространствах. В данной работе, следуя [1], предлагается пара пространств искомых элементов и правых частей, в которых устанавливается корректность задачи решения указанного уравнения, позволяющая применить какой-либо аппроксимативный метод и получить равномерную сходимость приближенных решений к точному.

Обозначим

$$I\varphi \equiv I(\varphi; t) = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \frac{\varphi(\tau)}{t-\tau}\,d\tau$$

сингулярный интеграл с ядром Коши, понимаемый в смысле главного значения по Коши.

Пусть X – линейное пространство непрерывно дифференцируемых на $[-1,1]$ функций $x(t)$, для которых сингулярный интеграл $\rho^{-1}I\rho x'$ является также непрерывной функцией, с нормой

$$\|x\|_X = \|x'\|_C + \left\|\frac{1}{\rho}I\rho x'\right\|_C,$$

где

$$\|x\|_C = \max_{-1\le t\le 1}|x(t)|, \quad \rho(t) = \frac{1}{\sqrt{1-t^2}}.$$

Пусть Y – линейное пространство непрерывно дифференцируемых функций $y(t)$, для которых сингулярный интеграл $I(qy')$ является также непрерывной функцией, с нормой

$$\|y\|_Y = \|y\|_C + \|qy'\|_C + \|I(qy')\|_C,$$

где $q(t) = \frac{1}{\rho(t)}$.

Запишем уравнение (1) в операторном виде

$$Kx \equiv Ax + Gx = y, \quad x \in X, y \in Y,$$

где

$$Ax = a(t)x(t), \quad Gx \equiv G(x; t) = -\frac{1}{\pi}\int_{-1}^{1} \ln|\tau - t|\frac{x'(\tau)}{\sqrt{1-\tau^2}}\,d\tau.$$

Установлено, что оператор $G: X \to Y$ непрерывно обратим и

$$\|G^{-1}\|_{Y\to X} \le 1,$$

а оператор $A: X \to Y$ является вполне непрерывным.

Лемма 1. *Если оператор $A: X \to Y$ удовлетворяет неравенству $q \equiv \|A\|_{X\to Y} < 1$, то оператор $K \equiv G + A: X \to Y$ непрерывно обратим и*

$$\|K^{-1}\|_{Y\to X} \le \frac{1}{1-q}.$$

Лемма 2. *В условиях леммы 1 единственное решение задачи (1)-(2) можно найти как предел в X итерационной последовательности* $\{x^k\}$,

$$Gx^{k+1} + Ax^k = y, \ \ k = 0, 1, ...,$$

где $x^0 \in X$ *– произвольное начальное приближение, и справедливы следующие оценки*

$$\|x^* - x^k\|_X \le \frac{q^k}{1-q}\|x^1 - x^0\|^k, \ \ k = 1, 2, ...$$

Если, кроме того начальное приближение выбрано по формуле $x^0 = G^{-1}y$, *то справедлива оценка*

$$\|x^* - x^k\|_X \le \frac{q^{k+1}}{1-q}\|y\|_Y, \ \ k = 1, 2, ...$$

Обозначим через $H_\omega^{r+1} = H_\omega^{r+1}[-1, 1]$ множество функций, имеющих непрерывную производную $(r+1)$-го порядка, модуль непрерывности которой не превосходит заданного модуля непрерывности $\omega(\delta)$, $r \ge 0$, $\delta \in (0, 2]$, и удовлетворяющих дополнительному условию $\ln n\omega\left(\frac{1}{n}\right) \to 0$, $n \to \infty$.

Приближенное решение задачи (1)-(2) будем искать в виде

$$x_n(t) = \sum_{k=0}^{n} \alpha_k T_k(t),$$

где $T_k(t) = \cos k \arccos t$ – полиномы Чебышева I рода, а неизвестные коэффициенты α_k найдем из условия ортогональности невязки полиномам Чебышева I рода.

В случае принадлежности исходных данных классу H_ω^{r+1} установлена равномерная сходимость приближенных решений к точному в пространстве X и, как следствие, равномерная сходимость со скоростью

$$\|x_n{}' - x^{*\prime}\|_C = O\left(\frac{\ln n}{n^r}\omega\left(\frac{1}{n}\right)\right), \quad r \ge 0.$$

Литература

1. Ожегова А. В. *Равномерные приближения решений слабо-сингурных интегральных уравнений перого рода*: дис... канд. физ.-мат. наук. – Казань, 1996. –96 с.

ON THE UNIFORM APPROXIMATION OF SOLUTIONS OF SINGULAR INTEGRO-DIFFERENTIAL EQUATIONS

A.V. Ozhegova, L.E. Khajrullina

In this paper we study weakly singular integro-differential equation. The authors introduce a pair of weight spaces to prove the correctness of the problem posed. Next, the iteration method and the Galerkin method are applied to the indicated problem and uniform error estimates are established.

Keywords: singular integro-differential equation with a logarithmic singularity in the kernel, approximate solution, the correctness of the problem.

УДК 519.86

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ НАКРЫВАЮЩИХ ОТОБРАЖЕНИЙ К ИССЛЕДОВАНИЮ ЭКОНОМИКО-МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ

Н.Г. Павлова[1]

1 *natasharussia@mail.ru*; Российский университет дружбы народов

В работе исследуется вопрос существования вектора равновесных цен в модели конкурентного равновесия. В рассматриваемой модели функция спроса получена как решение задачи максимизации функции полезности при бюджетных ограничениях, а функция предложения как решение задачи максимизации прибыли с учетом транзакционных потерь на технологическом множестве. В работе приводятся достаточные условия существования вектора равновесных цен, которые получены как следствие теорем о существовании точек совпадения липшицевого и накрывающего отображений.

Ключевые слова: экономическое равновесие, транзакционные издержки, точки совпадения.

Результаты теории накрывающих отображений, в частности, теоремы о существовании точек совпадения накрывающего и липшицевого отображений можно применить для получения достаточных условий существования положения равновесия в моделях "спрос-предложение". В настоящей работе исследован вопрос существования вектора равновесных цен в модели конкурентного равновесия, в которой учитываются транзакционные издержки, связанные с продажей продукции. В отличие от работы [1], в рассматриваемой модели доли транзакционных издержек для различных типов продукции, вообще говоря, различны. Формализуем поставленную задачу. Рассмотрим метрические пространства X и Y с метриками ρ_X и ρ_Y соответственно. Замкнутый шар в пространстве X с центром в точке x радиуса r будем обозначать через $B_X(x,r)$, а замкнутый шар в пространстве Y с центром в точке y радиуса r — через $B_Y(y,r)$.

Определение 1 (см. [2]). *Пусть задано $\alpha > 0$. Отображение $D : X \to Y$ называется α-накрывающим, если*

$$D(B_X(x,r)) \supseteq B_Y(D(x), \alpha r) \ \ \forall r \geq 0 \quad \forall x \in X.$$

Теорема 1 (см. [2]). *Пусть пространство X полно, а $D, S : X \to Y$ – произвольные отображения, первое из которых непрерывно и является α-накрывающим, а второе удовлетворяет условию Липшица с константой Липшица $\beta < \alpha$. Тогда для произвольного $x_0 \in X$ существует такое $\xi = \xi(x_0) \in X$, что*

$$D(\xi) = S(\xi), \tag{1}$$

$$\rho_X(x_0, \xi) \leq \frac{\rho_Y(D(x_0), S(x_0))}{\alpha - \beta}.$$

Решение ξ уравнения (1) может быть не единственным. Это решение ξ называется точкой совпадения отображений D и S. Используя теорему 1, можем исследовать

вопрос о существовании равновесия в моделях “спрос-предложение”, в частности, возможно получить достаточные условия существования вектора равновесных цен в модели экономического равновесия с транзакционными издержками.

Рассмотрим модели поведения производителей и потребителей. Пусть имеется $n \in \mathbb{N}$ товаров, причем i-ый товар для потребителя имеет цену $p_i > 0$, $i = \overline{1,n}$. Предположим также, что цены $\tilde{p} = (\tilde{p}_1, \tilde{p}_2, \dots, \tilde{p}_n)$, по которым производитель реализует товары, меньше цен $p = (p_1, p_2, \dots, p_n)$, которые платит за них потребитель, причем $\tilde{p} = Ap$, где $A = \left(a_{ij}\right)$, $\alpha_{ij} \in (0;1)$ $\forall i, j = \overline{1,n}$.

Производственные возможности производителя описываются технологическим множеством $T \subset \mathbb{R}^{2n}_+$, $T = \left\{y = (y_+; y_-) | \varphi(y_+; y_-) \le 0, y_+, y_- \in \mathbb{R}^n_+\right\}$, где $\varphi : \mathbb{R}^{2n}_+ \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая и сильно выпуклая функция, $y_- = (y_{-1}, y_{-2}, \dots, y_{-n})$ — вектор затрат, а $y_+ = (y_{+1}, y_{+2}, \dots, y_{+n})$ — соответствующий ему вектор выпусков ($y_{+i} \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,n}$, — валовый выпуск i-ой продукции, $y_{-i} \in \mathbb{R}_+$, $i = \overline{1,n}$, — объем i-ой продукции, используемой при производстве 1-ой продукции в объеме y_{+1}, 2-ой продукции в объеме y_{+2}, …, n-ой продукции в объеме y_{+n}).

В производственном процессе используются все n видов ресурсов. Из всех возможных производственных процессов производитель выбирает тот, при котором прибыль максимальна. Таким образом, выбор производителя сводится к задаче отыскания условного экстремума функции прибыли:

$$\begin{cases} \langle (Ap; -p), (y_+; y_-) \rangle \to \max, \\ \varphi(y_+; y_-) \le 0, \\ (y_+; y_-) > 0. \end{cases} \tag{2}$$

Пусть $y^* = (y^*_+, y^*_-)$ — решение задачи (2). Тогда предложение производителя i-го товара $S_i(p) = y^*_+ - y^*_-$, $i = \overline{1,n}$.

Потребительские предпочтения потребителя, обладающего бюджетом $I(p)$, задаются функцией полезности $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$, являющейся дважды непрерывно дифференцируемой, строго вогнутой и не имеющей максимумов. Функция $I : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ является дифференцируемой положительно однородной первой степени, кроме того, существует число $C > 0$, такое что $I(p) \ge C||p||$ для любых $p \in \mathbb{R}^n_+$. Предположим также, что потребитель приобретает все n видов товаров, причем, приобретая набор товаров $y = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n_+$, потребитель приобретает y_1 единиц 1-го товара, y_2 единиц 2-го товара, …, y_n единиц n-го товара

Выбор потребителя сводится к задаче отыскания условного экстремума функции полезности:

$$u(y) \to \max, \ \langle p, y \rangle \le I(p), \ \ y > 0.$$

Спрос потребителя задается отображением

$$D : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+, \ D(p) = \operatorname{Argmax}\left\{u(y) | y \in \mathbb{R}^n_+, \langle p, y \rangle \le I(p)\right\}.$$

Рассмотрим модель экономического равновесия, описываемую набором данных $\sigma = (A, \varphi, u, I, c_1, c_2)$, где $A = (\alpha_{ij})$, $\alpha_{ij} \in (0,1)$ $\forall i, j = \overline{1,n}$ — заданные числа, $\varphi : \mathbb{R}^{2n}_+ \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая, сильно выпуклая функция, $u : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}$ — дважды непрерывно дифференцируемая, строго вогнутая функция, $I : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+$ — дифференцируемая положительно однородная первой степени функция, $c_1 = (c_{11}, ..., c_{n1})$, $c_2 = (c_{12}, ..., c_{n2}) \in \mathbb{R}^n_+$ — заданные векторы, причем $c_{i1} < c_{i2}$, $i = \overline{1,n}$.

Набор (α, φ, u, I) однозначно определяет функции спроса $D : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, $D(\cdot) = (D_1(\cdot), ..., D_n(\cdot))$ и предложения $S : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}^n_+$, $S(\cdot) = (S_1(\cdot), ..., S_n(\cdot))$. Числа α_{ij} $\forall i, j = \overline{1,n}$ — числа, характеризующие размеры транзакционных издержек производителей. Компоненты векторов c_1, c_2 определяют естественные ограничения на цены товаров, т.е. предполагается, что $c_{i1} \le p_i \le c_{i2}$, $i = \overline{1,n}$. Множество наборов $\sigma = (\alpha, \varphi, u, I, c_1, c_2)$, для которых выполнены неравенства $c_{i2} > c_{i1}$, $i = \overline{1,n}$, обозначим через Σ.

Определение 2. *Вектор $p \in \mathbb{R}^n_+$ называется вектором равновесных цен в модели σ, если $S(p) = D(p)$.*

В пространстве $\mathbb{R}^n$ определим нормы по формулам

$$\|x\|_1 = 2 \max_{i=\overline{1,n}} \frac{|x_i|}{c_{i2} - c_{i1}}, \quad \|x\|_2 = \max_{i=\overline{1,n}} |x_i| \quad \forall\, x = (x_1, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n.$$

Рассмотрим метрические пространства (X, ρ_X) и (Y, ρ_Y), где $X = \mathbb{R}^n_+$, $Y = \mathbb{R}^n_+$, метрика ρ_X определяется нормой $\|\cdot\|_1$, а метрика ρ_Y — нормой $\|\cdot\|_2$.

Положим $\tilde{c} = \frac{c_1 + c_2}{2}$, $M = B_X(\tilde{c}, 1)$.

Введем обозначения

$$\tilde{\alpha}(\sigma) = 2\left(||\bar{\lambda}||_C \max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i2}}{c_{i2} - c_{i1}}\right)^{-1} \max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2} - c_{i1}} \min_{p \in M} \sum_{i=1}^{n} |I'_{p_i}(p) - y_i(p)| u_2 -$$

$$-(n+1)||u_1||_C||\bar{\lambda}||_C \left(\max_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i1}}{c_{i2} - c_{i1}}\right)^{-1},$$

$$\tilde{\beta}(\sigma) = \frac{n+1}{2} \min_{i=\overline{1,n}} \frac{c_{i2} - c_{i1}}{c_{i1}} ||\varphi_1||_C ||\lambda||_C, \quad \tilde{\gamma}(\sigma) = \max_{i=\overline{1,n}} |\bar{y}_i - \bar{y}_{+i} + \bar{y}_{-i}|,$$

где

$$\varphi_1(y_+; y_-) = ||\varphi'(y_+; y_-)||, \quad u_1(y) = ||u'(y)||, \quad u_2(y) = ||u''(y)||,$$

$\lambda(y_+; y_-) = \max\limits_{i=\overline{1,2n}} \left(\lambda_i(y_+; y_-)\right)^{-1}$, $\lambda_i(y_+; y_-)$, $i = \overline{1,2n}$, — собственные значения матрицы $\varphi''(y_+; y_-)$, $\bar{\lambda}(y) = \max\limits_{i=\overline{1,n}} \left|\bar{\lambda}_i(y)\right|^{-1}$, $\bar{\lambda}_i(y)$, $i = \overline{1,n}$, — собственные значения матрицы $u''(y)$,

$\forall p \in M$ $y = y(p)$ — решение задачи

$$\begin{cases} u(y) \to \max, \\ \langle p, y \rangle \le I(p), \\ y \ge 0, \end{cases}$$

$\bar{y}$ — решение задачи

$$\begin{cases} u(y) \to \max, \\ \langle c_1 + c_2, y \rangle \le I(c_1 + c_2), \\ y \ge 0, \end{cases}$$

$(\bar{y}_+, \bar{y}_-)$ — решение задачи

$$\begin{cases} \langle (A(c_1 + c_2); -c_1 - c_2), (y_+; y_-) \rangle \to \max, \\ \varphi(y_+; y_-) \le 0, \\ (y_+; y_-) \ge 0. \end{cases}$$

Теорема 2. *Пусть модель $\sigma \in \Sigma$ удовлетворяет условиям:*
1) $\tilde{\alpha}(\sigma) > \tilde{\beta}(\sigma)$*;*
2) $\tilde{\gamma}(\sigma) < \tilde{\alpha}(\sigma) - \tilde{\beta}(\sigma)$.
Тогда в исследуемой модели существует вектор равновесных цен $p = (p_1, ..., p_n)$ *такой, что* $c_{i1} < p_i < c_{i2}$, $i = \overline{1, n}$.

Доказательство основано на применении теоремы 1 и лемм 1-3 из [1] к отображениям спроса и предложения в исследуемой модели.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 17-01-00849).

Литература

1. Арутюнов А.В., Павлова Н.Г., Шананин А.А. *Равновесные цены в одной модели экономического равновесия* // Матем. моделирование. – 2016. – Т. 28. – № 3. – С. 3–22.

2. Арутюнов А.В. *Точки совпадения двух отображений* // Функц. анализ и его прил. – 2014. – Т. 48. – № 1. – С. 89–93.

APPLICATION OF THE COVERING MAPPINGS THEORY TO STUDY OF ECONOMIC MODELS

N.G. Pavlova

We study the existence of equilibrium price vector in a concurrent equilibrium model. In this model, the demand function is obtained as the solution of the problem of maximizing the utility function under budget constraints, and the supply function is obtained as the solution of the problem of profit maximization given transaction losses on the technology set. We establish sufficient conditions for the existence of equilibrium price vector. These conditions are consequences of general existence theorems for coincidence points of a Lipschitz and covering mappings.

Keywords: economic equilibrium, transaction costs, coincidence points.

УДК 517.956

ТЕОРИЯ НЕКОТОРЫХ ПЕРЕОПРЕДЕЛЕНЫХ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ПЕРВОГО И ВТОРОГО ПОРЯДКОВ

Р. Пиров[1]

1 *pirov _60@mail.ru*; Таджикский государственный педагогический Университет имени С. Айни

Рассматриваются квазилинейные и нелинейные системы дифференциальных уравнении в частных производных первого и второго порядков с одной и двумя неизвестными функциями. Получены явные условии совместности, обеспечивающее однозначную разрешимости задач с начальными данными.

Ключевые слова: переопределенные системы, условия совместности, многообразия решений, операции перекрестного дифференцирования.

1. В последние десятилетия достаточно широко изучались регулярные системы вида

$$\frac{\partial U_k}{\partial x_j} = f^{kj}(x_1, x_2, x_3, ..., x_n; U_1, U_2, U_3, ..., U_m), k = \overline{1, m}, j = \overline{1, n}, \quad (1)$$

в которых задаются производные от всех функций по переменным. Такие системы называют системами в полных дифференциалах. Если все равенства перекрестного дифференцирования выполняются тождественно относительно искомых функций, то система называется полной. Многообразие решений, содержащее не более чем конечное число произвольных постоянных, называется тривиальным. Для существования решений системы (1) необходимо и достаточно, чтобы она была полной.

2. Рассмотрим квазилинейную систему [2]

$$U_x, U_y, V_x = f^i(x, y; U, V), \;\; i = 1, 2, 3. \tag{2}$$

Если все $f^i \in C^1$, то совершая операцию перекрестного дифференцирования и предполагая $f^1_V \neq 0$, получим

$$V_y = f^4(x, y; U, V). \tag{3}$$

Тем самым мы приходим к системе четырёх уравнений, по форме, совпадающей с системой в полных дифференциалах. Следующая операция перекрестного дифференцирования 3-го уравнения из (2) с уравнением (3) приводит к функциональному соотношению

$$H(x, y; U, V) = 0. \tag{4}$$

Если (4) выполняется тождественно по U, V, тогда (2), (3) – вполне интегрируемая система в полных дифференциалах, и для неё справедлива известная теорема существования и единственности задачи с начальными данными

$$[U]_0 = c_1, \;\; [V]_0 = c_2 \tag{5}$$

(индексом “ноль” здесь и всюду ниже обозначаем значение функций в начальной точке (x_0, y_0)). В этом случае типичной является возможность разрешения (4) в виде $V = \psi(x, y, U), \psi \in C^1$. Тогда это соотношение преобразует систему (2), (3) к системе в полных дифференциалах для $U = U(x, y)$, а последние два уравнения превратятся в условия полной интегрируемости. Эти результаты составляют содержание теоремы о существовании и единственности задачи

$$[U]_0 = c_1. \tag{6}$$

Дальнейшие исследования относятся к случаям системы (2), когда первое уравнение содержит только одну искомую функцию U. В данной ситуации перекрестное дифференцирование двух первых уравнений после подстановки Vx из третьего сразу приводит к функциональному соотношению

$$h(x, y; U, V) = 0, \tag{7}$$

причём, если считать заданными два первых уравнения, то из них можно воспроизвести третье уравнение. Имеются два различных подслучая: 1) когда (7) выполняется тождественно по U, V и 2) когда (7) выполняется не тождественно. В случае 1) мы приходим к системе двух уравнений, где второе уравнение позволяет выражать вторую функцию через первую, после чего будет только одно уравнение. Таким образом, получается, что в этом случае для системы (2) надо ставить задачу

$$[U]_x = x_0 = \varphi(y), \;\; \varphi \in C^1, \tag{8}$$

которая будет иметь решение и притом единственное.
3. В монографии [2] рассматривались системы уравнений в частных производных первого порядка с одной неизвестной функцией. В [4] и [5] изучены некоторые квазилинейные системы второго порядка с одной неизвестной функцией. Эти исследования были продолжены в работах [6] - [8]. В данной работе рассматриваются нелинейные системы четырех д.у. второго порядка, где неизвестная функция зависит от трех независимых переменных, а правые части содержат нелинейным образом одну или две из производных $U_{xx}, U_{yy}, U_{zz}, U_{xy}, U_{yz}, U_{xz}$. Ограничимся рассмотрением по одной системе из каждой группы, а именно:

$$U_{xx}, U_{xy}, U_{xz}, U_{yz} = f^i(x, y, z, U, U_x, U_y, U_z, U_{yy}),\ i = \overline{1,4}. \tag{9}$$

В этой системе $U = U(x, y, z)$ – неизвестная функция, которая ищется в классе $C^4(\prod_0)$; здесь

$$\Pi_0 = \{(x, y, z) : |x - x_0| \le a, |y - y_0| \le a, |z - z_0| \le a\}$$

при некотором $a > 0$. Основной метод исследования вышеуказанных систем состоит в замене производных первого и второго порядков на новые неизвестные функции, переходе к системам с большим числом неизвестных и в установлении связей с достаточно изученными (см., например, [9]) системами в полных дифференциалах (п.д.-системы).

Получены следующие результаты: пусть $f^i \in C^2(\Pi)$, при $f^2_W \neq 0$ и $f^2_\tau \cdot f^4_\tau - f^3_\tau \neq 0$. Если тождественно относительно U, U_x, U_y, U_z, U_{yy} выполняются девять условий (см. (2.8) из [10]) и $\alpha < \min(a; \frac{b}{M}, M = \max|f^i|$, то на $\Pi(\alpha, b)$, задача (9) с начальными условиями $[U]_0 = c_1, [U_x]_0 = c_2, [U_y]_0 = c_3, [U_z]_0 = c_4, [U_{yy}]_0 = c_5$ в классе $C^4(\Pi_0)$ разрешима единственным образом.

Пример. $U_{xx} = U_{yy}, U_{xy} = U_z, U_{xy} = -U_{yy}, U_{yz} = -U_{yy}$. Тогда

$$U(x, y, z) = c_1 e^{-x-y+z} + c_2(xy + z) + c_3 y + c_4 x + c_5.$$

Литература

1. Смирнов В.И. *Курс высшей математики*. Т. IV. – М.-Л.: ГИТТЛ, 1951.

2. Михайлов Л.Г., Пиров Р. *О некоторых квазилинейных переопределённых системах уравнений в частных производных с двумя неизвестными функциями* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1981. – Т. 24, № 2. – С. 90-93.

3. Goursat E. *Lecons sur l'inteqration des equations aux derivees partielles du premier ordre*. – Paris, 1921. – 454 p.

4. Пиров Р. *О некоторых линейных системах трёх дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1982. – Т. 25, № 1. – С. 10–14.

5. Пиров Р. *О некоторых линейных системах трёх дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1983. – Т. 26, №3. – С. 138–142.

6. Пиров Р. *Исследование общей линейной системы трёх дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости* // Тез. Респ. научн. конф. по уравн. матем. физики. – Душанбе, 1983. – С. 35–37.

7. Пиров Р. *Исследование некоторых нелинейных переопределённых систем дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями на плоскости* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1983. – Т. 26, № 12. – С. 747–750.

8. Пиров Р. *О некоторых нелинейных системах четырёх уравнений в частных производных первого порядка с двумя неизвестными функциями от трёх переменных* // Докл. АН Тадж. ССР. – 1987. – Т. 30, № 3. – С. 145–149.

9. Пиров Р. Автореф. дис... канд. физ.-мат. наук. – Душанбе, 1984. – 11 с.

10. Пиров Р. *Об условиях совместности и многообразиях решений некоторых классов переопределенных систем дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка* // Уфимский матем. журнал. – 2016. – Т. 8, № 2. – С. 59-66.

THEORY OF SOME OVERDETERMINED SYSTEMS OF PARTIAL DIFFERENTIAL EQUATIONS OF THE FIRST AND SECOND ORDER

R. Pirov

Quasilinear and nonlinear systems of the first and second order partial differential equations with one and two unknown functions are considered. Explicit compatibility conditions are obtained ensuring unambiguous solvability of problems for the systems with initial data.

Keywords: overdetermined sistems, compaibility conditions, manifolds of solutions, cross diffrention.

УДК 517.977

ВЫЧИСЛЕНИЕ СУБДИФФЕРЕНЦИАЛОВ ДЛЯ РАЗНОСТИ ВЫПУКЛЫХ ФУНКЦИЙ

Е.С. Половинкин[1]

1 *polovinkin.es@mipt.ru*; Московский физико-технический институт

При исследовании негладких непрерывных функций $f : X \to \mathbb{R}^1$ на локальный минимум или максимум в некоторой точке $x_0 \in X$ необходимое условие экстремума принимает вид включения: $0 \in \partial_C f(x_0)$, где $\partial_C f(x_0)$ означает субдифференциал Кларка. В более сложных задачах математической теории управления также возникает необходимость вычисления субдифференциалов типа субдифференциала Кларка. Однако вычисление этих субдифференциалов для негладкой и невыпуклой функции само является не простой задачей. В данном докладе выявлен достаточно широкий класс негладких функций, которые мы назвали слабо регулярными функциями, для которого получены формулы вычисления различных производных по направлениям, а с ними и субдифференциалов, включая субдифференциалы Кларка, Мишеля-Пено и другие. В частности это позволяет вычислять субдифференциалы для функций, представимых в виде разности двух локально липшицевых выпуклых функций.

Ключевые слова: негладкий анализ, выпуклая функция, слабо регулярная функция, производная по направлениям, субдифференциал Кларка.

Пусть X — действительное банахово пространство. Через $B_r(x_0) \doteq \{x \in X \mid \|x - x_0\| < r\}$ обозначаем открытый шар с центром в точке x_0 радиуса $r > 0$ в пространстве X. Для всякой функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ определим множество $\operatorname{dom} f := \{x \in X \mid f(x) \neq \infty\}$.

Как обычно, классическую производную функции $f : X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ по направлению $u \in X$ определяем из выражения

$$f'(x_0, u) := \lim_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)).$$

Также рассмотрим следующие определения M-производных для локально липшицевой функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ по направлению $u \in X$, где индекс M выбирается из множества $\{U, L, C, AL, MP\}$, индекс "U" обозначает верхнюю производную [1, 2, 5], индекс "L" – нижнюю [2, 5], индекс "C" – производную Кларка [1, 2], индекс "AL" – асимптотически нижнюю [4, 5], индекс "MP" – производную Мишеля-Пено [3, 5]. Таким образом получаем

Определение 1. *Каждая M-производная (где $M \in \{U, L, C, AL, MP\}$) функции f в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ по направлению $u \in X$ определяется следующими выражениями*

$$D^+_U f(x_0)(u) := \liminf_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)),$$

$$D^+_L f(x_0)(u) := \limsup_{\lambda \downarrow 0} \lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda u) - f(x_0)),$$

$$D^+_C f(x_0)(u) := \limsup_{\substack{\lambda, x: \\ \lambda \downarrow 0, x \to x_0}} \lambda^{-1}(f(x + \lambda u) - f(x)),$$

$$D^+_{AL} f(x_0)(u) := \sup_{w \in X} (D^+_L f(x_0)(u + w) - D^+_L f(x_0)(w)),$$

$$D^+_{MP} f(x_0)(u) := \sup_{w \in X} \{\limsup_{\lambda \downarrow 0} (\lambda^{-1}(f(x_0 + \lambda(u + w)) - f(x_0 + \lambda w)))\}.$$

Определение 2. *M-субдифференциалом функции $f\colon X \to \overline{\mathbb{R}^1}$ в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ (для любого индекса $M \in \{C, MP, AL\}$) называется множество из сопряженного пространства X^*, задаваемое по формуле*

$$\partial^+_M f(x_0) := \{p \in X^* \mid \langle p, x \rangle \le D^+_M f(x_0)(x) \quad \forall\, x \in X\}.$$

Лемма 1. *Пусть $f\colon X \to \mathbb{R}^1$ – локально липшицевая в точке $x_0 \in \operatorname{dom} f$ функция. Допустим, что для всех $u \in X$ существуют конечные классические производные по направлениям в точке x_0, т.е.*

$$f'(x_0, u) = D^+_L f(x_0)(u) = D^+_U f(x_0)(u), \quad \forall\, u \in X.$$

Тогда M-производные $D^+_M f(x_0)(u)$ для $M \in \{MP, AL\}$ совпадают при всех $u \in X$, и справедлива формула

$$D^+_M f(x_0)(u) = \sup_{w \in X} (f'(x_0, u + w) - f'(x_0, w)).$$

Теорема 1. *Пусть функция $f\colon B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ такова, что существуют две непрерывные выпуклые функции $f_1, f_2 : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ такие, что $f(x) = f_1(x) - f_2(x)$ для всех $x \in B_r(x_0)$, а для некоторого $u \in X$ одна из функций f_k, $k \in \overline{1,2}$, удовлетворяет условию $f'_k(x_0, u) + f'_k(x_0, -u) = 0$ (например, если функция дифференцируема по Гато в точке*

x_0). Тогда для этого $u \in X$ и для всех $M \in \{C, MP, AL\}$, M-производные $D^+_M f(x_0)(u)$ совпадают, и справедлива следующая формула

$$D^+_M f(x_0)(u) = f'_1(x_0, u) + f'_2(x_0, -u).$$

Определение 3. *Для непрерывной функции $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$, у которой существует конечная классическая производная по всем направлениям в точке $x_0 \in X$, определим на $B_r(x_0)$ функции g и φ по формулам*

$$g(x) := f(x_0) + f'(x_0, x - x_0), \quad \varphi(x) := f(x) - g(x). \tag{1}$$

Таким образом, функция f в окрестности $B_r(x_0)$ точки x_0 представлена как сумма ее квазилинейной части g и o-малого остатка φ. Очевидно, что функции g и φ в точке x_0 имеют конечные классические производные по направлениям, и, кроме того, справедливы равенства

$$g'(x_0, u) = f'(x_0, u), \quad \varphi'(x_0, u) = 0 \quad \forall u \in X.$$

Более того, для всех $u \in X$ очевидно справедливы следующие неравенства

$$D^+_C f(x_0)(u) \geq D^+_{AL} f(x_0)(u) = D^+_{AL} g(x_0)(u) = D^+_C g(x_0)(u) \geq f'(x_0, u),$$

$$D^+_{MP} \varphi(x_0)(u) = 0,$$

из которых, в частности, следует неравенство $0 \leq D^+_C \varphi(x_0)(u)$ при всех $u \in X$, что эквивалентно неравенству $0 \in \partial^+_C \varphi(x_0)$.

Определение 4. *Непрерывная функция $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ называется слабо регулярной в точке $x_0 \in X$, если она имеет в точке x_0 конечную классическую производную по направлениям, а соответствующая функция φ, определенная в (1), удовлетворяет условию Липшица в некоторой окрестности точки x_0 и справедливо равенство $\partial^+_C \varphi(x_0) = \{0\}$, т.е. $D^+_C \varphi(x_0)(u) = 0$ при всех $u \in X$.*

Приведем некоторые классы слабо регулярных функций.

1) Всякая положительно однородная непрерывная функция является слабо регулярной в точке $0 \in X$, так как соответствующая ей по (1) функция $\varphi(u) = 0$.

2) Всякая непрерывная функция, которая в точке x_0 имеет конечную производную по направлениям, и для которой соответствующая функция φ из (1) является выпуклой (или вогнутой) и ограниченной в некоторой окрестности точки x_0, является слабо регулярной в этой точке.

3) Локально выпуклая (или локально вогнутая) непрерывная функция f является слабо регулярной в точке x_0, если для всех $u \in X$ справедливо равенство $f'(x_0, u) + f'(x_0, -u) = 0$. В частности, всякая локально выпуклая (или локально вогнутая) функция, дифференцируемая в точке x_0 по Гато, является слабо регулярной в этой точке.

4) Всякая непрерывная функция $f : X \to \mathbb{R}^1$, сильно дифференцируемая в точке x_0, является слабо регулярной в точке x_0.

В то же время, невыпуклая (и невогнутая) функция, дифференцируемая в точке x_0 по Фреше, может оказаться не слабо регулярной в этой точке. Например, функция $f : \mathbb{R}^1 \to \mathbb{R}^1$ вида $f(x) = x^2 \sin \frac{1}{x}$ для $x \neq 0$ и $f(0) = 0$ является дифференцируемой, но

она не является слабо регулярной в нуле, так как здесь $f'(0,u) = 0$, $\varphi(x) = f(x)$ и $D_C^+\varphi(0)(u) = |u|$ для всех $u \in \mathbb{R}^1$.

Множество всех слабо регулярных функций вида $f : X \to \mathbb{R}^1$ образует алгебру функций, т.е. справедлива следующая

Теорема 2. *Пусть числа $\alpha, \beta \in \mathbb{R}^1$, а функции $f, g : X \to \mathbb{R}^1$ слабо регулярны в точке $x_0 \in X$. Тогда также будут слабо регулярными в точке x_0 следующие функции:*

$$1. \quad \alpha f + \beta g; \qquad 2. \quad f \cdot g; \qquad 3. \quad \frac{f}{g}, \quad \text{если} \quad g(x_0) \neq 0.$$

Основное свойство слабо регулярных функций содержится в следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть функция $f : B_r(x_0) \to \mathbb{R}^1$ является слабо регулярной в точке x_0. Тогда для любого $M \in \{C, MP, AL\}$ все M-производные функции f совпадают, при этом справедливо равенство*

$$D_M^+ f(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)), \quad \forall u \in X.$$

При этом равенство производных влечет равенство субдифференциалов $\partial_C^+ f(x_0) = \partial_{MP}^+ f(x_0) = \partial_{AL}^+ f(x_0)$.

Следствие. *Пусть функция $f: X \to \mathbb{R}^1$ представима в окрестности точки x_0 в виде разности двух выпуклых слабо регулярных функций f_1 и f_2, т.е. $f = f_1 - f_2$. Тогда все M-производные функции f в точке x_0 совпадают, т.е. для любого $M \in \{C, MP, AL\}$ справедливо равенство*

$$D_M^+ f(x_0)(u) = \sup_{w \in X}(f'(x_0, u+w) - f'(x_0, w)), \quad \forall u \in X,$$

которое влечет равенство субдифференциалов $\partial_C^+ f(x_0) = \partial_{MP}^+ f(x_0) = \partial_{AL}^+ f(x_0)$.

В докладе приводятся качественные примеры невыпуклых положительно однородных функций, для которых вычислены M-субдифференциалы. Также приведен пример выпуклой функции, которая не является слабо регулярной в некоторых точках. Этот пример показывает, что из регулярности функции по Кларку (какой является всякая выпуклая функция) может не следовать слабая регулярность этой функции. Верно также и то, что из слабой регулярности функции может не следовать ее регулярность по Кларку. Полное доказательство всех результатов можно найти в работе [6].

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00259а).

Литература

1. Clarke F. H. *Generalized Gradients and Applications* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1975. – V. 205. – P. 247–262.

2. Clarke F. H. *Optimization and Nonsmooth Analysis*. – New York: Wiley–Interscience, 1983.

3. Michel P., Penot J.-P. *Calcul sous-différentiel pour les fonctions lipschitziennes et non-lipschitziennes* // C. R. Acad. Sc. Paris. Ser. I. – 1984. – V. 298. – P. 269–272.

4. Aubin J.-P., Frankovska H. *Set-Valued Analisys*. – Boston-Basel-Berlin: Birkhäuser, 1990.

5. Polovinkin E. S. *Differential Inclusions with Measurable-Pseudo-Lipschitz Right-hand Side* // Proceedings of the Steklov Institute of Mathematics. – 2013. – V. 283. – P. 116–135.

6. Polovinkin E. S. *Calculation of Subdifferentials for the Difference of Two Convex Functions* // J. of Convex Analysis. – 2017. – V. 24, No. 1. – P. 286–303.

CALCULATION OF SUBDIFFERENTIALS FOR THE DIFFERENCE OF CONVEX FUNCTIONS

E.S. Polovinkin

It is shown that for some classes of functions all epiderivatives and subdifferentials of F. H. Clarke, P. Michel - J.-P.Penot type and others coincide. Several rules of calculation of subdifferentials for the difference of two convex functions are obtained. Some examples are considered.

Keywords: nonsmooth analysis, convex function, semiregular function, directional derivatives, subdifferentials.

УДК 514.752, 514.764.274, 517.97

УСЛОВИЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭКСТРЕМАЛЬНЫХ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Н.М. Полубоярова[1]

1 *natasha_medvedeva@volsu.ru*; Волгоградский государственный университет

В работе описывается получение условия устойчивости экстремальной поверхности. Поскольку экстремали рассматриваемых в работе функционалов моделируют, например, физические равновесные жидкости в гравитационном поле с потенциалом, тентовые покрытия, то весьма актуальной является задача определения их устойчивости.

Ключевые слова: вариация функционала, экстремальная поверхность, функционал типа площади, функционал объемной плотности сил, функционал потенциальной энергии, устойчивость.

Введение

В работе представлено исследование устойчивости экстремалей функционала потенциальной энергии. Так же как минимальные поверхности суть экстремали функционала площади, так и рассматриваемые нами гладкие поверхности – экстремали специального функционала, который является линейной комбинацией функционала типа площади и функционала от объемной плотности сил.

Подобные экстремальные поверхности моделируют состояния равновесных жидкостей в гравитационном поле с потенциалом, тентовые покрытия, магнитные жидкости, капиллярные поверхности. Поэтому их изучение на устойчивость и неустойчивость не теряет актуальности, а исследуемые функционалы усложняются, чтобы вместить больше информации о физических характеристик системы.

Области устойчивости и неустойчивости минимальных поверхностей искали различными методами, как аналитическими, например, с помощью вариаций

функционала площади, индексов поверхностей, так и с применением геометрических свойств поверхностей, например, с применением отображений и модульно-емкостной техники. Имеется широкий спектр работ, посвященных исследованию устойчивости минимальных поверхностей в евклидовом и псевдоевклидовом пространствах, в частности, работы Ю. А. Аминова, В. А. Клячина, В. М. Миклюкова, А. В. Погорелова, В. Г. Ткачева, А. А. Тужилина, А. Т. Фоменко, М. до Кармо, Ч. К. Пенга, Ш. Яу, Р. Финна, Дж. Саймонса и др.

В этой работе предлагается ввести величину, похожую на основную частоту, при помощи которой задача устойчивости сводится к поиску решения дифференциального неравенства. В [1] показано, что в метрике поверхности существует решение уравнения Якоби.

Постановка задачи

Пусть M – n-мерное связное ориентируемое многообразие класса C^2. Рассмотрим ориентируемую гиперповерхность $\mathscr{M} = (M, u)$, полученную C^2-погружением $u : M \to \mathbb{R}^{n+1}$. Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^{n+1}$ некоторая область, такая что $\mathscr{M} \subset \partial\Omega$; Φ, $\Psi : \mathbb{R}^{n+1} \to \mathbb{R}$ — C^2-гладкие функции. Если ξ поле единичных нормалей к поверхности $\mathscr{M}$, то для любой C^2-гладкой поверхности $\mathscr{M}$ определена величина

$$W(\mathscr{M}) = \int\limits_{\mathscr{M}} \Phi(\xi)\, d\mathscr{M} + \int\limits_{\Omega} \Psi(x)\, dx, \tag{1}$$

которая не зависит от выбора нормали ξ. Функционал (1) назовем функционалом потенциальной энергии.

Поверхность $\mathscr{M}$ является *экстремальной*, если первая вариация функционала (1) равна нулю при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathscr{M}$. Экстремальная поверхность $\mathscr{M}$ *устойчива*, если вторая вариация функционала (1) знакоопределена при всех бесконечно малых деформациях поверхности $\mathscr{M}$, иначе – *неустойчива*.

Обозначим

$$G = \{G_{ij}\}_{i,j=1}^{n+1},\ G_{ij} = \frac{\partial^2 \Phi}{\partial \xi_i \partial \xi_j} + \delta_{ij}(\Phi - \langle D\Phi, \xi\rangle), \tag{2}$$

где $D\Phi = \left(\dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_1}, \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_2}, \ldots, \dfrac{\partial \Phi}{\partial \xi_{n+1}}\right)$, δ_{ij} – символ Кронекера; k_i – главные кривизны; E_i – главные направления поверхности.

Теорема 1. *Если* $W(t) = W(\mathscr{M}_t)$, *то*

$$W'(0) = \int\limits_{\mathscr{M}} (\operatorname{div}(D\Phi(\xi))^T - nH\Phi(\xi) + \Psi(x))h(x)\, d\mathscr{M},$$

где div *– дивергенция в метрике поверхности* $\mathscr{M}$, $H = \langle \vec{H}, \xi\rangle$ *– средняя кривизна поверхности* $\mathscr{M}$ *относительно нормали* ξ. *Более того, если* $W'(0) = 0$ *для любой функции* $h(x) \in C_0^1(\mathscr{M})$, *то выполнено*

$$W''(0) = \int\limits_{\mathscr{M}} \left\{ G(\nabla h, \nabla h) + h^2 \left(\langle \overline{\nabla}\Psi(x), \xi\rangle - \sum_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) \right) \right\} d\mathscr{M}, \tag{3}$$

где G – квадратичная форма, соответствующая матрице (2).

Замечание. Вариации для функционала типа площади были получены в [2].

Признак устойчивости экстремальной поверхности

Далее будем полагать, что матрица G из (2) положительно определена и $\langle \overline{\nabla}\Psi, \xi \rangle \le 0$. Введем величину

$$\mu(\mathcal{M}) = \inf \frac{\int\limits_{\mathcal{M}} G(\nabla h, \nabla h)\, d\mathcal{M}}{\int\limits_{\mathcal{M}} Qh^2\, d\mathcal{M}},$$

где $Q = \sum\limits_{i=1}^{n} k_i^2 G(E_i, E_i) - \langle \overline{\nabla}\Psi, \xi \rangle$, а точная нижняя грань взята по всем липшицевым функциям $h(m) : M \to \mathbb{R}$ таким, что $\int\limits_{\mathcal{M}} h(m)\, d\mathcal{M} = 0$.

Поскольку (3) выполнено для любой функции $h(x) \in C_0^1(\mathcal{M})$, то для определенности запишем условие в виде

$$h(x)|_{\partial\mathcal{M}} = 0, \quad \int\limits_{\mathcal{M}} h(x)\, d\mathcal{M} = 0.$$

Пусть λ и Λ – минимальное и максимальное по модулю собственные значения матрицы (2). Тогда справедлива

Теорема 2. *Если найдется положительная C^2-функция $u(x) : \mathcal{M} \to \mathbb{R}$, удовлетворяющая в метрике поверхности $\mathcal{M}$ дифференциальному неравенству*

$$\triangle u(x) \le -\frac{Q}{\lambda} u(x),$$

то $\mu(\mathcal{M}) \ge 1$ и поверхность $\mathcal{M}$ устойчива.

Замечание. В [3] был доказан результат аналогичный теореме 2 для другого функционала на поверхностях постоянной средней кривизны.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 15-41-02479 р_поволжье_а).

Литература

1. Simons J. *Minimal varieties in riemannian manifolds* // Ann. of Math. – 1968. – V. 88, № 1. – P. 62–105.

2. Клячин В. А., Медведева Н. М. *Об устойчивости экстремальных поверхностей некоторых функционалов типа площади* // Сиб. электр. матем. известия. Статьи. – 2007. – Т. 4. – С. 113–132.

3. Клячин В. А. *О некоторых свойствах устойчивых и неустойчивых поверхностей предписанной средней кривизны* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2006. – Т. 70. – № 4. – С. 77–90.

A CONDITION FOR STABILITY OF EXTREMAL SURFACES

N.M. Poluboyarova

We obtain a condition of stability for an extremal surface. The extremals of the studied functional

simulate, for example, states of equilibrium liquids in a gravitational field with a potential and awning coverings. Therefore, the problem of their stability is important.

Keywords: the variation of functional, extreme surface, functional type area, volumetric power density functional, the functional of potential energy, the stability.

УДК 517.54

ГИПОТЕЗА БОМБИЕРИ ДЛЯ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ КРУГА

Д.В. Прохоров[1]

1 *prokhorovdv@info.sgu.ru*; Саратовский государственный университет, Петрозаводский государственный университет

Числа Бомбиери σ_{mn} характеризуют поведение тела коэффициентов для класса S всех голоморфных и однолистных в единичном круге функций f, нормированных разложением $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. Число σ_{mn} вычисляется как предел отношения $Re\,(n - a_n)$ и $Re\,(m - a_m)$ при f, стремящемся к функции Кебе $K(z) = z(1-z)^{-2}$. В частности, $\sigma_{23} = 0$. Мы определяем аналогичные числа $\sigma_{mn}(M)$ для класса $S(M) \subset S$ ограниченных функций $|f(z)| < M$, $|z| < 1$, $M > 1$, с пределом отношения $Re\,(p_n(M) - a_n)$ и $Re\,(p_m(M) - a_m)$ при f, стремящемся к функции Пика $P_M(z) = MK^{-1}(K(z)/M) = z + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(M) z^n$. Мы доказываем, что $\sigma_{23}(M) = -4/M$, $M > 1$. Это совместная работа с В. Г. Гордиенко.

Ключевые слова: однолистная функция, число Бомбиери, функция Кебе, функция Пика.

Пусть S обозначает класс всех голоморфных и однолистных в единичном круге $\mathbb{D} = \{z : |z| < 1\}$ функций

$$f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n.$$

В течение долгой истории теории однолистных функций знаменитая функция Кебе

$$K(z) = \frac{z}{(1-z)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} n z^n \in S$$

оказывалась экстремальной во многих задачах на классе S.

Э. Бомбиери [2] доказал локальную гипотезу Бибербаха об оценке $|a_n| \le n$, $n \ge 2$, в классе S и в той же статье поставил задачу найти числа, называемые сейчас числами Бомбиери,

$$\sigma_{mn} := \liminf_{a_m \to m} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m} = \liminf_{S \ni f \to K} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m}, \quad m, n \ge 2, \tag{1}$$

где f стремится к K локально равномерно внутри $\mathbb{D}$. Выполнив так называемые вещественные вариации в окрестности функции Кебе, Бомбиери выдвинул гипотезу, что $\sigma_{mn} = B_{mn}$, где

$$B_{mn} := \min_{\theta \in [0, 2\pi]} \frac{n \sin\theta - \sin(n\theta)}{m \sin\theta - \sin(m\theta)},$$

и доказал, что $\sigma_{mn} \le B_{mn}$ для $m = 3$ и нечетных n, см. также результаты в [4] и [5]. Бшути и Хенгартнер [5] доказали гипотезу Бомбиери в классе S_R функций $f \in S$ с

вещественными коэффициентами своего тейлоровского разложения. Поскольку согласно локальной гипотезе Бибербаха, доказанной Бомбиери в [2], и доказательству де Бранжа [3] глобальной гипотезы Бибербаха, $B_{mn} \geq 0$ и $\sigma_{mn} \geq 0$, и из результатов [5] следует, что $\sigma_{mn} = 0$ при условии, что $B_{mn} = 0$. Действительно, в этом случае

$$\sigma_{mn} = \liminf_{S \ni f \to K} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m} \leq \liminf_{S_R \ni f \to K} \frac{n - \operatorname{Re} a_n}{m - \operatorname{Re} a_m} = B_{mn} = 0.$$

В частности, $\sigma_{23} = B_{23} = 0$, что может быть установлено непосредственно.

Гипотеза Бомбиери во всем классе S была опровергнута Грайнером и Ротом в [8] для $n = 2$ и $m = 3$. Они показали, что

$$\sigma_{32} = \frac{e-1}{4e} < \frac{1}{4} = B_{32}.$$

В продолжение этого результата было показано в [10], что

$$\sigma_{42} = 0.050057\ldots < B_{42} = 0.1, \quad \sigma_{24} = 0.969556\ldots < B_{24} = 1,$$

$$\sigma_{34} = 0.791557\ldots < B_{34} = 0.828427\ldots .$$

Нахождение чисел Бомбиери σ_{mn} сводится к оценке линейных функционалов на классе S, см., например, [8] и [10]. А именно,

$$\sigma_{mn} = \sup\{\lambda \in \mathbb{R}\},$$

где верхняя грань берется по множеству всех чисел λ, для которых локальный максимум функционала $\operatorname{Re}(a_n - \lambda a_m)$ в классе S доставляется функцией Кебе $K(z)$.

Недавно появилась серия работ, см. [1], [6], [7], свидетельствующих о возвращении интереса к гипотезе Бомбиери. В отличие от Бомбиери, Леюнг произвел так называемую комплексную вариацию в окрестности функции Кебе и получил вариационные формулы, на основании которых Ефраимидис выписал целое множество парных индексов $\{mn\}$ таких, что $\sigma_{mn} < B_{mn}$. В работе [10] числа Бомбиери вычислялись методом оптимального управления, теоретически позволяющим найти любое число Бомбиери. Однако с ростом индексов m и n объем вычислений нарастал столь стремительно, что довести их до конца становилось нереально. С другой стороны, Леюнг получил вариационные формулы, которые предоставляли относительно простые достаточные условия для фиксации в некоторых случаях нарушения справедливости гипотезы Бомбиери.

Ааронов и Бшути в [1] развивают идеи Бомбиери [2] о том, что четные и нечетные коэффициенты имеют различную асимптотику при $|a_2| \to 2$, что отражается в равенстве Бомбиери

$$\liminf_{a_2 \to 2} \frac{3 - \operatorname{Re} a_3}{\sqrt{(2 - \operatorname{Re} a_3)^3}} = \frac{8}{3}.$$

Ааронов и Бшути доказали, что для функций $f \in S$ и для всякого $m \in \mathbb{N}$ справедливы неравенства

$$\frac{2m - |a_{2m}|}{2 - |a_2|} \geq \frac{3m}{2(4m^2 - 1)},$$

$$\frac{2m + 1 - |a_{2m+1}|}{\sqrt{(2 - |a_2|)^3}} \geq \frac{\sqrt{2}}{4} \frac{15m(m+1)}{(4m^2 - 1)(2m + 3)}.$$

Вычисление чисел Бомбиери интересно, помимо прочего, потому, что они характеризуют строение границы тела коэффициентов

$$V_n := \{(a_2, \dots, a_n) : f \in S\}, \ \ n \geq 2,$$

для класса S в окрестности точки $k_n := (2, \dots, n) \in V_n$, доставляемой функцией Кебе. Точка k_n является угловой точкой множества V_n в том смысле, что существует семейство опорных гиперплоскостей к множеству V_n, проходящих через точку k_n. Известно, см., например, [11], что существует, по крайней мере, $(n-1)$-мерное множество опорных гиперплоскостей для $(2n-2)$-мерного множества V_n, проходящих через точку k_n, а именно, гиперплоскости с нормальными векторами $\Lambda_n = (0, \dots, 0, 1)$ и $\Lambda_s = (0, \dots, 0, 1, 0, \dots, 0, 1)$ с единицей на $(s-1)$-м месте, $s < n$. Числа Бомбиери локально характеризуют это множество опорных гиперплоскостей.

Известно, что подмножество ограниченных функций класса S устроено заметно сложнее, чем весь класс S. Обозначим через $S(M)$, $M > 1$, подкласс функций из S, состоящий из ограниченных функций, удовлетворяющих неравенству $|f(z)| < M$ в $\mathbb{D}$, $S(\infty) = S$. Подобно той роли, которую в экстремальных задачах на классе S играет функция Кебе, функция Пика

$$P_M(z) = MK^{-1}\left(\frac{K(z)}{M}\right) = z + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(M) z^n$$

оказывается экстремальной в оценке многих функционалов на классе $S(M)$. Напомним, в частности, что

$$p_2(M) = 2\left(1 - \frac{1}{M}\right), \ \ p_3(M) = 5\left(1 - \frac{1}{M}\right)^2 - 2\left(1 - \frac{1}{M}\right).$$

Хотя $P_n(M) := (p_2(M), \dots, p_n(M))$ тоже является угловой точкой тела коэффициентов

$$V_n(M) := \{(a_2, \dots, a_n) : f \in S(M)\}, \ \ n \geq 2,$$

для класса $S(M)$, но множество опорных гиперплоскостей к $V_n(M)$, проходящих через точку $P_n(M)$, имеет меньшую размерность, чем в случае точки $k_n \in V_n$. Таким образом, имеется очевидный интерес в исследовании чисел для класса $S(M)$, аналогичных числам Бомбиери в классе S.

По аналогии с формулой (1), определяющей числа Бомбиери σ_{mn}, зададим схожей формулой подобные числа, которые характеризуют тело коэффициентов $V_n(M)$ в окрестности "точки Пика". Так, для $M > 1$, положим

$$\sigma_{mn}(M) := \liminf_{S(M) \ni f \to P_M} \frac{p_n(M) - \operatorname{Re} a_n}{p_m(M) - \operatorname{Re} a_m}, \ \ m, n \geq 2,$$

где f стремится к P_M локально равномерно внутри $\mathbb{D}$. Числа $\sigma_{mn}(M)$ определены корректно лишь в том случае, когда функция Пика P_M доставляет локальный максимум значению $\operatorname{Re} a_m$ в классе $S(M)$. Это условие выполняется, например, если m четное и число M превосходит некоторую величину, зависящую от m, см. [9].

Интересно понять, как будет меняться значение $\sigma_{mn}(M)$ для пары (mn), когда $\sigma_{mn} = \sigma_{mn}(\infty) = 0$. В настоящей работе внимание сосредоточено на величине $\sigma_{23}(M)$, которая определена корректно, так как $|a_2| \leq p_2(M)$ в классе $S(M)$ со знаком

равенства только для функции Пика P_M. Основной результат приведен в следующей теореме.

Теорема. *Для всех M, $1 < M \le \infty$ справедливо равенство*

$$\sigma_{23}(M) = -\frac{4}{M}.$$

Работа выполнена при финансовой поддержке Российского научного фонда (проект № 17-11-01229).

Литература

1. Aharonov D., Bshouty D. *A problem of Bombieri on univalent functions* // Comput. Methods Funct. Theory. – 2016. – V. 16. – № 4. – P. 677–688.

2. Bombieri E. *On the local maximum property of the Koebe function* // Invent. Math. – 1967. – V. 4. – P. 26–67.

3. Branges L. de. *A proof of the Bieberbach conjecture* // Acta Math. – 1985. – V. 154. – № 1-2. – P. 137–152.

4. Bshouty D., Hengartner W. *Local behavior of coefficients in subclasses of S* // Contemp. Math. – 1985. – V. 38. – P. 77–84.

5. Bshouty D., Hengartner W. *A variation of the Koebe mapping in a dense subset of S* // Canad. J. Math. – 1987. – V. 39. – № 1. – P. 54–73.

6. Efraimidis I. On the failure of Bombieri's conjecture for univalent functions // ArXiv:1612.07242v2[math.CV]. –2016.

7. Leung Yuk-J. *On the Bombieri numbers for the class S* // J. Anal. – 2016. – V. 24. – № 2. – P. 229–250.

8. Greiner R., Roth O. *On support points of univalent functions and a disproof of a conjecture of Bombieri* // Proc. Amer. Math. Soc. – 2001. – V. 129. – № 12. – P. 3657–3664.

9. Prokhorov D. *Even coefficient estimates for bounded univalent functions* // Ann. Polon. Math. – 1993. – V. 58. – № 3. – P. 267–273.

10. Prokhorov D., Vasil'ev A. *Optimal control in Bombieri's and Tammi's conjectures* // Georgian Math. J. – 2005. – V. 12. – № 4. – P. 743–761.

11. Schaeffer A. C., Spencer D. C. *Coefficient regions for schlicht functions.* – Providence, RI: Amer. Math. Soc. Colloq. Publ. – V. 35, 1950. – 311 p.

THE BOMBIERI CONJECTURE FOR CONFORMAL MAPPINGS FROM THE DISK

D.V. Prokhorov

Bombieri's numbers σ_{mn} characterize the behavior of the coefficient body for the class S of all holomorphic and univalent functions f in the unit disk normalized by $f(z) = z + a_2 z^2 + \dots$. The number σ_{mn} is the limit of ratio for $Re(n - a_n)$ and $Re(m - a_m)$ as f tends to the Koebe function $K(z) = z(1-z)^{-2}$. In particular, $\sigma_{23} = 0$. We define analogous numbers $\sigma_{mn}(M)$ for the class $S(M) \subset S$ of bounded functions $|f(z)| < M$, $|z| < 1$, $M > 1$, with the limit of ratio for $Re(p_n(M) - a_n)$ and $Re(p_m(M) - a_m)$ as f tends to the Pick function $P_M(z) = MK^{-1}(K(z)/M) = z + \sum_{n=2}^{\infty} p_n(M) z^n$. We prove that $\sigma_{23}(M) = -4/M$, $M > 1$. This is a joint work with V. G. Gordienko.

Keywords: univalent function, the Bombieri number, the Koebe function, the Pick function.

УДК 517.5

СПЛАЙНЫ ПО ТРЕХТОЧЕЧНЫМ РАЦИОНАЛЬНЫМ ИНТЕРПОЛЯНТАМ

А.-Р.К. Рамазанов[1], В.Г. Магомедова[2]

1 *ar-ramazanov@rambler.ru*; Дагестанский государственный университет, Дагестанский научный центр РАН

2 *vazipat@rambler.ru*; Дагестанский государственный университет

Для непрерывных и непрерывно дифференцируемых (до второго порядка) функций получены оценки скорости сходимости сплайнов по трехточечным рациональным интерполянтам, выражающиеся через модуль непрерывности и модуль изменения.

Ключевые слова: сплайны, интерполяционные сплайны, рациональные сплайны.

Для сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ положим $h_i = x_i - x_{i-1}$ $(i = 1,2,\ldots,N)$, $\Delta_i = \max\{h_{i-1}, h_i, h_{i+1}\}$ $(i = 2,3,\ldots,N-1)$, $\Delta_1 = \max\{h_1, h_2\}$, $\Delta_N = \max\{h_{N-1}, h_N\}$, $\|\Delta\| = \max\{h_i | i = 1,2,\ldots,N\}$.

Для $f \in C_{[a,b]}$ рассмотрим рациональные функции

$$R_i(x) = \alpha_i + \beta_i(x - x_i) + \frac{\gamma_i}{x - g_i}$$

с условиями $R_i(x_j) = f(x_j)$ при $j = i-1, i, i+1$ и произвольной точкой $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1,2,\ldots,N-1)$; ниже будем считать $R_0(x) \equiv R_1(x)$, $R_N(x) \equiv R_{N-1}(x)$, $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$.

Тогда при каждом $k = 1,2,\ldots$ получим ([1]) кусочно–рациональную функцию $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ из класса $C^{(k)}_{[a,b]}$, для которой при $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1,2,\ldots,N)$ выполняется равенство

$$R_{N,k}(x) = \frac{R_i(x)(x - x_{i-1})^k + R_{i-1}(x)(x_i - x)^k}{(x - x_{i-1})^k + (x_i - x)^k}.$$

Отметим, что если функция $f(x)$ выпукла или вогнута на отрезке $[x_{i-1}, x_{i+1}]$ при некотором $i = 1,2,\ldots,N-1$, то интерполянт $R_i(x)$ также является соответственно выпуклой или вогнутой функцией на этом отрезке.

Сплайны $R_{N,k}(x)$ при $k \geqslant 2$ сохраняют выпуклость (вогнутость) функции $f(x)$ в некоторых окрестностях узлов сетки Δ.

Как следует из приводимых ниже утверждений, гладкие рациональные сплайны $R_{N,k}(x)$ сами (в отличие от гладких полиномиальных сплайнов) и их производные обладают свойством безусловной сходимости на соответствующих классах непрерывных и непрерывно дифференцируемых функций (по терминологии Ю.Н. Субботина [2]). При этом для функций из классов $C_{[a,b]}$ и $C^{(1)}_{[a,b]}$ следующее утверждение дает оценку скорости сходимости через модули непрерывности функции и ее производной.

Теорема 1. *Пусть для сетки узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ и произвольного числа $\lambda > 0$ выбраны числа $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ такие, что $g_i = x_{i+1} + \lambda h_{i+1}$ при $h_{i+1} \leqslant h_i$ и $g_i = x_{i-1} - \lambda h_i$ при $h_{i+1} > h_i$ $(i = 1,2,\ldots,N-1)$. Тогда для любой $f \in C_{[a,b]}$ и,*

отдельно, для любой $f \in C^{(1)}_{[a,b]}$ *и соответствующих сплайнов* $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ $(k \geqslant 1)$ *при* $x \in [x_{i-1}, x_i]$ $(i = 1, 2, \ldots, N)$ *выполняются соответственно неравенства*

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leqslant (2 + \max\{1, \lambda\})\omega(\Delta_i, f),$$

$$|f'(x) - R'_{N,k}(x)| \leqslant \left(4 + 8k + \frac{2}{\lambda}\right)\omega(\Delta_i, f').$$

В случае класса $C^{(2)}_{[a,b]}$ имеет место

Теорема 2. *Пусть задана последовательность сеток узлов* $\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *с диаметром* $\|\Delta^{(n)}\| \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда существует последовательность наборов чисел* $g^{(n)} = \{g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots, g_{n-1}^{(n)}\}$ $(n = 2, 3, \ldots)$ *такая, что для любой* $f \in C^{(2)}_{[a,b]}$ *последовательность производных второго порядка соответствующих рациональных сплайнов* $R''_{n,2}(x, f, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ *равномерно сходится к* $f''(x)$ *на отрезке* $[a, b]$.

С безусловной сходимостью связано также следующее утверждение, в котором оценка скорости сходимости дана через модуль изменения порядка N функции $f \in C_{[a,b]}$, который определяется (см., напр., [3]) равенством

$$V_N(f, [a, b]) = \sup \sum_{i=1}^{N} |f(\beta_i) - f(\alpha_i)|,$$

где супремум берется при фиксированном N по всем точкам $\alpha_1 < \beta_1 \leqslant \alpha_2 < \beta_2 \leqslant \cdots \leqslant \alpha_N < \beta_N$ из отрезка $[a, b]$.

Теорема 3. *Если* $f \in C_{[a,b]}$, *то при любом натуральном* $N \geqslant 2$ *существует сетка узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ *и числа* $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ *такие, что для сплайна* $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ $(k \geqslant 1)$ *при* $x \in [a, b]$ *имеем*

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leqslant \frac{3}{N} V_N(f, [a, b]).$$

Как видно из следующих двух утверждений, оценки в них в случае функций с производными (соответственно первого и второго порядков) конечной вариации имеют порядок скорости сходимости наилучших полиномиальных сплайнов ([4]).

Теорема 4. *Если* $f \in C^{(1)}_{[a,b]}$, *то при любых* $\lambda > 0$ *и натурального* n *существует сетка узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ *с* $N \leqslant 2n$ *и числа* $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ *такие, что сплайн* $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ $(k \geqslant 1)$ *при всех* $x \in [a, b]$ *удовлетворяет неравенству*

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leqslant \left(2 + \frac{1}{\lambda}\right) \frac{b - a}{n^2} V_n(f', [a, b]).$$

Теорема 5. *Если* $f \in C^{(2)}_{[a,b]}$, *то при любом натуральном* n *существует сетка узлов* $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ *с* $N \leqslant 2n$, *для которой при любом выборе чисел*

$g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ *с* $g_i \notin [x_{i-1}, x_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, N-1)$ *сплайн* $R_{N,k}(x) = R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ $(k \geqslant 1)$ *удовлетворяет неравенству*

$$|f(x) - R_{N,k}(x)| \leqslant \frac{(b-a)^2}{4n^3} V_n(f'', [a,b]) + \frac{(b-a)^3}{4\mu n^3} \|f''\|_{[a,b]},$$

где $\mu = \min\{|x_{i-1} - g_i|, |x_{i+1} - g_i| : i = 1, 2, \ldots, N-1\}$.

Заметим, что фактически трехточечные рациональные интерполняты $R_i(x)$ можно определить для любой конечной функции $f(x)$, определенной на отрезке $[a, b]$. При этом соответствующие рациональные сплайны $R_{N,k}(x, f, \Delta, g)$ при фиксированных сетке узлов $\Delta : a = x_0 < x_1 < \cdots < x_N = b$ $(N \geqslant 2)$ и наборе точек $g = \{g_1, g_2, \ldots, g_{N-1}\}$ являются линейными операторами на классе всех конечных на отрезке $[a, b]$ функций $f(x)$. Учитывая это, с помощью теоремы 1 можно изучить явление Гиббса для сплайнов по рациональным интерполянтам в случае функций, непрерывных на отрезке, исключая точки разрыва первого рода со скачком.

Теорема 6. *Пусть функция* $f(x)$ *непрерывна на отрезке* $[a, b]$*, исключая точку* $t_0 \in (a, b)$*, в которой* $f(x)$ *имеет разрыв первого рода со скачком. Тогда существуют последовательности сеток узлов* $\Delta^{(n)} : a = x_0^{(n)} < x_1^{(n)} < \cdots < x_n^{(n)} = b$ $(n \geqslant 2)$ *и наборов точек* $g^{(n)} = \{g_1^{(n)}, g_2^{(n)}, \ldots, g_{n-1}^{(n)}\}$ *двух видов: в одном случае соответствующие рациональные сплайны* $R_{n,1}(x, f, \Delta^{(n)}, g^{(n)})$ *не обладают эффектом Гиббса около точки* t_0*, а в другом случае (в частности, в случае равномерных сеток) обладают.*

Литература

1. Рамазанов А.-Р. К., Магомедова В. Г. *Сплайны по рациональным интерполянтам* // Дагестанские электр. матем. известия. – 2015. – Вып. 4. – С. 22–31.

2. Субботин Ю. Н. *Вариации на тему сплайнов* // Фундамент. и прикл. матем. – 1997. – Т. 3. – Вып. 4. – С. 1043–1058.

3. Севастьянов Е. А. *Кусочно–монотонная аппроксимация и* Ф*–вариации* // Analysis Math. – 1975. – Вып. 1. – С. 141–164.

4. Субботин Ю. Н., Черных Н. И. *Порядок наилучших сплайн–приближений некоторых классов функций* // Мат. заметки. – 1970. – Т. 7. – Вып. 1. – С. 31–42.

SPLINES FOR THREE–POINT RATIONAL INTERPOLANTS

A.-R.K. Ramazanov, V.G. Magomedova

For continuous functions and continuously differentiable (of the first and second orders) functions we obtain convergence bounds for splines by three–point rational interpolants expressed through modulus of continuity and modulus of variation.

Keywords: splines, interpolation splines, rational splines.

УДК 517.983

ОБОБЩЕННЫЙ ОПЕРАТОР СВЕРТКИ ДАНКЛА

А.И. Рахимова[1], В.В. Напалков[2]

1 *alsu1405@mail.ru*; Башкирский государственный университет
2 *napalkov@matem.anrb.ru*; Институт математики с ВЦ УНЦ РАН

В работе рассматривается обобщенный оператор Данкла и его свойства. Изучается построенный по нему оператор свертки.

Ключевые слова: обобщенный оператор Данкла, оператор свертки Данкла, преобразование Данкла, собственная функция.

В работе рассматривается оператор Данкла

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z}(f(z) + f(-z)),\ c > 0.$$

Его действие на целую функцию $f(z)$ имеет вид $\Lambda f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \phi(k) z^{k-1}$,

где $\phi(k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K e^{\xi k}(\frac{1}{\xi^2} + c(\frac{1}{\xi} + \frac{1}{\xi - \pi}))d\xi = k + c(1 + e^{\pi i(k+1)})$.

Обобщенный оператор Данкла определяется по формуле

$$\Lambda f(z) = \frac{d}{dz} f(z) + \frac{c}{z} \sum_{j=0}^{m-1} \alpha_j f(\alpha_j z),\ c > 0,\ \alpha_j = e^{\frac{2\pi i j}{m}},\ j = \overline{(0; m-1)}.$$

Его действие на целую функцию $f(z)$ имеет вид $\Lambda f(z) = \sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k \phi(k) z^{k-1}$,

где $\phi(k) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_K e^{\xi k}(\frac{1}{\xi^2} + c \sum\limits_{j=0}^{m-1} \frac{e^{\frac{2\pi i j}{m}}}{\xi - \frac{2\pi i j}{m}})d\xi = k + c \sum\limits_{j=0}^{m-1} e^{\frac{2\pi i j(k+1)}{m}}$. Полученный ряд определяет разложение Адамара. Если выполняется условие $\phi(k) = p(k)$, где $p(k)$ – некоторый многочлен, причем $p(0) = 0, p(k) > 0, k > 0$, то обобщенный оператор Данкла является оператором Гельфонда-Леонтьева.

Теорема 1. *Для оператора Λ выполняется соотношение $\Lambda f(z) = \frac{1}{z}(F_0(\xi), f(e^{\xi} z))$, где функционал $F_0(z)$ такой, что ассоциированная к нему функция имеет вид:*

$$g(z) = \frac{1}{z^2} + c \sum_{j=0}^{m-1} \frac{e^{\frac{2\pi i j}{m}}}{z - \frac{2\pi i j}{m}}.$$

Теорема 2. *Собственная функция обобщенного оператора Данкла в общем случае имеет вид:*

$$y(\lambda z) = c_0(1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k z^k}{\varphi(1)\varphi(2)...\varphi(k)}) \quad \forall\, c_0 \in \mathbb{C}.$$

Оператор сдвига Данкла имеет вид:

$$S_t[f(z)] = f(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{t^k}{\phi(1)\phi(2)...\phi(k)} \Lambda^k f(z), \quad z, t \in \mathbb{C}.$$

Оператор свертки Данкла функционала $F(z) \in H^*(\mathbb{C})$ и функции $f(z) \in H(\mathbb{C})$ определяется по формуле

$$M_F[f(z)] = (F(t), S_t[f(z)]), \quad z, t \in \mathbb{C}.$$

Литература

1. Напалков В. В., Напалков В. В. (мл.) *Операторы Данкла как операторы свертки* // Доклады Академии наук. –2008. – Т. 423. – № 3. – С. 300–302.

2. Карамов И. И., Напалков В. В. *Обобщенный оператор Данкла* // Уфимский математический журнал. – 2014. – Т. 6. – № 1. – С. 59–68.

GENERALIZED DUNKL CONVOLUTION OPERATOR

A.I. Rakhimova, V.V. Napalkov

The paper considers the generalized Dunkl operator and its properties. We study the convolution operator constructed from it.

Keywords: generalized Dunkl operator, Dunkl convolution operator, Dunkl transform, eigenfunction.

УДК 517.95

НАЧАЛЬНО-ГРАНИЧНЫЕ И НАЧАЛЬНАЯ ЗАДАЧИ ДЛЯ УРАВНЕНИЯ КОЛЕБАНИЙ БАЛКИ

К.Б. Сабитов[1]

1 *sabitov_fmf@mail.ru*; Стерлитамакский филиал Института стратегических исследований РБ, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

Для уравнения колебаний конечной балки изучены начально-граничные задачи и начальная задача для бесконечной балки. Решения задач построены в явном виде и доказаны соответствующие теоремы единственности и существования в классе регулярных решений.

Ключевые слова: уравнение балки, начально-граничные задачи, начальная задача, спектральный метод, единственность, существование, ряд, устойчивость.

Многие задачи о колебаниях стержней, балок и пластин, которые имеют важное значение в строительной механике, теории устойчивости вращающихся валов и вибрации кораблей приводят к дифференциальным уравнениям более высокого порядка.

Пусть балка длины l для определенности опирается на две опоры с помощью штифтовых устройств. Под влиянием непрерывной внешней силы $g(x, t)$, рассчитанной на единицу длины, вынужденные изгибные поперечные колебания однородной балки, при отсутствии вращательного движения при изгибе, описываются уравнением четвертого порядка [1, с. 141 – 143], [2, с. 278 – 280]

$$\rho S u_{tt} + EJ u_{xxxx} = g(x, t),$$

где ρ – линейная плотность балки, S – площадь поперечного сечения, E – модуль упругости материала, J – момент инерции сечения относительно своей горизонтальной оси, которое перепишем в следующем виде:

$$Lu \equiv u_{tt} + \alpha^2 u_{xxxx} = f(x,t), \tag{1}$$

где $\alpha^2 = EJ/\rho S$, $f(x,t) = g(x,t)/\rho S$.

Отметим, что к уравнению (1) приходят во многих задачах при расчете устойчивости вращающихся валов и изучении вибрации кораблей [3].

Для определения колебания (смещения) $u(x,t)$ точек балки нужно задать граничные условия на концах $x = 0$ и $x = l$. Вид дополнительных граничных условий зависит от способа закрепления соответствующего конца. Если оба конца подперты, т.е. могут свободно вращаться вокруг точки закрепления, то в этом месте изгибающий момент должен равняться нулю. В этом случае мы имеем условия

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_{xx}(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{2}$$

А в случае балки с наглухо закрепленными обоими концами граничными условиями являются неподвижность балки и горизонтальность касательной на концах:

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{3}$$

Если оба конца свободны, то в этом случае на концах должны равняться нулю изгибающий момент и тангенциальная сила

$$u_{xx}(0,t) = u_{xxx}(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{4}$$

Если конец $x = 0$ наглухо заделан, а другой конец $x = l$ свободен, то имеем следующие граничные условия:

$$u(0,t) = u_x(0,t) = u_{xx}(l,t) = u_{xxx}(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{5}$$

Если конец $x = 0$ шарнирно закреплен, а другой наглухо заделан, то

$$u(0,t) = u_{xx}(0,t) = u(l,t) = u_x(l,t) = 0,\ 0 \le t \le T. \tag{6}$$

Возможны и другие граничные условия.

Что касается начальных условий, то они такие же, как и в случае уравнения струны:

$$u(x,t)\,|_{t=0} = \varphi(x),\ u_t(x,t)\,|_{t=0} = \psi(x), 0 \le x \le l. \tag{7}$$

В данной работе для уравнения (1) изучены следующие начально-граничные задачи в прямоугольной области

$$D = \{(x,t) \mid 0 < x < l,\ 0 < t < T\},$$

где l и T – заданные положительные числа.

Начально-граничные задачи. *Найти в области D функцию $u(x,t)$ со следующими свойствами:*

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(\overline{D}); \tag{8}$$

$$Lu(x,t) \equiv f(x,t),\ (x,t) \in D; \tag{9}$$

удовлетворяет начальным условиям (7) *и одному из граничных условий* (2) – (6)*, где* $f(x,t)$*,* $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции.*

Отметим, что в работах [2, с. 277], [3], [4, гл. VI] [5, с. 45], [6, с. 35], [7, с. 151], [8, с. 25] методом разделения переменных найдены собственные частоты (собственные значения) и формы собственных колебаний (собственные функции) для уравнения (1) при $f(x,t)=0$ с граничными условиями (2) – (6). Вопросы об обосновании корректности поставленных нами начально-граничных задач не изучены. Интерес к этим задачам вызван обращением автору статьи специалистов по строительной механике с просьбой построить в явном виде решения поставленных задач.

Теория колебаний стержней и балок, даже упрощенная путем отбрасывания несущественных величин, более сложная, чем теория колебаний идеально гибких струн. Объяснение такой простоты колебаний струны следует из того факта, что волны гармонического типа распространяются со скоростью, не зависящей от длины волны, поэтому такая волна может распространяться без искажения и постоянную a в уравнении струны

$$u_{tt} - a^2 u_{xx} = 0$$

называют скоростью распространения волны. Но когда мы рассматриваем колебания стержня или балки, то постоянная α в уравнении (1) уже не может быть истолкована как некоторая скорость вследствие зависимости скорости распространения от длины волны [2, с. 321].

В наших работах [9 – 12] следуя [13, с. 100–111] изучены начально-граничные задачи, решения которых построены в виде суммы рядов и доказаны соответствующие теоремы единственности, существования и устойчивости решения.

В данном докладе также рассмотрим задачу колебаний бесконечной балки в любой момент времени $t>0$ после начального возмущения, решение которой формально приведено в работе [2, с. 322 – 324] без соответствующих обоснований. Для этого уравнение (1) зададим в полуплоскости

$$Q = \{(x,t) \mid t>0,\ x \in \mathbb{R}\}.$$

Начальная задача. *Найти функцию* $u(x,t)$*, удовлетворяющую условиям:*

$$u(x,t) \in C^{4,2}_{x,t}(Q) \cap C^1_t(Q \cup \{t=0\}) \cap C(\overline{Q}); \tag{10}$$

$$Lu(x,t) \equiv 0,\ \ (x,t) \in Q; \tag{11}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ \ u_t(x,0) = \psi(x),\ \ x \in \mathbb{R}, \tag{12}$$

где $\varphi(x)$ *и* $\psi(x)$ *– заданные достаточно гладкие функции.*

Здесь решение задачи (10) – (12) построено в явном виде и доказано его существование.

Литература

1. Тихонов А. Н., Самарский А. А. *Уравнения математической физики* (изд. 3). – М.: Наука, 1966. – 724 с.

2. Рэлей Л. *Теория звука*. Т. 1, (изд. 2). – М.: Гостехиздат, 1955. – 503 с.

3. Крылов А. Н. *Вибрация судов*, (изд. 2). – М., 2012. – 447 с.

4. Гулд С. *Вариационные методы в задачах о собственных значениях: Введение в метод промежуточных задач Вайнштейна*. – М.: Мир, 1970. – 328 с.

5. Коренев Б. Г. *Вопросы расчета балок и плит на упругом основании*. – М.: Стройиздат, 1965. – 232 с.

6. Коллатц Л. *Задачи на собственные значения с техническими приложениями*. – М.: Наука, 1968. – 503 с.

7. Бидерман В. Л. *Теория механических колебаний*. – М.: Высшая школа, 1980. – 408 с.

8. Андрианов И. В., Данишевский В. В., Иванков А. О. *Асимптотические методы в теории колебаний балок и пластин*. – Днепропетровск: Приднепровская гос. академия стр. и арх., 2010. – 216 с.

9. Сабитов К. Б. *Начальная задача для уравнения колебаний балки*. – 2017. – Т. 53. – № 5. – С. 665–671.

10. Сабитов К. Б. *Уравнения математической физики*. – М.: Физматлит, 2013. – 352 с.

11. Сабитов К. Б. *Начально-граничная задача для уравнения колебаний балки* // В сб.: Матем. методы и модели в стр., арх. и дизайне. Самарский гос. арх.-стр. унив. – Самара, 2015. – С. 34–42.

12. Сабитов К. Б. *Колебания балки с заделанными концами* // Вестник Самарского гос. техн. ун-та. Серия: Физ.-мат. науки. – 2015. – Т. 19, № 2 (39). – С. 311–324.

13. Сабитов К. Б. *К теории начально-граничных задач для уравнения стержней и балок* // Дифф. уравнения. – 2017. – Т. 53. – № 1. – С. 89–100.

INITIAL-BOUNDARY AND INITIAL PROBLEMS FOR THE EQUATION OF OSCILLATIONS OF A BEAM

K.B. Sabitov

For the equation of oscillations of a finite beam, the initial-boundary problems and the initial problem for an infinite beam are studied. The solutions of the problems are constructed in an explicit form, and the corresponding uniqueness and existence theorems in the class of regular solutions are proved.

Keywords: beam equation, initial-boundary value problems, initial problem, spectral method, uniqueness, existence, series, stability.

УДК 517.95

ЗАДАЧА ДИРИХЛЕ ДЛЯ НАГРУЖЕННОГО УРАВНЕНИЯ С ОПЕРАТОРОМ ЛАВРЕНТЬЕВА–БИЦАДЗЕ

Ю.К. Сабитова[1]

1 *sabitovauk@rambler.ru*; Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

В статье построено решение первой граничной задачи для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области и доказана ее единственность. Решение получено в виде суммы ряда по системе собственных функций соответствующей одномерной спектральной задачи.

Ключевые слова: нагруженное уравнение, задача Дирихле, критерий единственности.

Рассмотрим нагруженное уравнение смешанного типа

$$Lu = \begin{cases} u_{xx} + u_{tt} - b_1(t)u(x,d_1) = 0, & t > 0, \\ u_{xx} - u_{tt} - b_2(t)u(x,d_2) = 0, & t < 0, \end{cases} \tag{1}$$

в $D = \{(x,t) : 0 < x < 1, -\alpha < t < \beta\}$, α, β, d_1, d_2 – заданные положительные действительные числа, $b_1(t)$ и $b_2(t)$ – заданные непрерывные функции, $b_1(0+0) = b_1(0)$, $b_2(0-0) = b_2(0)$, $b_1(0)$ и $b_2(0)$ не связаны никакими условиями.

Задача Дирихле. Найти в области D функцию $u(x,t)$, удовлетворяющую следующим условиям:

$$u(x,\,t) \in C^1\left(\overline{D}\right) \cap C^2(D_+ \cup D_-); \tag{2}$$

$$Lu(x,\,t) \equiv 0, \quad (x,\,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{3}$$

$$u(0,\,t) = u(1,\,t) = 0, \quad -\alpha \le t \le \beta; \tag{4}$$

$$u\left(x,\,\beta\right) = \varphi(x)\,, u(x,\,-\alpha) = \psi(x)\,, \quad 0 \le x \le 1, \tag{5}$$

где $\varphi(x)$, $\psi(x)$ – заданные достаточно гладкие функции, $\varphi(0) = \varphi(1) = \psi(0) = \psi(1) = 0$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Опираясь на работы [1] – [3], построим решение задачи (2) – (5) и докажем ее единственность. Пусть $u(x,t)$ – решение задачи (2) – (5). Рассмотрим функцию

$$u_k(t) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,t)\sin\lambda_k x dx, \tag{6}$$

где $\lambda_k = \pi k$, $k \in \mathbb{N}$. На основании (6) введем функцию

$$u_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{2}\int_\varepsilon^{1-\varepsilon} u(x,t)\sin\lambda_k x dx, \tag{7}$$

где ε – достаточно малое число. Дифференцируя равенство (7) по t два раза при $t \in (-\alpha, 0) \cup \left(0, \beta\right)$ и учитывая уравнение (1), получим

$$u''_{k,\varepsilon}(t) = -\sqrt{2}\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}\sin\lambda_k x dx - \sqrt{2}b_1(t)\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,d_1)\sin\lambda_k x dx, \quad t > 0; \tag{8}$$

$$u''_{k,\varepsilon}(t) = \sqrt{2}\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u_{xx}\sin\lambda_k x dx + \sqrt{2}b_2(t)\int_\varepsilon^{l-\varepsilon} u(x,-d_2)\sin\lambda_k x dx, \quad t < 0. \tag{9}$$

Интегрируя в правых частях равенств (8) и (9) по частям два раза в интегралах, содержащих u_{xx}, и переходя к пределу при $\varepsilon \to 0$ с учетом однородных граничных условий (4), получим

$$u''_k(t) - \lambda_k^2 u_k(t) = -b_1(t)\,u_k(d_1)\,, \quad t > 0, \tag{10}$$

$$u''_k(t) + \lambda_k^2 u_k(t) = -b_2(t)\,u_k(-d_2)\,, \quad t < 0. \tag{11}$$

Дифференциальные уравнения (10) и (11) являются нагруженными и они имеют общие решения

$$u_k(t)=\begin{cases} c_k e^{\lambda_k t}+d_k e^{-\lambda_k t}-\dfrac{u_k(d_1)}{\lambda_k}b_{1k}(t), & t>0,\\ a_k\cos\lambda_k t+b_k\sin\lambda_k t-\dfrac{u_k(-d_2)}{\lambda_k}b_{2k}(t), & t<0,\end{cases} \tag{12}$$

где a_k, b_k, c_k, d_k – произвольные постоянные, $u_k(0+0)$, $u_k(0-0)$, $u_k(d_1)$ и $u_k(-d_2)$ – пока неизвестные постоянные,

$$b_{1k}(t)=\int\limits_0^t b_1(s)\,\mathrm{sh}\,[\lambda_k(t-s)]\,ds,\quad b_{2k}(t)=\int\limits_t^0 b_2(s)\sin[\lambda_k(s-t)]\,ds.$$

Теперь, исходя из формулы (12), вычислим:

$$u_k(0+0)=c_k+d_k,\quad u_k(0-0)=a_k, \tag{13}$$

$$u_k(d_1)=\frac{c_k\lambda_k e^{\lambda_k d_1}+d_k\lambda_k e^{-\lambda_k d_1}}{\lambda_k+b_{1k}(d_1)},\quad u_k(-d_2)=\frac{a_k\lambda_k\cos\lambda_k d_2-b_k\lambda_k\sin^{\lambda_k d_2}}{\lambda_k-b_{2k}(-d_2)}, \tag{14}$$

когда при всех $k\in\mathbb{N}$

$$\lambda_k+b_{1k}(d_1)\neq 0,\quad \lambda_k-b_{2k}(-d_2)\neq 0. \tag{15}$$

Для функций (12) в силу (2) выполнены условия сопряжения

$$u_k(0+0)=u_k(0-0),\,u_k'(0+0)=u_k'(0-0). \tag{16}$$

Условия (21) имеют место только в том случае, когда

$$c_k=\frac{a_k+b_k}{2},\quad d_k=\frac{a_k-b_k}{2}. \tag{17}$$

Подставляя (13), (14) в (12), получим

$$u_k(t)=\begin{cases} a_k M_{1k}(t)+b_k M_{2k}(t), & t>0,\\ a_k N_{1k}(t)+b_k N_{2k}(t), & t<0,\end{cases} \tag{18}$$

где

$$M_{1k}(t)=\mathrm{ch}\,\lambda_k t-\frac{\widetilde{M}_{1k}}{\lambda_k}b_{1k}(t),\quad \widetilde{M}_{1k}=\frac{\lambda_k\,\mathrm{ch}\,\lambda_k d_1}{\lambda_k+b_{1k}(d_1)},$$

$$M_{2k}(t)=\mathrm{sh}\,\lambda_k t-\frac{\widetilde{M}_{2k}}{\lambda_k}b_{1k}(t),\quad \widetilde{M}_{2k}=\frac{\lambda_k\,\mathrm{sh}\,\lambda_k d_1}{\lambda_k+b_{1k}(d_1)},$$

$$N_{1k}(t)=\cos\lambda_k t+\frac{\widetilde{N}_{1k}}{\lambda_k}b_{2k}(t),\quad \widetilde{N}_{1k}=\frac{\lambda_k\cos\lambda_k d_2}{\lambda_k-b_{2k}(d_2)},$$

$$N_{2k}(t)=\sin\lambda_k t-\frac{\widetilde{N}_{2k}}{\lambda_k}b_{2k}(t),\quad \widetilde{N}_{2k}=\frac{\lambda_k\sin\lambda_k d_2}{\lambda_k-b_{2k}(d_2)}.$$

Для нахождения постоянных a_k и b_k воспользуемся граничными условиями (5) и формулой (6):

$$u_k(\beta) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,\beta)\sin\lambda_k x dx = \sqrt{2}\int_0^1 \varphi(x)\sin\lambda_k x dx = \varphi_k, \tag{19}$$

$$u_k(-\alpha) = \sqrt{2}\int_0^1 u(x,-\alpha)\sin\lambda_k x dx = \sqrt{2}\int_0^1 \psi(x)\sin\lambda_k x dx = \psi_k. \tag{20}$$

Удовлетворяя функции (24) к граничным условиям (19) и (20), найдем

$$\begin{cases} a_k M_{1k}(\beta) + b_k M_{2k}(\beta) = \varphi_k, \\ a_k N_{1k}(-\alpha) + b_k N_{2k}(-\alpha) = \psi_k. \end{cases} \tag{21}$$

Если определитель системы (21) при всех $k \in \mathbb{N}$:

$$\Delta(k) = N_{1k}(-\alpha)M_{2k}(\beta) - N_{2k}(-\alpha)M_{1k}(\beta) = (\cos\lambda_k\alpha + \frac{\widetilde{N}_{1k}}{\lambda_k}b_{2k}(-\alpha))M_{2k}(\beta) +$$

$$+(\sin\lambda_k\alpha + \frac{\widetilde{N}_{2k}}{\lambda_k}b_{2k}(-\alpha))M_{1k}(\beta) = M_{2k}(\beta)\cos\lambda_k\alpha + M_{1k}(\beta)\sin\lambda_k\alpha +$$

$$+\frac{\widetilde{N}_{1k}}{\lambda_k}b_{2k}(-\alpha)M_{2k}(\beta) + \frac{\widetilde{N}_{2k}}{\lambda_k}b_{2k}(-\alpha)M_{1k}(\beta) \neq 0, \tag{22}$$

то она имеет единственное решение

$$a_k = \frac{1}{\Delta(k)}[\psi_k M_{2k}(\beta) - \varphi_k N_{2k}(-\alpha)], \quad b_k = \frac{1}{\Delta(k)}[\varphi_k N_{1k}(-\alpha) - \psi_k M_{1k}(\beta)]. \tag{23}$$

Подставляя (23) в (24), найдем окончательный вид функций

$$u_k(t) = \begin{cases} \dfrac{1}{\Delta(k)}[\varphi_k \tilde{\mathrm{N}}_{\alpha k}(t) + \psi_k D_{\beta k}(t)], & t > 0, \\ \dfrac{1}{\Delta(k)}[\varphi_k A_{\alpha k}(t) + \psi_k B_{\beta k}(t)], & t < 0, \end{cases} \tag{24}$$

где

$$C_{\alpha k}(t) = N_{1k}(-\alpha)M_{2k}(t) - N_{2k}(-\alpha)M_{1k}(t), \quad D_{\beta k}(t) = M_{1k}(t)M_{2k}(\beta) - M_{2k}(\beta)M_{2k}(t),$$

$$A_{\alpha k}(t) = N_{1k}(-\alpha)N_{2k}(t) - N_{1k}(t)N_{2k}(-\alpha), \quad B_{\beta k}(t) = N_{1k}(t)M_{2k}(\beta) - N_{2k}(t)M_{1k}(\beta).$$

Пусть $u(x, y)$ – решение однородной задачи (2) – (5) (где $\varphi(x) = \psi(x) \equiv 0$) и выполнены условия (22) при всех $k \in \mathbb{N}$. Тогда $\varphi_k = \psi_k \equiv 0$ и из формул (24) и (6) следует, что при любом $t \in [-\alpha, \beta]$

$$\int_0^1 u(x, t)\sin\lambda_k x dx = 0, \quad k = 1, 2, \ldots \quad . \tag{25}$$

Из равенств (25) в силу полноты системы $\{\sqrt{2}\sin\lambda_k x\}$ в пространстве $L_2[0,1]$ следует, что $u(x,\,t)=0$ почти всюду на $[0,1]$ при любом $y\in[-\alpha,\beta]$. Поскольку в силу (2) функция $u(x,\,t)$ непрерывна в $\overline{D}$, то $u(x,\,t)\equiv 0$ в $\overline{D}$.

Если при некотором $k=p$ $\Delta(p)=0$ однородная задача (2) – (5) имеет нетривиальное решение

$$u_p(x,t)=\widetilde{u}_p(t)\sin\lambda_p x,$$

где $\widetilde{u}_p(t)$ определяется по формуле

$$\widetilde{u}_p(t)=\begin{cases}\widetilde{A}_p[M_{1k}(t)M_{2k}(\beta)-M_{1k}(\beta)M_{2k}(t)], & t>0,\\ \widetilde{A}_p[N_{1k}(t)M_{2k}(\beta)-M_{1k}(\beta)N_{2k}(t)], & t<0,\end{cases}\tag{26}$$

Решение задачи (2) – (5) при выполнении условий (22) определяется рядом

$$u(x,t)=\sqrt{2}\sum_{k=1}^{+\infty}u_k(t)\sin\lambda_k x,$$

где $u_k(t)$ находятся по формуле (24).

Теорема. *Если существует решение задачи* (2) – (5) *и выполнены условия* (15)*, то для его единственности, необходимо и достаточно, выполнение условий* (22) *при всех* $k\in\mathbb{N}$.

Литература

1. Нахушев А. М. *Нагруженные уравнения и их применение*. – М.: Наука, 2012. – 232 с.

2. Сабитов К. Б. *Начально-граничная задача для параболо-гиперболического уравнения с нагруженными слагаемыми* // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 6. – С. 31–42.

3. Сабитов К.Б., Мелишева Е.П. *Задача Дирихле для нагруженного уравнения смешанного типа в прямоугольной области* // Изв. вузов. Математика. – 2013. – № 7. – С. 62–76.

THE DIRICHLET PROBLEM FOR A LOADED EQUATION WITH THE OPERATOR OF LAVRENTYEV–BITSADZE

Yu.K. Sabitova

In this paper the solution of the boundary problem for loaded equation of the mixed type in a rectangle area is constructed and uniqueness is proved. The solution is obtained in the form of series by the system of functions of the corresponding one-dimenshional spectral problem.

Keywords: loaded equation, Dirichlet problem, criterion of uniqueness.

УДК 517.972.5

ОБ ОЦЕНКАХ СНИЗУ ЖЕСТКОСТИ КРУЧЕНИЯ ОДНОСВЯЗНОЙ ОБЛАСТИ

Р.Г. Салахудинов[1]

1 *rsalakhud@gmail.com*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

В работе дан краткий обзор изопериметрических неравенств, связывающих жесткость кручения и геометрические характеристики области. Также приводится ряд новых утверждений и формулируются старые и новые гипотезы.

Ключевые слова: жесткость кручения, изопериметрические неравенства, евклидовы моменты области относительно границы, экстремальные области.

Изучение изопериметрических неравенств, содержащие различные функционалы области, — это одно из классических направлений математической физики. История вопроса об оценках жесткости кручения показывает преобладание неравенств, дающих оценку жесткости кручения сверху. Эти неравенства связаны с именами Кулона, Коши, Сен–Венана, Полиа, Пейна [1] и других учёных. Среди этих неравенств отметим особую роль неравенства Сен–Венана — Полиа

$$\mathbf{P}(G) \le \frac{\mathbf{A}(G)^2}{2\pi},$$

имеющего важные приложения в теории кручения; здесь G — односвязная область, $\mathbf{P}(G)$ — жесткость кручения G и $\mathbf{A}(G)$ — площадь G. Многие известные неравенства можно получить с применением методов симметризации. Отметим, что несмотря на достаточно большое число изопериметрических неравенств, в том числе точных, остается достаточно большое количество открытых проблем.

Оценки жесткости кручения снизу также связаны с неравенствами, принадлежащие Пейну, Полиа, Сегё [2,3] и др. Отметим, что и при дополнительных ограничениях на область, например, выпуклости, известно не так много результатов. Наиболее простая и вместе с тем красивая оценка

$$\mathbf{P}(G) \ge \frac{1}{2}\mathbf{A}(G)\boldsymbol{\rho}(G)^2$$

была доказана в 1951 г. Полиа и Сегё; здесь G — выпуклая область с конечной площадью и

$$\boldsymbol{\rho}(G) := \sup_{x\in G} \rho(x, G),$$

где $\rho(x, G)$ — функция расстояния от точки x до границы области G. Следующее утверждение имеет непосредственное отношение к последнему неравенству.

Теорема. *Пусть G — выпуклая область с ограниченной жесткость кручения, тогда справедливо неравенство*

$$\mathbf{P}(G) \ge 2\mathbf{I}_2(G) + \frac{\boldsymbol{\rho}(G)^2}{6\pi},$$

где $\mathbf{I}_2(G)$ *— евклидовый момент инерции области относительно своей границы. Равенство достигается в случае круга. Более того, если* $\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G)) \neq 0$*, то неравенство обращается в строгое, здесь* $\mathbf{l}(\boldsymbol{\rho}(G))$ *— длина границы множества, отстоящего на расстоянии* $\boldsymbol{\rho}(G)$ *от границы* ∂G*.*

Будем называть выпуклую область G_0 сжатием выпуклой области G, если область G_0 можно получить из G путем вырезания прямоугольного фрагмента и соединения оставшихся частей. Немного более сложным образом операцию сжатия можно определить и для невыпуклых областей.

Гипотеза. *Утверждение теоремы остаётся справедливым и для односвязных областей, причём экстремальные области в неравенстве является несжимаемыми.*

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9), а также при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-41-02433 р_поволжье_а).

Литература

1. Bandle C. *Isoperimetric inequalities and applications*. – Boston-London-Melbourne: Pitman Advanced Publishing Program, 1980.

2. Pólya G., Szegö G. *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*. – Annals of Mathematical Studies. V. 27. Princeton: Princeton University Press, 1951.

3. Payne L.E. *Isoperimetric inequalities and their applications* // SIAM Review. – 1967. – V. 9, № 3. – P. 453–488.

ON LOWER BOUNDS OF TORSIONAL RIGIDITY OF SIMPLY CONNECTED DOMAIN

R.G. Salakhudinov

In this paper we give a brief survey of isoperimetric inequalities connecting the torsional rigidity and geometric characteristics of a plane domain. A number of new statements are also stated, some old and new hypotheses are formulated.

Keywords: isoperimetric inequality, torsional rigidity, Euclidean moment of domain with respect to the boundary, extremal domain.

УДК 517.54

РЕШЕНИЕ НЕОДНОРОДНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ РИМАНА НА ЛУЧЕ С БЕСКОНЕЧНЫМ ИНДЕКСОМ НОВЫМ МЕТОДОМ

Р.Б. Салимов[1], А.З. Сулейманов[2]

1 *salimov.rsb@gmail.com*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет
2 *ayaz-suleymanov-91@mail.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

В работе рассматривается краевая задача Римана с бесконечным индексом, когда краевое условие задачи задается на положительной действительной оси комплексной плоскости. Для решения этой задачи используется подход, основанный на устранении

бесконечного разрыва аргумента коэффициента краевого условия с помощью специально подобранной аналитической функции.

Ключевые слова: краевая задача Римана, аналитическая функция, бесконечный индекс.

Пусть D – область в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, границей которой служит положительная действительная полуось L. Требуется определить функцию $\Phi(z)$, аналитическую и ограниченную в области D, если её граничные значения удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t),\ t \in L, \tag{1}$$

где $\Phi^+(t), \Phi^-(t)$ – предельные значения функции $\Phi(z)$ при $z \to t$ соответственно слева и справа, когда соответственно $\Im z > 0$ и $\Im z < 0$, $g(t)$ – заданная функция, удовлетворяющая условию Гельдера на L ($g(t) \in H_L$), $g(\infty) = 0$, коэффициент $G(t)$ – заданная функция, обладающая следующими свойствами:

$$\ln|G(t)| \in H_L,\ \arg G(t) = \nu^- t^\rho + \nu(t), \tag{2}$$

ν^-, ρ – заданные числа, $\nu^- > 0$, $0 < \rho < \frac{1}{2}$, $\nu(t)$ – заданная функция, $\nu(t) \in H_L$.

В статье [1], дано решение однородной задачи Римана, когда в краевом условии (1) отсутствует слагаемое $g(t)$, путём устранения бесконечного разрыва $\arg G(t)$ с помощью специально подобранной аналитической функции. Оно отличается простотой и прозрачностью по сравнению с решением, разработанным Н. В. Говоровым – основателем научного направления, посвящённого задачам Римана с бесконечным индексом [2] (с. 113-123). Краткие сведения о развитии этого научного направления приведены в [1].

В данной работе подход, применённый в статье [1], используется для нахождения частного решения краевой задачи (1).

Возьмём функцию $E(z) = e^{(\alpha+i\beta)z^\rho}$, $0 \le \arg z \le 2\pi$, $\beta = -\frac{\nu^-}{2}$, $\alpha = -\beta\frac{\cos\rho\pi}{\sin\rho\pi}$, аналитическую в области D, граничные значения которой $E^+(t)$, $E^-(t)$ (обозначаемые как и в случае $\Phi(t)$) удовлетворяют равенству

$$\frac{E^+(t)}{E^-(t)} = e^{-i\nu^- t^\rho}. \tag{3}$$

Для $z = re^{i\theta}$, $r > 0$, $0 \le \theta \le 2\pi$ имеем

$$E(re^{i\theta}) = \exp\left\{\left[\frac{\nu^-\cos\rho(\pi-\theta)}{2\sin\rho\pi} + i\frac{\nu^-\sin\rho(\theta-\pi)}{2\sin\rho\pi}\right]r^\rho\right\}. \tag{4}$$

Краевое условие (1), умножая на $E^+(t)$ и обозначая $G_1(t) = \frac{E^+(t)}{E^-(t)}|G(t)|e^{i\arg G(t)}$, представим так

$$\Phi^+(t)E^+(t) = G_1(t)\Phi^-(t)E^-(t) + E^+(t)g(t),\ t \le L, \tag{5}$$

причём в силу (2), (3)

$$G_1(t) = |G(t)|e^{i\nu(t)}. \tag{6}$$

Как видно из формулы (4) (при $\theta = 0$ и $\theta = 2\pi$, $r = t$),

$$\left|E^+(t)\right| = |E^-(t)| = \exp\left(\frac{\nu^{-1}\cos\rho\pi}{2\sin\rho\pi}t^\rho\right) \to \infty \quad \text{при} \quad t \to \infty.$$

Чтобы устранить эту особенность в краевом условие (5), возьмём целую функцию с отрицательными нулями $F(z) = \prod\limits_{k=1}^{\infty}\left(1 + \frac{z}{r_k}\right)$, $0 < r_1 < r_2 < \ldots$

Нетрудно проверить [3] (с. 272), что для этой функции при $z = t > 0$ имеет место соотношение

$$\ln F(t) = t\int\limits_L \frac{n(x)\,dx}{x(x+t)}, \tag{7}$$

где $n(x)$ обозначает число нулей $-r_1, -r_2, \ldots$ функции $F(z)$, для которых $r_k \le x$. Примем, что для указанных нулей существует конечный предел $\lim\limits_{x\to\infty}\frac{n(x)}{x^\rho} = \Delta > 0$.

Можно показать, что при $t > 0$ формулу (7) можно представить так [2] (с. 125):

$$\ln F(t) = \frac{\pi\Delta}{\sin\rho\pi}t^\rho + I(t), \quad I(t) = t\int\limits_0^\infty \frac{n(x) - \Delta x^p}{x(x+t)}. \tag{8}$$

В этой формуле, как и в работе [2] (стр. 127), возьмём $n(x) = \left[\Delta x^\rho + \frac{1}{2}\right]$ – целой части суммы $\Delta x^\rho + \frac{1}{2}$, тогда $r_k = \left(\frac{2x+1}{2\delta}\right)^{\frac{1}{\rho}}$, $k = 1, 2, \ldots$

Учитывая, что при $\theta = 0$, $z = r = t > 0$ согласно (4) $\ln E^+(t) = \left(\frac{\nu^{-1}\cos\rho\pi}{2\sin\rho\pi} - i\frac{\nu^{-1}}{2}\right)t^\rho$, выберем число Δ, входящее в формулу (8), так, чтобы $\pi\Delta = \frac{\nu^{-1}}{2}\cos\rho\pi$.

Тогда функция $F(z)$ будет определена полностью. При этом, на основание результатов книги [2] (с. 128) заключаем, что $\frac{E^+(t)}{F(t)}g(t) \in H_L$.

Для простоты, не ограничивая общности, примем, что для функции $G(t)$, $\nu(t)$ формулы (6) выполняются условия $|G(0)| = 1$, $\nu(0) = 0$, $|G(\infty)| = \lim\limits_{t\to\infty}|G(t)| = 1$, $\nu(\infty) = \lim\limits_{t\to\infty}\nu(t) = 0$, $g(0) = 0$, определим аналитическую и ограниченную в области D функцию [4] (с. 119) $\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \ln G_1(x)\frac{dx}{x-z}$, значения которой на L $\left(\Gamma^+(t),\ \Gamma^-(t)\right)$ удовлетворяют условию H_L ([5], с.с. 61, 66, 68), кроме того $\Gamma(\infty) = 0$ ([5], с. 68). Функция $\chi(z) = e^{\Gamma(z)}$ является аналитической в области D и её граничные значения удовлетворяют краевому условию $\chi^+(t) = G_1(t)\chi^-(t)$ [4] (с. 109), [1].

Учитывая последнее, краевое условие (5) запишем в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)}\cdot\frac{E^+(t)}{F(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi^-(t)}\cdot\frac{E^-(t)}{F(t)} + \frac{E^+(t)}{F(t)}\cdot\frac{g(t)}{\chi^+(t)},\ t \in L.$$

Зная скачок аналитической в области D функции $\frac{\Phi(z)}{\chi(z)}\cdot\frac{E(z)}{F(z)}$ на линии L, равный $\frac{E^+(t)}{F(t)}\cdot\frac{g(t)}{\chi^+(t)}$ и удовлетворяющий условию H_L, по известной формуле [4] (с. 106, 109) находим выраженное для указанной функции и получаем формулу

$$\Phi(z) = \chi(z)\frac{F(z)}{E(z)}\int\limits_L \frac{E^+(x)}{F(x)}\cdot\frac{g(x)}{\chi^+(x)}\cdot\frac{dx}{x-z}, \tag{9}$$

интеграл от которой есть ограниченная в области D функция, стремящаяся к нулю при $|z| \to \infty$.

Значения отношения $\frac{F(z)}{E(z)}$ на L представляют собой ограниченную функцию, порядок функции $\frac{F(z)}{E(z)}$ в области D меньше $\frac{1}{2}$, поэтому в силу теоремы Фрагмена-Линделефа [6] (с. 69) отношение $\frac{F(z)}{E(z)}$ является функцией, ограниченной в области D. Такой же является и $\chi(z)$.

Таким образом, справедлива

Теорема. *Формула* (9) *определяет ограниченное частное решение неоднородной задачи* (1).

При $\rho = \frac{1}{2}$ формула (9) также даёт ограниченное частное решение задачи (1), в чем легко убедиться, замечая, что $\frac{F(z)}{E(z)}$ при $z = t < 0$ стремится к нулю, когда $t \to -\infty$.

Общее решение краевой задачи (1), как известно, представляется как сумма частного решения этой задачи и общего решения соответствующей однородной задачи.

Литература

1. Салимов Р. Б., Сулейманов А. З. *Новый подход к решению однородной краевой задачи Римана на луче с бесконечным индексом* // Известия вузов. Математика. – 2017, № 5. – С. 71-76.

2. Говоров Н. В. *Краевая задача Римана с бесконечным индексом.* – М.: Наука, 1986. – 239 с.

3. Титчмарш Е. *Теория функций.* – М.: Наука, 1980. – 464 с.

4. Гахов Ф. Д. *Краевые задачи.* – М.: Наука, 1977. – 640 с.

5. Мусхелишвили Н. И. *Сингулярные интегральные уравнения.* – М.: Наука, 1968. – 511 с.

6. Левин Б. Я. *Распределение корней целых функций.* – М.: Гостехиздат, 1956. – 632 с.

NEW METHOD SOLUTION OF THE INHOMOGENEOUS RIEMANN BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH INFINITE INDEX ON THE BEAM

R.B. Salimov, A.Z. Suleymanov

We consider the Riemann boundary value problem with infinite index when boundary condition of the problem is defined on the positive real axis of the complex plane. To solve this problem, we use an approach based on removal of the infinite gap of the argument of the coefficient in the boundary condition with a specially chosen analytic function.

Keywords: Riemann boundary value problem, analytic function, infinite index.

УДК 514.822

ОБРАТНАЯ КРАЕВАЯ ЗАДАЧА ДЛЯ КРЫЛОВОГО ПРОФИЛЯ, РАСПОЛОЖЕННОГО ВБЛИЗИ ПРЯМОЛИНЕЙНОГО ЭКРАНА

Р.Б. Салимов[1], Т.Ю. Горская[2]

1 *salimov.rsb@gmail.com*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет
2 *tatyana_gorskaya@mail.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

Рассматривается обратная краевая задача для крылового профиля, расположенного вблизи твёрдой прямолинейной границы и обтекаемого потоком несжимаемой невязкой жидкости со скоростью на бесконечности, параллельной указанной границе. Требуется определить форму и положение крылового профиля по заданному на нём распределению потенциала скорости как функции абсциссы точки профиля, заданному значению скорости в передней кромке профиля и заданной разности значений функции тока на профиле и на прямоугольной границе (или величины, связанной с указанной разностью).

Ключевые слова: обратная краевая задача, крыловой профиль, несжимаемая невязкая жидкость, комплексный потенциал.

Пусть крыловой профиль L_z, расположенный в плоскости комплексного переменного $z = x + iy$, обтекается установившимся потоком несжимаемой невязкой жидкости, ограниченным прямой $y = -p$, $p = \text{const} > 0$, и имеющем на бесконечности скорость, равную $v_\infty e^{i\pi}$, $v_\infty > 0$.

Примем, что задняя кромка B профиля L_z имеет абсциссу $x = 0$, D есть точка профиля L_z, наиболее удалённая от мнимой оси, с известной абсциссой $x_D > 0$, и абсциссы всех остальных точек L_z удовлетворяют соотношению $0 < x < x_D$.

Будем считать, что точка разветвления потока A расположена на нижней поверхности L_z, её абсциссу обозначим $x = x_A$. Обозначим через s дуговую абсциссу точки L_z, отсчитываемую от точки разветвления потока A на профиле L_z в положительном направлении, при котором область течения остаётся справа.

Пусть $w(z) = \varphi + i\psi$ – комплексный потенциал течения вокруг L_z. Обозначая через v модуль скорости в точке z, через η угол наклона этой скорости к действительной оси, будем иметь $w'(z) = ve^{-i\eta}$.

Область течения обозначим D_z. Примем, что $\psi = 0$ на прямой $y = -p$, $\psi = -Q = \text{const} < 0$ на профиле L_z.

На дуге ADB профиля L_z имеем $\varphi'_s = v$, на остальной части профиля $\varphi'_s = -v$.

Примем, что в точке разветвления A потенциал скорости принимает значение $\varphi = 0$. С увеличением дуговой абсциссы s точки z профиля потенциал скорости φ возрастает, его значение в точке B обозначим φ_B, считая, что φ на участке ADB профиля L_z является непрерывной функцией от s. Если потенциал скорости φ на участке AB нижней поверхности профиля является непрерывной функцией от s, то на этом участке с уменьшением s, φ возрастает от нуля до значения в точке B, которое обозначим φ_H.

Разность $\varphi_B - \varphi_H = \Gamma$ есть циркуляция скорости v по профилю L_z. Будем считать, что $\Gamma > 0$.

На указанной части BA нижней поверхности профиля L_z выделим точку N, в которой $\varphi = \dfrac{\varphi_H}{2}$, и в дальнейшем будем считать, что потенциал скорости φ на профиле является непрерывной функцией от s всюду, кроме точки N с абсциссой x_N, и при обходе L_z в положительном направлении, начиная от точки N, получает приращение, равное $\varphi_B - \dfrac{\varphi_H}{2} - \dfrac{\varphi_H}{2} = \Gamma$.

Как показано в книге [1] (с. 97-105), если контур L_z неизвестен, на нём задано распределение величины скорости $v = v(s), 0 \le s \le l$, где l – периметр контура L_z, и требуется найти его форму, то эта задача оказывается разрешимой лишь при выполнении условий разрешимости – условий замкнутости контура L_z. Сказанное справедливо и для профиля L_z, расположенного вблизи экрана. Методы преодоления возникающих при этом трудностей и подробный обзор работ по указанной проблеме изложены в книге [2].

В связи со сказанным представляется целесообразным рассмотрение задач об определении формы профиля L_z, которые оказываются разрешимыми.

В качестве такой задачи рассмотрим следующую, считая, что профиль L_z обтекается вышеуказанным потоком с прямолинейной границей.

Требуется найти форму профиля L_z, положение прямолинейной границы $y = -p$, т.е. число p, и величину скорости невозмущённого потока v_∞, если на L_z задано распределение потенциала скорости φ, как функция абсциссы x точки профиля L_z в виде

$$\begin{array}{l} \varphi = \varphi^+(x),\ 0 \le x \le x_D,\ \text{на верхней поверхности,} \\ \varphi = \varphi^-(x),\ 0 \le x \le x_D,\ \text{на нижней поверхности,} \end{array} \tag{1}$$

причём $\varphi^+(0) = \varphi^-(0) = \varphi_B$, $\varphi^-(x_N + 0) = \dfrac{\varphi_H}{2}$, $\varphi^-(x_A) = 0$, $\varphi^-(x_N - 0) = \varphi_B - \dfrac{\varphi_H}{2}$, $\varphi^+(x_D) = \varphi^-(x_D)$, здесь φ_B, φ_A, x_A, x_N, x_D – известные числа, кроме того, задана величина скорости $v_D = v|_{x=x_D}$ в точке D профиля L_z и вышеуказанное число Q. Будем считать, что $\varphi^+(x)$, $\varphi^-(x)$ – дифференцируемые функции, производные которых удовлетворяет условию Гельдера в интервале $[0, x_D)$, а в окрестности точки $x = x_D$ для вышеуказанных производных справедливы представления $(\varphi^\pm(x))'_x = \Phi^\pm(x)/(x_D - x)^{\frac{1}{2}}$, $\Phi^\pm(x_D) \ne 0$.

Аналогично тому, как это сделано в [1] (с. 97-105), целесообразно считать, что заданы производные $(\varphi^\pm(x))'$ и далее вычисляются значения $\varphi^\pm(x)$. При задании значений этих производных учтем, что для точек L_z справедливо соотношение $v/\cos\eta = \varphi'_x$. Если искомый контур L_z по форме достаточно близок к реально используемому профилю, для точек большей части которого, исключая небольшой участок, содержащий точку D и малую часть, содержащую заднюю кромку B, величина $|\cos\eta|$ будет близка к единице (например, имеет место соотношение $1/\sqrt{2} \le |\cos\eta| \le 1$), то на большей части L_z (исключая участки, содержащие точки D, B) величина скорости v будет близка к $|\varphi'_x|$. При этом распределение величины скорости v на небольшом участке L_z, содержащем точку D, характеризуется задаваемым в точке D значением $v = v_D$ (и задаваемой производной $(\varphi^\pm(x))'$.

Поэтому вышеуказанную задачу можно считать близким аналогом задачи, рассмотренной в [1] (с. 97-105).

Поступая аналогично тому, как это сделано в [1] (с. 97-105), область течения D_z

разрежем по линии, соединяющей точку N профиля L_z с точкой K прямой $y=-p$, на берегах разреза которой потенциал скорости φ принимает постоянные значения.

Область D_z с указанным разрезом функцией $w=w(z)$ отображается конформно на область D_w в плоскости $w=\varphi+i\psi$, причём область D_w имеет тот же вид, что и в работе [3]; соответствующие точки в различных плоскостях обозначаются одними и теми же буквами.

Поступая как в работе [3], отобразим конформно прямоугольник D_w на кольцо $q<|\zeta^*|<1$, расположенное в плоскости $\zeta^*=\rho e^{i\gamma}$ и разрезанное по отрезку $(q,1)$ действительной оси, функцией $w=\omega(\zeta^*)$. Точкам A и B отвечают соответственно $\zeta^*=qe^{i\gamma_A}$ и $\zeta^*=\zeta^*_B=qe^{i\gamma_B}$, $\gamma_B=2\pi-\gamma_A$, здесь $\gamma_A<\pi$, $\gamma_B>\pi$. Ясно, что производная $w'_{\zeta^*}=\omega'(\zeta^*)$ аналитична в области D_{ζ^*} – кольце $q<|\zeta^*|<1$, так как в совпадающих точках берегов вышеуказанного разреза она имеет одинаковые значения. Обозначим

$$\varphi_1(\gamma)=\Re\omega(qe^{i\gamma}). \tag{2}$$

Пусть $z=z(\zeta^*)$ есть аналитическая в кольце D_{ζ^*} функция, определяемая соотношением $w(z)=\omega(\zeta^*)$, она осуществляет конформное отображение области D_{ζ^*} на D_z, при котором точке $\zeta^*=-1$ отвечает $z=\infty$. Эта функция $z(\zeta^*)$ может быть аналитически продолжена через окружность $|\zeta^*|=1$. Следовательно, точка $\zeta^*=-1$ является полюсом второго порядка производной $z'(\zeta^*)$. Граничные значения функции $z(\zeta^*)$ обозначим $z(e^{i\gamma})=x_0(\gamma)+iy_0(\gamma)$, $z(qe^{i\gamma})=x_1(\gamma)+iy_1(\gamma)$. Функция

$$Z(\zeta^*)=i\zeta^*z'(\zeta^*), \tag{3}$$

аналитическая в кольце D_{ζ^*} кроме полюса $\zeta^*=-1$, имеет граничные значения

$$Z(e^{i\gamma})=x'_0(\gamma)+iy'_0(\gamma),\quad Z(qe^{i\gamma})=x'_1(\gamma)+iy'_1(\gamma). \tag{4}$$

На основании равенства $w(z)=\omega(\zeta^*)$ при $\zeta^*=qe^{i\gamma}$ с учетом (1), (2) получаем

$$\varphi^{\pm}(x)=\varphi_1(\gamma). \tag{5}$$

Здесь верхний знак берется при $\gamma_D<\gamma<\gamma_B$, где γ_D есть значение γ, при котором $\varphi_1(\gamma)=\varphi^{\pm}(x_D)$, нижний знак – при остальных значениях γ из интервала $(0,2\pi)$. Из соотношения (5) найдем функцию $x=x_1(\gamma)$, $0\le\gamma<2\pi$. Следовательно, будут известны значения

$$\Re z(qe^{i\gamma})=x_1(\gamma),\ 0\le\gamma<2\pi. \tag{6}$$

На прямолинейной границе области D_z имеем $y=-p$, поэтому

$$\Re\left[z(e^{i\gamma})e^{-i\frac{3\pi}{2}}\right]=p,\ 0\le\gamma<2\pi. \tag{7}$$

Мы получили краевые условия для искомой функции $z(\zeta^*)$. Так как в дальнейшем понадобятся значения производных $(z(e^i\gamma))'_\gamma$, $(z(qe^i\gamma))'_\gamma$, целесообразно найти непосредственно выражения для этих производных, используя соответствующие им краевые условия.

Дифференцируя по γ условия (6), (7), с учётом (3), (4), получим

$$\Re Z(qe^{i\gamma})=x'_1(\gamma),\ \Re\left[Z(e^{i\gamma})e^{-i\frac{3\pi}{2}}\right]=0,\ 0\le\gamma<2\pi. \tag{8}$$

Нужно найти аналитическую в кольце D_{ζ^*} функцию $Z(\zeta^*)$, имеющую полюс $\zeta^* = -1$ второго порядка и удовлетворяющую последним краевым условиям.

Для решения задачи использованы результаты статьи [4]. Показано, что решение задачи (8) определяется формулой

$$Z(\zeta^*) = \frac{e^{-i\chi(\zeta^*)}}{(\zeta^*+1)^2}\left\{U(\zeta^*)(\zeta^* - {\zeta_1}^*) + ic_1 + \nu_0\left[V(\zeta^*)(\zeta^* - \zeta_1^*) + 1\right] + iC_0(\zeta^* - \zeta_1^*)\right\}, \qquad (9)$$

где ν_0, C_0 – произвольные действительные постоянные, $\chi(\zeta^*) = \Phi(\zeta^*) + i\Psi(\zeta^*)$, $U(\zeta^*) = U_1(\zeta^*) + iU_2(\zeta^*)$, $V(\zeta^*) = V_1(\zeta^*) + iV_2(\zeta^*)$ – однозначные аналитические в кольце D_{ζ^*} функции, определяемые по формуле Вилля [5], (с. 238) по известным граничным значениям действительных функций соответственно $\Phi(\tau)$, $U_1(\tau)$, $V_1(\tau)$, $\tau = e^{i\gamma}$ или $\tau = qe^{i\gamma}$, $\Phi(\tau) = \nu(\tau) - \arg(\tau - {\zeta_1}^*) + 3\pi\beta_1(\tau)$, $\nu(e^{i\gamma}) = \gamma + \dfrac{3\pi}{2}$, $\nu(qe^{i\gamma}) = 2\arg(qe^{i\gamma}+1)$, $0 \le \gamma < 2\pi$, и $-\dfrac{\pi}{2} < \arg(qe^{i\gamma}+1) < \dfrac{\pi}{2}$, $\zeta_1^* = re^{\frac{i\pi}{2}}$, r – произвольное выбранное число, $q < r < 1$, $\arg(\tau - {\zeta_1}^*)$ – значение на границе кольца D_{ζ^*} определённой ветви $\Theta(\zeta^*) = \arg(\zeta^* - {\zeta_1}^*)$, непрерывной и однозначной в D_{ζ^*} с разрезом вдоль линии, соединяющей точки $\zeta^* = {\zeta_1}^*$ и $\zeta^* = 1$ и лежащей внутри верхнего полукольца, $\Theta(\zeta^*)|_{\zeta^*=0} = \dfrac{3\pi}{2}$,

$$U_1(\tau) = c(\tau) - c_1\frac{\sin\Theta(\tau)}{|\tau - {\zeta_1}^*|}, \qquad V_1(\tau) = \frac{\cos(\Theta(\tau)+\pi)}{|\tau - {\zeta_1}^*|},$$

$$c_1 = \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[c(e^{i\gamma}) - c(qe^{i\gamma})]d\gamma, \quad c(\tau) = \frac{|\tau+1|^2 m(\tau)}{|\tau - {\zeta_1}^*|}e^{\Psi(\tau)}\cos[3\pi\beta_1(\tau)],$$

$$m(e^{i\gamma}) = 0, \quad m(qe^{i\gamma}) = x_1'(\gamma), \quad 0 \le \gamma < 2\pi,$$

учитывая, что

$$\int_0^{2\pi}\Im Z(qe^{i\gamma})d\gamma = 0, \quad \Im Z(qe^{i\gamma}) = \frac{|{\varphi_1}'(\gamma_D)|}{\nu_D}. \qquad (10)$$

Первое из этих условий есть условие замкнутости контура L_z, при выполнении второго условия скорость в точке D найденного профиля L_z будет равна заданной скорости ν_D.

Подставляя найденное решение (9) в условия (10), приходим к системе двух линейных уравнений с неизвестными ν_0, C_0, которая в общем случае будет разрешимой. Определяя из этой системы ν_0, C_0 и подставляя последние в формулу (9), получим единственное решение $Z(\zeta^*)$ рассматриваемой задачи. По найденным значениям $Z(qe^{i\gamma}) = x_1'(\gamma) + iy_1'(\gamma)$ определяются координаты точек контура L_z и распределение скорости $\nu_1(\gamma) = \dfrac{|\varphi_1'(\gamma)|}{|Z(qe^{i\gamma})|}$ на L_z. Далее для полученного решения находятся v_∞ и p.

Литература

1. Тумашев Г. Г., Нужин М. Т. *Обратные краевые задачи и их приложения.* – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 1965. – 333 с.

2. Елизаров А. М., Ильинский Н. Б., Поташов А. В. *Обратные краевые задачи аэрогидродинамики*. — М.: Наука, 1994. – 436 с.

3. Лабуткин А. Г., Салимов Р. Б. *Видоизмененная обратная краевая задача для крылового профиля, расположенного вблизи прямолинейного экрана* // Известия вузов. Матем. 2008. – № 2. – С. 32-40.

4. Салимов Р. Б., Селезнев В. В. *Решение краевой задачи Гильберта с разрывами коэффициента для кольца* // Изд. Казан. гос. ун-та. Труды семинара по краевым задачам, 1980. – Вып. 17. – С. 140-157.

5. Ахиезер Н. И. *Элементы теории эллиптических функций*. – М.: Наука, 1970. – 304 с.

INVERSE BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR A WING PROFILE LOCATED NEAR A RECTILINEAR SCREEN

R.B. Salimov, T.Yu. Gorskaya

We consider an inverse boundary value problem for a wing profile located near a solid rectilinear boundary and flowing in an incompressible inviscid fluid with a velocity at infinity parallel to this boundary. It is required to determine the shape and position of the wing profile according to the velocity potential distribution, defined on it as a function of the abscissa of the profile point and the given difference between the values of the current function on the profile and on the rectangular boundary (or a value associated with the indicated difference).

Keywords: inverse boundary value problem, wing profile, incompressible inviscid fluid, complex potential.

УДК 517.956.2

ОБ ИНТЕГРИРОВАНИИ ОДНОЙ НЕЛИНЕЙНОЙ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ КОШИ-РИМАНА С ПОМОЩЬЮ УНИФОРМИЗАЦИИ ЭЛЛИПТИЧЕСКИХ КРИВЫХ

Д.С. Сафаров[1]

1 *safarov-5252@mail.ru*; Курган-Тюбинский госуниверситет имени Н. Хусрава, Республики Таджикистан

В работе методом униформизации эллиптической кривой получено решение специальной нелинейной системы уравнений Коши – Римана, выражающееся через эллиптические функции Вейерштрасса.

Ключевые слова: эллиптическая функция, дифференцируемое отображение, двоякопериодическое решение, униформизация.

На комплексной плоскости $\mathbb{C}$ рассмотрим нелинейную обобщенную систему уравнений Коши – Римана

$$\left(\frac{\partial w}{\partial \bar{z}}\right)^2 = f^2(z)[4a_1 w^3 + 6a_2 w^2 + 4a_3 w + a_4] = f^2(z)G_3(z), \qquad (1)$$

где $z = x + iy$, $w = u + i\vartheta$, $2w_{\bar{z}} = w_x + iw_y$, a_1, a_2, a_3, a_4 – комплексные постоянные, $f(z)$ – заданная функция, причём многочлен в правой части не имеет кратных корней.

Будем искать решение уравнения (1). С этой целью уравнению (1) сопоставим эллиптическую кривую [1]

$$\tau^2 = 4a_1 t^3 + 6a_2 t^2 + 4a_3 t + a_4. \tag{2}$$

Задача об униформизации этой кривой решается с помощью эллиптические функции Вейерштрасса $\wp(t)$ и $\wp'(t)$ [1].

Пусть g_2 и g_3 – любые комплексные числа, подчиненные условию $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$.

В теории модулярных функций [1] показано, что при выполнении этого условия система уравнений [1]

$$\left.\begin{aligned} 60\sum{}'(m_1 h_1 + m_2 h_2)^{-4} &= q_2, \\ 140\sum{}'(m_1 h_1 + m_2 h_2)^{-6} &= q_3, \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

имеет одно решение на верхней полуплоскости, то есть $Jm(h_2/h_1) > 0$. Тогда функция Вейерштрасса $\wp(u)$, построенная на периодах h_1 и h_2, будет удовлетворять дифференциальному уравнению [1]

$$\wp'^2(u) = 4\wp^2(u) - g_2\wp(u) - g_3. \tag{4}$$

Поэтому пара (t_1, τ_1), где

$$t_1 = \wp(u),\ \tau_1 = \wp\prime(u) \tag{5}$$

будет при любом u точкой алгебраической кривой

$$\tau_1^2 = 4t_1^3 - g_2 t_1 - g_3. \tag{6}$$

Равенства (5) устанавливают взаимно однозначное соответствие между точками алгебраической кривой (6) и точками параллелограмма периодов функции $\wp(u)$, при этом пару (∞, ∞) также считают точкой алгебраической кривой.

При помощи замены переменных уравнение (2) сводится к виду (6). Тогда [2], если

$$g_2 = 3a_2^2 - 4a_1 a_3,\ g_3 = 2a_1 a_2 a_3 - a_2^3 - a_1^2 a_4,$$

то в силу предположении, что уравнение $G_3(z) = 0$ имеет три различные корни, дискриминант полученного уравнения вида (6) $g_2^3 - 27g_3^2 \neq 0$. Поэтому, можно найти периоды $h_1,\ h_2$, решив систему уравнений и построенная функция Вейерштрасса $\wp(u)$ удовлетворяет уравнению (4).

При замене

$$t = \frac{1}{a_1}\left(\wp(u) - \frac{1}{2}a_2\right),\ \tau = \frac{\wp\prime(u)}{a_1},$$

где u – точка параллелограмма периодов Ω функции $\wp(u)$, все точки (t, τ) кривой (2) находится в взаимно однозначное соответствие с точками параллелограмма Ω.

Пусть теперь $g_2,\ g_3$ – инварианты функции $\wp(u)$ и Ω – фундаментальная область двоякопериодической группы P

$$\omega(z) = z + m_1, h_1 + m_2 h_2,\ m_1, m_2 = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots,$$

$h_1,\ h_2$ – решение системы (3).

Решение уравнения (1) будем искать в виде

$$w(z) = \frac{1}{a_1}\left[\wp(\varphi(z)) - \frac{1}{2}a_2\right], \tag{7}$$

где $\varphi(z)$ – некоторое дифференцируемое квазиконформное отображение область Ω на области $\varphi(\Omega)$, удовлетворяющее условию квазипериодичности

$$\varphi(z + m_1h_1 + m_2h_2) = \varphi(z) + m_1h_1 + m_2h_2,,\ \ m_2 = 0, \pm1, \pm2, \pm3, \ldots \tag{8}$$

По определению [2,3] $\varphi(z)$ – гомеоморфизм класса C^1 и удовлетворяет уравнению Бельтрами

$$\varphi_{\bar{z}} - q(z)\varphi_z = 0,\ |q(z)| \le q_0 < 1, \tag{9}$$

где $q(z)$ – заданная двоякопериодическая функция с периодами $h_1,\ h_2$, непрерывная по Гёльдеру в области Ω с показателем α, $\alpha \in (0,1)$. Класс таких функций обозначается через H_*^{α}.

Подставляя (2) в уравнение (1), в силу уравнения для $\wp(u)$, относительно $\varphi(z)$ получим неоднородное уравнение Коши – Римана

$$\frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = f(z)\ \left(\text{или}\ \frac{\partial\varphi}{\partial\bar{z}} = -f(z)\right). \tag{10}$$

Функция

$$\varphi(z) = z + \chi(z) \in C^1 \tag{11}$$

удовлетворяет условию квазипериодичности (8), если функция $\chi(z)$ является двоякопериодическим решением уравнения (10) с периодами h_1, h_2. Если $f(z) \in H_*^{\alpha}$ и

$$\iint\limits_{\Omega} f(z)d\Omega = 0,$$

то в силу условии $\varphi(0) = 0$, $\chi(z)$ представимо в виде [5]

$$\chi(z) = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega} f(t)[\zeta(t-z) - \zeta(t)]d_t\Omega = T_\zeta f(z),$$

$\zeta(z)$ – дзета-функция Вейерштрасса, $\zeta'(z) = -\wp(z)$.

В [4, 5] показано, что интегральный оператор $T_\zeta f(z)$ обладает свойством оператора Векуа [2]

$$T_\Omega f = -\frac{1}{\pi}\iint\limits_{\Omega}\frac{f(t)}{t-z}d_t\Omega = 0,\ (T_\zeta f)_{\bar{z}} = f(z),\ (T_\zeta f(z))_z = S_\zeta f(z),$$

$S_\zeta f(z)$ – сингулярный интеграл с ядром функции $\wp(u)$ и

$$T_\zeta : \left\{\rho \in L_p^*,\ \iint\limits_{\Omega} pd\Omega = 0\right\} \to \overset{*}{W}{}_p^1, p > 2, \|S_\zeta\|_{L_2} = 1,$$

L_p^*, $\overset{*}{W}{}_p^1$ – пространство двоякопериодических функций, принадлежащих соответственно $L_p(\overline{\Omega})$, $W_p^1(\Omega), \overset{*}{W}{}_p^1 \subset H_*^\alpha, \alpha = \frac{p-2}{p}$.

Чтобы $\varphi(z)$ по формуле (11) давало искомое отображение, функция $f(z)$ должна удовлетворять сингулярному интегральному уравнению вида [2-4]

$$f(z) - q(z)S_\zeta f(z) = q(z).$$

Показано, что это уравнение всегда имеет единственное решение вида

$$f(z) = (1 - qS_\zeta)^{-1} q,$$

где $(1 - qS_\zeta)^{-1}$ – обратный к оператору $1 - qS_\zeta$ и при выполнении условия

$$\iint\limits_{\Omega} (1 - qS_\zeta)^{-1} d\Omega = 0,$$

функция $\varphi(z)$ – дифференцируемое квазиконформное отображение параллелограмма Ω с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$ в четырехугольник $\varphi(\Omega)$ с вершинами $0, h_1, h_1 + h_2, h_2$.

Так как функция $\wp(u)$ четная, то решение уравнения (1) можно взять в виде

$$w(z) = \frac{1}{a_1}\left[\wp(c + \varphi(z)) - \frac{1}{2}a_2\right],$$

где c – некоторая постоянная.

С помощью полученного решения уравнения (1) можно решить задачу об униформизации алгебраической поверхности вида $\tau^2 = z_1^2(a_0 z_2^4 + a_1 z_2^3 + a_2 z_2^2 + a_3 z_2 + a_4)$, где $(z_1, z_2, \tau) \in \mathbb{C}^3$.

Литература

1. Курант Р. *Теория функций*. – М.: Наука, 1968. - 468 с.

2. Векуа И.Н. *Обобщенные аналитические функции*. – М.: Физматлит, 1959. - 609 с.

3. Альфорс Л. *Лекции по квазконформные отображениям*. – М.: Мир, 1969. -130 с.

4. Сафаров Д.С. *Двоякопериодические решения равномерно эллиптических систем первого порядка* // ДАН России. – 2010. – Т. 430, № 4. – С. 454-457

5. Сафаров Д.С. *Периодические решения эллиптических систем первого порядка* // Дифф. уравнен. – 1981. – Т. 17, № 8. – С. 468-1477.

ON INTEGRATION OF A NONLINEAR SYSTEMS OF CAUCHY-RIEMANN EQUATIONS WITH THE HELP OF UNIFORMIZATION OF ELLIPTIC CURVES

D.S. Safarov

By the method of uniformization of elliptic curves, we obtain a solution of a special nonlinear system of Cauchy – Riemann equations via Weierstrass elliptic functions.

Keywords: elliptic function, differentiable mapping, doubly periodic solution, uniformization.

УДК 517.53/55

О ВЕКТОРНОЙ КРАЕВОЙ ЗАДАЧЕ РИМАНА НА РИМАНОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

Е.В. Семенко[1], Т.И. Семенко[2]

1 *semenko54@gmail.com*; Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный педагогический университет

2 *semenko_ti@mail.ru*; Новосибирский государственный технический университет, Новосибирский государственный педагогический университет

В статье обсуждается ранее практически не рассматривавшаяся векторная краевая задача линейного сопряжения (векторная задача Римана) на римановой поверхности. Показано, что любую векторную краевую задачу Римана на римановой поверхности можно свести к последовательному решению хорошо изученных одномерных задач Римана.

Ключевые слова: риманова поверхность, векторная краевая задача линейного сопряжения.

На компактной римановой поверхности D рода $\rho > 0$ рассмотрим векторную краевую задачу Римана (задачу линейного сопряжения)

$$f^+(t) = G(t)f^-(t) + g(t), \quad t \in L, \tag{1}$$

где $L \subset D$ – гладкий контур на D (не обязательно связный), разбивающий D на две связные части $D^\pm$, причем ориентация L согласована с D^+; $f^\pm(t)$ – соответствующие граничные значения на L аналитического в $D^\pm$ n-мерного вектора $f(z)$; $G(t)$ – невырожденная ($\det G(t) \neq 0$) гельдерова ($n \times n$) матрица на L, называемая матрицей коэффициентов краевого условия; $g(t)$ – гельдерова n-мерная вектор-функция на L (правая часть).

Эта задача исчерпывающим образом изучена на плоскости, т.е. на римановой сфере ($\rho = 0$), см. например [1], а в одномерном ($n = 1$) случае хорошо исследована и на римановой поверхности любого рода, см. например [2], [3]. Однако векторные краевые задачи на римановой поверхности рода $\rho > 0$ практически не исследовались.

Будем рассматривать как аналитические, так и мероморфные решения задачи (1). Напомним (см. например [1]), что вектор $f(z) = (f_1(z), \dots, f_n(z))^T$ называется аналитическим/мероморфным в $D^\pm$, если его координаты $f_j(z)$, $j = \overline{1,n}$ аналитичны/мероморфны в $D^\pm$. При этом точка z_0 называется полюсом вектора $f(z)$, если она является полюсом хотя бы одной его координаты, и порядком полюса будет максимальный порядок полюса по всем координатам. Аналогично точка z_0 будет нулем вектора, если все его координаты обращаются в этой точке в нуль, и порядок нуля есть минимальный порядок нуля по координатам. Обычным образом определяется дивизор вектора и кратность вектора заданному дивизору.

Как обычно в задаче Римана, назовем коэффициенты $G_1(t)$ и $G_2(t)$ эквивалентными, если $G_2(t) = X^+(t)G_1(t)(X^-(t))^{-1}$, где $X^\pm(t)$ – граничные значения на L матрицы $X(z)$, невырожденной ($\det X(z) \neq 0$) и аналитической в $D^\pm$. Решения задач сопряжения

$$f_j^+(t) = G_j(t)f_j^-(t) + g_j(t), \quad j = \overline{1,2}; \quad g_1(t) = X^+(t)g_2(t),$$

очевидно связаны соотношением $f_2(z) = X(z)f_1(z)$. В частности, аналитические решения задач имеют одинаковые нули, а мероморфные – одинаковые нули и полюса. Таким образом, существенным этапом решения задачи (1) является классификация матриц коэффициентов $G(t)$ с точностью до эквивалентности.

Итак, рассмотрим далее только однородные ($g(t) \equiv 0$) задачи сопряжения. Аналогично задачам на плоскости, для решения задач на римановой поверхности вводится так называемое ядро Коши $K_0(p, q)$ – это абелев дифференциал по p, кратный $r_1 \cdots r_\rho r_0^{-1} q^{-1}$ с вычетами единица в q и минус единица в r_0 и мероморфная функция по q, кратная $p^{-1} r_0 r_1^{-1} \cdots r_\rho^{-1}$. Здесь $\Delta_0 = r_1 \cdots r_\rho r_0^{-1}$ – минимальный дивизор, т.е. не существует абелевых дифференциалов, кратных Δ, и мероморфных функций, кратных Δ^{-1}. Ядро Коши $K_0(p, q)$ есть прямой аналог выражения $dp/(p-q)$ на плоскости. Его построение и свойства см., например, в [2]. В частности, с помощью ядра Коши для любой точки $q \notin L$ можно построить аналитические в $D^\pm$ функции $\psi^\pm(z) = \psi^\pm(q \mid z)$, имеющие единственный простой нуль в точке $z = q$ [2]. Пусть далее $\psi(q \mid t) = \psi^+(q \mid t)/\psi^-(q \mid t)$, $t \in L$. Для дивизора $\Delta = p_1 \cdots p_s (q_1)^{-1} \cdots (q_m)^{-1}$ положим

$$\psi(\Delta \mid z) = \prod_{j=1}^{s} \psi(p_j \mid z) \cdot \prod_{j=1}^{m} (\psi(q_j \mid z))^{-1}, \quad \psi(\Delta \mid t) = \prod_{j=1}^{s} \psi(p_j \mid t) \cdot \prod_{j=1}^{m} (\psi(q_j \mid t))^{-1}.$$

Очевидно, что вектор $f(z)$ есть решение однородной задачи $f^+(t) = G(t)f^-(t)$, кратное дивизору Δ тогда и только тогда, когда $f_0(z) = f(z)/\psi(\Delta \mid z)$ есть аналитическое решение задачи $f_0^+(t) = G_0(t)f_0^-(t)$, $G_0(t) = G(t)/\psi(\Delta \mid t)$.

С помощью указанного ядра Коши и введенных функций $\psi(\Delta \mid z)$ можно, полностью повторяя и лишь слегка модифицируя рассуждения для задач на плоскости [1], доказать следующие утверждения:

1. Однородная краевая задача $f^+(t) = G(t)f^-(t)$ в классе функций, кратных дивизору Δ, сводится к системе интегральных уравнений Фредгольма на L (далее – система Фредгольма). В свою очередь система уравнений, сопряженная к системе Фредгольма (т.е. задающая условия разрешимости системы Фредгольма), сводится к однородной краевой задаче в классе функций, кратных дивизору Δ^{-1} (так называемая союзная задача).

2. Порядок дивизора любого мероморфного решения однородной задачи не превосходить константы $m = m(G, \rho)$, т.е. в частности если $\deg \Delta > m(G, \rho)$, то ненулевых решений соответствующей системы Фредгольма не существует. То же относится к решениям союзной задачи, т.е. к решениям сопряженной системы Фредгольма или к условиям разрешимости, когда $\deg \Delta^{-1} > m_1$, т.е. $\deg \Delta < -m_1$.

3. Если степень дивизора Δ достаточно мала, $\deg \Delta < -m_2$, то существуют n линейно независимых мероморфных решений однородной задачи $f_1(z), \ldots, f_n(z)$, кратных Δ. Линейная независимость означает, что если из $f_j(z)$, $j = \overline{1, n}$, как из столбцов, составить матрицу $\Phi(z) = (f_1(z) \cdots f_n(z))$, то $\det \Phi(z) \not\equiv 0$.

Таким образом, на римановой поверхности всегда можно построить мероморфное матричное решение однородной задачи (1), т.е. построить мероморфную в $D^\pm$ матрицу $\Phi(z) = \Phi^\pm(z)$, не вырожденную тождественно ($\det \Phi(z) \not\equiv 0$) и такую, что

$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t)$, $t \in L$. Пусть $\Delta_j = (f_j)$, $j = \overline{1,n}$ – дивизоры столбцов матрицы Φ, а Δ – дивизор $\det\Phi(z)$. Очевидно, дивизор Δ кратен произведению Δ_j, но, вообще говоря, не равен ему, поскольку у определителя матрицы Φ могут быть нули, не являющиеся нулями какого-либо столбца.

Напомним, что на плоскости ($\rho = 0$) любой дивизор нулевой степени – главный, т.е. является дивизором мероморфной функции, что позволяет, с помощью умножения на мероморфные функции, свести все дивизоры решений в одну точку, т.е. взять их в виде $(f_j) = \Delta_j = q_0^{\kappa_j}$, $q_0 \notin L$. В таком случае нетрудно показать (см. [1]), что можно построить мероморфное матричное решение так, что дивизор его определителя будет равен произведению дивизоров столбцов, что, в свою очередь, позволяет с точностью до эквивалентности, считать матрицу коэффициентов диагональной

$$G(t) = \begin{pmatrix} \psi_0^{\kappa_1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_0^{\kappa_2} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_0^{\kappa_n} \end{pmatrix} \qquad \psi_0(t) = \psi(q_0 \mid t),$$

т.е. с точностью до эквивалентности коэффициент краевого условия задается степенями κ_j, $j = \overline{1,n}$, называемыми частными индексами матрицы $G(t)$, а задача (1) сводится к решению n одномерных задач, никак не связанных друг с другом.

На римановы поверхности положительного рода такое построение не переносится, однако, по сути повторяя рассуждения [1] на плоскости, можем свести матрицу коэффициентов к треугольной. Действительно, пусть $\Delta_j = (f_j)$, $j = \overline{1,n}$, тогда представим

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) \cdot \begin{pmatrix} \psi_1(z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \psi_2(z) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & \psi_n(z) \end{pmatrix} \qquad \psi_j = \psi(\Delta_j \mid z), \quad j = \overline{1,n},$$

т.е. разделим каждый столбец f_j матрицы Φ на функцию ψ_j, имеющую те же нули и полюса. Тогда столбцы матрицы $\Phi_0(z)$ будут аналитичны в $D^{\pm}$ и не будут иметь нулей. Однако останутся нули определителя матрицы Φ, не совпадающие с нулями столбцов, т.е. дивизором нулей матрицы Φ_0 будет $\Delta_0 = \Delta/(\prod \Delta_j)$. Пусть определитель $\Phi_0(z)$ обращается в нуль в точке p_0. Это означает, что к некоторому столбцу $f_s(z)$ можно прибавить линейную комбинацию столбцов с меньшими номерами

$$f_s \to f_s + \sum_{j=1}^{s-1} \alpha_j f_j,$$

так, что новый столбец будет в точке p_0 иметь нуль, и его можно будет разделить на

$\psi(p_0 \mid z)$. В терминах матриц это означает, что

$$\Phi_0(z) = \Phi_1(z) \cdot \begin{pmatrix} 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & \psi(p_0 \mid z) & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & -\alpha_1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & -\alpha_2 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & -\alpha_{s-1} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix} =$$

$$= \Phi_1(z) H_1(z),$$

где $H_1(z)$ – верхняя треугольная матрица, а определитель Φ_1 имеет те же нули, что и определитель Φ_0, кроме p_0. Продолжая аналогично, в итоге придем к представлению $\Phi^{\pm}(z) = X^{\pm}(z) H^{\pm}(z)$, где $X^{\pm}(z)$ аналитичны и невырожденны в $D^{\pm}$, а матрицы $H^{\pm}(z)$ верхние треугольные. Но поскольку $\Phi^{+}(t) = G(t)\Phi^{-}(t)$, то получим представление

$$X^{+}(t) H^{+}(t) = G(t) X^{-}(t) H^{-}(t) \text{ или } G(t) = X^{+}(t) G_0(t) (X^{-}(t))^{-1},$$

где $X^{\pm}(z)$ аналитичны и невырожденны в $D^{\pm}$, а $G_0(t) = H^{+}(t)(H^{-}(t))^{-1}$ – верхняя треугольная матрица. Таким образом, краевая задача (1) с точностью до эквивалентности сводится к задаче с верхней треугольной матрицей коэффициентов. Однако, краевые задачи с верхней треугольной матрицей решаются последовательно "снизу вверх" , т.е. сводятся к последовательному решению одномерных краевых задач сопряжения.

Литература

1. Векуа Н. П. *Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи.* – М.: Гостехиздат, 1950. – 252 с.

2. Монахов В. Н., Семенко Е. В. *Краевые задачи и псевдодифференциальные операторы на римановых поверхностях.* – М.: Физматлит, 2003. – 415 с.

3. Семенко Е. В. *Представление дифференциалов Прима как решений краевых задач на римановых поверхностях* // Сиб. матем. журн. – 2016. – Т. 57. – № 1. – С. 157–170.

ON THE VECTOR BOUNDARY VALUE RIEMANN PROBLEM ON RIEMANN SURFACE

E.V. Semenko, T.I. Semenko

The vector boundary value problem of linear conjugation (vector Riemann problem), that almost haven't been investigated before, is considered. It is shown that each vector boundary value Riemann problem can be reduced to consequent solution of well studied one-dimensional Riemann problems.

Keywords: Riemann surface, vector boundary value problem of linear conjugation.

УДК 517.95

ОБРАТНЫЕ ЗАДАЧИ ПО ОПРЕДЕЛЕНИЮ ПРАВЫХ ЧАСТЕЙ УРАВНЕНИЯ СМЕШАННОГО ПАРАБОЛО-ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА С ВЫРОЖДАЮЩЕЙСЯ ПАРАБОЛИЧЕСКОЙ ЧАСТЬЮ

С.Н. Сидоров[1]

1 *stsid@mail.ru*; Стерлитамакский филиал Института стретгических исследований РБ, Стерлитамакский филиал Башкирского государственного университета

Изучены обратные задачи по определению сомножителей правых частей уравнения смешанного параболо-гиперболического типа, зависящих от времени. На основании теории интегральных уравнений доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений.

Ключевые слова: уравнение смешанного параболо-гиперболического типа, обратные задачи, существование, единственность.

В прямоугольной области $D = \{(x,t) | 0 < x < l, -\alpha < t < \beta\}$ рассмотрим уравнение смешанного типа

$$Lu = F(x,t), \tag{1}$$

где

$$Lu = \begin{cases} t^n u_{xx} - u_t - b^2 t^n u, & t > 0, \\ u_{xx} - u_{tt} - b^2 u, & t < 0, \end{cases} \quad F(x,t) = \begin{cases} f_1(x) g_1(t), & t > 0, \\ f_2(x) g_2(t), & t < 0, \end{cases}$$

$n > 0$, $b \geq 0$, $l > 0$, $\alpha > 0$, $\beta > 0$ – заданные действительные числа.

Задача 1. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_1(t)$, удовлетворяющие условиям:*

$$u(x,t) \in C(\overline{D}) \cap C_t^1(D) \cap C_x^1(\overline{D}) \cap C_x^2(D_+) \cap C^2(D_-); \tag{2}$$

$$g_1(t) \in C[0,\beta]; \tag{3}$$

$$Lu(x,t) \equiv F(x,t), \quad (x,t) \in D_+ \cup D_-; \tag{4}$$

$$u(0,t) = u(l,t) = 0, \quad -\alpha \leq t \leq \beta; \qquad u(x,-\alpha) = 0, \quad 0 \leq x \leq l; \tag{5}$$

$$u(x_0,t) = h_1(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad 0 \leq t \leq \beta, \tag{6}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_2(t)$, $h_1(t)$ – заданные функции, x_0 – заданная точка из интервала $(0,l)$, $D_+ = D \cap \{t > 0\}$, $D_- = D \cap \{t < 0\}$.

Задача 2. *Найти функции $u(x,t)$ и $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (2), (4), (5) *и*

$$g_2(t) \in C[-\alpha,0]; \tag{7}$$

$$u(x_0,t) = h_2(t), \quad 0 < x_0 < l, \quad -\alpha \leq t \leq 0, \tag{8}$$

где $f_i(x)$, $i = 1,2$, $g_1(t)$, $h_2(t)$ – известные функции.

Задача 3. *Найти функции $u(x,t)$, $g_1(t)$, $g_2(t)$, удовлетворяющие условиям* (2) – (8), *здесь $f_i(x)$, $h_i(t)$, $i = 1,2$ – заданные функции.*

Отметим, что исследование задач 1 – 3 базируется на прямой начально-граничной задаче (2), (4) – (5), изученной в [1]. В [2, 3] для вырождающихся

параболо-гиперболических уравнений были изучены обратные задачи по отысканию функций $u(x,t)$ и $f_i(x)$, когда $g_i(t) \equiv 1$. Поставленные задачи для уравнения (1) при $n = 0$ изучены в [4, с. 228–238].

В данной работе доказаны соответствующие теоремы единственности и существования решений задач 1 – 3 для уравнения (1) при $n > 0$.

Литература

1. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. *Начально-граничная задача для неоднородных вырождающихся уравнений смешанного параболо-гиперболического типа* // Итоги науки и техники. Серия Совр. матем. и ее прил. Тем. обзоры. – 2017. – Т. 137. – С. 26–60.

2. Сидоров С. Н. *Нелокальная обратная задача по определению правых частей вырождающегося уравнения смешанного параболо-гиперболического типа* // Научные ведомости БелГУ. Математика. Физика. – 2014. – № 25 (196). – Вып. 37. – С. 45–57.

3. Сабитов К. Б., Сидоров С. Н. *Обратная задача для вырождающегося параболо-гиперболического уравнения с нелокальным граничным условием* // Изв. вузов. Математика. – 2015. – № 1. – С. 46–59.

4. Сабитов К. Б. *Прямые и обратные задачи для уравнений смешанного параболо-гиперболического типа.* – М.: Наука, 2016. – 272 с.

INVERSE PROBLEMS ON DETERMINATION OF THE RIGHT-HAND SIDES OF A MIXED PARABOLIC-HYPERBOLIC TYPE EQUATION WITH DEGENERATE PARABOLIC PART

S.N. Sidorov

Inverse problems on the determination of the factors of expressions in the right-hand sides of a mixed parabolic-hyperbolic type equation that depend on the time are studied. On the basis of the theory of integral equations, the corresponding uniqueness and existence theorems for solutions are proved.

Keywords: equation of mixed parabolic-hyperbolic type, inverse problems, existence, uniqueness.

УДК 517.518.87

КВАДРАТУРНЫЕ ФОРМУЛЫ С КРАТНЫМИ УЗЛАМИ ДЛЯ ГИПЕРСИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛА ГИЛЬБЕРТА

Ю.С. Солиев[1]

1 *su1951@mail.ru*; Московский автомобильно-дорожный государственный технический университет

Для гиперсингулярного интеграла Гильберта построены и исследованы квадратурные формулы с кратными узлами.

Ключевые слова: гиперсингулярный интеграл Гильберта, интерполяция с кратными узлами, квадратурная формула.

Приближенное вычисление гиперсингулярных интегралов Гильберта и Коши-Адамара рассматривалось в работах И.В. Бойкова, Б.Г. Габдулхаева, И.К. Лифанова, А.М. Линькова, их учеников и последователей. Некоторый обзор работ по этой тематике содержится в работе [1].

Для гиперсингулярного интеграла Гильберта (см., напр., [2], [3])

$$Ax = A(x;s) = \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi} x(\sigma)\operatorname{cosec}^2\frac{\sigma - s}{2}d\sigma, \tag{1}$$

понимаемого в смысле конечной части по Адамару, где $x(s)$ – плотность интеграла, непрерывная 2π – периодическая функция, построены и исследованы квадратурные формулы с узлами различной кратности.

Пусть $H_n x = H_n(x;s)$ – тригонометрический полином порядка n с равным нулю коэффициентом при $\cos ns$, интерполирующий функцию $x(s)$ в узлах $s_k = \frac{2k\pi}{n}, k = \overline{1,n}$, такой, что $H_n(s_k) = x(s_k), H_n'(s_k) = x'(s_k), k = \overline{1,n}$. Известно [4], что

$$H_n x = H_n(x,s) = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(x(s_k) + x'(s_k)\sin(s - s_k))(\sin\frac{ns}{2}\operatorname{cosec}\frac{s - s_k}{2})^2. \tag{2}$$

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом (2), получим квадратурную формулу

$$Ax = A(H_n x, s) + R_n x = \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n}(a(s - s_k)x(s_k) + b(s - s_k)x'(s_k)) + R_n x, \tag{3}$$

где $a(t) = \frac{1}{2}(n(1 + \cos nt) - \sin nt\operatorname{ctg}\frac{t}{2})\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2}$, $b(t) = n\cos\frac{2n-1}{2}t\operatorname{cosec}\frac{t}{2} - \frac{1}{2}\sin nt\operatorname{cosec}^2\frac{t}{2} - n\sin nt$, а $R_n x = R_n(x,s)$ – остаточный член.

Квадратурная формула (3) точна для любого тригонометрического полинома порядка не выше $n-1$.

При $x'(s_k) = 0$ из (3) следует квадратурная формула для интеграла (1), полученная аппроксимацией плотности интерполяционной формулой Джексона.

В квадратурной формуле (3) в качестве узлов можно взять точки $s_k = \frac{2k-1}{n}\pi, k = \overline{1,n}$.

Пусть $x(t) \in H_\alpha^{(r)}, 0 < \alpha \le 1, r \ge 2$. Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (3) справедлива оценка

$$\|R_n x\|_C = O(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-2}}), \quad r + \alpha > 2.$$

В работе [5] с использованием кратного и лакунарного тригонометрического интерполирования построены различные квадратурные формулы для сингулярного интеграла с ядром Гильберта. Эти результаты легко перенести для интеграла (1).

Рассмотрим, например, случай $(0,1,2)$-интерполирования по узлам $s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}(k = \overline{0,2n})$ (см. [6], [7]). Пусть $T_n x = T_n(x,s)$ – $(0,1,2)$-интерполяционный тригонометрический полином порядка $3n+1$ по узлам $s_k = \frac{2k\pi}{2n+1}(k = \overline{0,2n})$, такой, что $T_n^{(j)}(s_k) = x^{(j)}(s_k), j = \overline{0,2}$.

Аппроксимируя плотность интеграла (1) полиномом $T_n x = T_n(x;s)$, получим квадратурную формулу

$$Ax = A(T_n x;s) + R_n x = \frac{1}{(2n+1)^3}\sum_{k=0}^{2n}(a(s - s_k)x(s_k) + b(s - s_k)x'(s_k) + c(s - s_k)x''(s_k)) + R_n x, \tag{4}$$

где

$$a(t) = 2\sum_{\nu=1}^{n}(\nu^2-(2n+1)^2)\nu\cos\nu t+\sum_{\nu=n+1}^{3n+1}(\nu-2n-1)(4n+2-\nu)\nu\cos\nu t,$$

$$b(t) = -2\sum_{\nu=1}^{n}\nu\cos\nu t+\sum_{\nu=n+1}^{3n+1}\nu\cos\nu t,$$

$$c(t) = -4\sum_{\nu=1}^{n}\nu^2\sin\nu t+\sum_{\nu=n+1}^{3n+1}(2\nu-6n-3)\nu\sin\nu t,$$

а $R_n x = R_n(x,s)$ – остаточный член.

Заметим, что легко найти тригонометрические суммы, входящие в выражения для коэффициентов квадратурной формулы (4), однако выражения для них получаются довольно громоздкими и поэтому, они здесь не приводятся.

Пусть $x(t) \in H_\alpha^{(r)}, 0 < \alpha \le 1, r \ge 3$. Тогда для остаточного члена квадратурной формулы (4) справедлива оценка

$$\|R_n x\|_C = O(\frac{\ln n}{n^{r+\alpha-3}}), \quad r+\alpha > 3.$$

Литература

1. Бойков И. *Приближенные методы вычисления сингулярных и гиперсингулярных интегралов. Монография, ч.2. Гиперсингулярные интегралы.* – Пенза: изд-во Пенз. гос. ун-та, 2009. – 252 с.

2. Ашур С., Шарипов Р. *Квадратурные формулы для сингулярных интегралов Адамара* // Констр. теор. функц. и функц. анал. – Казань: изд-во Казанского ун-та, 1992. – С. 15–23.

3. Вайникко Г., Лифанов И. *Полтавский Л.Н. Численные методы в гиперсингулярных интегральных уравнениях и их приложения.* – М.: "Янус-К", 2001. – 508 с.

4. Турецкий А. *Теория интерполирования в задачах.* – Минск: "Вышэйшая школа", 1968. – 320 с.

5. Солиев Ю. *Квадратурные и кубатурные формулы с кратными узлами для сингулярных интегралов. Дис... канд. физ.-мат. наук.* – Казань, 1978. – 127 с.

6. Зеель Э. *О кратном тригонометрическом интерполировании* // Изв. вузов. Матем. – 1974. – № 3. – С. 43–51.

7. Зеель Э. *О тригонометрическом* $(0,p,q)$ *- интерполировании* // Изв. вузов. Матем. – 1970. – № 3. – С. 27–35.

QUADRATURE FORMULAS WITH MULTIPLE NODES FOR THE HILBERT HYPERSINGULAR INTEGRAL

Yu.S. Soliev

For the Hilbert hypersingular integral quadrature formulas with multiple nodes are constructed and studied.

Keywords: Hilbert hypersingular integral, interpolation with multiple nodes, quadrature formula.

УДК 517.9

ФРЕЙМОВЫЕ СВОЙСТВА ЯДРА СЕГЕ В ПРОСТРАНСТВЕ ХАРДИ

К.С. Сперанский[1], П.А. Терехин[2]

1 *konstantin.speransky@yahoo.com*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

2 *terekhinpa@mail.ru*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет имени Н.Г. Чернышевского

Установлено, что последовательность $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$, *где* $K_\zeta(z) = (1-\bar{\zeta}z)^{-1}$ — *ядро Сеге пространства Харди* $H^2(\mathbb{D})$, *является фреймом в* $H^2(\mathbb{D})$ *относительно* банахова *модельного пространства при выполнении некоторых условий на последовательность* $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ *попарно различных точек единичного круга* $\mathbb{D}$.

Ключевые слова: банахов фрейм, модельное пространство фрейма, воспроизводящее ядро, пространство Харди.

Банахово пространство X, состоящее из числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty}$, называется *модельным*, если система канонических ортов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ образует базис в X. Сопряженное пространство X^* к модельному пространству X изометрически изоморфно банахову пространству Y, состоящему из числовых последовательностей $y = \{y_n\}_{n=1}^{\infty}$. Соответствующий изоморфизм дается равенством $y_n = (e_n, x^*)$, $n = 1,2,\ldots$, где $x^* \in X^*$, причем $\|y\|_Y := \|x^*\|_{X^*}$. Далее X — модельное пространство.

Последовательность $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ ненулевых элементов банахова пространства F называется *фреймом в* F *относительного* X, если существуют постоянные $0 < A \le B < \infty$ такие, что для каждого непрерывного линейного функционала $g \in G = F^*$ последовательность его коэффициентов Фурье $\{(f_n, g)\}_{n=1}^{\infty}$ удовлетворяет неравенствам

$$A\|g\|_G \le \|\{(f_n, g)\}_{n=1}^{\infty}\|_Y \le B\|g\|_G.$$

Если $F = G = H$ — гильбертово пространство и $X = Y = \ell^2$, то фрейм в H относительно ℓ^2 в смысле предыдущего определения совпадает с “обычным” фреймом Даффина–Шеффера [1].

Всякий фрейм $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ в F относительно X является *системой представления*, т.е. для любого вектора $f \in F$ существует числовая последовательность $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} \in X$ такая, что (см. [2])

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n f_n.$$

Верно и обратное: произвольная система представления $\{f_n\}_{n=1}^{\infty} \subset F \setminus \{0\}$ образует фрейм в F относительного (вообще говоря, неединственного) модельного пространства X.

Пусть $H^2 = H^2(\mathbb{D})$ — пространство Харди, состоящее из всех аналитических функций $f(z)$, $z \in \mathbb{D} = (|z| < 1)$, для которых конечна норма

$$\|f\| = \sup_{0<r<1} \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(re^{it})|^2 \, dt \right)^{1/2}.$$

Хорошо известно, что пространство H^2 является *функциональным гильбертовым пространством*, т.е. обладает *воспроизводящим ядром*

$$f(\zeta) = (f, K_\zeta), \qquad K_\zeta(z) = \frac{1}{1-\bar{\zeta}z}, \qquad \zeta \in \mathbb{D},$$

которое называется ядром Сеге (или ядром Коши).

Пусть $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность попарно различных точек единичного круга $\mathbb{D}$. Классическая задача восстановления аналитической функции по ее значениям в данных точках заключается в (однозначном) определении $f(\zeta)$ для произвольного $\zeta \in \mathbb{D}$ по известным значениям $f(\zeta_n)$, $n = 1, 2, \ldots$. Заметим, что сама возможность такого восстановления существенным образом зависит от выбора пространства функций (см., например, [3]). Здесь мы рассматриваем пространство Харди H^2.

Во-первых, необходимым условием положительного решения задачи восстановления является отрицание условия Бляшке

$$\sum_{n=1}^{\infty} (1 - |\zeta_n|) = \infty, \tag{1}$$

так как в противном случае произведение Бляшке $B(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\bar{\zeta}_n}{|\zeta_n|} \frac{\zeta_n - z}{1-\bar{\zeta}_n z}$ сходится, $B \in H^2$, $B \neq 0$, но при этом $B(\zeta_n) = 0$, $n = 1, 2, \ldots$.

Во-вторых, как следует из теоремы Тотика [4], для каждой последовательности $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$, удовлетворяющей условию (1), существует такое семейство многочленов $p_{n,k}$, $n = 1, 2, \ldots$, $k = 1, \ldots, n$, что для всех $f \in H^2$ справедливо представление

$$f = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} f(\zeta_k) p_{n,k},$$

что решает задачу восстановления.

Возникает естественный вопрос: возможно ли представление произвольной функции $f \in H^2$ в виде ряда

$$f = \sum_{n=1}^{\infty} x_n K_{\zeta_n}$$

по элементам системы функций $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ с некоторыми коэффициентами $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ (вообще говоря, нелинейно зависящими от f) или, эквивалентно, является ли последовательность ядер Сеге $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ фреймом в H^2 относительно некоторого модельного пространства X? Ясно, что если такое представление возможно, то полагая в нем $f = K_\zeta$, $\zeta \in \mathbb{D}$, и умножая скалярно на $g \in H^2$, получаем формулу восстановления (в которой $x_n = x_n(\zeta)$)

$$g(\zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{x}_n g(\zeta_n).$$

Однозначность такого восстановления (единственность g) обеспечивается тем, что каждый фрейм является полной системой.

Покажем, что ответ на поставленный вопрос будет положительным при выполнении дополнительных условий на $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$. А именно, предположим, что последовательность "радиусов" $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ удовлетворяет условиям

$$0 < r_1 < \ldots < r_k < r_{k+1} < \ldots, \qquad \lim_{k\to\infty} r_k = 1, \tag{2}$$

и последовательность натуральных чисел $\{N_k\}_{k=1}^{\infty}$ такова, что

$$\frac{a}{N_k} \le 1 - r_k \le \frac{b}{N_k}, \qquad k = 1, 2, \dots, \tag{3}$$

для некоторых постоянных $0 < a \le b < \infty$. Рассмотрим последовательность точек $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ специального вида

$$\zeta_n = \zeta_{k,j} = r_k e^{2\pi i j/N_k}, \qquad j = 0, \dots, N_k - 1, \qquad k = 1, 2, \dots,$$

т.е. объединение k-блоков, состоящих из точек $\{\zeta_{k,j}\}_{j=0}^{N_k-1}$, равномерно распределенных на окружности $|z| = r_k$.

Наконец, в качестве модельного пространства X рассмотрим пространство $\ell^{1,2}$, состоящее из всех числовых последовательностей $x = \{x_n\}_{n=1}^{\infty} = \{x_{k,j} : k \ge 1, 0 \le j \le N_k - 1\}$, для которых конечна норма

$$\|x\|_{1,2} = \sum_{k=1}^{\infty} \Big(\frac{1}{N_k} \sum_{j=0}^{N_k-1} |x_{k,j}|^2 \Big)^{1/2}.$$

Теорема. *При выполнении условий* (2) *и* (3) *последовательность* $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ *образует фрейм в пространстве Харди* H^2 *относительно модельного пространства* $\ell^{1,2}$.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

Литература

1. Duffin R. J., Schaeffer A. C. *A class of nonharmonic Fourier series* // Trans. Amer. Math. Soc. – 1952. – Vol. 72. – P. 341–366.

2. Терехин П. А. *Фреймы в банаховом пространстве* // Функц. анализ и его прил. – 2010. – Т. 44. – № 3. – С. 50–62.

3. Partington J. R. *Interpolation, Identification, and Sampling*. – Oxford: Clarendon Press, 1997. – 288 p.

4. Totik V. *Recovery of H^p functions* // Proc. Amer. Math. Soc. – 1984. – Vol. 90. – No. 4. – P. 531–537.

FRAME PROPERTIES OF THE SZEGÖ KERNEL FOR THE HARDY SPACE

K.S. Speransky, P.A. Terekhin

Let $K_\zeta(z) = (1 - \bar{\zeta} z)^{-1}$ be the Szegö kernel for the Hardy space $H^2(\mathbb{D})$. We prove that under certain conditions on points $\{\zeta_n\}_{n=1}^{\infty}$ the sequence $\{K_{\zeta_n}\}_{n=1}^{\infty}$ is a frame in $H^2(\mathbb{D})$ with respect to some Banach *modeling space.*

Keywords: Banach frame, modeling space, reproducing kernel, Hardy space.

УДК 517.538.52+517.538.53+517.518.84

О СВОЙСТВАХ МНОГОЧЛЕНОВ ЭРМИТА-ПАДЕ ЭКСПОНЕНЦИАЛЬНЫХ ФУНКЦИЙ

А.П. Старовойтов[1], Е.П. Кечко[2]

1 *svoitov@gsu.by*; Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины
2 *ekechko@gmail.com*; Гомельский государственный университет имени Франциска Скорины

В работе изучаются экстремальные свойства и локализация нулей недиагональных многочленов Эрмита – Паде 1-го рода для системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ с произвольными различными комплексными числами $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Приведенные теоремы дополняют и обобщают известные результаты К. Малера, Э. Саффа и Р. Варги, Г. Шталя, П. Борвейна, Ф. Вилонского и К. Драйвер.

Ключевые слова: многочлены Эрмита – Паде, нули многочленов Эрмита – Паде, асимптотические равенства.

Для заданного натурального числа k рассмотрим произвольный фиксированный набор $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ различных комплексных и произвольный набор $\{n_p\}_{p=0}^{k}$ целых положительных чисел.

Многочленами Эрмита – Паде 1-го рода системы экспоненциальных функций $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ называют многочлены $A_{n_p}^{p}$, $deg\, A_{n_p}^{p} \leqslant n_p - 1$, $p = 0, 1, ..., k$, хотя бы один из которых тождественно не равен нулю, удовлетворяющие условию

$$R_{n_0, n_1, ..., n_k}(z) = \sum_{p=0}^{k} A_{n_p}^{p}(z)\, e^{\lambda_p z} = O\left(z^{n_0+n_1+...+n_k-1}\right),\ z \to 0. \qquad (1)$$

Многочлены $\{A_{n_p}^{p}(z)\}_{p=0}^{k}$ (при $n_0 = n_1 = ... = n_k$ их принято называть диагональными многочленами Эрмита – Паде 1-го рода) введены в рассмотрение Эрмитом [1] в связи с исследованием арифметических свойств числа e.

Если не принимать во внимание одномерный случай, когда мы имеем дело с хорошо изученными классическими многочленами Паде (см. [2]), то можно сказать, что к настоящему времени свойства недиагональных многочленов исследованы в значительно меньшей степени (см. [3], [4]), чем диагональных. Отчасти это связано с тем, что методы, ранее применяемые при изучении диагональных многочленов и аппроксимаций Эрмита – Паде, в общей ситуации не столь эффективны. Например, методы Лапласа и перевала (метод седловой точки) достаточно детально разработаны для нахождения асимптотики интегралов, зависящих от одного параметра n. Однако, в общей ситуации приходится иметь дело с интегралами, зависящими от $k+1$ различных параметров $n_0, n_1, ..., n_k$.

Полиномы $A_{n_0}^{0}(z), A_{n_1}^{1}(z), ..., A_{n_k}^{k}(z)$, удовлетворяющие равенствам (1), могут быть получены решением линейной системы $n_0 + n_1 + ... + n_k - 1$ однородных уравнений с $n_0 + n_1 + ... + n_k$ неизвестными коэффициентами. Поэтому нетривиальное решение всегда существует. Легко показать, что такие нетривиальные решения могут быть выписаны в явном виде. Действительно, пусть C_p – граница круга с центром в точке λ_p столь малого радиуса, что все остальные λ_j лежат во внешности этого круга, а C_∞ – граница круга с центром в нуле столь большого радиуса, что все числа λ_j,

$j = 0, 1, 2, ..., k$ принадлежат его внутренности. С использованием теоремы Коши о вычетах легко показать, что функции

$$A^p_{n_p}(z) = \frac{e^{-\lambda_p z}}{2\pi i} \int\limits_{C_p} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{\prod_{p=0}^{k} (\xi - \lambda_p)^{n_p}}, \quad 0 \leqslant p \leqslant k, \tag{2}$$

$$R_{n_0, n_1, ..., n_k}(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{C_\infty} \frac{e^{\xi z}\, d\xi}{\prod_{p=0}^{k} (\xi - \lambda_p)^{n_p}} \tag{3}$$

удовлетворяют (1) и всем другим условиям. Равенства (2) и (3) не являются новыми. Впервые они появились в работах Эрмита.

Далее будем рассматривать нормированную функцию, полученную делением остаточной функции $R_{n_0, n_1, ..., n_k}(z)$ на старший коэффициент многочлена $A^k_{n_k}(z)$. Чтобы найти его численное значение, продифференцируем $n_k - 1$ раз равенство (2) при $p = k$. В результате получим, что значение старшего коэффициента $A^k_{n_k}(z)$ совпадает со значением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i\, (n_k - 1)!} \int\limits_{C_k} \frac{d\xi}{(\xi - \lambda_k) \prod_{p=0}^{k-1} (\xi - \lambda_p)^{n_p}},$$

который вычисляется по интегральной формуле Коши, и равно

$$\prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)^{-n_p} / (n_k - 1)!.$$

Покажем, что нормированные и преобразованные соответствующим образом многочлены $\{A^p_{n_p}(z)\}_{p=0}^{k}$ являются решением следующей экстремальной задачи:

для фиксированного набора действительных чисел $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_k$ найти многочлены $a^p_{n_p}(z)$, $deg\, a^p_{n_p} \leqslant n_p$, $p = 0, 1, ..., k$, со старшим коэффициентом многочлена $a^k_{n_k}(z)$ равным 1, реализующие минимум в следующем равенстве

$$E_{n_0, n_1, ..., n_k} = E_{n_0, ..., n_k}(\lambda_0, \lambda_1, ..., \lambda_k; \rho) := \min_{\{a^p_{n_p}(z)\}_{p=0}^{k}} \left\| \sum_{p=0}^{k} a^p_{n_p}(z)\, e^{\lambda_p z} \right\|_\rho,$$

где $\|h\|_\rho = \max\{|h(z)| : z \in D_\rho\}$, $D_\rho = \{z : |z| \leqslant \rho\} \subset \mathbb{C}$, а ρ – фиксированное положительное число меньшее $\pi/(\lambda_k - \lambda_0)$.

Сформулируем основные результаты.

Теорема 1. *Пусть $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_k$ – произвольная фиксированная последовательность действительных чисел, а $\rho < \pi/(\lambda_k - \lambda_0)$. Тогда, если $\min\{n_0, n_1, ..., n_k\} \to \infty$, то*

$$E_{n_0, n_1, ..., n_k} \sim \frac{n_k! \prod_{p=0}^{k-1} (\lambda_k - \lambda_p)^{n_p + 1}}{(n_0 + n_1 + ... + n_k + k)!}\, \rho^{n_0 + n_1 + ... + n_k + k}.$$

Теорема 2. *Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^{k}$ – произвольный фиксированный набор различных комплексных чисел. Тогда при $\min\{n_0, n_1, ..., n_k\} \to \infty$ локально равномерно по z*

$$R_{n_0, n_1, ..., n_k}(z) \sim \frac{z^{n_0 + n_1 + ... + n_k - 1}}{(n_0 + n_1 + ... + n_k - 1)!} e^{\frac{n_0\lambda_0 + n_1\lambda_1 + ... + n_k\lambda_k}{n_0 + n_1 + ... + n_k} z}.$$

В частных случаях теоремы совпадают с известными ранее результатами Л. Трефезена [5], П. Борвейна [6], Д. Браесса [7], Ф. Вилонского [8], А.В. Астафьевой и А.П. Старовойтова [9] в диагональном случае, а в недиагональном случае – с результатом К. Драйвер [4].

Далее, мы хотим локализовать область, в которой находятся нули многочленов $A^p_{n_p}(z)$, в зависимости от выбора чисел $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ и $\{n_p\}_{p=0}^k$. В отдельных частных случаях такая задача хорошо известна. Так Г. Сеге [10] исследовал поведение нулей многочленов Тейлора функций, связанных с экспонентой. Э. Сафф и Р. Варга [11] нашли границы кольца, в котором находятся нули многочленов Паде экспоненциальной функции. В частности, им принадлежит хорошо известная "теорема о кольце".

В работе [8] Ф. Вилонский получил оценку сверху для модулей нулей диагональных многочленов Эрмита – Паде $\{A^p_n(z)\}_{p=0}^k$ системы экспонент $\{e^{pz}\}_{p=0}^k$. В [12] аналогичный результат получен для произвольной системы экспонент $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^k$. Г. Шталь [13] исследовал расположение нулей преобразованных с помощью масштабирования независимой переменной квадратичных диагональных многочленов Эрмита – Паде 1-го и 2-го рода системы экспонент $\{1, e^z, e^{2z}\}$ и показал, что указанные нули лежат на специальных дугах комплексной плоскости. Эти исследования были продолжены им в [14].

Справедлива следующая

Теорема 3. *Пусть $\{\lambda_p\}_{p=0}^k$ – произвольные различные комплексные числа. Тогда при $n_p \geqslant 2$, $p = 0, 1, \ldots, k$, $k \geqslant 1$ нули многочлена $A^p_{n_p}$, $0 \leqslant p \leqslant k$, находятся в круге $\{z : |z| < R^p_{n_p}\}$, где*

$$R^p_{n_p} = \sum_{\substack{j=0 \\ j \neq p}}^{k} \frac{n_p + n_j - 2/3}{|\lambda_p - \lambda_j|}.$$

Теорема 3 согласуется со всеми ранее известными результатами и содержит их в качестве частных случаев. Кроме того, построенные примеры показывают, что как верхнюю, так и нижнюю оценки для границы области локализации нулей в теореме 3 существенно улучшить нельзя.

Работа выполнена при финансовой поддержке Министерства образования Республики Беларусь.

Литература

1. Hermite C. *Sur la généralisation des fractions continues algébriques* // Ann. Math. Pura. Appl. Ser. 2A. – 1883. – V. 21. – P. 289–308.

2. Бейкер Дж. мл., Грейвс-Моррис П. *Аппроксимации Паде. 1. Основы теории. 2. Обобщения и приложения.* – М.: Мир, 1986.

3. Mahler K. *Zur Approximation der Exponentialfunktion und des Logarithmus, I, II* // J. Reine Angew. Math. – 1931. – V. 166. – P. 118–150.

4. Driver K. *Nondiagonal Hermite – Padé approximation to the exponential function* // J. of Comput. and Appl. Math. – 1995. – V. 65. – P. 125–134.

5. Trefethen L. N. *The asymptotic accuracy of rational best approximations to e^z on a disk* // J. Approx.Theory. – 1984. – V. 40. – № 4. – P. 380–384.

6. Borwein P. B. *Quadratic Hermite-Padé approximation to the exponential function* // Const. Approx. – 1986. – V. 62. – P. 291–302.

7. Braess D. *On the conjecture of Meinardus on rational approximation of e^z, II* // J. Approx.Theory. – 1984. – V. 40. – № 4. – P. 375–379.

8. Wielonsky F. *Asymptotics of Diagonal Hermite-Padé Approximants to e^z* // J. Approx. Theory. – 1997. – V. 90. – № 2. – P. 283–298.

9. Астафьева А.В., Старовойтов А.П. *Аппроксимации Эрмита – Паде экспоненциальных функций* // Матем. сборник. – 2016. – Т. 207, № 6. – С. 3–26.

10. Szegö G. *Über eienige Eigenschaften der Exponentialreihe* // Sitzunggsberichte Berliner Math. Ges. – 1924. – № 23. – P. 50–64.

11. Saff E., Varga R. *On the zeros and poles of Pade approximations to e^z, II, in "Pade and Rational Approximations: Theory and Applications"(E. B. Saff and R. S. Varga,Eds.).* – New York.: Academic Press, 1977.

12. Старовойтов А.П., Кечко Е.П. *Верхние оценки модулей нулей аппроксимаций Эрмита – Паде для набора экспоненциальных функций* // Матем. заметки. – 2016. – Т. 99, № 3. – С. 409–420.

13. Stahl H. *Asymptotics for quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function* // Electronic Trans. Num. Anal. – 2002. – № 14. – P. 193–220.

14. Stahl H. *Asymptotic distributions of zeros of quadratic Hermite-Padé polynomials associated with the exponential function* // Constr. Approx. – 2006. – V. 23. – № 2. – P. 193–220.

ON PROPERTIES HERMITE – PADÉ POLYNOMIALS OF EXPONENTIAL FUNCTIONS

A.P. Starovoitov, E.P. Kechko

We study extremal properties and localization of zeros of nondiagonal type I Hermite – Padé polynomials for exponential system $\{e^{\lambda_p z}\}_{p=0}^{k}$ with arbitrary different complex $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_k$. Proven theorems complement and generalize known results by K. Mahler, E. Saff and R. Varga, H. Stahl, P. Borwein, F. Wielonsky and K. Driver.

Keywords: Hermite – Padé polynomials, zeros of Hermite – Padé polynomials, asymptotic equality.

УДК 517.9:517.28:51-7:53.09

О НЕКОТОРЫХ ВОЗМОЖНОСТЯХ МАТЕМАТИЧЕСКОГО МОДЕЛИРОВАНИЯ ЯВЛЕНИЙ ТЕПЛОМАССОПЕРЕНОСА В ОДНОРОДНЫХ И МНОГОСЛОЙНЫХ ПОЛУПРОВОДНИКОВЫХ СТРУКТУРАХ

М.А. Степович[1], Е.В. Серегина[2], В.В. Калманович[3]

1 *m.stepovich@rambler.ru*; Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского
2 *evfs@yandex.ru*; Московский государственный технический университет им. Н.Э. Баумана (национальный исследовательский университет), Калужский филиал
3 *v572264@yandex.ru*; Калужский государственный университет им. К.Э. Циолковского

Описаны основные математические модели и узловые моменты их использования для моделирования процессов тепломассопереноса, обусловленного киловольтными электронами в полупроводниковых материалах. Дифференциальные уравнения тепломассопереноса записаны для одномерных процессов, реализующихся при использовании широких электронных пучков, и трёхмерных процессов, реализующихся при использовании сфокусированных электронных пучков — электронных зондов. Проведена оценка возможности использования трёхмерной модели для моделирования распределения тепла в полупроводниковых мишенях при низких энергиях электронного зонда. Рассмотрены некоторые возможности использования предлагаемых подходов для математического моделирования явлений тепломассопереноса в многослойных структурах.

Ключевые слова: математическое моделирование, дифференциальные уравнения, электронные пучки, полупроводники, явления тепломассопереноса, многослойные структуры.

В полупроводниковом материаловедении при проведении локальных исследований материалов с использованием сфокусированных пучков электронов — электронных зондов — наиболее часто (за исключением рентгеноспектрального микроанализа) в качестве информативного регистрируется сигнал, связанный с генерацией и диффузией в полупроводниковой мишени неравновесных неосновных носителей заряда (ННЗ) и/или регистрируются сигналы, характеристики которых существенно зависят от распределения ННЗ (например, катодолюминесценция). На характеристики информативного сигнала также существенное влияние может оказывать температура микрообъёма, в котором этот сигнал генерируется [1,2]; при использовании математического моделирования это приводит к необходимости решения уравнений тепломассопереноса. В настоящей работе рассмотрены некоторые возможности математического моделирования явлений тепломассопереноса в однородных и многослойных планарных структурах.

Для одномерной диффузии ННЗ в полупроводник, которая реализуется при использовании светового или широкого электронного пучка, уравнение диффузии имеет следующий вид:

1) для т. н. модели коллективного движения ННЗ (см. [3, 4])

$$D\, d^2\Delta p(z)/dz^2 - \Delta p(z)/\tau = -\rho(z) \qquad (1)$$

с граничными условиями

$$D\ d\Delta p(z=0)\big/ dz = v_s \Delta p(z=0), \qquad \Delta p(\infty) = 0. \tag{2}$$

Здесь D, τ, v_s — постоянные для однородного полупроводника величины: диффузионная длина, время жизни и скорость их поверхностной рекомбинации ННЗ, соответственно.

Эта модель используется в электронно–зондовых технологиях достаточно давно, однако её применение ограничивается однородными полупроводниками. Отметим также, что эта математическая модель позволила провести статистический анализ коллективного движения ННЗ и оценить влияние разброса в электрофизических параметрах полупроводника на распределение ННЗ [5,6], что может представлять интерес при моделировании полупроводниковых устройств;
2) для т. н. модели независимых источников (см. [12–14])

$$D\ d^2\Delta p(z,z_0)\big/ dz^2 - \Delta p(z,z_0)\big/ \tau = -\rho(z)\,\delta(z-z_0) \tag{3}$$

с граничными условиями

$$D\ d\Delta p(z=0,z_0)\big/ dz = v_s \Delta p(z=0,z_0),\ \Delta p(\infty,z_0) = 0, \tag{4}$$

при этом искомое распределение ННЗ после их диффузии в однородном полупроводнике $\Delta p(z)$ находится интегрированием $\Delta p(z,z_0)$ по z_0 от нуля до бесконечности, а для многослойных мишеней интегрирование проводится в пределах слоёв с учётом непрерывности $\Delta p(z,z_0)$ на их границе.

Задача (1) и (2) позволяет найти распределение ННЗ в однородном полупроводнике, а, с использованием (3), (4), ранее была решена задача нахождения распределения ННЗ в планарной двух– [7,8] и трёхслойной [9–11] полупроводниковых структурах для случая постоянства D, τ и v_s внутри каждого слоя.

При использовании электронного зонда реализуется трёхмерная диффузия ННЗ (тепла). Соответствующее уравнение для ННЗ имеет вид:

$$a^2 \mathrm{div}\left[\mathrm{grad}\Delta p(M)\right] - \Delta p(M) = -\rho(M) \tag{5}$$

с граничными условиями $D\ d\Delta p(x,y,z=0)\big/ dz = v_s \Delta p(x,y,z=0)$, $\Delta p(\infty,\infty,\infty) = 0$.

Уравнение (5) описывает распределение частиц вследствие диффузии или перераспределение температуры мишени в результате теплопроводности. Здесь функция $\Delta p(M)$ — распределение диффундирующего вещества (тепла); $M(x,y,z)$ — произвольная точка мишени; $x, y \in (-\infty,\infty)$, $z \in [0,\infty)$, $a = \mathrm{const}$. В уравнении (5) функция $\rho(M)$ описывает источники вещества (тепла) аналогично правым частям уравнений (1) и (3).

В настоящей работе в качестве источника ННЗ и/или тепла используется модель, основанная на возможности раздельного количественного описания вклада энергии поглощенных в мишени и обратно рассеянных электронов [12–14]. Отметим, что при моделировании процесса диффузии в правых частях уравнений (1), (3), (5) должна находиться концентрации генерированных в полупроводнике ННЗ, что достигается делением выражений в правой части этих формул, описывающих выделяемую в полупроводнике энергию, на энергию образования электронно–дырочной

пары. Ранее [2,13,14] было показано, что эта модель может быть успешно использована для проведения количественных расчётов для широкого класса материалов в широком диапазоне энергий первичных электронов. В то же время при проведении расчётов распределений ННЗ по глубине было установлено, что в реальном вычислительном процессе ошибки округления при больших z не стремятся к нулю и это служит источником сильной вычислительной неустойчивости решения [15]. Неясно также, как это может отразиться на статистической модели тепломассопереносса (см. [6]).

Некоторые возможности численного моделирования для трёхмерной модели изучены на примере уравнения диффузии ННЗ [16]. Проведена оценка возможности использования трёхмерной модели для моделирования распределения тепла в полупроводниковых мишенях при низких энергиях электронного зонда. Стационарное уравнение тепломассопереноса в полубесконечной области решено с использованием проекционного метода Галёркина. Установлена сходимость невязки, соответствующей приближенному решению уравнения диффузии с использованием модифицированных функций Лагерра. Проведена оценка возможности использования трёхмерной модели для моделирования распределения тепла в полупроводниковых мишенях при низких энергиях электронного зонда.

Исследования проведены при частичной финансовой поддержке Российского фонда фундаментальных исследований (проект № 16–03–00515).

Литература

1. Гвоздовер Р. С., Петров В. И., Подтяжкин Е. Я., Степович М. А., Филиппов М. Н. *Определение электрофизических параметров полупроводников по зависимости катодолюминесценции от ускоряющего напряжения* // Известия АН СССР. Серия физическая. — 1984. — Т. 48. — № 12. — С. 2378-2383.

2. Амрастанов А. Н., Гинзгеймер С. А., Степович М. А., Филиппов М. Н. *Об одной возможности математического моделирования теплового воздействия остро сфокусированного электронного пучка на однородный полупроводник* // Известия РАН. Серия физическая. — 2016. — Т. 80. — № 10. — С. 1448–1452.

3. Everhart T. E. *Kilovolt electron energy dissipation in solids* // J. Appl. Phys. — 1960. — V. 31. — No. 10. — P. 1483–1492.

4. Kanaya K., Okayama S. *Penetration and energy–loss theory of electrons in solid targets* // J. Phys. D. — 1972. — V. 5. — No. 1. — P. 43–58.

5. Серегина Е. В., Макаренков А. М., Степович М. А. *Статистический анализ модели коллективного движения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале, с использованием проекционного метода* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2011. — № 8. — С. 41-49.

6. Серегина Е. В., Макаренков А. М., Степович М. А. *Статистический анализ модели коллективного движения неосновных носителей заряда с использованием проекционного метода* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2012. — № 4. — С. 47-55.

7. Степович М. А., Снопова М. Г., Хохлов А. Г. *Использование модели независимых источников для расчёта распределения неосновных носителей заряда, генерированных в двухслойном полупроводнике электронным пучком* // Прикладная физика. — 2004. — № 3. — С. 61–65.

8. Stepovich M. A, Khokhlov A. G., Snopova M. G. *Model of independent sources used for calculation of distribution of minority charge carriers generated in two–layer semiconductor by electron beam* // Proceedings SPIE. — 2004. — Vol. 5398. — P. 159–165.

9. Burylova I. V., Petrov V. I., Snopova M. G., Stepovich M. A. *Mathematical simulation of distribution of minority charge carriers, generated in multy–layer semiconducting structure by a wide electron beam* // Физика и техника полупроводников. — 2007. — Т. 41. — Вып. 4. — С. 458–461.

10. Burylova I. V., Petrov V. I., Snopova M. G., Stepovich M. A. *Mathematical simulation of distribution of minority charge carriers, generated in multy–layer semiconducting structure by a wide electron beam* // Semiconductors. — 2007. — Vol. 41. — No. 4. — P. 444–447.

11. Снопова М. Г., Burylova I. V., Петров В. И., Степович М. А. *Анализ модели распределений неосновных носителей заряда, генерированных в трёхслойной полупроводниковой структуре широким электронным пучком* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2007. — № 7. — С. 1–6.

12. Михеев Н. Н., Никоноров И. М., Петров В. И., Степович М. А. *Определение электрофизических параметров полупроводников в растровом электронном микроскопе методами наведенного тока и катодолюминесценции* // Известия АН СССР. Серия физическая. — 1990. — Т. 54. — № 2. — С. 274–280.

13. Михеев Н. Н., Петров В. И., Степович М. А. *Количественный анализ материалов полупроводниковой оптоэлектроники методами растровой электронной микроскопии* // Известия АН СССР. Серия физическая. — 1991. — Т. 55. — № 8. — С. 1474–1482.

14. Михеев Н. Н., Степович М. А. *Распределение энергетических потерь при взаимодействии электронного зонда с веществом* // Заводская лаборатория. Диагностика материалов. — 1996. — Т. 62. — № 4. — С. 20–25.

15. Серегина Е.В., Макаренков А. М., Степович М. А., Филиппов М. Н. *О некоторых проблемах моделирования распределения неосновных носителей заряда, генерированных электронным пучком в полупроводниковом материале* // Поверхность. Рентгеновские, синхротронные и нейтронные исследования. — 2016. — № 4. — С. 88–93.

16. Макаренков А. М., Серегина Е. В., Степович М. А. *Проекционный метод Галеркина решения стационарного дифференциального уравнения диффузии в полубесконечной области* // Журнал вычислительной математики и математической физики. — 2017. — Т. 57. — № 5. — С. 57–69.

ON SOME POSSIBILITIES OF MATHEMATICAL MODELING OF HEAT AND MASS TRANSFER PHENOMENA IN SEMICONDUCTING HOMOGENEOUS AND MULTILAYER STRUCTURES

M.A. Stepovich, E.V. Seregina, V.V. Kalmanovich

The basic mathematical models and nodal moments of their usage for mathematical modeling of heat and mass transfer processes, caused by kilovolt electrons in semiconductor materials are described. Differential heat and mass transfer equations are written down for one–dimensional processes realized by the use of wide electron beams, and three–dimensional processes use of focused electron beams — electron probes. An assessment the possibility of using a three–dimensional models for modeling the heat distribution in semiconductor targets at low electron probe energies carried out. Some possibilities of using the proposed approaches for mathematical modeling of the phenomena of heat and mass transfer in multilayer structures are examined.

Keywords: mathematical modeling, differential equations, electron beams, semiconductors, heat and mass transfer phenomena, multilayer structures.

УДК 512

ОБ ОДНОМ КЛАССЕ (3,3)-ОДНОРОДНЫХ КВАНТОВЫХ ЛОГИК С ЧЕТНЫМ ЧИСЛОМ АТОМОВ

Ф.Ф. Султанбеков[1]

1 *foat.sultanbekov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

В статье построены (3,3)-однородные квантовые логики с произвольным четным числом атомов, начиная с 18. Для этих логик описаны их группы автоморфизмов.

Ключевые слова: квантовая логика, (3,3)-однородная логика, группа автоморфизмов.

Квантовая логика L называется (m, n)-*однородной*, если любой ее атом содержится ровно в m максимальных, относительно включения, ортогональных множествах атомов (называемых *блоками*), и каждый блок L содержит ровно n атомов. В такой логике $m \cdot \operatorname{card} A = n \cdot \operatorname{card} B$, где A – множество всех атомов L, B – множество всех ее блоков [2]. Необходимым условием существования двузначного состояния f на L является: $(\operatorname{card} A)/n = (\operatorname{card} B)/m = \operatorname{card}[f^{-1}(1) \cap A]$ [1], [2]. Автором в [2] построен пример (2,3)-однородной логики с 96 атомами без двузначных состояний. Группы автоморфизмов для некоторых конечных однородных логик описаны в [3]. На предыдущих конференциях 2013, 2015 годов подробно рассмотрены (3,3)-однородные логики с 18 и 19 атомами и описаны их пространства состояний.

Атомы (3,3)-однородной логики L обозначим неотрицательными целыми числами. Пусть n – нечетное натуральное число, не меньшее 9, $L(2n) = \{0, 1, ..., 2n-1\}$, семейство B состоит из блоков вида $\{2i, 2i+1, 2i+2\}$ и блоков вида $\{2j-5, 2j, 2j+5\}$, где $i, j \in \{0, 1, ..., n-1\}$ и все числа рассматриваются по модулю $2n$.

Теорема. *$L(2n)$ с указанными выше блоками является (3,3)-однородной квантовой логикой. Группа автоморфизмов логики $L(2n)$ состоит из $2n$ элементов и порождается двумя автоморфизмами: $t(k) = k+2$, $s(k) = 2n-k$.*

Литература

1. Овчинников П. Г. *Об однородных конечных логиках Гричи, допускающих двузначное состояние* // В кн: Теор. функций, прилож. и см. вопр. – Казан. гос. ун-т, Казань, 1999. – С. 167-168.

2. Султанбеков Ф. Ф. *Булевы алгебры и квантовые логики*. – Казань: Изд-во Казан. ун-та, 2007. – 132 с.

3. Sultanbekov F. *Automorphism Groups of Small (3,3)-homogeneous Logics* // Int. J. Theor. Phys. – 2010. – V. 49. – № 12. – P. 3271–3278.

ON A CLASS OF (3,3)-HOMOGENEOUS QUANTUM LOGICS WITH EVEN NUMBERS OF ATOMS

F.F. Sultanbekov

This paper describes a (3,3)-homogeneous quantum logics with an arbitrary even numbers of atoms beginning from 18. For this logics we find their automorphism groups.

Keywords: quantum logic, (3,3)-homogeneous logic, automorphism group.

УДК 517.5

ОБ ОДНОМ НЕРАВЕНСТВЕ УЛЬЯНОВА

Т.Е. Тилеубаев[1]

1 *tileubaev@mail.ru*; Евразийский Национальный Университет имени Л.Н. Гумилева

В статье получены неравенства типа П.Л. Ульянова. Также изучается вопрос о соотношениях между наилучшими приближениями функции f в различных метриках.

Ключевые слова: неравенства типа Ульянова, наилучшее приближение, модуль гладкости.

Пусть $1 \le p \le \infty, \alpha > -\frac{1}{2}$. Через $L_{p,\alpha}$ обозначим пространство, состоящее из измеримых функций $f(x)$ на $[0,\infty)$ для которых конечна норма

$$\|f\|_{p,\alpha} = \left(\int_0^\infty |f|^p x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{p}}, \quad 1 \le p < \infty.$$

Обозначим через $L_{\infty,\alpha}$ множество всех функций $f(x)$, которые равномерно непрерывны и ограничены на $[0,\infty)$. Норма в пространстве определяется следующим образом:

$$\|f\|_{\infty,\alpha} = \sup_{x\in[0,\infty)} |f|, \quad p = \infty.$$

Рассмотрим в пространстве $L_{p,\alpha}$ оператор обобщенного сдвига [1] функции $f(x)$:

$$T^h f(x) = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\frac{1}{2})}\Gamma(\alpha+\frac{1}{2})\int_0^\pi f(\sqrt{x^2+h^2-2xh\cos\varphi})(\sin\varphi)^{2\alpha} d\varphi.$$

Отметим некоторые свойства оператора $T^h : L_{p,\alpha} \to L_{p,\alpha}$:

$$T^h j_\alpha(\lambda x) = j_\alpha(\lambda x) j_\alpha(\lambda h),\ j_\alpha(u) = \frac{2^\alpha \Gamma(\alpha+1)}{u^\alpha} J_\alpha(u),$$

где $J_\alpha(u)$ – функция Бесселя первого рода порядка α,

$$\left\|T^h(f)\right\|_{p,\alpha} \le C\|f\|_{p,\alpha}, \quad 1 \le p \le \infty,$$

$$\int_0^\infty T^h f(x) g(x) x^{2\alpha+1} dx = \int_0^\infty f(x) T^h g(x) x^{2\alpha+1} dx.$$

Для функции $f \in L_{p,\alpha}$ конечные разности $\Delta_h^k f(x)$ порядка $k (k = 1,2,...)$ с шагом $h > 0$ определим следующим образом:

$$\Delta_h^1 f(x) = f(x) - T^h(x), \Delta_h^k f(x) = \Delta_h^1(\Delta_h^{k-1} f(x)), k > 1.$$

Величину $\Omega_k(f,\delta)_{p,\alpha} = \sup_{0<h\le\delta} \left\|\Delta_h^k f\right\|_{p,\alpha}$ будем называть обобщенным модулем гладкости k-го порядка функции $f \in L_{p,\alpha}$.

Обозначим через $M(\nu,p,\alpha), \nu > 0$ множество всех функций $Q_\nu(t), t \in R$, удовлетворяющих следующим условиям : 1) $Q_\nu(t)$– четная целая функция экспоненциального типа ν, 2) $Q_\nu(t)$ принадлежит классу $L_{p,\alpha}$.

Наилучшее приближение функции $f \in L_{p,\alpha}$ из класса $M(\nu, p, \alpha)$ определим следующим образом

$$E_\nu(f)_{p,\alpha} = \inf\{\|f - Q_\nu\|_{p,\alpha} : Q_\nu \in M(\nu, p, \alpha)\}.$$

Лемма. *Пусть* $1 < p < q < \infty, \tau = 2(\alpha+1)$ *Тогда справедливо неравенство*

$$\left(\int_0^\infty \left(\sum_{s=1}^m |Q_{n2^s}(x) - Q_{n2^{s-1}}(x)|\right)^q x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{q}} \le C\left\{\sum_{s=1}^m \left((n2^s)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} E_{n2^{s-1}}(f)_{p,\alpha}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательство. Пусть $r = [q] + 1, 1 < q < \infty$.

$$I(m) = \left(\int_0^\infty \left(\sum_{s=1}^m |Q_{n2^s}(x) - Q_{n2^{s-1}}(x)|\right)^q x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left(\int_0^\infty \left(\sum_{s=1}^m \psi_s(x)\right)^q x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\left(\int_0^\infty \left(\sum_{s=1}^m \psi_s^{\frac{q}{r}}(x)\right)^r x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{1}{q}} = \left\{\sum_{s_1}^m \cdots \sum_{s_r}^m \int_0^\infty \psi_{s_1}^{\frac{q}{r}}(x) \cdots \psi_{s_r}^{\frac{q}{r}}(x) x^{2\alpha+1} dx\right\}^{\frac{1}{q}}. \qquad (1)$$

Так как

$$\left(\prod_{n=1}^r b_n\right)^{r-1} = \prod_{1\le i<j\le r} b_i b_j,\ r > 1,$$

то применяя следующее неравенство Гельдера

$$\int_0^\infty g_1(x) \cdots g_n(x) x^{2\alpha+1} dx \le \left(\int_0^\infty |g_1(x)|^{\frac{1}{\tau_1}} x^{2\alpha+1}\right)^{\tau_1} \cdots \left(\int_0^\infty |g_n(x)|^{\frac{1}{\tau_n}} x^{2\alpha+1}\right)^{\tau_n},$$

с показателем $\tau_k = \frac{2}{r(r-1)}$, $k = 1, \cdots, n = \frac{r(r-1)}{2}$, $\tau_k > 0$, $\sum_{k=1}^n \tau_k = 1$ и полагая $g_k = \psi_{s_i}^{\frac{q}{r(r-1)}} \psi_{s_j}^{\frac{q}{r(r-1)}}$, имеем $I(m) \le \left\{\sum_{s_1}^m \cdots \sum_{s_r}^m \int_0^\infty \left(\prod_{1\le i<j\le r} \psi_{s_i}^{\frac{q}{r}}(x) \psi_{s_j}^{\frac{q}{r}}(x)\right)^{\frac{1}{r-1}} x^{2\alpha-1}\right\}^{\frac{1}{q}} \le$

$$\left\{\sum_{s_1}^m \cdots \sum_{s_r}^m \prod_{1\le i<j\le r} \left(\int_0^\infty \psi_{s_i}^{\frac{q}{r}}(x) \psi_{s_j}^{\frac{q}{r}}(x) x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{2}{r(r-1)}}\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Теперь оценим следующий интеграл

$$\int_0^\infty \psi_{s_i}^{\frac{q}{r}}(x) \psi_{s_j}^{\frac{q}{r}}(x) x^{2\alpha+1} dx,$$

применив неравенства Гельдера с параметрами $q_2 = \frac{p+q}{p}, q_1 = \frac{(p+q)q}{2p}, q_2^{-1} + q_1^{-1} = 1$ и неравенства разных метрик (см. [2], теорему 3.5) с параметрами $q_2 > p, q_1 > p$ два-

жды, имеем

$$\int_0^\infty (\psi_{l_i}(x))^{\frac{q}{2}} (\psi_{l_j}(x))^{\frac{q}{2}} x^{2\alpha+1} dx \le$$

$$\left(\int_0^\infty (\psi_{l_i}(x))^{\frac{(p+q)q}{2p}} x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{p}{(p+q)}} \left(\int_0^\infty (\psi_{l_j}(x))^{\frac{(p+q)}{2}} x^{2\alpha+1} dx\right)^{\frac{q}{(p+q)}} \le$$

$$C\left((n2^{l_i})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_2})} \left\{\int_0^\infty (\psi_{l_i}(x))^p x^{2\alpha+1} dx\right\}^{\frac{1}{p}} (n2^{l_j})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q_1})} \left\{\int_0^\infty (\psi_{l_j}(x))^p x^{2\alpha+1} dx\right\}^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{q}{2}} \le$$

$$C\left((n2^{l_i})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left\{\int_0^\infty (\psi_{l_i}(x))^p x^{2\alpha+1} dx\right\}^{\frac{1}{p}} (n2^{l_j})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \left\{\int_0^\infty (\psi_{l_j}(x))^p x^{2\alpha+1} dx\right\}^{\frac{1}{p}}\right)^{\frac{q}{2}} \times$$

$$\left(2^{\tau(l_i-l_j)}\right)^{\frac{q-p}{2(p+q)}}. \quad (2)$$

Подставляя (2) в (1), имеем

$$I(m) \le$$

$$C\left[\left\{\sum_{l_1=1}^m \cdot \sum_{l_r=1}^m \prod_{1\le i<j\le r} \left((n2^{l_i})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_i}\|_{p,\alpha} (n2^{l_j})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_j}\|_{p,\alpha}\right)^q 2^{-\tau|l_i-l_j|\frac{(q-p)}{p+q}}\right\}^{\frac{1}{r(r-1)}}\right]^{\frac{1}{q}}. \quad (3)$$

Так как $\prod_{1\le i<j\le r} b_{l_i} b_{l_j} 2^{-|l_l-l_j|\beta} = \prod_{s=1}^r b_{l_s}^{r-1} \prod_{k=1}^r 2^{-|l_s-l_k|\frac{\beta}{2}}$, где $b_s \ge 0, 1 \le s \le r, \beta > 0$, полагая $b_{l_s} = \left((\sigma 2^{l_s})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_s}\|_{p,\alpha}\right)^{\frac{q}{r(r-1)}}$, $\beta = \tau\frac{q-p}{(q+p)r(r-1)}$, в силу неравенства Гельдера следующего вида для сумм с показателем $\lambda_k > 0, \sum_{k=1}^r \lambda_k = 1$ ([4])

$$\sum_k b_k(1)\cdots b_k(r) \le \left(\sum_k |b_k(1)|^{\frac{1}{\lambda_1}}\right)^{\lambda_1} \cdots \left(\sum_k |b_k(r)|^{\frac{1}{\lambda_r}}\right)^{\lambda_r}$$

из неравенства (3) имеем

$$I(m) \le C\left(\prod_{s=1}^r \left[\sum_{l_1=1}^m \cdot \sum_{l_r=1}^m \left((n2^{l_s})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_s}\|_{p,\alpha}\right)^q \prod_{k=1}^r 2^{-\tau|l_s-l_k|\frac{q-p}{2(p+q)(r-1)}}\right]^{\frac{1}{r}}\right)^{\frac{1}{q}} \le$$

$$c\left\{\prod_{s=1}^r \left(\sum_{l_1=1}^m \cdot \sum_{l_r=1}^m \left((n2^{l_s})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_s}\|_{p,\alpha}\right)^q \prod_{k=1}^r 2^{-\tau|l_s-l_k|\frac{q-p}{2(p+q)(r-1)}}\right)^{\frac{1}{r}}\right\}^{\frac{1}{q}} \le$$

$$\left\{\sum_{l_1=1}^m \left((n2^{l_s})^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})} \|\psi_{l_s}\|_{p,\alpha}\right)^q \sum_{l_2=1}^m \cdots \sum_{l_r=1}^m \prod_{k=1}^r 2^{-\tau|l_1-l_k|\frac{q-p}{2(p+q)(r-1)}}\right\}^{\frac{1}{r}}.$$

В силу оценки

$$\sum_{l=1}^m 2^{-|l-l_1|\beta} \le M(\beta)$$

получим

$$\sum_{l_2=1}^{m}\cdots\sum_{l_r=1}^{m}\prod_{k=1}^{r}2^{-|l_k-l_1|\beta}2^{-|l-l_1|\beta}=\sum_{l_2=1}^{m}\cdots\sum_{l_r=1}^{m}\prod_{k=2}^{r}2^{-|l_k-l_1|\beta}2^{-|l-l_1|\beta}\le$$

$$\prod_{k=2}^{r}\sum_{l_k=1}^{m}2^{-|l_k-l_1|\beta}=M^{r-1}(\beta).$$

Поэтому, учитывая предыдущие неравенства и следующие неравенства $\|\psi_l\|_{p,\alpha}\le\|Q_{n2^l}-Q_{n2^{l-1}}\|_{p,\alpha}\le 2E_{n2^{l-1}}(f)_{p,\alpha}$ имеем

$$I(m)\le C\left(\sum_{l=1}^{m}(n2^l)^{q\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}\|\psi_l\|_{p,\alpha}^q\right)^{\frac{1}{q}}\le C\left(\sum_{l=1}^{m}(n2^l)^{q\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}E^q_{n2^{l-1}}(f)_{p,\alpha}\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Отметим, что идея доказательства леммы заимствована из работы М.Ф. Тимана [3, теорема 2].

Теорема 1. *Пусть* $1<p<q<\infty, f\in L_{p,\alpha}, \theta=\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}), \tau=2(\alpha+1)$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\|f\|_{q,\alpha}\le C\left(\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{q\theta-1}E_k^q(f)_{p,\alpha}\right\}^{\frac{1}{q}}+\|f\|_{p,\alpha}\right),\tag{4}$$

$$E_n(f)_{q,\alpha}\le C\left\{\sum_{k=n}^{\infty}k^{q\theta-1}E_k^q(f)_{p,\alpha}\right\}^{\frac{1}{q}}.\tag{5}$$

Доказательство. Если мы покажем сходимость последовательности $Q_{n2^m}-Q_n$ в пространстве $L_{q,\alpha}$, то в силу полноты пространства $L_{q,\alpha}$ предельные функции $f-Q_n\in L_{q,\alpha}$ и соответственно $f\in L_{q,\alpha}$. Для этого, используя лемму, имеем

$$\|f-Q_n\|_{q,\alpha}\le\lim_{m\to\infty}\|Q_{n2^m}-Q_n\|_{q,\alpha}=\lim_{m\to\infty}\left\|\sum_{l=1}^{m}Q_{n2^l}-Q_{n2^{l-1}}\right\|_{q,\alpha}\le$$

$$C\lim_{m\to\infty}\left\{\sum_{l=1}^{m}\left((n2^l)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}E_{n2^{l-1}(f)_{p,\alpha}}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}\le C\left\{\sum_{l=1}^{\infty}\left((n2^l)^{\tau(\frac{1}{p}-\frac{1}{q})}E_{n2^{l-1}(f)_{p,\alpha}}\right)^q\right\}^{\frac{1}{q}}.$$

Доказательства неравенств (4)и(5) следует из предыдущей оценки и следующего неравенства $E_v(f)_{q,\alpha}\le A\|f-Q_v\|_{q,\alpha}$.

Теорема 2. *Пусть* $1<p<q<\infty, f\in L_{p,\alpha}$. *Если для некоторого* q $(1<p<q<\infty)$ *ряд сходится*

$$\sum_{k=1}^{\infty}k^{q\theta-1}E_k^q(f)_{p,\alpha}<\infty,$$

то $f\in L_{q,\alpha}$ *и справедливы неравенства*

$$\|f\|_{q,\alpha}\le C\left(\left\{\sum_{k=1}^{\infty}k^{q\theta-1}E_k^q(f)_{p,\alpha}\right\}^{\frac{1}{q}}+\|f\|_{p,\alpha}\right)\tag{6}$$

$$E_n(f)_{q,\alpha} \le C\left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{q\theta-1}E_k^q(f)_{p,\alpha}\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{7}$$

Теорема 3. *Пусть* $1 < p < q < \infty, f \in L_{p,\alpha}$. *Если для некоторого* q $(1 < p < q < \infty)$ *ряд сходится*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{q\theta-1}\Omega_m(f,\frac{1}{k})_{p,\alpha}^q < \infty,$$

то $f \in L_{q,\alpha}$ *и справедливы неравенства*

$$\|f\|_{q,\alpha} \le C\left(\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{q\theta-1}\Omega_m(f,\frac{1}{k})_{p,\alpha}^q\right\}^{\frac{1}{q}} + \|f\|_{p,\alpha}\right), \tag{8}$$

$$\Omega_m(f,\frac{1}{n})_{q,\alpha} \le C\left\{\sum_{k=n}^{\infty} k^{q\theta-1}\Omega_m(f,\frac{1}{k})^q(f)_{p,\alpha}\right\}^{\frac{1}{q}}. \tag{9}$$

Теорема 4. *Условия (7) и (9) эквивалентны.*

Если $1 \le p < q \le \infty$ и $\lambda = \{\lambda_n\}$– последовательность чисел с $\lambda_n \downarrow 0$, то $E_{p,\alpha}(\lambda)$ означает класс всех функций $f \in L_{p,\alpha}$, для которых $E_n(f)_{p,\alpha} = O(\lambda_n)$.

Теорема 5. *Пусть* $1 < p < q < \infty, f \in L_{p,\alpha}$ *и* λ_n*– последовательность положительных чисел с* $\lambda_n \downarrow 0$. *Тогда для того чтобы имело место вложение* $E_{p,\alpha}(\lambda) \hookrightarrow L_{q,\alpha}$, *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^{q\theta-1}\lambda_k^q < \infty.$$

Доказательства теоремы 5 проводим по схеме В. И. Коляды [5].

Литература

1. Левитан Б. М. *Разложения по функциям Бесселя в ряды и интегралы Фурье* // УМН. – 1951. – Т. 6. – № 2. – С. 102–143.

2. Платонов С. С. *Гармонический анализ Бесселя и приближение функций на полу прямой*// Изв. РАН серия математика. – 2007. – Т. 71. – № 5. – С. 149–196.

3. Timan M. F. *Orthogonal systems satisfying an inequality of S. M. Nikolskii*// Analysis mathematica. – 1978. – Т. 46. – № 4. – С. 75-82.

4. Зигмунд А. *Тригонометрические ряды* – М.: Мир, 1965. – 539 с.

5. Коляда В. И. *Теоремы вложения и неравенства разных метрик для наилучших приближений*// Мат. сб. – 1977. – Т. 102. – № 2. – С. 195–215.

6. Ульянов П. Л. *Теоремы вложения и соотношения между наилучшими приближениями (модулями непрерывности) в разных метриках* // Мат. сб. – 1970. – Т. 81. – № 1. – С. 104–131.

ON A INEQUALITY OF P.L. UL'YANOV

T.E. Tileubayev

In this paper an inequality of P. L. Ulyanov and the relation between the best approximations of functions f *in various metrics is studied.*

Keywords: inequality of P.L. Ul'yanov, the best approximation, moduli of smoothness.

УДК 514.822

НЕРАВЕНСТВА ТИПА БРУННА-МИНКОВСКОГО ДЛЯ ОБОБЩЕННЫХ СТЕПЕННЫХ МОМЕНТОВ С ДОПОЛНИТЕЛЬНЫМИ МНОЖИТЕЛЯМИ

Б.С. Тимергалиев[1]

1 *timergalievbs@mail.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет, Институт математики и механики им. Н.И. Лобачевского

Настоящая работа посвящена построению классов новых функционалов областей в евклидовом пространстве и доказательству для них неравенств типа Брунна-Минковского.

Ключевые слова: неравенство Брунна-Минковского, вогнутые функционалы, степенные моменты.

Классическое неравенство Брунна-Минковского имеет следующий вид:

$$|\Omega_0 + \Omega_1|^{1/n} \geq |\Omega_0|^{1/n} + |\Omega_1|^{1/n}, \tag{1}$$

где $|\Omega|$ – мера множества Ω, Ω_0, Ω_1 – выпуклые тела в $\mathbb{R}^n$, $\Omega_0 + \Omega_1 := \{z_0 + z_1 \in \mathbb{R}^n : z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$ — векторная сумма. В 1887 г. неравенство (1) было получено Брунном в случае $n = 3$. В 1910 г. Минковский указал Брунну на ошибку в доказательстве, которую тот исправил, а также придумал свое доказательство. И Брунн, и Минковский показали, что равенство достигается тогда и только тогда, когда Ω_0 и Ω_1 являются равными с точностью до переноса и расширения. Долгое время считалось, что неравенство Брунна-Минковского относится только к геометрии, где его значение широко известно. Но в середине 20-го века Л.А. Люстерник [1] доказал, что неравенство (1) верно для произвольных ограниченных измеримых множеств Ω_0 и Ω_1, в этом случае его принято называть общим неравенством Брунна-Минковского. В 1954 году Х. Хадвигер и Охман [2] дали новое доказательство неравенства Брунна-Минковского. С тех пор неравенство начало свой путь в область анализа.

Последние 30-40 лет тематика, связанная с неравенством Брунна-Минковского, стремительно развивается. Неравенство широко используется в геометрическом анализе, математической физике и теории вероятностей. Литература по неравенствам типа Брунна-Минковского и основные результаты, появившиеся до 2006 г., содержатся в обзорных статьях [3], [4].

Наш интерес к этой тематике связан с результатами австралийского математика Г. Кэди [5], который в 2007 г. доказал неравенство типа Брунна-Минковского для функционала, введенного Ф.Г. Авхадиевым [6]. Развитие результата Г. Кэди, а также неравенства для новых типов функционалов были получены в работах [7-10]. Также предоставляется интересным обобщение результатов Х. Хадвигера [11], доказавшего в 1956 году неравенство типа Брунна-Минковского для двух моментов выпуклой области, а именно, момента относительно центра масс и момента относительно гиперплоскости. Приведем формулировку результата Х. Хадвигера [11].

Пусть Ω — ограниченная, выпуклая область в $\mathbb{R}^n$. Через s обозначим центр масс

области Ω. Определим функционал

$$J(\Omega)=\int\limits_{\Omega}\left(|z_1-s_1|^2+|z_2-s_2|^2+...+|z_n-s_n|^2\right)dz_1...dz_n,\ \ z\in\Omega,$$

где $z_1,z_2,...,z_n$ — декартовы координаты точки $z\in\Omega$, $s_1,s_2,...,s_n$– координаты центра масс Ω. Справедлива следующая

Теорема 1 (Хадвигер). *Пусть Ω_0,Ω_1 — ограниченные, выпуклые области в $\mathbb{R}^n$. Тогда для функционала $J(\Omega_t)^{\frac{1}{n+2}}$ справедливо неравенство:*

$$J(\Omega_t)^{\frac{1}{2+n}}\geq(1-t)J(\Omega_0)^{\frac{1}{2+n}}+tJ(\Omega_1)^{\frac{1}{2+n}},\tag{1}$$

где $\Omega_t=\{(1-t)z_0+tz_1|z_0\in\Omega_0,z_1\in\Omega_1\},\ \ 0\leq t\leq 1.$

Целью данной работы является обобщение неравенства (1). Построим три класса функционалов, для которых справедливо неравенство типа Брунна-Минковского.

1. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, представимая в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Определим функционал

$$I(k,\Omega)=\int\limits_{\Omega}\left(\alpha_1|x_1-s_1|^k+\alpha_2|x_2-s_2|^k+\cdots+\alpha_n|x_n-s_n|^k\right)dx,\ k\in(0,+\infty),$$

где $s_1,s_2,\ldots,s_n$– координаты точки минимума функции

$$I(y)=\int\limits_{\Omega}\left(\alpha_1|x_1-y_1|^k+\alpha_2|x_2-y_2|^k+\cdots+\alpha_n|x_n-y_n|^k\right)dx,\ dx=dx_1dx_2\cdots dx_n$$

переменных $y=(y_1,y_2,\ldots,y_n)\in\mathbb{R}^n$; $x_1,x_2,\ldots,x_n$ — декартовы координаты точки $x\in\Omega$, $k\in(0,+\infty)$, $\alpha_i>0,\ (i=1,2,\ldots,n)$ — произвольные действительные числа.

При $k=2$ точка минимума $s=(s_1,\ldots,s_n)$ совпадает с центром масс области Ω и при $\alpha_j=1,\ (j=\overline{1,n})$ получаем функционал, рассмотренный Х. Хадвигером в [2]. При $k\neq 2$ точка минимума s функции $I(y)$, вообще говоря, не совпадает с центром масс области Ω.

Отметим, что точка минимума s принадлежит n-мерному параллелепипеду с ребрами $[\min\limits_{x\in\overline{\Omega}}x_j,\ \max\limits_{x\in\overline{\Omega}}x_j],\ j=\overline{1,n},\ x=(x_1,x_2,\ldots,x_n)$, поэтому гиперплоскости $x_j=s_j,\ j=\overline{1,n}$ имеют с областью Ω непустое пересечение.

Теорема 2. *Пусть Ω_0,Ω_1 – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Тогда функционал $I(k,\Omega)^{1/(k+n)}$ вогнут:*

$$I(k,\Omega_t)^{1/(k+n)}\geq(1-t)I(k,\Omega_0)^{1/(k+n)}+tI(k,\Omega_1)^{1/(k+n)},$$

где $\Omega_t=\{(1-t)z_0+tz_1\mid z_0\in\Omega_0,z_1\in\Omega_1\},\ \ 0\leq t\leq 1,\ k\in(0,+\infty).$

2. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, представимая в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Определим функционал

$$W(k,\Omega)=\int\limits_{\Omega}\left(\alpha_1|x_1-s_1|^k+\alpha_2|x_2-s_2|^k+\cdots+\alpha_n|x_n-s_n|^k\right)^m dx,$$

где $s_1, s_2, \ldots, s_n$ – координаты точки минимума функции

$$W(y) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1 - y_1|^k + \alpha_2|x_2 - y_2|^k + \cdots + \alpha_n|x_n - y_n|^k\right)^m dx,\ dx = dx_1 dx_2 \cdots dx_n,$$

переменных $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — декартовы координаты точки $x \in \Omega$; $k \in (0,\ 1]$ при $m \in (0,1) \cup (1,+\infty)$; $\alpha_j (j = \overline{1,n}) \in (0,\ +\infty)$ — произвольные действительные числа. Если $m = 1$, то $k \in (0,+\infty)$; в этом случае получаем функционал, рассмотренный в первой части работы.

Теорема 3. *Пусть Ω_0, Ω_1 – ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Тогда $I(k;m;\Omega)^{1/(km+n)}$ вогнут, т.е. имеет место неравенство*

$$W(k;m;\Omega_t)^{1/(km+n)} \geq (1-t)W(k;m;\Omega_0)^{1/(km+n)} + tW(k;m;\Omega_1)^{1/(km+n)},$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$, $k \in (0,\ 1]$ при $m \in (0,1) \cup (1,+\infty)$ и $k \in (0,+\infty)$ при $m = 1$.

3. Пусть Ω — ограниченная область в $\mathbb{R}^n$, представимая в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Определим функционал

$$H(k;m;k^0;\Omega) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1 - s_1|^k + \cdots + \alpha_n|x_n - s_n|^k\right)^m \prod_{j=1}^{n} |x_j - s_j|^{k_j} dx,$$

где $s = (s_1, s_2, \ldots, s_n) \in \mathbb{R}^n$ — точка, доставляющая минимум функции

$$H(y) = \int\limits_{\Omega} \left(\alpha_1|x_1 - y_1|^k + \ldots + \alpha_n|x_n - y_n|^k\right)^m \prod_{j=1}^{n} |x_j - y_j|^{k_j} dx,$$

переменных $y = (y_1, y_2, \ldots, y_n) \in \mathbb{R}^n$; $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — декартовы координаты точки $x \in \Omega$; $k,\ \alpha_j (j = \overline{1,n}) \in (0,+\infty),\ m,\ k_j (j = \overline{1,n}) \in [0,+\infty),\ m + |k^0| \neq 0,\ k^0 = (k_1, \ldots, k_n)$, $|k^0| = k_1 + \cdots + k_n$.

Теорема 4. *Пусть $\Omega_0,\ \Omega_1$ — ограниченные области в $\mathbb{R}^n$, $n \geq 2$, представимые в виде объединения конечного числа выпуклых областей. Тогда функционал $H(k;m;k^0;\Omega)^{1/(km+n+|k^0|)}$ вогнут, т.е. имеет место неравенство*

$$H(k;m;k^0;\Omega_t)^{1/(km+n+|k^0|)} \geq (1-t)H(k;m;k^0;\Omega_0)^{1/(km+n+|k^0|)} +$$

$$+ tH(k;m;k^0;\Omega_1)^{1/(km+n+|k^0|)},$$

где $\Omega_t = \{(1-t)z_0 + tz_1 \mid z_0 \in \Omega_0, z_1 \in \Omega_1\}$, $0 \leq t \leq 1$, $k \in (0,1]$, $k^0 = (k_1, \ldots, k_n)$, $m,\ k_j (j = \overline{1,n}) \in [0,+\infty)$, $m + |k^0| \neq 0$.

Работа выполнена за счет средств субсидии, выделенной Казанскому федеральному университету для выполнения государственного задания в сфере научной деятельности (1.9773.2017/8.9).

Литература

1. Lusternik L. A. *Die Brunn-Minkowskische Ungleichung fur beliebige messbare Mengen* // C. R. Acad. Sci. URSS. – 1935. – V. 8. – P. 55-58.

2. Hadwiger H., Ohmann D. *Brunn-Minkowskischer Satz und Isoperimetrie* // Math. Z. – 1956. – V. 66. – P. 1-8.

3. Gardner R. J. *The Brunn-Minkowski inequality* // Bull. Amer. Math. Soc. – 2002. – V. 39. – P. 355-405.

4. Barthe F. *The Brunn-Minkowski theorem and related geometric and functional inequalities* // Int. Congress of Math. – 2006 – V. 2. – P. 1529-1546.

5. Keady G. *On a Brunn-Minkowski theorem for a geometric domain functional considered by Avhadiev* // J. Inequal. Pure Appl. Math. – 2007. – V. 8. – P. 1-10.

6. Авхадиев Ф. Г. *Решение обобщенной задачи Сен-Венана* // Матем. сб. – 1998. – № 12. – С. 3-12.

7. Авхадиев Ф. Г., Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковского для конформных и евклидовых моментов областей* // Изв. вуз. Матем. – 2014. – № 5. – С. 64-67.

8. Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для степенных моментов* // Уч. зап. Каз. ун-та. – 2016. – № 1. – С. 90-106.

9. Тимергалиев Б. С. *Неравенства типа Брунна-Минковского в форме Хадвигера для обобщенных степенных моментов* // Вестник ВолГУ. – 2016. – № 4. – С. 92-107.

10. Timergaliev B. S. *Generalization of the Brunn-Minkowski inequality in the form of Hadwiger for power moments* // Lobachevskii J. Math. – 2016 – V. 37. – № 6. – P. 794-806.

11. Hadwiger H. *Konkave eikerperfunktionale und hoher tragheitsmomente* // Comment Math. Helv. – 1956. – V. 30. – P. 285-296.

BRUNN-MINKOWSKI TYPE INEQUALITY FOR GENERALIZED POWER MOMENTS WITH ADDITIONAL MULTIPLIERS

B.S. Timergaliev

In this paper we built classes of domain functionals in euclidian space and proved a Brunn-Minkowski type inequality applied to the mentioned classes.

Keywords: Brunn-Minkowski inequality, concave function, power moments.

УДК 517.518.85, 517.518.68

О ПРИНЦИПЕ ЛОКАЛИЗАЦИИ ДЛЯ СИНК-АППРОКСИМАЦИЙ НА ОТРЕЗКЕ

А.Ю. Трынин[1]

1 *tayu@rambler.ru*; Саратовский государственный университет им. Н.Г. Чернышевского

В статье обсуждается справедливость принципа локализации синк-аппроксимаций на отрезке на классе функций, интегрируемых по Риману.

Ключевые слова: синк-аппроксимации, кардинальные функции, приближение, принцип локализации.

Работа посвящена изучению аппроксимативных свойств синк-приближений

$$L_n(f,x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{\sin(nx-k\pi)}{nx-k\pi} f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) = \sum_{k=0}^{n} \frac{(-1)^k \sin nx}{nx-k\pi} f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big) = \sum_{k=0}^{n} l_{k,n}(x) f\Big(\frac{k\pi}{n}\Big). \quad (1)$$

внутри интервала $(0,\pi)$.

Интересные признаки равномерной сходимости на оси кардинальных функций Уиттекера приводятся в [1], [2]. Не менее важны достаточные условия сходимости синк-аппроксимаций получены авторами статей [3], [4].

К сожалению, при приближении непрерывных функций на отрезке с помощью (1) и многих других операторов вблизи концов отрезка возникает явление Гиббса (см., например, [5]).

В [6], [7], [11] и [5] получены различные оценки погрешности аппроксимации аналитических в круге функций с помощью синк-приближений (1). Насколько мне известно, до появления этих работ приближение кардинальными функциями Уиттекера на отрезке или ограниченном интервале осуществлялось только для некоторых классов аналитических функций сведением к случаю оси с помощью конформного отображения.

В статье [11] установлены точные по порядку оценки для функций и констант Лебега оператора (1), а также получен пригодный для изучения аппроксимативных свойств оператора (1) аналог формулы Г.П. Неваи. Работы [8], [12] посвящены получению необходимых и достаточных условий поточечной и равномерной внутри интервала $(0,\pi)$ сходимости синк-аппроксимаций (1) для непрерывных на $[0,\pi]$ функций. Авторы интересной статьи [13] используют результаты работы [8] для исследования сходимости алгоритмов многоуровневых синк-аппроксимаций функций с минимальной гладкостью.

В [14] построен пример непрерывной, исчезающей на концах отрезка $[0,\pi]$ функции, для которой последовательность значений операторов (1) неограниченно расходится всюду на интервале $(0,\pi)$. Из результатов исследований в [14] видно, что при попытке приближения негладких непрерывных функций значениями операторов (1) возможно появление „резонанса“, приводящего к неограниченному росту погрешности аппроксимации на всём интервале $(0,\pi)$.

Будем говорить, что для интерполяционного процесса синк-аппроксимаций (1) в окрестности $(x_0-\delta_1, x_0+\delta_2)$ имеет место принцип δ-локализации на классе функций $\mathbb{F}(x_0,\delta_1,\delta_2)$ в точке $x_0 \in [0,\pi]$, если для любых функций $f \in \mathbb{F}(x_0,\delta_1,\delta_2)$, $g \in \mathbb{F}(x_0,\delta_1,\delta_2)$, совпадающих в δ-окрестности точки x_0: $O_\delta(x_0) = (x_0-\delta_1, x_0+\delta_2) \cap [0,\pi]$, имеет место соотношение

$$\lim_{n\to\infty} L_n(f,x_0) - L_n(g,x_0) = 0. \quad (2)$$

Определение. *Будем говорить, что для интерполяционного процесса синк-аппроксимаций* (1) *имеет место принцип локализации на классе функций* $\mathbb{F}$*, если* $\mathbb{F} \subset \bigcap_{\substack{x_0\in[0,\pi];\\ \delta_1>0,\delta_2>0}} \mathbb{F}(x_0,\delta_1,\delta_2)$.

В настоящей работе, с использованием концепции публикаций [15] — [22] показано, что для множества интегрируемых по Риману функций имеет место принцип локализации для интерполяционного процесса синк-аппроксимаций (1).

Справедливо следующее утверждение.

Лемма 1. *Пусть f интегрируема в смысле Римана на отрезке $[0,\pi]$, $x_0 \in [0,\pi]$ и $O_\delta(x_0) = (x_0-\delta, x_0+\delta) \cap [0,\pi]$. Для того чтобы*

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k:x_{k,n}\in[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)} F_n(x_{k,n}) f(x_{k,n}) = 0,$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность конечнозначных функций, заданных на $0 \le x_{1,n} < \dots < x_{n,n} \le \pi$, удовлетворяла условиям

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k:x_{k,n}\in[a,b]\left(\subset[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)\right)} F_n(x_{k,n}) = 0,$$

$$\max_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k:x_{k,n}\in[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)} |F_n(x_{k,n})| \le M < \infty,$$

для любой последовательности множеств $I_l = \bigcup\limits_{1\le j\le m_l} [a_j, b_j]$, $m_l < \infty$, $[a_j,b_j] \subset [0,\pi]$, $\subset [0,\pi]\setminus O_\delta(x_0) \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots I_l \supset \dots$, $mes I_l \to 0$ при $l \to \infty$

$$\lim_{l\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k:x_{k,n}\in I_k} |F_n(x_{k,n})| = 0.$$

Справедлива следующая

Теорема 1. *Для интерполяционного процесса синк аппроксимаций* (1) *имеет место принцип локализации на классе функций интегрируемых по Риману на отрезке* $[0,\pi]$.

Доказательство. Убеждаемся, что для синк-функций $l_{k,n}(x)$ из (1) справедливы соотношения

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k:x_{k,n}\in[a,b]\left(\subset[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)\right)} l_{k,n}(x_0)) = 0,$$

$$\max_{n\in\mathbb{N}} \sum_{k:x_{k,n}\in[0,\pi]\setminus O_\delta(x_0)} |l_{k,n}(x_0)| \le M < \infty,$$

для любой последовательности множеств $I_l = \bigcup\limits_{1\le j\le m_l} [a_j, b_j]$, $m_l < \infty$, $[a_j,b_j] \subset [0,\pi]$, $\subset [0,\pi]\setminus O_\delta(x_0) \supset I_1 \supset I_2 \supset \dots I_l \supset \dots$, $\mathrm{mes} I_l \to 0$ при $l \to \infty$

$$\lim_{l\to\infty} \overline{\lim_{n\to\infty}} \sum_{k:x_{k,n}\in I_k} |l_{k,n}(x_0)| = 0.$$

Отсюда и леммы 1 следует утверждение теоремы 1.

Литература

1. Brown J.L.Jr. *On the error in reconstructing a nonbandlimited function by means of bandpass sampling theorem* // J. of Mathematical Analysis and Applications. – 1967. – № 18. – P. 75–84.

2. Butzer P.L., Higgins J.R., Stens R.L. *Classical and approximate sampling theorems: studies in the $L^p(\mathbb{R})$ and the uniform norm* // Journal of Approximation Theory. – 2005. – V. 137. – № 2. – P. 250–263.

3. Шмуклер А.И., Шульман Т.А. *О некоторых свойствах рядов Котельникова* // Известия вузов. Математика. – 1974. – № 3. – С. 93–103.

4. Умаханов А.Я., Шарапудинов И.И. *Интерполяция функций суммами Уиттекера и их модификациями: условия равномерной сходимости* // Владикавк. матем. журн. – 2016. – Т. 18. – № 4. – С. 61–70.

5. Trynin A.Yu., Sklyarov V.P. *Error of sinc approximation of analytic functions on an interval* // Sampling Theory in Signal and Image Processing. – 2008. – V. 7. – № 3. – P. 263-270.

6. Трынин А.Ю. *Об аппроксимации аналитических функций операторами Лагранжа-Штурма-Лиувилля* // Тезисы докладов 10 Саратовской зимней школы „Современные проблемы теории функций и их приложения“. 27 января - 2 февраля 2000 года. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2000. – С. 140–141.

7. Трынин А.Ю. *Об оценке аппроксимации аналитических функций интерполяционным оператором по синкам* // Математика. Механика. – Саратов: Изд-во Сарат. ун-та, 2005. – Т. 7. – С. 124–127

8. Трынин А.Ю. *Критерии поточечной и равномерной сходимости синк-приближений непрерывных функций на отрезке* // Математический сборник. – 2007. – Т. 198. – № 10. – С. 141–158.

9. Трынин А.Ю. *Обобщение теоремы отсчётов Уиттекера-Котельникова-Шеннона для непрерывных функций на отрезке* // Математический сборник. – 2009. – Т. 200. – № 11. – С. 61–108.

10. Трынин А.Ю. *Об операторах интерполирования по решениям задачи Коши и многочленах Лагранжа–Якоби* // Известия Российской Академии Наук. Серия математическая. – 2011. – Т. 75. – № 6. – С. 129–162.

11. Трынин А.Ю. *Оценки функций Лебега и формула Неваи для sinc-приближений непрерывных функций на отрезке* // Сибирский математический журнал. – 2007. – Т. 48. – № 5. – С. 1155–1166.

12. Трынин А.Ю. *Критерий равномерной сходимости sinc-приближений на отрезке* // Изв. высш. уч-ых заведений. Математика. – 2008. – № 6. – С. 66–78.

13. Livne Oren E., Brandt Achi E. *MuST: The multilevel sinc transform* // SIAM J. on Scientific Computing. – 2011. – V. 33. – № 4. – P. 1726–1738.

14. Трынин А.Ю. *О расходимости синк-приближений всюду на* $(0,\pi)$ // Алгебра и анализ. – 2010. – Т. 22. – № 4. – С. 232–256.

15. Голубов Б.И. *Сферический скачок функции и средние Бохнера–Рисса сопряженных кратных рядов и интегралов Фурье* // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91. – № 4. – С. 506–514.

16. Голубов Б.И. *Об абсолютной сходимости кратных рядов Фурье* // Матем. заметки. – 1985. – Т. 37. – № 1. – С. 13–24.

17. Дьяченко М.И. *Об одном классе методов суммирования кратных рядов Фурье* // Математический сборник. – 2013. – Т. 204. – № 3. – С. 3–18.

18. Дьяченко М.И. *Равномерная сходимость гиперболических частичных сумм кратных рядов Фурье* // Матем. заметки. – 2004. – Т. 76. – № 5. – С. 723–731.

19. Новиков И. Я., Скопина М. А. *Почему в разных структурах базисы Хаара одинаковые?* // Матем. заметки. – 2012. – Т. 91. – Вып. 6. – С. 950–953.

20. Половинкин Е.С. *Об интегрировании многозначных отображений* // ДАН. – 1983. – Т. 281. – № 5. – С. 1069–1074.

21. Половинкин Е.С. *О некоторых свойствах производных многозначных отображений* // Труды МФТИ. – 2012. – Т. 4. – № 4. – С. 141–154.

22. Родионов Е.А., Фарков Ю.А. *Оценки гладкости диадических ортогональных всплесков типа Добеши* // Матем. заметки. – 2009. – Т. 86. – № 3. – С. 429–444.

ON THE PRINCIPLE OF LOCALIZATION FOR SINC APPROXIMATIONS ON AN INTERVAL

A.Yu. Trynin

The validity of the principle of the localization of sinc-approximations on an interval on the class of functions that are Riemann integrable.

Keywords: Sinc approximations, cardinal functions, approximation, localization principle.

УДК 517.51

ОЦЕНКА ОДНОЙ ПОЛИНОМИАЛЬНОЙ ХАРАКТЕРИСТИКИ МНОГОМЕРНОЙ ОБЛАСТИ, УДОВЛЕТВОРЯЮЩЕЙ УСЛОВИЮ ВНУТРЕННЕГО КОНУСА

И.В. Трухляева[1]

1 *irishka2027@mail.ru*; Волгоградский государственный университет

Настоящая работа посвящена оценке величины, необходимой для выяснения равномерной сходимости приближенных решений уравнения минимальной поверхности.

Ключевые слова: уравнение минимальной поверхности, равномерная сходимость, приближенное решение, аппроксимация уравнения, оценка равномерной сходимости.

Рассмотрим следующую полиномиальную характеристику области $\Omega \subset R^n$

$$\lambda_N = \inf_P \frac{\left(\int\limits_\Omega |\nabla P|^2\, dx\right)^{1/2}}{\sqrt{|\Omega|}\sup\limits_\Omega |\nabla P|},$$

где точная нижняя грань берется по всем многочленам степени не более чем N по каждой переменной. Приведем пример оценки снизу величины λ_N. Отметим, что данная характеристика области применяется при оценке скорости сходимости полиномиальных решений уравнения минимальных поверхностей (см. [1]).

В работе [2] для куба было получено следующее неравенство

$$\lambda_N \geq \frac{1}{2^{n+1}} \frac{\sqrt{\omega_n}}{2^{n/2} N^n \sqrt[4]{n^n}}, \tag{1}$$

которое позволило напрямую сделать оценку величины λ_N для областей Ω, для которых $\Delta(\Omega) > 0$, где

$$\Delta(\Omega) = \inf_{z_0 \in \Omega} a(z_0)$$

и $a(z_0)$ определяется следующим образом: для любого $z_0 \in \Omega$ находим максимальный куб $K(z_0) \subset \Omega$, не обязательно со сторонами, параллельными осям координат, такой что $z_0 \in K(z_0)$. Пусть $a(z_0)$ – сторона этого куба.

Очевидно, что имеются области с кусочно-гладкой границей, для которых $\Delta(\Omega) = 0$. Например, для конуса $C = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 < 1, 0 < z < A(1 - \sqrt{x^2 + y^2})\}$ при достаточно больших $A > 0$ величина $\Delta(C) = 0$.

Итак, пусть в пространстве R^3 с декартовыми координатами (x, y, z) задан куб K с вершинами в точках

$$(0,0,0),\ \ (h,0,0),\ \ (0,h,0),\ \ (h,h,0),$$

$$(0,0,h),\ \ (0,h,h),\ \ (h,0,h),\ \ (0,h,h),$$

где $\alpha \in (0, \pi/2]$, $h > 0$.

С помощью линейного преобразования

$$u = x + y\cos\alpha + z\sin\beta,\ \ v = y\sin\alpha,\ \ t = z\cos\beta$$

в пространстве с координатами (u, v, t) получим параллелепипед R (см. рис. 1) с вершинами

$$(0,0,0),\ \ (h\cos\alpha, h\sin\alpha, 0),\ \ (h + h\cos\alpha, h\sin\alpha, 0),\ \ (h,0,0),\ \ (h\sin\beta, 0, h\cos\beta),$$

$$(h\cos\alpha + h\sin\beta, h\sin\alpha, h\cos\beta),\ \ (h + h\cos\alpha + h\sin\beta, a\sin\alpha, h\cos\beta),\ \ (h + h\sin\beta, 0, h\cos\beta).$$

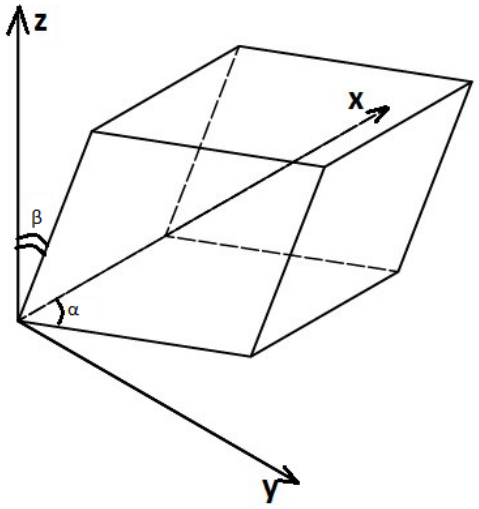


Рис. 1. Параллелепипед R

Пусть теперь $P = P(x, y, z)$ – произвольный многочлен, степень которого по каждой переменной не превышает N. Будем рассматривать случай, когда $\alpha = \pi/2 - \beta$.

Нетрудно заметить, что

$$P_u^2 + P_v^2 + P_y^2 \geq P_x^2 + P_y^2 + P_z^2 \geq \min\left\{\frac{1 + 2\sin^2\beta}{1 + 4\sin^2\beta}, \frac{\cos^2\beta}{2 + 4\sin^2\beta}\right\}(P_u^2 + P_v^2 + P_t^2).$$

Тогда

$$\frac{\left(\iiint\limits_R (P_x^2 + P_y^2 + P_z^2)\,dx\,dy\,dz\right)^{1/2}}{\sqrt{|K|}\max\limits_R |\nabla P|} \geq$$

$$\geq \frac{\cos\beta}{\sqrt{2}\sqrt{1+2\sin^2\beta}} \cdot \frac{\left(\iiint\limits_K (P_u^2+P_v^2+P_t^2)\,du\,dv\,dt\right)^{1/2} \cdot \cos\beta}{\sqrt{|R|}\max\limits_K |\nabla P|} =$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sqrt{2}\sqrt{1+2\sin^2\beta}} \cdot \frac{\left(\iiint\limits_K (P_u^2+P_v^2+P_t^2)\,du\,dv\,dt\right)^{1/2} \cdot \cos\beta}{\sqrt{|K|}\max\limits_K |\nabla P|} \sqrt{\frac{|K|}{|R|}} =$$

$$= \frac{\cos\beta}{\sqrt{2}\sqrt{1+2\sin^2\beta}} \frac{\left(\iiint\limits_K (P_u^2+P_v^2+P_t^2)\,du\,dv\,dt\right)^{1/2}}{\sqrt{|K|}\max\limits_K |\nabla P|} \geq \frac{\cos\beta}{\sqrt{1+2\sin^2\beta}} \frac{\sqrt{\pi}}{96\sqrt[4]{3}N^3}.$$

Таким образом, для параллелепипеда со стороной $h>0$, и острым углом $\beta \in (0,\pi/2]$ выполнено неравенство

$$\lambda_N \geq \frac{\cos\beta}{\sqrt{1+2\sin^2\beta}} \frac{\sqrt{\pi\sin^2\beta}}{96\sqrt[4]{3}N^3}.$$

Пусть теперь задана произвольная область $\Omega \in R^3$. Предположим, что найдется такое число $\beta(\Omega) \in (0,\pi/2]$, что всякая точка z_0 области содержится в некотором параллелепипеде $R \subset \Omega$ с острым углом $\beta(\Omega)$. При этом z_0 не обязательно должна быть центром куба R. Для любого $z_0 \in \Omega$ найдем максимальный по стороне куб $R \subset \overline{\Omega}$ такой, что $z_0 \in D$. Пусть сторона этого параллелепипед $h(z_0)>0$. Будем считать, что

$$H(\Omega) = \inf_{z_0\in\Omega} h(z_0) > 0.$$

Рассуждая так же, как и в [1], получим неравенство следующее утверждение:

Теорема. *Пусть ограниченная область $\Omega \subset \mathbf{R}^3$ такова, что $H(\Omega)>0$ и $\beta(\Omega)>0$. Тогда справедлива следующая оценка*

$$\lambda_N \geq \sqrt{\frac{\pi}{|\Omega|}} \frac{H(\Omega)\cos\beta}{96\sqrt[4]{3}N^3\sqrt{1+2\sin^2\beta}}.$$

Литература

1. Клячин А. А., Трухляева И. В. *О сходимости полиномиальных приближенных решений уравнения минимальной поверхности* // Уфимский матем. журнал. – 2016. – Т. 8. – № 1. – С. 72–83.

2. Трухляева И. В. *Оценка одной полиномиальной характеристики многомероной области* // Матер. научной сессии. – Волгоград. – 2015. – С. 196–199.

ESTIMATE OF A POLYNOMIAL CHARACTERISTIC OF MULTIDIMENSIONAL DOMAIN SATISFYING THE INNER CONE CONDITION

I.V. Trukhlyaeva

We obtain an estimate for the rate of uniform convergence of approximate solutions to the exact one

for minimal surface equation.

Keywords: minimal surface equation, uniform convergence, approximate solution, approximation of equation, estimation of uniform convergence.

УДК 532.537

ПРИЛОЖЕНИЕ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ ГИДРОМЕХАНИКИ МНОГОФАЗНЫХ СРЕД К ЧИСЛЕННОМУ ИЗУЧЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ПРОЦЕССОВ В НЕОДНОРОДНОЙ НИЗКОТЕМПЕРАТУРНОЙ ПЛАЗМЕ

Д.А. Тукмаков[1]

1 *tukmakovda@imm.knc.ru*; Институт механики и машиностроения Российской академии наук

В работе на основе численного решения уравнений движения многофазных сред получена модель динамики газовзвеси и дрейфа дисперсной фазы в нелинейных волновых полях акустической и электростатической природы, а также разработана математическая модель динамики взвеси частиц с многокомпонентной дисперсной фазой.

Ключевые слова: математическое моделирование, гидродинамика многофазных сред, краевая задача Коши, явная конечно-разностная схема, низкотемпературная плазма с твердой конденсированной фазой.

Модели динамики газовзвесей, состоящих из частиц, несущих электрический заряд, используются для описания ряда процессов, к которым относятся напыление защитных покрытий на окрашиваемые поверхности в электростатическом поле, а также получение на встречных потоках порошкообразных материалов, состоящих из твердых частиц, покрытых слоем полимера [1-3]. Модели электрогазодинамики газовзвесей, наряду с прикладным значением, используются при описании явлений самоорганизации в пылевой плазме, состоящей из заряженных частиц, концентрация которых достаточна для того, чтобы создать электрическое поле, согласованное с меняющейся во времени пространственной конфигурацией газовзвеси [2,3]. Так, в [1,2] рассматривается комплексная плазма, в которой к общему фону ионов, электронов и нейтральных частиц добавлены частицы пыли, которая взаимодействует с окружающей плазмой и приводит к появлению новых физических эффектов. В [4] описаны эксперименты с термодиффузией пыли, движущейся из запыленной области в область с чистым газом. Исследовано распространение пыли при различных коэффициентах диффузии и зарядах частиц и выявлен режим, при котором частицы пыли самоорганизуются в тороидальную структуру. В расчетах, выполненных в данной работе, несущая среда считается электрически нейтральным газом, поскольку рассматриваются медленные процессы, время протекания которых велико по сравнению с периодом плазменных колебаний [2,3]. Дисперсная фаза многофазной смеси состоит из совокупности некоторого количества фракций твердых частиц, при этом каждая фракция отличается объемным содержание в общем объеме многофазной среды, физической плотностью вещества, размером частиц и их теплопроводность. Среда представляет собой электрически заряженную газовзвесь полидисперсного состава, частицы которой находятся под действием силы аэродинамического сопротивления, силы Архимеда, силы присоединенных масс

и силы, действующей со стороны электрического поля, которое создано распределенным зарядом газовзвеси. Для описания ее движения применяется система уравнений динамики полидисперсной многоскоростной и многотемпературной газовзвеси со скоростным и температурным скольжением фаз [5]. Система включает в себя уравнения движения несущей среды и дисперсной фазы. Движение несущей среды описывается системой уравнений Навье-Стокса с учетом межфазного силового взаимодействия и теплообмена:

$$\frac{\partial \rho}{\partial t x} + \frac{\partial (\rho u)}{\partial x} + \frac{\partial (\rho v)}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho u)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho u^2 + p - \tau_{xx}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho uv - \tau_{xy}) = \sum F_{xi} + \sum \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial (\rho v)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho uv + p - \tau_{xy}) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho v^2 + p - \tau_{yy}) = \sum F_{yi} + \sum \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial e}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}([e + p - \tau_{xx}]u - \tau_{xy}v + \lambda \frac{\partial T}{\partial x}) + \frac{\partial}{\partial y}([e + p - \tau_{yy}]v - \tau_{xy}u + \lambda \frac{\partial T}{\partial y}) =$$

$$= -\sum Q_i - \sum (|F_{xi}|(u - u_i) + |F_{yi}|(v - v_i)) + \sum \alpha_i \left(\frac{\partial (pu)}{\partial x} + \frac{\partial (pv)}{\partial y} \right),$$

$$p = (\gamma - 1)(e - \rho(u^2 + v^2)/2), e = \rho(I + (u^2 + v^2)/2), \tau_{xx} = \mu \left(2\frac{\partial u}{\partial x} - \frac{2}{3}D \right),$$

$$\tau_{yy} = \mu \left(2\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{2}{3}D \right), \tau_{xx} = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} + \frac{\partial v}{\partial x} \right), D = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} \right).$$

Здесь ρ, u, e, T, λ, μ, γ – плотность несущей фазы, скорости несущей фазы, полная энергия и температура высокотемпературного газа, коэффициенты теплопроводности, вязкости и постоянная адиабаты для несущей газообразной среды, $I = RT/(\gamma - 1)$ внутренняя энергия несущей среды (здесь R – газовая постоянная для разогретого воздуха) [6]; компоненты силы межфазного трения F_{xi}, F_{yi} и тепловой поток с поверхности частицы i-ой фракции дисперсной фазы Q_i определяются законами межфазного взаимодействия. Для описания движения дисперсной фазы используются уравнение сохранения средней плотности дисперсной фазы, уравнение сохранения импульса и уравнение сохранения внутренней энергии [4]:

$$\frac{\partial \rho_i}{\partial t} + \frac{\partial \rho_i u_i}{\partial x} + \frac{\partial \rho_i v_i}{\partial y} = 0,$$

$$\frac{\partial (\rho_i u_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i^2) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i u_i v_i) = -F_{xi} - F_{Exi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial x},$$

$$\frac{\partial (\rho_i v_i)}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(\rho_i u_i v_i) + \frac{\partial}{\partial y}(\rho_i v_i^2) = -F_{yi} - F_{Eyi} - \alpha_i \frac{\partial p}{\partial y},$$

$$\frac{\partial e_i}{\partial t} + \frac{\partial}{\partial x}(e_i u_i) + \frac{\partial}{\partial x}(e_i v_i) = Nu \frac{6\alpha}{(2r)^2} \lambda (T - T_i),$$

$$\rho_i = \alpha \rho_{i0}, e_1 = \rho_i C_{pi} T_i.$$

Здесь α_i, ρ_i , e_i , T_i – объемное содержание, средняя плотность, внутренняя энергия и температура i-ой фракции дисперсной фазы; C_{pi} , ρ_{i0} – удельная теплоемкость и плотность вещества i-ой фракции твердых частиц. Компоненты силы межфазного взаимодейсвия F_{xi} и F_{yi} определяются следующим образом [5,4]:

$$F_{xi} = \frac{3\alpha_i}{8r_i} C d_i \rho \sqrt{(u-u_i)^2 + ((v-v_i)^2}\,(u-u_i) + \alpha_i \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y}\right) +$$

$$+0.5\alpha_i \rho \left(\frac{\partial u}{\partial t} + u\frac{\partial u}{\partial x} + v\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial u_i}{\partial t} - u_i\frac{\partial u_i}{\partial x} - v_i\frac{\partial u_i}{\partial y}\right) + F_{Exi},$$

$$F_{yi} = \frac{3\alpha_i}{8r_i} C d_i \rho \sqrt{(u-u_i)^2 + ((v-v_i)^2}\,(v-v_i) + \alpha_i \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y}\right) +$$

$$+0.5\alpha_i \rho \left(\frac{\partial v}{\partial t} + v\frac{\partial v}{\partial x} + v\frac{\partial v}{\partial y} - \frac{\partial v_i}{\partial t} - v_i\frac{\partial v_i}{\partial x} - v_i\frac{\partial v_i}{\partial y}\right) + F_{Eyi}.$$

Составляющие силы Кулона на единицу объема газовзвеси определяются через ее удельный заряд, объемную плотность твердой фазы и напряженность электрического поля:

$$F_{Exi} = -q_0\frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad F_{Eyi} = -q_0\frac{\partial \varphi}{\partial y},$$

где q_0 – удельный заряд единицы массы твердой фракции, φ – потенциал электрического поля. Потенциал электрического поля в расчетной области определяется из решения уравнения Пуассона с граничными условиями 2-го рода:

$$\mathrm{div}E = \frac{q}{\epsilon\epsilon_0}, E = -\nabla\varphi\, q = \rho_2 q_0, \rho_2 = \sum \rho_i.$$

В правой части уравнения Пуассона содержится плотность заряда газовзвеси, отнесенная к абсолютной диэлектрической проницаемости несущей среды.

Литература

1. Фортов В. Е., Храпак А. Г., Храпак С. А., Молотков В. И., Петров О. Ф. *Пылевая плазма* // Успехи физики. – 2004. – Т. 174. – № 5. – С. 495–544.

2. Сальянов Ф.А. *Основы физики низкотемпературной плазмы, плазменных аппаратов и технологий.* – М.: Наука, 1997. – 206 с.

3. Богомолова О. Ю., Данилаев М. П. *Параметры течения многофазных газовых потоков в задаче капсулирования субмикронных частиц полимером* // Научно-технический вестник Поволжья. – 2016. — № 3. – С. 25–27.

4. Блейхер Г. А., Кривобоков В. П., Юрьева А. В. *Магнетронное осаждение покрытий с испарением мишени* // Журнал технической физики. – 2015. — № 12. – С. 56–61.

5. Кутушев А.Г. *Математическое моделирование волновых процессов в аэродисперсных и порошкообразных средах.* – Санкт-Петербург.: Недра, 2003. – 284 с.

6. Седов Л.И. *Механика сплошной среды.* – М.: Наука, 1984. – Т. 1, Т. 2.

7. Флетчер К. *Вычислительные методы в динамике жидкостей.* – М.: Мир, 1991. – 501 с.

8. Утюжеников И. Ф., Музафаров С. В. *Применение компактных разностных схем к исследованию нестационарных течений сжимаемого газа* // Мат. моделирование. – 1993. – Т. 174. – № 5. – С. 495–544.

APPLICATION OF MATHEMATICAL MODELS OF HYDROMECHANICS OF MULTIPHASE ENVIRONMENTS TO NUMERICAL STUDYING OF NON-STATIONARY PROCESSES IN NON-UNIFORM LOW-TEMPERATURE PLASMA

D.A. Tukmakov

The mathematical model of quasi-neutral dusty plasma, condensed phase of which has multifraction structure, is presented by the particles having various size and consisting of substances with various physical properties. The offered model of dusty plasma is developed on the basis of the polydisperse multi-speed and multitemperature gas-suspension dynamics theory, taking into account speed and temperature delay of the condensed fractions particles. At the same time, it is supposed that disperse inclusions represent the spherical particles differing in the size and materials which particles consist of, they can have various density and heat conductivity.

Keywords: mathematical model, dynamics of dust plasma, polydisperse structure.

УДК 517.98

ПРЕОБРАЗОВАНИЯ, СОХРАНЯЮЩИЕ СПЕКТРАЛЬНЫЙ ПОРЯДОК

Е. Турилова[1], Я. Хамхалтер[2]

1 *ekaterina.turilova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *hamhalte@math.feld.cvut.cz*; Czech Technical University in Prague

В работе исследуются спектральные автоморфизмы, сохраняющие ортогональность на множестве эффектов. Показывается, что любой такой спектральный автоморфизм на AW^*-факторе, не являющемся фактором типа III и I_2, представляет собой композицию функционального исчисления с йордановым $*$-автоморфизмом. Полученный результат можно рассматривать как теорему типа Вигнера.

Ключевые слова: AW^*-алгебра, спектральный порядок, йорданов изоморфизм.

Для C^*-алгебры $\mathscr{A}$ *алгеброй эффектов* будем называть множество

$$E(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{A} \mid a \geq 0, \|a\| \leq 1\}.$$

AW^*-алгебра, введенная Капланским в [3] как алгебраическая абстракция алгебры фон Неймана, может рассматриваться как C^*-алгебра с единицей, для каждого положительного элемента a которой определен ранговый ортопроектор $r(a)$ (носитель элемента). Более того, для $\lambda \geq 0$ и $a \in \mathscr{A}^+$ определена система ортопроекторов $(E_\lambda^a)_{\lambda \geq 0}$, называемая *спектральным семейством или спектральным разложением* a. Отметим, что для AW^*-алгебры $\mathscr{A}$ алгебра эффектов имеет вид

$$E(\mathscr{A}) = \{a \in \mathscr{A} \mid 0 \leq a \leq 1\}.$$

Определение. *Пусть $\mathscr{A}$ – AW^*-алгебра. Спектральным порядком $\leq_S$ называется отношение частичного порядка на $E(\mathscr{A})$, определяемое следующим образом:*

$$a \leq_S b, \text{ если } E_\lambda^b \leq E_\lambda^a \text{ для любого } \lambda \geq 0.$$

Алгебра эффектов, снабженная спектральным порядком, представляет собой полную решетку.

Йорданов $*$-изоморфизм между C^*-алгебрами $\mathscr{A}$ и $\mathscr{B}$ будем называть линейную биекцию $J : \mathscr{A} \to \mathscr{B}$, сохраняющую сопряжение и квадрат: $J(a^*) = J(a)^*$, $J(a^2) = J(a)^2$ для любого $a \in \mathscr{A}$. Если $\mathscr{A} = \mathscr{B}$, то такое отображение называется йордановым $*$-автоморфизмом.

Проекторным автоморфизмом на $\mathscr{A}$ называется биекция τ на множестве ортопроекторов алгебры $\mathscr{A}$, сохраняющая порядок в обоих направлениях:

$$p \le q \iff \tau(p) \le \tau(q) \qquad \text{для любых ортопроекторов } p, q;$$

Спектральным автоморфизмом на $\mathscr{A}$ называется биекция φ на алгебре эффектов алгебры $\mathscr{A}$, сохраняющая спектральный порядок в обоих направлениях:

$$a \le_S b \iff \varphi(a) \le_S \varphi(b) \qquad a, b \in E(\mathscr{A}).$$

Предположим, что τ – проекторный автоморфизм на $\mathscr{A}$. Определим $\varphi_\tau : E(\mathscr{A}) \to E(\mathscr{A})$ следующим образом:

$$E_\lambda^{\varphi_\tau(a)} = \tau(E_\lambda^a)$$

для любых $a \in E(\mathscr{A})$ и $\lambda \in \mathbb{R}$. Тогда φ_τ – спектральный автоморфизм на $\mathscr{A}$.

Пусть далее $f : [0,1] \to [0,1]$ – неубывающая биекция. Тогда преобразование $a \to f(a)$ является спектральным автоморфизмом на $\mathscr{A}$. Будем называть спектральный автоморфизм φ на $\mathscr{A}$ *каноническим*, если он представим в виде композиции описанных преобразований:

$$\varphi(a) = \varphi_\tau(f(a)), \qquad a \in E(\mathscr{A}).$$

Следует отметить, что спектральный автоморфизм на $\mathscr{A}$ является каноническим тогда и только тогда, когда он сохраняет операторы, кратные ортопроекторам.

Два эффекта a и b называются ортогональными, если $ab = 0$. Спектральный автоморфизм на AW^*-алгебре $\mathscr{A}$, сохраняющий ортогональность в обоих направлениях, называется *спектральным ортоавтоморфизмом*.

Предложение [1]. *Пусть $\mathscr{A}$ – AW^*-алгебра без прямых слагаемых типа I_2. Тогда для любого проекторного ортоавтоморфизма φ на $\mathscr{A}$ существует единственный йорданов $*$-автоморфизм J, такой что*

$$\varphi(p) = J(p)$$

для любого ортопроектора p.

Теорема 1. *Пусть $\mathscr{A}$ – AW^*-алгебра, не имеющая прямых слагаемых типа I_2, φ – спектральный ортоавтоморфизм на $\mathscr{A}$, сохраняющий операторы, кратные единице. Тогда существует единственный йорданов $*$-изоморфизм $J : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ и единственная неубывающая биекция $f : [0,1] \to [0,1]$ такие, что*

$$\varphi(a) = J(f(a)) \qquad \text{для любого } a \in E(\mathscr{A}).$$

Заметим, что условие сохранения кратных операторов в предыдущей теореме не является "лишним". Но все известные примеры, иллюстрирующие это, не касаются

алгебр, которые являются факторами (алгебрами с центром размерности один). В связи с этим возникла гипотеза о том, что любой спектральный ортоавтоморфизм на AW^*-факторах является каноническим. Первый результат в этом направлении был доказан в [2].

Следующая теорема показывает, что для всех факторов типа I и II (конечных или бесконечных) любой спектральный ортоавтоморфизм является каноническим. Можно заметить, что любой AW^*-фактор типа I является алгеброй фон Неймана, и этот случай перекрывается результатом Молнара и Шемрла [4]. Для AW^*-фактора типа III вопрос остается открытым.

Теорема 2. *Пусть $\mathscr{A}$ AW^*-фактор, не являющимся фактором типа III. Тогда любой спектральный ортоавтоморфизм φ на $\mathscr{A}$ является каноническим. Если $\mathscr{A}$ не является алгеброй матриц 2×2, то существует единственный йорданов $*$-автоморфизм $J : \mathscr{A} \to \mathscr{A}$ и единственная неубывающая биекция $f : [0,1] \to [0,1]$ такие, что*

$$\varphi(a) = J(f(a)) \qquad \text{для любого } a \in E(\mathscr{A}).$$

Работа выполнена при частичной финансовой поддержке “Grant Agency of the Czech Republic” (grant number P201/12/0290, "Topological and geometrical properties of Banach spaces and operator algebras").

Литература

1. Hamhalter J. *Dye Theorem and Gleason Theorem for AW*-algebras* // Jour. Math. Anal. Appl. – 2015. – V. 422. – P. 1103–1115.

2. Hamhalter J., Turilova E. *Spectral order on AW*-algebras and its preservers* // Lobach. Jour. of Math. – 2016. – V. 37. – № 4. – P. 439–448.

3. Kaplansky I. *Projections in Banach algebras* // Ann. of Math. – 1951. – V. 53. – № 2. – P. 235–249.

4. Molnar L., Šemrl P. *Spectral order automorphisms of the spaces of Hilbert space effects and observables* // Let. in Math. Phys. – 2007. – V. 80. – № 3. – P. 239–255.

TRANSFORMATIONS PRESERVING SPECTRAL ORDER

E. Turilova, J. Hamhalter

We investigate spectral automorphisms that respect orthogonality of effects. We show that any such spectral automorphism on AW^*-factor, that is not of Type III and I_2, is the composition of a function calculus with a Jordan $*$-automorphism. This result may be viewed as a Wigner type theorem in its "unsharp" version.

Keywords: AW^*-algebra, spectral order, Jordan isomorphism.

УДК 517.5

НАИЛУЧШИЕ ПОЛИНОМИАЛЬНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ, ИМЕЮЩИХ ПРОИЗВОДНУЮ В СМЫСЛЕ ВЕЙЛЯ

К. Тухлиев[1]

1 *kamaridin.t54@mail.ru*; Худжандский государственный университет им. Б. Гафурова

Найдены точные неравенства между наилучшими приближениями периодических дифференцируемых в смысле Вейля функций тригонометрическими многочленами и обобщённым модулем непрерывности m-го порядка.

Ключевые слова: производная в смысле Вейля, наилучшие приближения, функция Стеклова, модуль непрерывности m-го порядка.

Полученные в этой работе результаты связаны с определением дробной производной в смысле Вейля [1]. Пусть $L_2 := L_2[0,2\pi]$ – пространство суммируемых с квадратом по Лебегу вещественных 2π-периодических функций f. Рассмотрим для функции $f \in L_2$ с рядом Фурье

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_k(f)\cos kx + b_k(f)\sin kx\right),$$

производную порядка $\alpha \geq 0$ в смысле Вейля, определённую равенством

$$f^{(\alpha)}(x) = \sum_{k=1}^{\infty} k^{\alpha} \left\{ a_k \cos\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right) + b_k \sin\left(kx + \frac{\alpha\pi}{2}\right)\right\}.$$

Всюду далее $\mathbb{N}, \mathbb{R}_+ := (0,+\infty)$, — множества соответственно всех натуральных и положительных действительных чисел. Через $L_2^{(\alpha)}$ ($\alpha \geq 0$, $L_2^{(0)} \equiv L_2$) обозначим множество функций $f \in L_2$, у которых существует производная в смысле Вейля $f^{(\alpha)} \in L_2$ ($\alpha \geq 0$). Если $s_{n-1}(f^{(\alpha)}, x)$ ($\alpha \geq 0$) – частичная сумма порядка n–1 ряда Фурье функции $f^{(\alpha)}$, то легко доказать, что наилучшее приближение функции $f^{(\alpha)} \in L_2$ тригонометрическими полиномами T_{n-1} степени не выше $n-1$ имеет вид

$$E_{n-1}(f^{(\alpha)}) = \inf\left\{\|f^{(\alpha)} - T_{n-1}\| : T_{n-1} \in \Im_{2n-1}\right\} = \|f^{(\alpha)} - s_{n-1}(f^{(\alpha)})\| = \left(\sum_{k=n}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)\right)^{1/2},$$

где $\rho_k^2(f) = a_k^2(f) + b_k^2(f)$, $a_k(f)$, $b_k(f)$ — косинус- и синус-коэффициенты функции f. Пусть

$$\Omega_m(f;t) \overset{def}{=} \sup\left\{\left\|\Delta_h^m(f;\cdot)\right\| : 0 < h \leq t\right\}$$

функция, которую назовем *обобщённым модулем непрерывности m-го порядка* функции $f \in L_2$, определяемая через функции Стеклова (см., напр. [2]).

Всюду, далее полагаем

$$\operatorname{sinc} t := \left\{ \frac{\sin t}{t}, \text{ если } t \neq 0, \ 1, \text{ если } t = 0 \right\}.$$

Лемма. *Для произвольной функции* $f \in L_2^{(\alpha)}$ *имеет место следующее равенство*

$$\Omega_m^2(f^{(\alpha)}, t) = \sup\left\{\sum_{k=1}^{\infty} k^{2\alpha}\rho_k^2(f)\,(1-\operatorname{sinc} kh)^{2m} :\ |h| \le t\right\}.$$

Введём в рассмотрение экстремальную характеристику

$$\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m, q, h) = \sup_{\substack{f\in L_2^{(\alpha)}\\ f\neq \text{const}}} E_{n-1}(f)\left(\int_0^h \Omega_m^p(f^{(\alpha)}, t)q(t)dt\right)^{-1/p},$$

где $m, n \in \mathbb{N},\ \alpha \ge 0,\ p \in \mathbb{R}_+,\ 0 < h \le \pi/n,\ q \ge 0$ — весовая функция на отрезке $[0, h]$.

С использованием леммы можно доказать следующее общее утверждение:

Теорема 1. *Пусть* $m \in \mathbb{N}$, $\alpha \ge 0$, $0 < p \le 2$, $0 < h \le \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$, q *– весовая функция на отрезке* $[0, h]$. *Тогда справедливы неравенства*

$$\left\{A_{n,m,\alpha,p}(q,h)\right\}^{-1} \le \chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m, q, h) \le \left\{\inf_{n\le k<\infty} A_{k,m,\alpha,p}(q,h)\right\}^{-1}, \tag{1}$$

где

$$A_{k,m,\alpha,p}(q,h) = \left(k^{\alpha p}\int_0^h (1-\operatorname{sinc} kt)^{mp}\,q(t)dt\right)^{1/p}, \quad k \ge n.$$

Возникает естественный вопрос: выяснить случаи или указать конкретные свойства весовых функций, для которых при всех $0 < h \le \pi/n$ имеет место равенство

$$\inf_{k\ge n} \mathscr{A}_{k,m,r,p}(\varphi, h) = \mathscr{A}_{n,m,r,p}(\varphi, h), \tag{2}$$

равносильное задаче о точности двустороннего неравенства (1).

Теорема 2. *Пусть* q *– весовая функция на отрезке* $[0, h]$ *(*$0 < h \le \pi/n$, $n \in \mathbb{N}$*) является дифференцируемой. Если при некотором* $\alpha \in \mathbb{R}_+$, $\alpha \ge 1$, $1/\alpha \le p \le 2$ *и любых* $t \in (0, h)$ *выполнено дифференциальное неравенство*

$$(\alpha p - 1)q(t) - tq'(t) \ge 0,$$

то справедливо соотношение (2) *и, следовательно,*

$$\chi_{n,\alpha,p}(\Omega_m, q, h) = \frac{1}{n^\alpha}\left(\int_0^h (1-\operatorname{sinc} nt)^{mp}\,q(t)dt\right)^{-1/p}.$$

Отметим, что ряд экстремальных задач теории аппроксимации, связанные с понятием дробной производной в смысле Вейля, ранее рассматривались в работах [3;4] и другими.

Литература

1. Weyl H. *Bemerkungen zum Begriff der differentialquotienten gebrochener Ordnung* // Vierteljahresschrift der Naturschenden Gesellschaft in Zurich. – 1917. – V. 62. – P. 296-302.

2. Шабозов М. Ш., Тухлиев К. *Наилучшие полиномиальные приближения и поперечники некоторых функциональных классов в L_2* // Матем. заметки. – 2013. – Т. 94. – № 6. – С. 905-914.

3. Тухлиев К. *Структурные характеристики функций из L_2 и точные значения поперечников некоторых классов функций* // Изв. АН РТ. Отд. физ.-мат., хим., геол. и техн. н. – 2015. – № 1(158). – С. 7-19.

4. Шабозов М.Ш., Темурбекова С.Д. *Значения поперечников классов функций из $L_2[0,2\pi]$ и минимизация точных констант в неравенствах типа Джексона* // Известия Тульского госуниверситета. Естественные науки. – 2012. – Вып.3. – С. 60-68.

THE BEST POLYNOMIAL APPROXIMATION OF PERIODIC FUNCTIONS HAVING A DERIVATIVE IN THE SENSE OF WEYL

K. Tukhliev

Sharp inequalities between the best approximations of periodic, differentiable in the sense of Weil, functions by trigonometric polynomials and the generalized modulus of continuity of mth order were found.

Keywords: derivative in the Weyl sense, best approximation, Steklov function, modulus of continuity of mth order.

УДК 517.518.823

ОЦЕНКА НОРМЫ ИНТЕРПОЛЯЦИОННОГО ОПЕРАТОРА ЭРМИТА-ФЕЙЕРА В ПРОСТРАНСТВАХ СОБОЛЕВА

А.И. Федотов[1]

1 *fedotov@mi.ru*; Московский социально-гуманитарный институт

Получены оценки норм интерполяционных операторов Эрмита-Фейера в одномерных в многомерных пространствах Соболева. Показано, что в одномерном случае норма этого оператора ограничена. В многомерном же случае величина нормы зависит от соотношения числа узлов по каждой координате.

Ключевые слова: интерполяционный оператор Эрмита-Фейера, пространства Соболева.

1. Одномерный случай

Будем, как обычно, обозначать через $\mathbb{N}$ множество натуральных чисел, $\mathbb{N}_0$ – множество натуральных чисел дополненных нулем, $\mathbb{Z}$ множество целых чисел, а $\mathbb{R}$ – множество действительных чисел.

Зафиксируем $s \in \mathbb{R}$ и обозначим через H^s пространство Соболева порядка s, то есть замыкание всех 2π-периодических комплекснозначных функций одной пере-

менной относительно нормы

$$\|x\|_{H^s} = \left(\sum_{l\in\mathbb{Z}} |\, \widehat{x}(l)\,|^2\, \underline{l}^{2s} \right)^{1/2},\ \underline{l} = \begin{cases} |\, l\,|, & l \neq 0, \\ 1, & l = 0, \end{cases} \quad l \in \mathbb{Z},$$

где

$$\widehat{x}(l) = (2\pi)^{-1} \int_{-\pi}^{\pi} x(\tau)\bar{e}_l(\tau)d\tau,\ l \in \mathbb{Z},$$

суть коэффициенты Фурье функции $x \in H^s$ по системе функций $e_l(\tau) = e^{il\tau}$, $l \in \mathbb{Z}$.

Всюду в дальнейшем в этом разделе будем полагать выполненным условие $s > 1/2$, которое (см., напр., [1], стр. 25) обеспечивает вложение пространства H^s в пространство непрерывных функций, а пространства H^{1+s} в пространство функций, первая производная которых непрерывна.

Зафиксируем $n \in \mathbb{N}_0$, введем на $[-\pi, \pi]$ сетку равноотстоящих узлов

$$t_k = \frac{2\pi k}{2n+1},\ |\, k\,| \leq n, \tag{1}$$

и обозначим через $P_n : H^{1+s} \to H^{1+s}$,

$$(P_n x)(\tau) = \sum_{|k|\leq n} (x(t_k) + ix'(t_k)(1 - e_1(\tau - t_k)))\xi_n(\tau, t_k),$$

оператор Эрмита–Фейера, который каждой функции $x \in H^{1+s}$ ставит в соответствие тригонометрический интерполяционный полином Эрмита–Фейера $P_n x \in H^{1+s}$ по узлам (1) первой кратности. Здесь

$$\xi_n(\tau, t_k) = \left(\frac{\sin((2n+1)(\tau - t_k)/2)}{(2n+1)\sin((\tau - t_k)/2)} \right)^2 =$$

$$= \frac{1}{(2n+1)^2} \sum_{|l|\leq 2n} (2n + 1 - |\, l\,|)e_l(\tau - t_k),\ |\, k\,| \leq n,$$

нормализованные ядра Фейера по узлам (1).

Теорема 1. *Для любых $s \in \mathbb{R}$, $s > 1/2$, и $n \in \mathbb{N}_0$ справедлива оценка*

$$\|P_n\|_{H^{1+s}\to H^{1+s}} \leq 2\sqrt{\zeta(2s)},$$

где $\zeta(t) = \sum_{j=1}^{\infty} j^{-t}$ – дзета-функция Римана, ограниченная и убывающая при $t > 1$.

Обозначим через $\mathcal{T}_n$ множество тригонометрических комплекснозначных полиномов

$$\mathcal{T}_n = \operatorname{span}\{e_l(\tau) \mid -2n \leq l \leq 2n + 1\},$$

а через $E_n(x)_s$ – наилучшее приближение функции $x \in H^{1+s}$ полиномами из $\mathcal{T}_n$. Известно, что в гильбертовом пространстве наилучшее приближение функции доствляет отрезок ее ряда Фурье

$$E_n(x)_{1+s} = \inf_{x_n\in\mathcal{T}_n} \|x - x_n\|_{H^{1+s}} = \|x - Q_n x\|_{H^{1+s}},\ (Q_n x)(t) = \sum_{l=-2n}^{2n+1} \widehat{x}(l)e_l(\tau).$$

Теорема 2. *Для любых $n \in \mathbb{N}_0$, и $\sigma, s \in \mathbb{R}$, $s > 1/2$, $0 \le \sigma \le s$, и любой функции $x \in H^{1+s}$ справедлива оценка*

$$\| x - P_n x \|_{H^{1+\sigma}} \le \sqrt{4\zeta(2s) - 1}(2n+1)^{\sigma - s} E_n(x)_{1+s}.$$

2. Многомерный случай

Зафиксируем $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$, и пусть

$$\mathbf{N} = \mathbb{N}^m,\ \mathbf{N_0} = \mathbb{N}_0^m,\ \mathbf{Z} = \mathbb{Z}^m,\ \mathbf{R} = \mathbb{R}^m, \Delta = [-\pi, \pi]^m \subset \mathbf{R}$$

декартовы степени множеств натуральных чисел, натуральных чисел, дополненных нулем, целых чисел, действительных чисел и отрезка $[-\pi, \pi] \subset \mathbb{R}$ соответственно. Для элементов $\mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_m)$, $\mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_m)$ этих множеств (m-компонентных векторов) наряду с обычными операциями сложения, вычитания и умножения на число введем следующие операции:

$$\mathbf{l} \cdot \mathbf{k} = \sum_{j=1}^{m} l_j k_j,\ \mathbf{l}^2 = \sum_{j=1}^{m} l_j^2.$$

Кроме того, будем для краткости писать $\min(\mathbf{n})$ вместо

$$\min_{1 \le j \le m} \{ n_j \mid \mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m) \in \mathbf{N_0} \}.$$

Для фиксированного $s \in \mathbb{R}$ обозначим через H^s m-мерное пространство Соболева, то есть замыкание относительно нормы

$$\| u \|_{H^s} = \{ \sum_{\mathbf{l} \in \mathbf{Z}} \underline{\mathbf{l}}^{2s} \mid \widehat{u}(\mathbf{l}) \mid^2 \}^{\frac{1}{2}},\ \underline{\mathbf{l}} = \begin{cases} \sqrt{\mathbf{l}^2} & ,\ \mathbf{l} \ne \mathbf{0}, \\ 1 & ,\ \mathbf{l} = \mathbf{0}, \end{cases} \quad \mathbf{l} \in \mathbf{Z},$$

где

$$\widehat{u}(\mathbf{l}) = (2\pi)^{-m} \int_{\Delta} u(\tau) \bar{e}_{\mathbf{l}}(\tau) d\tau,\ \mathbf{l} \in \mathbf{Z},$$

суть коэффициенты Фурье функции $u \in H^s$ по системе функций

$$e_{\mathbf{l}}(\tau) = \exp(i\mathbf{l} \cdot \tau),\ \mathbf{l} = (l_1, l_2, ..., l_m) \in \mathbf{Z},\ \tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m) \in \Delta,$$

множества всех m-мерных гладких 2π-периодических по каждой переменной комплекснозначных функций от m переменных, определенных на гиперкубе Δ.

Всюду в дальнейшем будем полагать выполненным условие $s > m/2$, при котором (см., напр., [1]) пространство H^s вкладывается в пространство непрерывных функций, а пространство H^{1+s} – в пространство функций, первые производные которых непрерывны.

Зафиксируем $\mathbf{n} = (n_1, n_2, ..., n_m) \in \mathbf{N_0}$, пусть

$$\mathbf{I}_{\mathbf{n},1} = \{ \mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_m) \in \mathbf{Z} \mid \mid k_j \mid \le n_j,\ j = 1, 2, ..., m, \},$$

индексное множество. Введем на Δ сетку узлов

$$\Delta_{\mathbf{n}} = \{ \mathbf{t}_{\mathbf{k}} = (t_{k_1}, t_{k_2}, ..., t_{k_m}) \mid \mathbf{k} = (k_1, k_2, ..., k_m) \in \mathbf{I}_{\mathbf{n},1},$$

$$t_{k_j} = \frac{2\pi k}{2n_j+1},\ |\ k_j\ | \le n_j,\ j = 1,2,...,m\}.$$

Обозначим через $P_{\mathbf{n}} : H^{1+s} \to H^{1+s}$,

$$(P_{\mathbf{n}}u)(\tau) = \sum_{\mathbf{k}\in\mathbf{I}_{\mathbf{n},1}} (u(\mathbf{t_k}) + i\mathbf{u}'_\tau(\mathbf{t_k})\cdot(\mathbf{1} - \mathbf{e_1}(\tau - \mathbf{t_k})))\xi_{\mathbf{n}}(\tau, \mathbf{t_k}),$$

$$\mathbf{1} = (1,1,...,1) \in \mathbf{N},$$

оператор Эрмита-Фейера, который каждой функции $u \in H^{1+s}$ ставит в соответствие тригонометрический интерполяционный полином Эрмита-Фейера $P_{\mathbf{n}}u \in H^{1+s}$ по узлам $\Delta_{\mathbf{n}}$ первой кратности. Здесь

$$\mathbf{u}'_\tau(\mathbf{t_k}) = (u'_{\tau_1}(\mathbf{t_k}), u'_{\tau_2}(\mathbf{t_k}), ..., u'_{\tau_m}(\mathbf{t_k}))$$

вектор значений производных функции $u \in H^{1+s}$ по каждой переменной-компоненте вектора $\tau = (\tau_1, \tau_2, ..., \tau_m) \in \Delta$ в точке $\mathbf{t_k} \in \Delta_{\mathbf{n}}$,

$$\mathbf{e_1}(\tau - \mathbf{t_k}) = (e_1(\tau_1 - t_{k_1}), e_1(\tau_2 - t_{k_2}), ..., e_1(\tau_m - t_{k_m}))$$

вектор-функция, а

$$\xi_{\mathbf{n}}(\tau, \mathbf{t_k}) = \prod_{j=1}^{m} \xi_{n_j}(\tau_j, t_{k_j})$$

нормализованное ядро Фейера по узлам $\Delta_{\mathbf{n}}$.

Теорема 3. *Для любых $m \in \mathbb{N}$, $m \ge 2$, $s \in \mathbb{R}$, $s > m/2$ и $\mathbf{n} \in \mathbf{N_0}$ справедлива оценка*

$$\|P_{\mathbf{n}}\|_{H^s_\rho \to H^s_\rho} \le 2^m m^{1+s/2} M^{1+s}(2\mathbf{n}+\mathbf{1})\sqrt{\zeta(2s-m+1)},\ M(2\mathbf{n}+\mathbf{1}) = \frac{\sqrt{(2\mathbf{n}+\mathbf{1})^2}}{\min(2\mathbf{n}+\mathbf{1})}.$$

Литература

1. Тейлор М. *Псевдодифференциальные операторы.* – М.: Мир, 1985. – 469 с.

NORM ESTIMATION OF THE HERMITE-FEJER INTERPOLATION OPERATOR IN SOBOLEV SPACES

A.I. Fedotov

We obtain an estimate of the norm of the Hermite-Fejer interpolation operator in one-dimensional and multidimensional Sobolev spaces. It is shown that in the one-dimensional case the norm of this operator is bounded. In the multidimensional case the norm of this operator depends on the choice of the nodes.

Keywords: Hermite-Fejer interpolation operator, Sobolev spaces.

УДК 517.51

ПОСТРОЕНИЕ МНОГОМОДУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ ИЗ ОБОБЩЕННЫХ ПРОСТРАНСТВ ОРЛИЧА

В.И. Филиппов[1]

1 *888vadim@mail.ru*; Саратовский социально-экономический институт (филиал) РЭУ им. Г.В. Плеханова

Для введенных ранее автором многомодулярных пространств доказываются теоремы полноты специальных многомодулярных пространств.

Ключевые слова: многомодулярные пространства, обобщенные классы и пространства Орлича, пространства E_φ.

Основы модулярных пространств отражены в монографиях [1] и [2]. В данной работе рассматривается обобщение модулярных пространств (многомодулярные пространства), приводятся теоремы полноты некоторого вида этих пространств. Для этих пространств определяется F-норма. Заметим, что обобщенные пространства и классы Орлича, а также классы L_p являются частным случаем модулярных пространств. В работах [3–5] рассматриваются системы представления в некоторых конкретных модулярных пространствах. В работе [6] анонсированны некоторые результаты по многомодулрным пространствам. В статьях [3, 7, 8] исследованы ряды Фурье и Фурье-Хаара в специальных модулярных пространствах. Пространство E с F-нормой (нормой) будем называть F-пространством (B-пространством), если оно полно.

Определение 1. *Скажем, что функционал $\rho : E \to [0, \infty)$, на действительном или комплексном векторном пространстве E, называется псевдомодуляром, если для произвольных x и y принадлежащих E выполняются условия:*

1) $\rho(0) = 0$;

2) В случае, когда E действительное, $\rho(-x) = \rho(x)$. Если E комплексное, то для любого действительного t имеем $\rho(e^{it}x) = \rho(x)$;

3) Для $\alpha \geq 0$ и $\beta \geq 0$ и $\alpha + \beta = 1$ $\rho(\alpha x + \beta y) \leq \rho(x) + \rho(y)$.

Предположим, что E_i, $i = \overline{1, n}$, - действительные или комплексные векторные пространства. Рассмотрим множество E_0^n состоящее из элементов $f = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$, где $f_i \in E_i$, $i = \overline{1, n}$. Пусть $f, g \in E_0^n$, L – поле скаляров. Введем в множестве E_0^n сумму $f + g$ и произведение элемента $f \in E_0^n$ на скаляр $\alpha \in L$ покоординатно. Можно показать, что множество E_0^n является линейным пространством.

Пусть ρ_i, $i = \overline{1, n}$, псевдомодуляры (модуляры [6]) в E_i, $i = \overline{1, n}$, то $\rho_0(f) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \rho_i(f_i)$, $f \in E_0^n$, будет псевдомодуляром (модуляром) в E_0^n.

Определение 2. *Если ρ_0 псевдомодуляр в E_0^n, то*

$$E_\rho^n = \left\{ f \in E_0^n : \lim_{\lambda \to 0} \rho_0(\lambda f) = 0 \right\}$$

называется многомодулярным пространством.

Пусть ρ_0 псевдомодуляр в E_0^n. Тогда функционал

$$|f|_{\rho_0} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \inf\left\{\varepsilon > 0 : \rho_i\left(\frac{f_i}{\varepsilon}\right) \le \varepsilon\right\}$$

будет F-псевдонормой в E_ρ^n.

Теорема 1. *Пусть ρ_i псевдомодуляры в E_i, $i = \overline{1,n}$. Если $f \in E_\rho^n$ и $f_k \in E_\rho^n$ для $k = 1,2,3\ldots$, то условие $|f_k - f|_{\rho_0} \to 0$ при $k \to \infty$ эквивалентно условию $\rho_0(\alpha(f_k - f)) \to 0$ при $k \to \infty$ для любого $\alpha > 0$. Если $f_k \in E_\rho^n$ для $k = 1,2,3\ldots$, то $\{f_k\}$ является последовательностью Коши в пространстве E_ρ^n относительно F-псевдонормы $|\cdot|_{\rho_0}$, тогда и только тогда, когда $\rho_0(\alpha(f_k - f_l)) \to 0$ при $k \to \infty$, $l \to \infty$ для каждого $\alpha > 0$.*

Определение 3. *Предположим, что $(\Omega_i, \Sigma, \mu_i)$, $i = \overline{1,n}$, измеримое пространство, т.е. Ω_i – непустое множество, Σ – σ-алгебра подмножеств из Ω_i и μ_i – неотрицательная полная мера не эквивалентная нулю. Будем говорить, что действительная функция φ_i определенная на $\Omega_i \times \{[0,\infty)\}$ принадлежит классу B, если она удовлетворяет следующим условиям:*
1) $\varphi_i(x,v)$ есть φ-функция от переменной $v \ge 0$ для каждого $x \in \Omega_i$, т.е. является неубывающей, непрерывной функцией такой, что $\varphi_i(x,0) = 0$, $\varphi_i(x,v) > 0$ для $v > 0, \varphi_i(x,v) \to \infty$ при $v \to \infty$.
2) $\varphi_i(x,v)$ является Σ-измеримой функцией от x для всех $v \ge 0$.

Пусть E_i – множество всех действительнозначных (или комплекснозначных) Σ-измеримых и конечных μ_i-почти всюду функцией на Ω_i с эквивалентностью μ_i-почти всюду. Очевидно, что $\varphi_i(x, f_i(x))$ является Σ-измеримой функцией от x для каждой $f_i(x) \in E_i$ и $\rho_i(f_i(x)) = \int\limits_{\Omega_i} \varphi_i(x, |f_i(x)|)d\mu_i$ является модуляром в E_i.

Определение 4. *Пусть $\varphi_i \in B$, $i = \overline{1,n}$. Модулярное пространство E_{ρ_i}, $\rho_i(f_i(x)) = \int_{\Omega_i} \varphi_i(x, |f_i(x)|)d\mu_i$, состоящее из множества всех тех $f_i(x) \in E_i$ для которых $\int\limits_{\Omega_i} \varphi_i(x, \alpha|f_i(x)|)d\mu_i \to 0$, при $\alpha \to +0$, назовем обобщенным пространством Орлича и будем обозначать, при $n = 1$, через $\varphi^*(L,\Omega,\Sigma,\mu)$ (или коротко $\varphi^*(L)$).*

Модулярное пространство E_ρ^n, $\rho_0(f(x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \rho_i(f_i(x))$, состоящее из множества всех тех $f(x) \in E_0^n$ для которых $\frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \int\limits_{\Omega_i} \varphi_i(x, \alpha|f_i(x)|)d\mu_i \to 0$, при $\alpha \to +0$, будем обозначать через $\varphi_n^*(L,\Omega,\Sigma,\mu)$ (или коротко $\varphi_n^*(L)$).

Определение 5. *Пусть $\varphi_i \in B$, $i = \overline{1,n}$. Множество всех тех $f_i(x) \in E_i$, для которых $\int\limits_{\Omega_i} \varphi_i(x, |f_i(x)|)d\mu_i < \infty$, назовем, при $n = 1$, обобщенным классом Орлича и будем обозначать $\varphi(L,\Omega,\Sigma,\mu)$ (или коротко $\varphi(L)$).*

Множество всех тех $f(x) \in E_0^n$ для которых

$$\rho_0(f(x)) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \int\limits_{\Omega_i} \varphi_i(x, |f_i(x)|)d\mu_i < \infty,$$

будем обозначать через $\varphi_n(L,\Omega,\Sigma,\mu)$ (или коротко $\varphi_n(L)$).

Определение 6. *Функция $f(x) \in E_0^n$ называется ограниченным элементом в $\varphi_n^*(L)$, если $\alpha f(x) \in \varphi_n(L)$ для любого $\alpha > 0$. Множество всех ограниченных элементов в $\varphi_n^*(L)$ обозначим через E_φ^n (при $n = 1$ обозначим через E_φ).*

Очевидно, что E_φ^n есть подпространство $\varphi_n^*(L)$.

Теорема 2. *Пусть μ_i, $i = \overline{1,n}$, σ-конечна. Тогда обобщенное пространство Орлича $\varphi_n^*(L)$ полно по соответствующей φ-норме $\|\cdot\|_\varphi^n$.*

Доказательство. Предположим, что $\mu(\Omega_i) < \infty$. Тогда мера μ_i абсолютно непрерывна по соответствующей мере $\eta(D_i) = \int_{D_i} \varphi_i(x,v)d\mu_i$, $D_i \in \Sigma$, для любого $v > 0$. Следовательно, для всякого $v > 0$ существует $\delta > 0$ такое, что если $D_i \in \Sigma$ и $\int_{D_i} \varphi_i(x,v)d\mu_i < \delta$, то $\mu_i(D_i) < v$, $i = \overline{1,n}$.

Пусть, теперь, (f_n) последовательность Коши в $\varphi_n^*(L)$ и $\alpha > 0$ произвольно. Тогда существует индекс k_0 такой, что $\rho_0\left(\alpha(f_k - f_m)\right) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^n \rho_i(\alpha|f_m^i(x) - f_k^i(x)|) < \min\{\delta, v\}$ и $\rho_i\left(\alpha\left|f_m^i(x) - f_k^i(x)\right|\right) < \min\{\delta, v\}$, $i = \overline{1,n}$, для $m > k_0$, $k > k_0$. Обозначим $A_{m,k}^i = \{x \in \Omega_i : \alpha|f_m^i(x) - f_k^i(x)| \geq v\}$, имеем, что $\int_{A_{m,k}^i} \varphi_i(x,v)d\mu_i < \delta$ и, следовательно, $\mu_i(A_{m,k}^i) < v$ для $m,k > k_0$. Тогда последовательность (αf_k^i) сходится по мере μ_i к функции $\alpha f_i \in E_i$ на множестве Ω_i. По теореме Рисса последовательность (f_k^i) содержит подпоследовательность $(f_{k_j}^i)$ сходящуюся к f_i μ_i-почти всюду. Поэтому $\varphi_i\left(x, \alpha\left|f_k^i(x) - f_{k_j}^i(x)\right|\right) \to \varphi_i\left(x, \alpha\left|f_k^i(x) - f_i(x)\right|\right)$ при $j \to \infty$ μ_i-почти всюду на Ω_i для каждого k. Применяя лемму Фату, получим $\rho_i\left(\alpha(f_k^i(x) - f_i(x))\right) \leq \underline{\lim}_{j\to\infty}\rho_i\left(\alpha(f_k^i - f_{k_j}^i)\right) < v$ для $k > k_0$, заметим, что v - произвольно. Таким образом, $\|f_k^i(x) - f_i(x)\|_{\varphi_i} \to 0$, $k \to \infty$. Следовательно, $f_i(x) \in \varphi_i^*(L)$, $i = \overline{1,n}$, и $\|f_k(x) - f(x)\|_\varphi^n \to 0$, $k \to \infty$, а $f(x) \in \varphi_n^*(L)$.

Опустим ограничение $\mu_i(\Omega_i) < \infty$, $i = \overline{1,n}$. Пусть $\mu_i(\Omega_i) = \infty$, $i = \overline{1,n}$, $\Omega_i = \Omega_1^i \cup \Omega_2^i \cup \ldots$, $\Omega_1^i \subset \Omega_2^i \subset \ldots$, $\mu_i(\Omega_k^i) < \infty$ для каждого k.

Применяя предыдущую часть к доказательству Ω_k^i вместо Ω_i, видим, что существует функция $f_i \in E_i$ такая, что (f_j^i) сходится к f_i по мере μ_i для каждого множества Ω_k^i и $\int\limits_{\Omega_k^i} \varphi_i\left(x, \alpha|f_j^i(x) - f_i(x)|\right)d\mu_i \to 0$, $j \to \infty$ для $k = 1,2\ldots$. Зафиксируем j, пусть $g_k^i(x) = \varphi_i\left(x, \alpha|f_j^i(x) - f_i(x)|\right)$, если $x \in \Omega_k^i$, $g_k^i(x) = 0$, если $x \notin \Omega_k^i$, $g_i(x) = \varphi_i\left(x, \alpha|f_j^i(x) - f_i(x)|\right)$. Тогда получим

$$\int\limits_{\Omega_i} g_k^i(x)d\mu_i = \int\limits_{\Omega_k^i} \varphi_i\left(x, \alpha|f_j^i(x) - f_i(x)|\right)d\mu_i \leq$$

$$\underline{\lim}_{l\to\infty} \int\limits_{\Omega_k^i} \varphi_i\left(x, \alpha|f_j^i(x) - f_{j_l}^i(x)|\right)d\mu \leq \underline{\lim}_{l\to\infty}\rho_i\left(\alpha(f_j^i(x) - f_{j_l}^i(x))\right) \leq v$$

для достаточно больших j (независимых от k). Так как $g_k^i(x) \to g_i(x)$ почти всюду на Ω_i, то получим

$$\rho_i\left(\alpha(f_j^i(x) - f_i(x))\right) = \int\limits_{\Omega_i} g_i(x)d\mu_i \le \underline{\lim}_{k\to\infty} \int\limits_{\Omega_i} g_k^i(x)d\mu_i < \upsilon$$

для достаточно больших j. Следовательно, $\|f_j^i(x) - f_i(x)\|_{\varphi_i} \to 0$, а, значит, $\|f_k(x) - f(x)\|_{\varphi}^n \to 0, \quad k \to \infty$.

Заметим, если возьмем $\varphi_i(x, \upsilon) = \varphi_i(\upsilon)$, независящую от x, то нам не потребуется σ-конечность μ_i для доказательства полноты $\varphi_n^*(L)$. Это следует из того, что первую часть теоремы 2 можно повторить без использования σ-конечности μ_i.

Таким образом, для случая $\varphi_i(x, \upsilon) = \varphi_i(\upsilon),\ i = \overline{1, n}$, имеем

Теорема 3. *Обобщенное пространство Орлича $\varphi_n^*(L)$ полно по соответствующей F-норме $\|\cdot\|_{\varphi}^n$.*

Литература

1. Nakano H. *Topology and topological linear spaces*. – Tokyo, 1951.

2. Musielak J. *Orlicz spaces and modular spaces*. – Lecture Notes in Math., 1034, Springer-Verlag, Berlin, 1983. – P. 222.

3. Filippov V. I. *Linear continuous functionals and representation of functions by series in the spaces E_φ* // Analysis Mathematica. – 2001. – V. 27. – № 4. – P. 239–260.

4. Филиппов В. И. *Об усилении результатов А.Н. Колмогорова о рядах Фурье и сопряженных функциях* // Известия Вузов. Математика. – 2012. – № 7. – С. 21–34.

5. Филиппов В. И. *Системы представления, полученные из сжатий и сдвигов одной функции в многомерных пространствах E_φ* // Изв. РАН, сер. матем. – 2012. – Т. 76. – № 6. – С. 193–206.

6. Филиппов В. И. *Многомодулярные пространства* // Вестник СГСЭУ. – 2015. – № 1(60). – С. 44–48.

7. Голубов Б. И. *Абсолютная сходимость двойных рядов из коэффициентов Фурье-Хаара функций ограниченной p-вариации* // Изв. вузов. Матем. – 2012. – № 6. – С. 3–13.

8. Голубов Б. И., Ефимов А. В., Скворцов В. А. *Ряды и преобразования Уолша. Теория и применения.* – М.: Наука, 1987. – С. 344.

CONSTRUCTION OF MULTIMODULAR SPACE FROM THE GENERALIZED ORLICZ SPACES

V.I. Filippov

For previously introduced by the author multimodular spaces they are obtained theorems of completeness of special multimodular spaces.

Keywords: multimodular spaces, generalized Orlicz spaces, E_φ spaces.

УДК 517.5

БЕСКОНЕЧНОКРАТНЫЕ ТЕНЗОРНЫЕ ПРОИЗВЕДЕНИЯ И СХОДИМОСТЬ ПОЧТИ ВСЮДУ

Д.В. Фуфаев[1]

1 *fufaevdv@rambler.ru*; Московский Государственный Университет имени М.В. Ломоносова, Механико-математический факультет

Представлены результаты о суммировании рядов Фурье на бесконечномерном торе, а также предложено обобщение для случая абстрактных пространств с мерой.

Ключевые слова: ряды Фурье, тензорное произведение, сходимость почти всюду.

Бесконечномерным тором $\mathbb{T}^\infty$ называется декартово произведение счетного числа одномерных торов $\mathbb{T}$. На $\mathbb{T}^\infty$ рассматривается система функций, называемая системой Йессена: $\theta_{n_1,\dots,n_p}(x) = \prod_{r=1}^{p} e^{2\pi i n_r x_r}$, где $p \in \mathbb{N}$, $n_r \in \mathbb{Z}$, $x = (x_1,\dots,x_p,\dots) \in \mathbb{T}^\infty$, обобщающая тригонометрическую систему на счетное число переменных. Рассмотрим частичные суммы ряда Фурье функции $f \in L(\mathbb{T}^\infty)$ по этой системе, представимые в виде $S_{p,n_1\dots,n_p}(x) = \sum_{k_1=-n_1}^{n_1} \cdots \sum_{k_p=-n_p}^{n_p} c_{k_1,\dots,k_p} e^{2\pi i(k_1x_1+\dots+k_px_p)}$. Через $\sigma_{p,n_1\dots,n_p}(x)$ обозначим средние арифметические частичных сумм этого ряда, которые назовем средними Фейера. Скажем, что они сходятся в усиленном смысле, если для каждого $p \in \mathbb{N}$ сходятся (как кратные ряды) к σ_p ряды $\sigma_{p,n_1\dots,n_p}$ и существует конечный предел их сумм: $\lim_{p\to\infty} \sigma_p$.

Пусть $\mathbb{T}^\infty = \prod_{l=1}^{D} \mathbb{T}^{M_l}$, где $D, M_l \in \mathbb{N} \cup \{\infty\}$. Обозначим через P^l проектор на соответствующее подпространство координат.

Назовем мультииндекс $\mathbf{n} = (n_1,\dots,n_p)$ возрастающим ограниченно, если $\max_{1\le i,j\le p} \frac{n_i}{n_j} \le L < \infty$, $\min_{1\le i\le p} n_i \to \infty$, и возрастающим D-ограниченно, если все $P^l(\mathbf{n})$, $l = 1,\dots,D$, возрастают ограниченно. D-ограничнность в случае счетного числа переменных понимается как D-ограничнная сходимость рядов $\sigma_{p,n_1\dots,n_p}$ для каждого $p \in \mathbb{N}$.

Теорема. *Пусть* $f \in \bigcap_{l=0}^{D-1} L(\log^+ L)^r(\mathbb{T}^\infty)$. *Тогда средние Фейера функции* f *сходятся* D*-ограниченно в усиленном смысле к* f *почти всюду на* $\mathbb{T}^\infty$.

При $D = 1$ получаем ограниченную сходимость (обобщение сходимости по кубам), при $D = \infty$ — вариант сходимости по Прингсхейму (по прямоугольникам).

Естественным будет обобщить эти результаты для случая абстрактных пространств. Пусть (X^k, μ^k), $k \in \mathbb{N}$ — пространства с мерой, причем $\mu^k(X^k) = 1$.

Пусть теперь для каждого $k \in \mathbb{N}$ задана последовательность операторов $\{T^k_{n^k}\}$, переводящая $L^1(X^k, \mu^k)$ в себя, причем в каждой последовательности есть “нулевой” тривиальный оператор интегрирования: $T^k_{0^k} f = I_{X^k}(f) = \int_{X^k} f(x)\, d\mu^k(x)$ для любой

функции $f \in L^1(X^k, \mu^k)$. От разрозненных пространств функций и операторов на них нам надо перейти к функциям, заданным на произведении пространств.

Пусть $f^1 \in L^1(X^1, \mu^1)$, $f^2 \in L^1(X^2, \mu^2)$, тогда их тензорным произведением называется функция $f^1 \otimes f^2 \in L^1(X^1 \times X^2, \mu^1 \otimes \mu^2)$, определяемая по формуле $f^1 \otimes f^2(x_1, x_2) = f^1(x_1) f^2(x_2)$, где $\mu^1 \otimes \mu^2$ — это произведение мер μ^1 и μ^2. Такие функции называются элементарными тензорами. Алгебраическим тензорным произведением $L^1(X^1, \mu^1)$ и $L^1(X^2, \mu^2)$ называется пространство линейных комбинаций элементарных тензоров и обозначается $L^1(X^1, \mu^1) \otimes L^1(X^2, \mu^2)$. Проективным тензорным произведением, обозначаемым $L^1(X^1, \mu^1) \hat{\otimes} L^1(X^2, \mu^2)$, называется пополнение алгебраического по так называемой проективной норме ([1], 0.3.28), оно изометрически изоморфно $L^1(X^1 \times X^2, \mu^1 \otimes \mu^2)$ ([1], следствие 0.3.36).

Далее, если непрерывные линейные операторы T^i переводят $L^1(X^i, \mu^i)$ в себя, $i = 1, 2$, то существует единственный непрерывный линейный оператор $T^1 \hat{\otimes} T^2$, называемый тензорным произведением данных операторов, переводящий $L^1(X^1, \mu^1) \hat{\otimes} L^1(X^2, \mu^2)$ в себя, такой, что на элементарных тензорах он действует по формуле: $T^1 \hat{\otimes} T^2[f \cdot g](x, y) = T^1 f(x) \cdot T^2 g(y)$ ([1], теорема 0.3.40).

Будем считать, что тензорное произведение бесконечного числа тривиальных операторов — тривиальный оператор, то есть, что $\hat{\bigotimes\limits_{k \geq j}} T^k_{0^k} = I_{\prod\limits_{k \geq j} X^k}$ для любого $j \in \mathbb{N}$. Тогда мы можем определить бесконечное произведение операторов, лишь конечное число из которых отлично от тривиального: $T^1_{n^1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} T^p_{n^p} \hat{\otimes} T^{p+1}_{0^{p+1}} \hat{\otimes} \cdots = T^1_{n^1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} T^p_{n^p} \hat{\otimes} I_{\prod\limits_{k \geq p+1} X^k}$ для любого $p \in \mathbb{N}$. Сходимость $\hat{\bigotimes\limits_{1 \leq k \leq \infty}} T^k_{n^k} f$ к f понимается как сходимость $T^1_{n^1} \hat{\otimes} \ldots \hat{\otimes} T^p_{n^p} \hat{\otimes} I_{\prod\limits_{k \geq p+1} X^k}$ к f_p при $\min\limits_{k=1,\ldots,p} n^k \to \infty$ для каждого $p \in \mathbb{N}$ и сходимость f_p к f при $p \to \infty$.

Теорема. *Пусть (X^k, μ^k), $k \in \mathbb{N}$ — пространства с мерой, $\mu_k(X^k) = 1$, для каждого $k \in \mathbb{N}$ задана последовательность операторов $\{T^k_{n^k}\}$, переводящая $L^1(X^k, \mu^k)$ в себя, каждая из которых имеет "нулевой" элемент, тогда*

а) если для любого $p \in \mathbb{N}$ и любой функции $f \in L^1\left(\prod\limits_{k=1}^{p} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{p} \mu^k\right)$ выполнено $\hat{\bigotimes\limits_{1 \leq k \leq p}} T^k_{n^k} f \to f$ при $\min\limits_{k=1,\ldots,p} n^k \to \infty$ $\bigotimes\limits_{k=1}^{p} \mu^k$-почти всюду, то для любой функции $f \in L^1\left(\prod\limits_{k=1}^{\infty} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k\right)$ верно, что $\hat{\bigotimes\limits_{1 \leq k \leq \infty}} T^k_{n^k} f$ сходится $\bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k$-почти всюду к f;

б) если для любого $p \in \mathbb{N}$ и любой функции $f \in L(\ln^+ L)^{p-1}\left(\prod\limits_{k=1}^{p} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{p} \mu^k\right)$ выполнено $\hat{\bigotimes\limits_{1 \leq k \leq p}} T^k_{n^k} f \to f$ при $\min\limits_{k=1,\ldots,p} n^k \to \infty$ $\bigotimes\limits_{k=1}^{p} \mu^k$-почти всюду, то для любой функции $f \in \bigcap\limits_{r=1}^{\infty} L(\ln^+ L)^r\left(\prod\limits_{k=1}^{\infty} X^k, \bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k\right)$ верно, что $\hat{\bigotimes\limits_{1 \leq k \leq \infty}} T^k_{n^k} f$ сходится к f $\bigotimes\limits_{k=1}^{\infty} \mu^k$-почти всюду.

Работа выполнена при финансовой поддержке программы Президента "Ведущие научные школы РФ" (проект 7461.2016.1).

Литература

1. Хелемский А. Я. *Банаховы и полинормированные алгебры: общая теория, представления, гомологии.* – М.: Наука, 1989. – 464 с.

INFINITE TENSOR PRODUCTS AND CONVERGENCE ALMOST EVERYWHERE

D.V. Fufaev

The results on summation of the Fourier series on the infinite-dimensional torus were presented, also the generalization for the case of abstract measure space was formulated.

Keywords: Fourier series, tensor product, convergence almost everywhere.

УДК 517.55 : 517.574 : 517.987.1

МЕРЫ ХАУСДОРФА НУЛЕВЫХ МНОЖЕСТВ ГОЛОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ С ОГРАНИЧЕНИЯМИ НА РОСТ

Б.Н. Хабибуллин[1], З.Ф. Абдуллина[2], А.П. Розит[3]

1 *khabib-bulat@mail.ru*; Башкирский государственный университет
2 *zilya-apa@mail.ru*; Башкирский государственный университет
3 *rozit@mail.ru*; Башкирский государственный университет

Пусть M — субгармоническая функция с мерой Рисса ν_M в области D из n-мерного комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}^n$, f — ненулевая голоморфная в D функция, $|f| \le \exp M$ на D и функция f обращается в нуль на множестве $Z \subset D$. Тогда ограничения на рост меры Рисса ν_M функции M вблизи границы области D влекут за собой определённые ограничения на размеры или площадь/объем множества Z. Количественная форма исследования этого явления даётся в субгармоническом обрамлении.

Ключевые слова: голоморфная функция, нулевое множество, субгармоническая функция, мера Рисса, мера Хаусдорфа.

Многомерные результаты об описании нулевых множеств голоморфных функций с ограничениями на рост их модуля вблизи границы ∂D области определения D до середины 1990-х гг. содержатся в книге [1], в статьях [2]– [4], обзорах [5, **6.5**], [6, § 6]. Так, в случае ограниченной ненулевой голоморфной функции широго известно, что объем ее нулевого множества ограничен (часть классической теорема Г. М Хенкина – Скоды), а в случае не более степенного роста ненулевой голоморфной функции того же порядка роста (часть теоремы Ш. М. Даутова – Скоды). Случай целых функций многих переменных достаточно полно освещён в [7]– [12]. Некоторые субгармонические многомерные результаты подобного типа получены относительно недавно в [13]. Для голоморфных и субгармонических функций в областях на комплексной плоскости $\mathbb{C}$ история рассматриваемой тематики достаточно детально изложена в [14]. Мы рассматриваем лишь «лёгкую часть» задачи об описании нулевых (под)множеств голоморфных функций с заданной мажорантой: необходимые условия в виде ограничений на рост «площади–объёма» нулевого множества вблизи границы области определения. Но даётся она в самой общей форме: для произвольных областей и очень широкого круга условий как по отношению ограничений на рост

модуля голоморфных функций, так и разнообразных интегральных ограничений на их нулевые множества.

Пусть D — собственная подобласть в $\mathbb{C}^n_\infty := \mathbb{C}^n \cup \{\infty\}$ одноточечная компактификация Александрова n-мерного комплексного евклидова пространства $\mathbb{C}^n$. Для расширенной числовой функции v (со значениями в $[-\infty, +\infty]$), определённой вблизи границы ∂D запись $\lim\limits_{\partial D} v = 0$ будет означать, что $\lim\limits_{D\ni z\to\partial D} v(z) = 0$. Пишем $S \Subset D$, если замыкание $\operatorname{clos} S$ множества S в $\mathbb{C}^n_\infty$ содержится в D. Для меры μ и функции v вблизи ∂D будем писать

$$\int^{\partial D} v\,\mathrm{d}\mu \quad \text{для} \quad \int_{D\setminus S} v\,\mathrm{d}\mu \quad \text{с каким-либо борелевским подмножеством} \quad S \Subset D,$$

когда важна лишь конечность (сходимость) интеграла, — аналог распространённой записи несобственных интегралов $\int^\infty$ без указания нижнего предела интегрирования.

Через $\operatorname{sbh}(D)$ и $\operatorname{Hol}(D)$ обозначаем классы соответственно субгармонических и голоморфных в D функций; $\operatorname{sbh}^+(D)$ — подкласс положительных (≥ 0) функций в $\operatorname{sbh}(D)$; Zero_f — дивизор нулей функции $f \in \operatorname{Hol}(D)$, т. е. в определённом смысле функция кратности корней функции f в области D.

Аналог основных финитных положительных функций теории распределений Л. Шварца, или обобщённых функций, через которые определяется отношение порядка на распределениях или мерах/зарядах, здесь предоставляет

Определение. *Субгармоническую функцию $v \ge 0$, определённую вблизи ∂D,* при $\lim\limits_{\partial D} v = 0$ называем *тестовой функцией для D вблизи ∂D,* а класс всех таких функций обозначаем через $\operatorname{sbh}^+_0(\partial D)$. Для $b \in [0, +\infty)$ и замкнутого в $\mathbb{C}^n_\infty$ подмножества $S \Subset D$, т. е. при $S = \operatorname{clos} S \subset D$, вводим подкласс тестовых функций

$$\operatorname{sbh}^+_0(D\setminus S; \le b) := \Big\{ v \in \operatorname{sbh}^+(D\setminus S) \colon \sup_{D\setminus S} v \le b,\ \lim_{\partial D} v = 0 \Big\}.$$

Теорема 1 (индивидуальная). *Пусть $-\infty \not\equiv M \in \operatorname{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν_M и для расширенной числовой функции w вблизи ∂D имеем $\int^{\partial D} w\,\mathrm{d}\nu_M < +\infty$, $0 \ne f \in \operatorname{Hol}(D)$ и $|f| \le \exp M$ на $D \subset \mathbb{C}^n_\infty$. Тогда для любой функции $v \in \operatorname{sbh}^+_0(\partial D)$ при ограничении $v \le w$ на каком-либо борелевском множестве, на котором сосредоточена мера ν_M вблизи ∂D, имеет место соотношение $\int^{\partial D} v\,\mathrm{Z}\,\mathrm{d}\sigma_{2n-2} < +\infty$ для любого поддивизора $\mathrm{Z} \le \operatorname{Zero}_f$.*

Всюду далее предполагаем, что $\varnothing \ne \operatorname{int} S \subset S = \operatorname{clos} S \subset D$, где $\operatorname{int} S$ — внутренность множества S в $\mathbb{C}^n_\infty$. Для функции

$$w \colon D\setminus S \to [0, +\infty], \quad b := \sup_{z\in\partial S} \limsup_{D\setminus S\ni z'\to z} w(z') < +\infty \tag{1}$$

наибольшую миноранту относительно конуса $\operatorname{sbh}_0(D\setminus S) := \big\{ v \in \operatorname{sbh}(D\setminus S) \colon \lim\limits_{\partial D} v = 0 \big\}$ определим как функцию $\operatorname{gm} w := \sup\{ v \in \operatorname{sbh}_0(D\setminus S) \colon v \le w \text{ на } D\setminus S \}$. При этом через $\operatorname{gm}^* w$ обозначаем *полунепрерывную сверху регуляризацию* функции $\operatorname{gm} w \colon D\setminus S \to [0, +\infty]$.

Теорема 2 (индивидуальная). *Пусть $M \in \mathrm{sbh}(D)$ с мерой Рисса ν_M, $M \not\equiv -\infty$, w — полунепрерывная сверху функция из* (1)*, удовлетворяющая одному из двух условий:*

$$\text{(i)}\ \lim_{\partial D} w = 0 \quad \textit{или} \quad \text{(ii)}\ D \textit{ — регулярная область (для задачи Дирихле).}$$

Пусть также $\int_{D\setminus S} w\,\mathrm{d}\nu_M < +\infty$. Если $0 \neq f \in \mathrm{Hol}(D)$ и $|f| \le \exp M$ на D, то для любого поддивизора $\mathrm{Z} \le \mathrm{Zero}_f$ выполнено соотношение $\int_{\mathrm{Z}\setminus S} (\mathrm{gm}^* w)\,\mathrm{Z}\,\mathrm{d}\sigma_{2n-2} < +\infty$.

При исследовании нулевых множеств в «жестких» весовых классах голоморфных функций с более или менее явными мажорантами M возникала необходимость и в равномерных оценках сверху интегралов от функций тестового характера из некоторого класса по нулевому множеству голоморфной функции. Наиболее рельефно такой подход реализован для равномерных пространств Бергмана и им подобных в единичном круге [17, гл. 4], [18, §§ 5,6] и в единичном шаре [3]. Подобные оценки в общей ситуации даёт

Теорема 3 (равномерная). *Пусть $z_0 \in \mathrm{int} S \neq \varnothing$, $M(z_0) \neq -\infty$ для $M \in \mathrm{sbh}(D)$ с зарядом Рисса ν_M, $b \in [0, +\infty)$. Тогда найдутся постоянные $C > 0$, не зависящая от M, и $\overline{C}_M$, с которыми для любой ненулевой функции $f \in \mathrm{Hol}(D)$ с ограничением $|f| \le \exp M$ на D, а также для любой тестовой функции $v \in \mathrm{sbh}_0^+(D \setminus S; \le b)$ выполнено неравенство*

$$\int_{D\setminus S} v\,\mathrm{Zero}_f\,\mathrm{d}\sigma_{2n-2} \le \int_{D\setminus S} v\,\mathrm{d}\nu_M - C\log\bigl|f(z_0)\bigr| + C\overline{C}_M.$$

Теоремы 1–3 выводятся из одной общей основной теоремы, формулируемой для δ-субгармонической мажоранты M, т. е. разности субгармонических функций. Соответствующая статья с анонсированными здесь результатами направлена в печать в 2017 г.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 16–01–00024).

Литература

1. Гриффитс Ф., Кинг Дж. *Теория Неванлинны и голоморфные отображения алгебраических многообразий.* – Математика. Новое в зарубежной науке. – Т. 1. – М.: Мир, 1976. – 96 с.

2. Даутов Ш. А., Хенкин Г. М. *Нули голоморфных функций конечного порядка и весовые оценки решений $\bar\partial$-уравнений* // Матем. сб. – 1978. – С. 163–174.

3. Bruna J., Massaneda X. *Zero sets of holomorphic functions in the unit ball with slow growth* // J. Anal. Math. – 1995. – V. 66. – P. 217–252.

4. Хабибуллин Б. Н. *Двойственное представление суперлинейных функционалов и его применения в теории функций. II* // Изв. РАН. Сер. матем. – 2001. – Т. 65. – № 5. – С. 167–190.

5. Хенкин Г. М. *Метод интегральных представлений в комплексном анализе* // Комплексный анализ – многие переменные – 1. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 7. – С. 23–124.

6. Шведенко С. В. *Классы Харди и связанные с ними пространства аналитических функций в единичном круге, поликруге и шаре* // Итоги науки и техн. Сер. Мат. анал. – М.: ВИНИТИ, 1985. – Т. 23. – С. 3–124.

7. Ронкин Л. И. *Элементы теории аналитических функций многих переменных.* – Киев: Наукова думка, 1977.

8. Ронкин Л. И. *Целые функции* // Комплексный анализ – многие переменные – 3. Итоги науки и техн. Сер. Соврем. пробл. мат. Фундам. направления. – М.: ВИНИТИ, 1986. – Т. 9. – С. 5–36.

9. Лелон П., Груман Л. *Целые функции многих переменных.* – М.: Мир, 1989.

10. Ronkin L. I. *Functions of Completely Regular Growth.* – Dordrecht/Boston/London: Kluver Acad. Publ. Math. and Its Appl. (Soviet Series), 1992.

11. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем целых функций в пространствах голоморфных функций* // Матем. заметки. – 1999. – Т. 66. – № 4. – С. 603–616.

12. Хабибуллин Б. Н. *Полнота систем экспонент и множества единственности.* – Уфа: РИЦ БашГУ, издание четвёртое (1-ое — 2006; 2-ое — 2008; 3-е — 2011), дополненное. –2012. – 192 с.

13. Фаворов С. Ю., Радченко Л. Д. *Мера Рисса функций, субгармонических во внешности компакта* // Математичні Студії. – 2013. – Т. 40. – № 2. – С. 149–158.

14. Хабибуллин Б. Н., Таминдарова Н. Р. *Распределение нулей и масс голоморфных и субгармонических функций. I. Условия типа Адамара и Бляшке* // Матем. сб. – 2017 (направлено в печать). – 71 с. – http://arxiv.org/pdf/1512.04610v2.pdf [math.CV]

15. Khabibullin B., Tamindarova N. *Distribution of Zeros for Holomorphic Functions: Hadamard- and Blaschke-type Conditions* / Abstracts of International Workshop on "Non-harmonic Analysis and Differential Operators". – Baku, Azerbaijan: Institute of Mathematics and Mechanics of Azerbaijan National Academy of Sciences, 2016. – P. 63.

16. Khabibullin B., Tamindarova N. *Uniqueness Theorems for Subharmonic and Holomorphic Functions of Several Variables on a Domain* // Azerbaijan Journal of Mathematics. – 2017. – V. 7 – № 1. – P. 70–79.

17. Hedenmalm H., Korenblum B., Zhu K. *Theory of Bergman spaces.* – Graduate Texts in Mathematics. – V. 199. – N.-Y.: Springer-Verlag, 2000.

18. Кудашева Е. Г., Хабибуллин Б. Н. *Распределение нулей голоморфных функций умеренного роста в единичном круге и представление в нем мероморфных функций* // Матем. сб. – 2009. – Т. 200. – № 9. – С. 95–126.

THE HAUSDORFF MEASURE OF ZERO SETS OF HOLOMORPHIC FUNCTIONS WITH RESTRICTIONS ON GROWTH

B.N. Khabibullin, Z.F. Abdullina, A.P. Rozit

Let M be a subharmonic function with the Riesz measure ν_M on a domain D of the n-dimensional complex Euclidean space $\mathbb{C}^n$, f a non-zero holomorphic in D. Suppose that $|f| \le \exp M$ on D and the function f vanishes on the set $Z \subset D$. Then restrictions on the growth of the Riesz measure ν_M of the function M near the boundary of the domain D entail certain restrictions on dimensions or area/volume of the set Z. A quantitative form of research of this phenomenon is given in the subharmonic frame.

Keywords: holomorphic function, zero set, subharmonic function, Riesz measure, Hausdorff measure.

УДК 517.9

НЕСИНГУЛЯРНЫЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ НА УЛЬТРАПРОИЗВЕДЕНИЯХ АЛГЕБР ФОН НЕЙМАНА

С.Г. Халиуллин[1]

1 *samig.haliullin@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Вводится понятие эргодического относительно нормального состояния действия группы на абелеву алгебру фон Неймана и изучаются его свойства. Также рассматривается ультрапроизведение таких преобразований по А. Оспеапи.

Ключевые слова: ультрапроизведения, алгебра фон Неймана, несингулярные преобразования.

Введём вначале необходимые определения и предварительные результаты.

Определение 1. ([3]) *Пусть $\mathscr{M}$ – алгебра фон Неймана, φ и ψ – два нормальных состояния на $\mathscr{M}$. Состояния φ и ψ называются эквивалентными, если $\varphi(x^*x) = 0 \Leftrightarrow \psi(x^*x) = 0$, $x \in \mathscr{M}$.*

Заметим, что определение эквивалентности нормальных состояний на алгебре фон Неймана достаточно задать на проекторах (см., напр., [2]).

Пусть далее G – сепарабельная локально компактная группа, $(\Omega, \mathscr{F}, \mu)$ – вероятностное пространство.

Определение 2. ([7]) *Действием группы G на пространстве (Ω, μ) называется измеримое отображение $T : (s, \omega) \in G \times \Omega \to T_s(\omega) \in \Omega$ такое, что*
1. для каждого фиксированного $s \in G$ отображение $\omega \to T_s(\omega)$ является несингулярной биекцией Ω;
2. $T_s(T_t(\omega)) = T_{st}(\omega)$, $s, t \in G$, $\omega \in \Omega$;
3. $T_e(\omega) = \omega$, где e – единица группы G.

Пространство (Ω, μ) называется при этом G-измеримым пространством и обозначается (G, Ω, μ).

Определение 3. *Говорят, что действие T группы G на пространстве (Ω, μ) квазиинвариантно (или несингулярно), если для $E \in \mathscr{F}$ $\mu(E) = 0 \Leftrightarrow \mu(T_s(E)) = 0$ для любого $s \in G$; свободно (по отношению к μ), если для любого компактного подмножества $K \subseteq G$ такого, что $e \notin K$ и любого $E \in \mathscr{F}$, $\mu(E) > 0$, существует $F \subset E$, $\mu(F) > 0$, и $\mu(F \bigcap T_s(F)) = 0$ для всех $s \in G$. Действие T называется эргодическим (по отношению к μ), если условие $\mu(E \Delta T_s(E)) = 0$ для всех $s \in G$ влечёт $\mu(E) = 0$ либо $\mu(\Omega \setminus E) = 0$.*

С пространством (G, Ω, μ) свяжем действие α группы G на абелевой алгебре фон Неймана $\mathscr{A} = L^\infty(\Omega)$, заданное следующим образом:

$$\alpha_s(f)(\omega) = f(T_s^{-1}\omega),\ s \in G,\ f \in \mathscr{A},\ \omega \in \Omega.$$

Определение 4. *Зададим на алгебре $\mathscr{A} = L^\infty(\Omega)$ нормальное состояние φ. Скажем, что действие α несингулярно по отношению к состоянию φ, если для $f \in \mathscr{A}$ $\varphi(f) = 0 \Leftrightarrow \varphi(\alpha_s(f)) = 0$ для любого $s \in G$; свободно, если для любого компактного подмножества*

$K \subseteq G$ такого, что $e \notin K$ и любого ненулевого проектора $g \in \mathscr{A}$ существует ненулевой проектор $f \in \mathscr{A}$, $f \leq g$, и $\varphi(f\alpha_s(f)) = 0$ для всех $s \in G$. Действие α группы G на алгебре $\mathscr{A}$ назовём эргодичным по отношению к состоянию φ, если для проектора f условие $\alpha_s(f) = f$ для всех $s \in G$ влечёт $\varphi(f) = 0$ либо $\varphi(\mathbf{1} - f) = 0$.

Теорема 1. (Теорема дихотомии) *Пусть на алгебре $\mathscr{A} = L^\infty(\Omega)$ заданы два нормальных состояния φ и ψ, при этом действие α группы G на алгебре $\mathscr{A}$ является эргодичным по отношению к этим двум состояниям. Тогда состояния φ и ψ либо эквивалентны, либо сингулярны.*

Рассмотрим далее ультрапроизведения G-измеримых пространств. Начнём с ультрапризведений банаховых пространств.

Определение 5. ([5]) *Рассмотрим последовательность $(H_n, \|\cdot\|)_{n\in\mathbb{N}}$ банаховых пространств, и пусть $\mathscr{U}$ – нетривиальный ультрафильтр в множестве $\mathbb{N}$ натуральных чисел. Ультрапроизведение $(H_n)_{\mathscr{U}}$ есть фактор-пространство $l^\infty(\mathbb{N}, H_n)/\mathscr{N}_{\mathscr{U}}$, где*

$$l^\infty(\mathbb{N}, H_n) = \{(h_n), h_n \in H_n : \sup_n \|h_n\| < \infty\}, \quad \mathscr{N}_{\mathscr{U}} = \{(h_n) \in l^\infty(\mathbb{N}, H_n) : \lim_{\mathscr{U}} \|h_n\| = 0\}.$$

Обозначим элементы пространства $(H_n)_{\mathscr{U}}$ через $(h_n)_{\mathscr{U}}$. Тогда соотношение $\|(h_n)_{\mathscr{U}}\| = \lim_{\mathscr{U}} \|h_n\|$ определяет норму на $(H_n)_{\mathscr{U}}$, и в этом случае $((H_n)_{\mathscr{U}}, \|\cdot\|)$ становится банаховым пространством.

Пусть далее (x_n) — последовательность линейных ограниченных операторов, заданных на соответствующих банаховых пространствах H_n со свойством $\sup_n \|x_n\| < \infty$. Определим на $(H_n)_{\mathscr{U}}$ оператор ультрапроизведения, полагая $(x_n)_{\mathscr{U}}[(h_n)_{\mathscr{U}}] = (x_n(h_n))_{\mathscr{U}}$. При таком определении оператор $(x_n)_{\mathscr{U}}$ является линейным и ограниченным и $\|(x_n)_{\mathscr{U}}\| = \lim_{\mathscr{U}} \|x_n\|$.

Хорошо известно ([5]), что классы банаховых алгебр и C^*-алгебр устойчивы относительно такого ультрапроизведения. Действительно, мультипликативная и инволютивная структуры ультрапроизведения задаются вполне естественно:

$$(x_n)_{\mathscr{U}} \cdot (y_n)_{\mathscr{U}} = (x_n \cdot y_n)_{\mathscr{U}}, \ ((x_n)_{\mathscr{U}})^* = ((x_n)^*)_{\mathscr{U}}.$$

Чтобы получить содержательную теорию ультрапроизведения алгебр фон Неймана, конструкцию ультрапроизведения необходимо ещё немного подправить.

Определение 6. ([1]) *Пусть $(\mathscr{M}_n)$ — последовательность σ-конечных алгебр фон Неймана, φ_n — точное нормальное состояние на $\mathscr{M}_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Положим*

$$l^\infty(\mathbb{N}, \mathscr{M}_n) = \{(x_n), x_n \in \mathscr{M}_n : \sup_n \|x_n\| < \infty\},$$
$$\mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n) = \{(x_n) \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathscr{M}_n) : \lim_{\mathscr{U}} \varphi_n(x_n^* x_n + x_n x_n^*)^{\frac{1}{2}} = 0\},$$
$$\mathscr{M}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n) = \{(x_n) \in l^\infty(\mathbb{N}, \mathscr{M}_n) : (x_n)\mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n) \subset \mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n), \mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n)(x_n) \subset \mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n)\}.$$

Ультрапроизведением последовательности алгебр фон Неймана с точным нормальными состояниями называется фактор-пространство $(\mathscr{M}_n, \varphi_n)_{\mathscr{U}} = \mathscr{M}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n)/\mathscr{N}_{\mathscr{U}}(\mathscr{M}_n, \varphi_n)$. Наконец, определим состояние на $(\mathscr{M}_n, \varphi_n)_{\mathscr{U}}$: $\varphi_{\mathscr{U}}[(x_n)_{\mathscr{U}}] = \lim_{\mathscr{U}} \varphi_n(x_n)$.

Известно ([1]), что $(\mathscr{M}_n, \varphi_n)_{\mathscr{U}}$ является алгеброй фон Неймана с точным нормальным состоянием $\varphi_{\mathscr{U}}$.

Нам будет необходимо следующее понятие, введенное автором в [4]. Рассмотрим последовательность σ-конечных алгебр фон Неймана $\mathscr{M}_n$. Пусть φ_n и ψ_n – точные нормальные состояния на $\mathscr{M}_n,\ n \in \mathbb{N}$.

Определение 7. Последовательности (φ_n) и (ψ_n) называются взаимно контигуальными, если

$$\psi_n(x_n^* x_n) \to 0 \quad \Leftrightarrow \quad \varphi_n(x_n^* x_n) \to 0,\ x_n \in \mathscr{M}_n, \quad (n \to \infty).$$

Теорема 2. ([4]) *Пусть $(\mathscr{M}_n)$ – последовательность σ-конечных алгебр фон Неймана, φ_n и ψ_n – точные нормальные состояния на $\mathscr{M}_n,\ n \in \mathbb{N}$. Тогда последовательности (φ_n) и (ψ_n) взаимно контигуальны тогда и только тогда, если состояния $(\varphi_n)_{\mathscr{U}}$ и $(\psi_n)_{\mathscr{U}}$ эквивалентны для любого нетривиального ультрафильтра $\mathscr{U}$ на $\mathbb{N}$.*

Рассмотрим ультрапроизведение последовательности абелевых алгебр фон Неймана $(\mathscr{A}_n)_{n\in\mathbb{N}}$ с заданными на $\mathscr{A}_n$ преобразованиями $\alpha_n^{s_n}$, $s_n \in G_n$ и точными нормальными состояниями φ_n. Положим $\alpha^s_{\mathscr{U}}((f_n)_{\mathscr{U}}) = (\alpha_n^{s_n}(f_n))_{\mathscr{U}}$.

Теорема 3. *В приведённых выше предположениях преобразование $\alpha^s_{\mathscr{U}}$ будет несингулярным и действие $\alpha_{\mathscr{U}}$ будет свободным, если последовательность (s_n), $s_n \in G_n$, выбирается таким образом, чтобы для проектора $f_n \in \mathscr{A}_n$, $\varphi_n(f_n) \to 0 \Leftrightarrow \varphi_n(\alpha_n^{s_n}(f_n)) \to 0$, $(n \to \infty)$.*

Литература

1. Ando H., Haagerup U. *Ultraproducts of von Neumann algebras* // Journal of Functional Analysis. – 2014. – V. 266. – № 12. – P. 6842–6913.

2. Chetcutti E., Hamhalter J. *Vitali-Hahn-Saks Theorem For Vector Measures on Operator Algebras* // The Quarterly Journal of Mathematics. – 2006. – V. 57. – P. 479-493.

3. Gudder S.P. *A Radon-Nikodym theorem for $*$-algebras* // Pacific Journal of Mathematics. – 1979. – V. 80. – № 1. – P. 141–149.

4. Haliullin S. *Contiguity and Entire Separability of States on von Neumann Algebras* // Int. J. Theor. Phys. – 2017. (в печати).

5. Heinrich S. *Ultraproducts in Banach space theory* // J. fur die reine und angewandte Math. – 1980. –V. 313, P. 72–104.

6. Ocneanu A. *Actions of discrete amenable groups on von Neumann algebras* // Lect. Notes in Math. – V. 1138. – New York / Berlin: Springer-Verlag, 1985.

7. Takesaki M. *Theory of Operator Algebras III*. – Berlin – Heidelberg – New York: Springer-Verlag, 2003. – 548 p.

NONSINGULAR TRANSFORMATIONS ON ULTRAPRODUCTS OF VON NEUMANN ALGEBRAS

S.G. Haliullin

We introduce the concept of ergodic action with respect to a normal state of group on an abelian von Neumann algebra and its properties are studied. Also ultraproduct of this actions is considered; here we apply the A. Ocneanu ultraproduct.

Keywords: ultraproducts, von Neumann algebras, nonsingular transformations.

УДК 517.518.68

ОБ АППРОКСИМАЦИИ ПОЧТИ-ПЕРИОДИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ В РАВНОМЕРНОЙ МЕТРИКЕ

Ю.Х. Хасанов[1]

1 *yukhas60@mail.ru*; Российско–Таджикский (Славянский) университет

В работе исследуется вопрос о приближении почти–периодических функций целыми функциями конечной степени с произвольным спектром в равномерной метрике. Также устанавливаются необходимые и достаточные условия принадлежности равномерных почти–периодических функций классу целых функций.

Ключевые слова: почти-периодические функции, ряды Фурье, спектр функции, целые функции конечной степени, тригонометрические полиномы, наилучшее равномерное приближение.

Определение 1 [1]. *Непрерывная на всей вещественной оси функция $f(x)$ называется равномерной почти–периодической, если для каждого $\varepsilon > 0$ можно указать такое положительное число $l = l(\varepsilon)$, что в каждом интервале длины l найдется хотя бы одно число τ, для которого выполняется неравенство*

$$|f(x+\tau) - f(x)| < \varepsilon \ \ (-\infty < x < \infty).$$

Пространство равномерных почти–периодических функций, его обозначим через **B**, есть замыкание множества тригонометрических полиномов

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k \exp(i\lambda_k x),$$

где A_k — коэффициенты Фурье, λ_k — показатели Фурье (спектр функции $f(x) \in \mathbf{B}$), с нормой

$$||f(x)||_{\mathbf{B}} = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x)|.$$

Рассмотрим класс функций $f(x) \in \mathbf{B}$ с произвольным спектром $\{\lambda_k\}$, т.е. функций, имеющих ряд Фурье вида

$$f(x) \sim \sum_{k=-\infty}^{\infty} A_k \exp(i\lambda_k x),$$

где

$$A_k = \lim_{T\to\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{T} f(x) \exp(-i\lambda_k x)\, dx.$$

Известно [2], что для класса функций $f(x) \in \mathbf{B}$ величина A_k может отличаться от нуля не более чем на счетном множестве значений спектра λ. Именно это обстоятельство делает возможным распространение понятия ряда Фурье на область почти–периодических функций.

Через $\mathbf{G}_\sigma$ $(\sigma > 0)$ обозначим класс ограниченных на всей действительной оси целых функций степени не выше σ. Рассмотрим следующий важный вопрос. Пусть

дана функция $f(x) \in \mathbf{B}$. Каковы необходимые и достаточные условия для принадлежности этой функции к классу $\mathbf{G}_\sigma$. Для решения этого вопроса приведем утверждение, которое ранее использовано автором в работе [3].

Теорема 1. *Для того чтобы равномерная почти–периодическая функция $f(x)$ принадлежала классу $\boldsymbol{G}_\sigma$, необходимо и достаточно, чтобы ее показатели Фурье $\Lambda\{\lambda_k\}$ удовлетворяли неравенству*

$$|\lambda_k| \le \sigma.$$

С.Н. Бернштейн [4] установил, что среди функций из класса $\mathbf{G}_\sigma$, осуществляющих на всей действительной оси наилучшее равномерное приближение 2π–периодической функции $f(x)$ найдется тригонометрический полином степени не выше σ. Доказательство основывается на том, что, если $g_\sigma(f;x) \in G_\sigma$ и

$$\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - g_\sigma(f;x)| = A_\sigma(f), \tag{1}$$

где $A_\sigma(f)$ — наилучшее равномерное приближение порядка σ 2π-периодической, периода 2π, функции посредством функций из класса $\mathbf{G}_\sigma$, то равномерно по всем $x(-\infty < x < \infty)$ имеют места следующие оценки:

$$|f(x) - \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} g_\sigma(x+2k\pi)| \le A_\sigma(f), \tag{2}$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{2n+1} \sum_{k=-n}^{n} \{g_\sigma(x+2k\pi+2\pi) - g_\sigma(x+2k\pi)\} = 0. \tag{3}$$

Отметим, что вышеприведенный результат С.Н. Бернштейна можно получить также, если вместо (2) и (3) использовать соотношения

$$|\Phi_n(x) - Q_{\sigma,N,n}(x)| \le A_\sigma(f),$$

где $\sigma > 0; N, n$ — любые натуральные числа,

$$\Phi_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+t) F_n(t)\, dt = \frac{1}{2\pi N} \int_{-2\pi N}^{2\pi N} f(x+t) F_n(t)\, dt,$$

$$Q_{\sigma,N,n}(x) = \frac{1}{2\pi N} \int_{-2\pi N}^{2\pi N} f(x+t) F_n(t)\, dt,\ F_n(t) = \frac{\sin^2 (n+1)\frac{t}{2}}{2(n+1)\sin^2 \frac{t}{2}},$$

и при всяком фиксированном n равномерно по $x \in (-\infty, \infty)$

$$\lim_{N\to\infty} \{Q_{\sigma,N,n}(x+2\pi) - Q_{\sigma,N,n}(x)\} = 0.$$

При проведении аналогичных исследований, в отличие от периодического случая, где условия накладываются только на гладкости функций, для $f(x) \in B$ требуются дополнительные условия и на поведения показателей Фурье (см. напр., [5] или [6]):

а) когда показатели Фурье имеют предельную точку в бесконечности, т.е.

$$|\lambda_k| < |\lambda_{k+1}|, \ \lim_{k\to\infty} |\lambda_k| = \infty;$$

б) когда показатели Фурье имеют предельную точку в нуле,

$$|\lambda_k| > |\lambda_{k+1}|, \ \lim_{k\to\infty} |\lambda_k| = 0.$$

Впервые аналог теоремы С.Н. Бернштейна для функций $f(x) \in B$ встречается в работах Е.А. Бредихиной [7]-[8]. Используя метод доказательства С.Н. Бернштейна, она установила, что если функция $f(x) \in B$ и имеет ряд Фурье

$$f(x) \sim \sum_k A_k \exp(i\lambda_k \beta x),$$

имеющий показатели Фурье с предельной точкой в бесконечности, то среди функций $g_\sigma(x) \in G_\sigma$ $(\sigma > 0)$, для которых имеет место равенство (1), найдется тригонометрический полином степени не выше σ.

Теперь с помощью теоремы 1 сформулируем основной результат данной заметки, который является также аналогом теоремы С.Н. Бернштейна для равномерных почти–периодических функций с произвольными показателями Фурье $\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$.

Теорема 2. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *и*

$$A_\sigma(f) = \sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - g_\sigma(f;x)| \ (\sigma > 0).$$

Тогда для любого $\varepsilon > 0$ *найдется конечная тригонометрическая сумма*

$$P_\sigma(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \exp(i\lambda_k x) \ (|\lambda_k| \le \sigma),$$

для которой равномерно по x *справедлива оценка*

$$|f(x) - P_\sigma(x)| \le A_\sigma(f) + \varepsilon.$$

Для полноты изложения наряду с теоремой 2 приводим следующее утверждение, когда спектр $\Lambda\{\lambda_k\}$ на любом конечном отрезке имеет конечное число предельных точек и, более того, является приводимым множеством.

Теорема 3. *Если* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *с приводимым спектром* $\Lambda\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$*, то среди функций* $g_\sigma(x) \in \boldsymbol{G}_\sigma$*, для которых справедливо равенство (1), найдется функция* $Q_\sigma(f;x) \in \boldsymbol{B}$ *с рядом Фурье*

$$\sum_{|\lambda_k|\le\sigma} A_k \exp(i\lambda_k x).$$

В заключение для равномерных почти–периодических функций попытаемся найти функцию $g(x) \in \mathbf{G}_\sigma$, которая удовлетворяет условию $A_\sigma(f) \le C\omega(f; 1/\sigma)$, где C — некоторая абсолютная константа и

$$\omega(f;\sigma) = \sup_{|x_1-x_2|\le\delta} |f(x_1) - f(x_2)|.$$

Теорема 4. *Пусть* $f(x) \in \boldsymbol{B}$ *со спектром* $\Lambda\{\lambda_k\}$ $(k = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots)$ *и*

$$f_\sigma(z) = \int_{-\infty}^{\infty} f(u)\psi_\sigma(u-z)\,du, \quad \textit{где}$$

$$\psi_\sigma(z) = \frac{1}{\pi\sigma^3} \cdot \frac{\sin^4 \frac{\sigma z}{4}}{z^4}.$$

Тогда $f(x) \in \boldsymbol{G}_\sigma$ *и* $\sup_{-\infty<x<\infty} |f(x) - f_\sigma(x)| < C\omega(f; \sigma^{-1})$, *где* C *— абсолютная константа.*

Литература

1. Бор Г. *Почти периодические функции.* – М.: ЛИБРОКОМ, 2009. – 128 с.

2. Левитан Б. М. *Почти–периодические функции.* – М.: Гостехиздат, 1953. – 396 с.

3. Тиман М. Ф., Хасанов Ю. Х. *О приближениях почти–периодических функций целыми функциями* // Известия вузов. Математика. – 2011. – № 12. – С. 64–70.

4. Бернштейн С. Н. *Собрание сочинений.* – Т. 2. – М.: Изд. АН СССР, 1954. – 627 с.

5. Хасанов Ю. Х. *Абсолютная сходимость рядов Фурье почти–периодических функций* // Матем.заметки. – 2013. – Т. 94. – № 5. – С. 745–756.

6. Хасанов Ю. Х. *Об абсолютной суммируемости рядов Фурье почти–периодических функций* // Anal.Math. –2013. – V. 39. – P. 259–270.

7. Бредихина Е. А. *К вопросу об аппроксимации почти–периодических функций* // Сиб.матем.журн. – 1964. – Т. 5. – № 4. – С. 768–773.

8. Бредихина Е. А. *К теореме С.Н.Бернштейна о наилучшем приближении непрерывных функций целыми функциями данной степени* // Известия вузов. Математика. – 1961. – № 6. – С. 3–7.

APPROXIMATION OF ALMOST PERIODIC FUNCTIONS IN UNIFORM METRIC

Yu.Kh. Khasanov

The paper is devoted to investigation of a problem of approximation of almost periodic functions by entire functions with given spectrum in uniform metric. Also necessary and sufficient conditions for belonging of uniformly almost periodic functions to the class of entire functions are obtained.

Keywords: almost periodic functions, Fourier series, spectrum to function, entire functions of finite order, trigonometric polynomial, best uniform approximation.

УДК 517.54

ПРИЛОЖЕНИЕ ЗАДАЧИ ГИЛЬБЕРТА С ЛОГАРИФМИЧЕСКИМ ВЫРОЖДЕНИЕМ ИНДЕКСА НА БЕСКОНЕЧНОСТИ К ПОСТРОЕНИЮ КОНФОРМНЫХ ОТОБРАЖЕНИЙ

Э.Н. Хасанова[1], П.Л. Шабалин[2]

1 *enkarabasheva@bk.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет
2 *pavel.shabalin@mail.ru*; Казанский государственный архитектурно-строительный университет

В работе проведено построение структурной формулы специального класса отображений полуплоскости на полигональные области со счетным множеством вершин и неограниченным вращением касательной. Класс отображений выделен ограничением на плотность распределения последовательности углов доворота касательной к границе образа полуплоскости при переходе через вершину полигона. Для этого класса доказан критерий существования однолистных отображений, представляемых данной структурной формулой.

Ключевые слова: конформные отображения, однолистность, краевая задача Гильберта.

В плоскости комплексного переменного $\zeta = \xi + i\eta$, обозначим $D = \{\zeta, \mathrm{Im}\zeta > 0\}$, $L = \partial D$, L_+, L_- – положительная и отрицательная полуоси. Рассматриваем обобщение одной обратной задачи М.А. Лаврентьева о построении конформного отображения полуплоскости D на многоугольник с заданными углами при неизвестных вершинах на случай отображения на полигональную область со счетным множеством углов и бесконечным вращением касательной при обходе границы области.

Заданы прообразы $\{t_{-k}\} \subset L_-$, $\{t_k\} \subset L_+$, $k = \overline{1,\infty}$, неизвестных вершин A_{-k}, A_k, полигона l состоящего из двух ломаных l_+, l_- с общими концами A_0 и A_∞, ограничивающего область D_z комплексной плоскости $z = x + iy$, расположенную, возможно, на римановой поверхности. Точки t_{-k}, t_k удовлетворяют условиям

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{t_k} < \infty, \quad \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{|t_{-k}|} < \infty. \tag{1}$$

Также считаем заданными и внутренние углы $\alpha_{-k}\pi$ и $\alpha_k\pi$ при вершинах A_{-k}è A_k соответственно, причем $0 < \alpha_k < 1$, $1 < \alpha_{-k} < 2$, $k = \overline{1,\infty}$. Последние, впрочем, можно варьировать, оставаясь в классе отображений, определяемых следующими ограничениями на параметры области D_z. Кроме условия (1) будем считать выполненными неравенства

$$|n_+^*(\xi) - \Delta \ln^\alpha \xi| < C, \quad |n_-^*(\xi) - \Delta \ln^\alpha \xi| < C \tag{2}$$

с положительными постоянными Δ, α, C. Здесь

$$n_-^*(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < -t_{-1}, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \kappa_{-j}, & -t_{-k} < \xi < -t_{-k-1}, \end{cases} \qquad n_+^*(\xi) = \begin{cases} 0, & 0 < \xi < t_1, \\ \sum\limits_{j=1}^{k} \kappa_j, & t_k < \xi < t_{k+1}, \end{cases}$$

$$\kappa_k = 1 - \alpha_k, \quad \kappa_{-k} = \alpha_{-k} - 1, \quad k = \overline{1,\infty}.$$

Структурная формула конформного отображения с описанными выше ограничениями получена с использованием решения однородной задачи Гильберта с разрывными коэффициентами и двусторонним завихрением на бесконечности вида $O(\ln^{\alpha}|\xi|)$, где $0 < \alpha$. Такой метод построения конформного отображения представлен в работе Р.Б. Салимова и П.Л. Шабалина [1], в которой задача построения отображения полуплоскости на многоугольник с бесконечным числом вершин решается с помощью однородной задачи Гильберта со счетным множеством точек разрыва коэффициентов краевого условия и двусторонним завихрением на бесконечности степенного порядка $O(|x|^{\alpha})$, $0 < \alpha < 1$.

Справедлива следующая (см. [2], [3])

Теорема. *Для того чтобы в классе отображений (1), (2) существовали однолистные необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство* $0 < \alpha \leq 1$.

Литература

1. Салимов Р. Б., Шабалин П. Л. *Одно обобщение формулы Шварца-Кристоффеля* // Сиб. журн. индустр. матем. – 2010. – Т. 13. – № 4. – С. 109–117.

2. Karabasheva E. N., Shabalin P. L.*Univalence of mappings from half-plane to a polygonal domains with infinite sets of vertices* //Lobachevskii J. Math. – 2015. – V. 36. – № 2. – P. 144–153.

3. Хасанова Э. Н. *Об однолистности конформных отображений обобщенным интегралом Кристоффеля–Шварца на полигональные области со счетным множеством вершин* // Изв. вузов. Матем. – 2017. – Т. 17. – № 7. – С. 74–83.

THE EMPLOYMENT OF THE HILBERT BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH LOGARITHMIC SINGULARITY OF THE INDEX AT INFINITY FOR THE CONSTRUCTION OF THE CONFORMAL MAPPINGS

E.N. Khasanova, P.L. Shabalin

In this paper we construct a structural formula for the conformal mapping of the half-plane onto a polygonal domain with an infinite number of vertices. The rotation of the tangent along the boundary is unlimited. The structural formula of the conformal mapping belongs to a special class. The criterion for existence of univalent mappings in the class is proved.

Keywords: conformal mapping, Hilbert boundary value problem, univalence.

УДК 515.124.2

О СВОЙСТВАХ МОДУЛЯРНЫХ ПРОСТРАНСТВ

В.В. Чистяков[1]

1 *vchistyakov@hse.ru*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» — Нижний Новгород

Представлены элементы теории модулярных пространств на произвольных множествах, развивающей одновременно теорию таких пространств на линейных множествах и теорию метрических пространств. Изучается взаимосвязь между (тремя) модулярными пространствами и метриками на них в выпуклом и невыпуклом случаях.

Дается определение модулярным понятиям сходимости, топологии и полноты. Указаны преобразования модулярных пространств (для правой обратной модуляры), связанные с их двойственностью. Утверждения иллюстрируются примерами.

Ключевые слова: модуляра, модулярное пространство, модулярная сходимость, правая обратная, Δ_2-условие, модулярная полнота.

1. Понятие модуляры на вещественном линейном пространстве X обобщает понятие нормы ([9, 10]): функционал $\rho : X \to [0,\infty]$ есть (классическая) *модуляра* на X, если 1) $\rho(0) = 0$; 2) если $x \in X$ и $\rho(\alpha x) = 0\ \forall\, \alpha > 0$, то $x = 0$; 3) $\rho(-x) = \rho(x)\ \forall\, x \in X$; и 4) $\rho(\alpha x + \beta y) \le \rho(x) + \rho(y)\ \forall\, x, y \in X$ и $\alpha, \beta \ge 0$, $\alpha + \beta = 1$. Если в 4) имеет место неравенство 5) $\rho(\alpha x + \beta y) \le \alpha\rho(x) + \beta\rho(y)$, то ρ называется выпуклой модулярой.

В настоящей работе определяется понятие модуляры на *произвольном* множестве X и изучаются свойства пространств, порожденных модулярами. Основные результаты теории модулярных пространств представлены в работах [1]– [8], которым мы частично следуем.

2. Ниже будем рассматривать функции вида $w : (0,\infty) \times X \times X \to [0,\infty]$. Для $\lambda > 0$ и $x, y \in X$ (ввиду неравноправия аргументов) удобно положить $w_\lambda(x, y) = w(\lambda, x, y)$ и $w^{x,y}(\lambda) = w(\lambda, x, y)$, так что $w_\lambda : X \times X \to [0,\infty]$ $(\lambda > 0)$ и $w^{x,y} : (0,\infty) \to [0,\infty]$ $(x, y \in X)$.

Функция w называется *модулярой* на X, если для любых $x, y, z \in X$ имеем: (i) $x = y \Leftrightarrow w^{x,y} = 0$; (ii) $w^{x,y} = w^{y,x}$; и (iii) $w^{x,y}(\lambda + \mu) \le w^{x,z}(\lambda) + w^{z,y}(\mu)$ для всех $\lambda, \mu > 0$. Модуляра w называется: *строгой*, если $w^{x,y}(\lambda) \ne 0$ для всех $\lambda > 0$ и $x, y \in X$, $x \ne y$; *выпуклой*, если в (iii) выполнено усиленное неравенство $(\lambda + \mu)\, w^{x,y}(\lambda + \mu) \le \lambda\, w^{x,z}(\lambda) + \mu\, w^{z,y}(\mu)$ ([1, 3]).

Для модуляры w на X функция $w^{x,y}$ *не возрастает* на $(0,\infty)$ для всех $x, y \in X$, так что $w_{\lambda+0}(x, y) \le w_\lambda(x, y) \le w_{\lambda-0}(x, y)$ в $[0,\infty]$, причем функции $(w_{+0})_\lambda(x, y) = w_{\lambda+0}(x, y)$ и $(w_{-0})_\lambda(x, y) = w_{\lambda-0}(x, y)$ также являются модулярами на X.

Например, если $\rho : X \to [0,\infty]$ — классическая (выпуклая) модуляра на линейном пространстве X, то $w_\lambda(x, y) = \rho((x - y)/\lambda)$ есть (выпуклая) модуляра на X (и наоборот). Другой пример: если (X, d) — метрическое пространство, то $w_\lambda(x, y) = d(x, y)/\lambda^p$ $(p > 0)$ есть строгая модуляра на X, являющаяся выпуклой при $p \ge 1$.

3. Модуляра w на X индуцирует три отношения эквивалентности на X: (a) $x \overset{*}{\sim} y$, если $w^{x,y} \not\equiv \infty$; (b) $x \overset{0}{\sim} y$, если $\lim_{\lambda\to\infty} w^{x,y}(\lambda) = 0$; и (c) $x \overset{\text{fin}}{\sim} y$, если $w^{x,y}(\lambda) < \infty$ для всех $\lambda > 0$. Зафиксировав $x^\circ \in X$, будем обозначать класс эквивалетности элемента x° по отношениям (a), (b) и (c) соответственно через X^*_w, X^0_w и X^{fin}_w и называть *модулярным пространством*.

Имеют место включения $X^0_w \subset X^*_w$ и $X^{\text{fin}}_w \subset X^*_w$, и если w выпуклая, то $X^0_w = X^*_w$. Кроме того, $X^*_{w_{+0}} = X^*_{w_{-0}} = X^*_w$, $X^0_{w_{+0}} = X^0_{w_{-0}} = X^0_w$ и $X^{\text{fin}}_{w_{+0}} = X^{\text{fin}}_{w_{-0}} = X^{\text{fin}}_w$. Наиболее интересным (и устойчивым) является самое широкое модулярное пространство X^*_w.

Модулярное пространство X^*_w можно наделить метрикой (здесь $x, y \in X$ или X^*_w)

$$d^0_w(x, y) = \inf\{\lambda > 0 : w^{x,y}(\lambda) \le \lambda\} = \inf_{\lambda>0} \max\{\lambda, w_\lambda(x, y)\}$$

(для которой $d^0_{w_{+0}} = d^0_{w_{-0}} = d^0_w$), а если w выпуклая, то — дополнительно метрикой

$$d^*_w(x, y) = \inf\{\lambda > 0 : w^{x,y}(\lambda) \le 1\} = \inf_{\lambda>0} \max\{\lambda, \lambda\, w_\lambda(x, y)\},$$

и имеют место неравенства

$$\min\{d^*_w(x,y), \sqrt{d^*_w(x,y)}\} \le d^0_w(x,y) \le \max\{d^*_w(x,y), \sqrt{d^*_w(x,y)}\}. \tag{1}$$

4. Проиллюстрируем сказанное на примере ([8]). Пусть (M,d) — метрическое пространство и $X = M^{\mathbb{N}}$ — множество всех последовательностей $x = \{x_k\}$ из M. Положим

$$w_\lambda(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}}\Big(\frac{d(x_k,y_k)}{\lambda}\Big)^{1/k}, \quad \lambda>0,\ x=\{x_k\},\ y=\{y_k\}\in X. \tag{2}$$

Тогда w — строгая *невыпуклая* модуляра на X, для которой функция $w^{x,y}$ непрерывна на $(0,\infty)$ для всех $x, y \in X$. Если $x^\circ = \{x^\circ_k\} \in X$, то $X^{\rm fin}_w = X^*_w$,

$$x\in X^*_w \Leftrightarrow \sup_{k\in\mathbb{N}}(d(x_k,x^\circ_k))^{1/k}<\infty \quad \text{и} \quad x\in X^0_w \Leftrightarrow \lim_{k\to\infty}(d(x_k,x^\circ_k))^{1/k}=0. \tag{3}$$

Отметим, что $X^0_w \subset c(x^\circ) \subset \ell_\infty(x^\circ) \subset X^*_w$, где $x\in c(x^\circ)$, если $\lim_{k\to\infty} d(x_k,x^\circ_k)=0$, и $x\in \ell_\infty(x^\circ)$, если $\sup_{k\in\mathbb{N}} d(x_k,x^\circ_k)<\infty$. Кроме того, $d^0_w(x,y)=\sup_{k\in\mathbb{N}}(d(x_k,y_k))^{1/(k+1)}<\infty$ для всех $x,y\in X^*_w$ (тогда как $d^*_w(x,y)=\sup_{k\in\mathbb{N}} d(x_k,y_k)\le\infty$ в силу невыпуклости w).

5. Модулярные пространства X^*_w, X^0_w и $X^{\rm fin}_w$ замкнуты относительно d^0_w-сходимости (d^*_w-сходимости для выпуклой w) на X. Более того, для последовательности $\{x_n\}\subset X$ и $x\in X$ имеем: $d^0_w(x_n,x)\to 0$ (при $n\to\infty$) тогда и только тогда, когда $w_\lambda(x_n,x)\to 0$ для *всех* $\lambda>0$. Это мотивирует следующее определение (более слабой) сходимости на X ([6]).

Последовательность $\{x_n\}\subset X$ *w-сходится* (=модулярно сходится) к $x\in X$, если $w_\lambda(x_n,x)\to 0$ для *некоторого* $\lambda>0$. Любой такой x называется *w-пределом* $\{x_n\}$. Из метрической сходимости относительно d^0_w вытекает w-сходимость (но не наоборот).

Теорема 1 ([8]). (a) *X^*_w и X^0_w замкнуты относительно w-сходимости (а $X^{\rm fin}_w$ — нет).*

(b) *w-сходящаяся последовательность из X^*_w ограничена по метрике d^0_w, и если w строгая, то w-предел этой последовательности единствен.*

(c) *w-сходимость и d^0_w-сходимость на X эквивалентны в том и только том случае, когда w удовлетворяет следующему Δ_2-условию на X: если $\{x_n\}\subset X$, $x\in X$ и $\lambda>0$ такие, что $w_\lambda(x_n,x)\to 0$, то $w_{\lambda/2}(x_n,x)\to 0$.*

Например, модуляра w из (2) удовлетворяет Δ_2-условию на X, поскольку для любых $\lambda,\mu>0$ и $x,y\in X$ имеем $w_\mu(x,y)\le\max\{1,\lambda/\mu\}\cdot w_\lambda(x,y)$.

Множество $U\subset X^*_w$ называется *w-открытым*, если для любых $x\in U$ и $\lambda>0$ найдется такое $\mu>0$, что $B_{\lambda,\mu}(x)\subset U$, где $B_{\lambda,\mu}(x)=\{y\in X^*_w : w_\lambda(x,y)<\mu\}$ есть (λ,μ)-окружение точки x. Дополнение в X^*_w к w-открытому множеству называется *w-замкнутым*. Можно показать ([8]), что множество в X^*_w является w-замкнутым в точности тогда, когда оно замкнуто относительно w-сходимости.

6. *Правой обратной* для модуляры w на X называется модуляра

$$w^+_\mu(x,y)\equiv(w^+)_\mu(x,y)=\inf\{\lambda>0 : w^{x,y}(\lambda)\le\mu\},\quad \mu>0,\ x,y\in X \quad (\inf\varnothing=\infty).$$

Модулярные пространства для w и w^+ связаны следующим двойственным образом.

Теорема 2 ([8]). (a) $X^*_{w^+} = X^*_w$, $X^0_{w^+} = X^{\mathrm{fin}}_w$ *и* $X^{\mathrm{fin}}_{w^+} = X^0_w$.
(b) $d^0_{w^+}(x,y) = d^0_w(x,y)$ *для всех* $x, y \in X^*_w$ (*и* X).

Сделаем некоторые выводы из теоремы 2 на примере модуляры (2). Правая обратная для w из (2) есть строгая *выпуклая* модуляра на $X = M^{\mathbb{N}}$ вида

$$w^+_\mu(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}} \frac{d(x_k,y_k)}{\mu^k}, \quad \mu > 0,\ x = \{x_k\},\ y = \{y_k\} \in X, \tag{4}$$

которая *не удовлетворяет* Δ_2-условию на X и для которой функция $(w^+)^{x,y}$ непрерывна справа на $(0,\infty)$ для всех $x, y \in X$. Из п. 3 и теоремы 2(a) вытекает, что

$$X^{\mathrm{fin}}_{w^+} = X^0_w \subset X^*_w = X^*_{w^+} = X^0_{w^+} = X^{\mathrm{fin}}_w.$$

В частности, первые два равенства здесь и первое равенство в (4) дают альтернативное описание модулярных пространств X^0_w и X^*_w, представленное ранее в (3):

$$x = \{x_k\} \in X^0_w \ \Leftrightarrow\ \{\lambda^k d(x_k, x^\circ_k)\}^\infty_{k=1} \text{ ограничена в } \mathbb{R} \text{ для } \textit{любого } \lambda > 0;$$
$$x = \{x_k\} \in X^*_w \ \Leftrightarrow\ \{\lambda^k d(x_k, x^\circ_k)\}^\infty_{k=1} \text{ ограничена в } \mathbb{R} \text{ для } \textit{некоторого } \lambda > 0.$$

Для метрик $d^*_{w^+}(x,y) = \sup_{k\in\mathbb{N}}(d(x_k,y_k))^{1/k} = w_1(x,y)$ и $d^0_{w^+} = d^0_w$ (п. 4 и теорема 2(b)) имеют место неравенства (1).

Приведем пример последовательности $\{x_n\} \subset X^*_{w^+}$, которая w^+-сходится, но не сходится по метрике $d^0_{w^+}$ ([8, p. 72]). Положим $M = \mathbb{R}$ с метрикой $d(u,v) = |u - v|$ и $x^\circ = 0 = \{0\}^\infty_{k=1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ и рассмотрим $\{x_n\} \subset X^{\mathrm{fin}}_{w^+} = X^0_w$ такую, что $x_n = (1/n, 1_2, 1_3, \dots, 1_n, 0, 0, 0, \dots)$ (т.е. $x_n = \{x_{n,k}\}^\infty_{k=1}$, где $x_{n,1} = 1/n$, $x_{n,k} = 1$ при $2 \le k \le n$, и $x_{n,k} = 0$ при $k \ge n+1$). Если $x = (0,1,1,1,\dots)$, то $x \in X^*_{w^+} = X^*_w$ и $x \notin X^0_w = X^{\mathrm{fin}}_{w^+}$. Для $\mu = 2$ имеем $w^+_\mu(x_n, x) = 1/2n \to 0$, тогда как $d^0_{w^+}(x_n, x) = d^0_w(x_n, x) = 1$ для всех $n \in \mathbb{N}$. Этот пример показывает, что $X^{\mathrm{fin}}_{w^+}$ не замкнуто относительно w^+-сходимости и что w^+ не удовлетворяет Δ_2-условию на X.

7. Модулярное пространство X^*_w называется *w-полным* (=модулярно полным), если из условия $\{x_n\} \subset X^*_w$, $\lambda > 0$ и $w_\lambda(x_n, x_m) \to 0$ при $n, m \to \infty$ следует, что найдется такой $x \in X^*_w$, что $w_\lambda(x_n, x) \to 0$ при $n \to \infty$.

Теорема 3. *Если* (M,d) *— полное метрическое пространство, то модулярное пространство* $X^*_w = X^*_{w^+}$ *для модуляр* w *из* (2) *и* w^+ *из* (4) *является полным метрическим пространством относительно метрик* d^0_w *и* $d^*_{w^+}$*, а также* w*-полным и* w^+*-полным.*

8. В [8] в контексте пространства $X = M^{[a,b]}$ всех функций $x : [a,b] \to M$, действующих из отрезка $[a,b] \subset \mathbb{R}$ в метрическое пространство (M,d), построены две нестрогие невыпуклые (псевдо)модуляры w на X со следующими свойствами их модулярных пространств. Для первой из них X^{fin}_w есть пространство всех *регулярных* функций (т.е. имеющих конечные односторонние пределы в точках $[a,b]$) и $X^0_w = X^*_w$ есть пространство всех *ограниченных* функций. Для второй — X^0_w есть пространство всех *абсолютно непрерывных* функций и $X^{\mathrm{fin}}_w = X^*_w$ есть пространство всех функций *ограниченной по Жордану вариации*. Тем самым указанные классические пространства функций “внутренне взаимосвязаны” теснее, чем может представляться из их определений.

Статья подготовлена в результате проведения исследования № 17-01-0050 в рамках Программы «Научный фонд Национального исследовательского университета «Высшая школа экономики» (НИУ ВШЭ)» в 2017–2018 гг. и в рамках государственной поддержки ведущих университетов Российской Федерации "5–100".

Литература

1. Чистяков В. В. *Метрические модуляры и их применение* // Докл. РАН. – 2006. – Т. 406. – № 2. – С. 165–168.

2. Chistyakov V. V. *Modular metric spaces generated by F-modulars* // Folia Math. –2008. – V. 15. – № 1. – P. 3–24.

3. Chistyakov V. V. *Modular metric spaces, I: Basic concepts* // Nonlinear Anal. – 2010. – V. 72. – № 1. – P. 1–14.

4. Chistyakov V. V. *Modular metric spaces, II: Application to superposition operators* // Nonlinear Anal. – 2010. – V. 72. – № 1. – P. 15–30.

5. Чистяков В. В. *Неподвижные точки модулярно сжимающих отображений* // Докл. РАН. – 2012. – Т. 445. – № 3. – С. 274–277. (Аннотация: Тр. Матем. центра им. Н. И. Лобачевского. – Казань: Изд-во Казан. матем. об-ва, 2013. – Т. 46. – С. 56–62.)

6. Chistyakov V. V. *Modular contractions and their application* // In: Models, Algorithms, and Technologies for Network Analysis. Springer Proc. Math. & Stat. Vol. 32. – New York: Springer Science+Business Media, 2013. – P. 65–92.

7. Chistyakov V. V. *Modular Lipschitzian and contractive maps* // In: Optimization, Control, and Applications in the Information Age. Springer Proc. Math. & Stat. Vol. 130. – Springer International Publishing Switzerland, 2015. – P. 1–15.

8. Chistyakov V. V. *Metric Modular Spaces: Theory and Applications.* – Springer Briefs in Mathematics, Springer International Publishing Switzerland, 2015. – xiii+137 p.

9. Musielak J. *Orlicz Spaces and Modular Spaces.* – Lecture Notes in Math. V. 1034. Springer, Berlin, 1983. – 222 pp.

10. Nakano H. *Modulared Semi-Ordered Linear Spaces.* – Maruzen, Tokyo, 1950. – 288 p.

ON PROPERTIES OF MODULAR SPACES

V.V. Chistyakov

We present basic concepts of the theory of modular spaces on arbitrary sets, which extends simultaneously the theory of such spaces on linear sets and the theory of metric spaces. We study the relationship between (three) modular spaces and metrics on them in the convex and nonconvex cases. We define the modular notions of convergence, topology and completeness. We exhibit transformations of modular spaces (for the right inverse modular), connected with their duality. The assertions are illustrated by examples.

Keywords: modular, modular space, modular convergence, right inverse, Δ_2-condition, modular completeness.

УДК 517.518.24

СОВМЕСТНЫЙ МОДУЛЬ ВАРИАЦИИ ФУНКЦИЙ И УСЛОВНО РЕГУЛЯРНЫЙ ПРИНЦИП ВЫБОРА

С.А. Чистякова[1], В.В. Чистяков[2]

1 *schistyakova@hse.ru*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» — Нижний Новгород

2 *vchistyakov@hse.ru*; Национальный исследовательский университет «Высшая школа экономики» — Нижний Новгород

Для отрезка $I = [a, b]$ и метрического пространства (M, d) на множестве M^I всех функций, действующих из I в M, определяется неубывающая последовательность псевдометрик $\{\nu_n\}$, называемая совместным модулем вариации. Показано, что если две последовательности функций $\{f_j\}$ и $\{g_j\}$ из M^I такие, что $\{f_j\}$ поточечно относительно компактна на I, $\{g_j\}$ поточечно сходящаяся на I и $\limsup_{j\to\infty} \nu_n(f_j, g_j) = o(n)$ при $n \to \infty$, то $\{f_j\}$ содержит поточечно сходящуюся на I подпоследовательность, предел которой является условно регулярной функцией.

Ключевые слова: метрическое пространство, совместный модуль вариации, поточечная сходимость, принцип выбора, регулярная функция, обобщенная вариация.

Классическим результатом теории функций вещественной переменной является следующий *принцип выбора Э. Хелли* (1912): *равномерно ограниченная последовательность вещественных неубывающих функций на отрезке $[a, b]$ вещественной прямой $\mathbb{R}$ содержит поточечно сходящуюся подпоследовательность.* Эта теорема обобщалась в различных направлениях (в основном для функций ограниченной и обобщенной ограниченной вариации) в работах [2, 8, 10–13] и др.

Цель настоящей работы — представить новое достаточное условие (заменяющее условие ограниченности обобщенных вариаций) для существования поточечно сходящейся подпоследовательности в контексте пространства M^I функций вида $f : I = [a, b] \to M$, где M — метрическое пространство с метрикой d. Это условие базируется на понятии *совместного модуля вариации двух функций $f, g \in M^I$*, развивающем понятие модуля вариации (=модуля изменения) одной функции [1] (также [3–5]).

Совместным приращением двух функций $f, g \in M^I$ на двухточечном множестве $\{s, t\} \subset I$ называется (всегда конечная) величина ([6])

$$|(f, g)(\{s, t\})| = \sup_{z\in M} \big|d(f(s), z) + d(g(t), z) - d(f(t), z) - d(g(s), z)\big|.$$

Если $n \in \mathbb{N}$ и $\{I_i\}_{i=1}^n$ — набор из n двухточечных множеств $I_i = \{s_i, t_i\} \subset I$, то для краткости пишем $\{I_i\}_{i=1}^n \prec I$, если $s_1 < t_1 \le s_2 < t_2 \le \cdots \le s_{n-1} < t_{n-1} \le s_n < t_n$ (так что отрезки $[s_1, t_1], \ldots, [s_n, t_n]$ не налегают друг на друга). Набор $\{I_i\}_{i=1}^n \prec I$ называем *разбиением* отрезка I, если $t_0 := s_1$ и $s_i = t_{i-1}$ для всех $i = 1, \ldots, n$, что обозначается через $\{t_i\}_{i=0}^n \prec I$.

Совместным модулем вариации двух функций $f, g \in M^I$ называется последова-

тельность $\{\nu_n(f,g)\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,\infty]$, определяемая для всех $n \in \mathbb{N}$ правилом ([6]):

$$\nu_n(f,g) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n} |(f,g)(I_i)| : \{I_i\}_{i=1}^{n} \prec I\Big\}.$$

При каждом $n \in \mathbb{N}$ функция ν_n является (расширенной) *псевдометрикой* на M^I, т.е. $\nu_n(f,f) = 0$, $\nu_n(f,g) = \nu_n(g,f)$ и $\nu_n(f,g) \le \nu_n(f,h) + \nu_n(h,g)$ для всех $f,g,h \in M^I$. Кроме того, для всех $f,g \in M^I$ последовательность $\{\nu_n(f,g)\}_{n=1}^{\infty}$ не убывает, $\nu_1(f,g) \le \nu_n(f,g) \le n\nu_1(f,g)$ и $\nu_{n+m}(f,g) \le \nu_n(f,g) + \nu_m(f,g)$ для всех $n,m \in \mathbb{N}$. Таким образом, если $\nu_1(f,g)$ конечно (например, когда f и g ограничены), то существует $\lim_{n\to\infty} \nu_n(f,g)/n \in [0,\infty)$.

Для последовательности функций $\{f_j\} \equiv \{f_j\}_{j=1}^{\infty} \subset M^I$ и $f \in M^I$ обозначаем через $f_j \to f$ на I *поточечную сходимость* $\{f_j\}$ к f, т.е. $\lim_{j\to\infty} d(f_j(t), f(t)) = 0 \ \forall\, t \in I$, и через $f_j \rightrightarrows f$ на I *равномерную сходимость* $\{f_j\}$ к f, т.е. $\lim_{j\to\infty} d_\infty(f_j, f) = 0$, где (расширенная) равномерная метрика d_∞ на M^I задается правилом $d_\infty(f,g) = \sup_{t\in I} d(f(t), g(t))$.

Если теперь $n \in \mathbb{N}$, $f,g \in M^I$ и $\{f_j\}, \{g_j\} \subset M^I$ такие, что $f_j \to f$ и $g_j \to g$ (соотв. $f_j \rightrightarrows f$ и $g_j \rightrightarrows g$) на I, то $\nu_n(f,g) \le \liminf_{j\to\infty} \nu_n(f_j, g_j)$ (соотв. $\nu_n(f,g) = \lim_{j\to\infty} \nu_n(f_j,g_j)$).

Основной результат работы — следующий *поточечный принцип выбора* [6, Theorem 1] (запись вида $\mu_n = o(n)$ в нем означает, как обычно, что $\lim_{n\to\infty} \mu_n/n = 0$):

Теорема 1. *Пусть две последовательности функций $\{f_j\}, \{g_j\} \subset M^I$ — такие, что*
(а) *при любом $t \in I$ замыкание в M множества $\{f_j(t) : j \in \mathbb{N}\}$ компактно*;
(б) *$g_j \to g$ на I для некоторой функции $g \in M^I$*;
(в) *$\mu_n := \limsup_{j\to\infty} \nu_n(f_j, g_j) = o(n)$.*
Тогда $\{f_j\}$ содержит подпоследовательность, которая поточечно сходится на I к некоторой функции $f \in M^I$ такой, что $\nu_n(f,g) \le \mu_n$ для всех $n \in \mathbb{N}$.

Приведем некоторые комментарии и следствия. Всюду ниже символ c означает любую постоянную функцию $c : I \to M$.

1. Условие (в) в теореме 1 не является необходимым в случае поточечно сходящихся последовательностей $\{f_j\}$ и $\{g_j\}$, но оно является *необходимым* для равномерно сходящихся последовательностей: действительно, если $f_j \rightrightarrows f$ и $g_j \rightrightarrows g$ на I, причем $\nu_n(f,g) = o(n)$, то $\lim_{j\to\infty} \nu_n(f_j,g_j) = \nu_n(f,g) = o(n)$.

Условие (в) в теореме 1 не инвариантно относительно эквивалентных (в топологическом смысле) метрик d на M; более того, оно может не иметь места ни для какой эквивалентной метрики на M, относительно которой последовательность $\{f_j\} \subset M^I$ поточечно сходится на I даже в случае, когда все $g_j = c$ (подробнее см. [6]).

2. Для $n \in \mathbb{N}$ и $f \in M^I$ величина $\nu_n(f) \equiv \nu_n(f,c)$ не зависит от c и имеет вид

$$\nu_n(f) = \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n} d(f(s_i), f(t_i)) : \{I_i\}_{i=1}^{n} \prec I, \text{ где } I_i = \{s_i, t_i\}\Big\}.$$

Последовательность $\{\nu_n(f)\}_{n=1}^{\infty} \subset [0,\infty]$ известна как *модуль вариации* функции f в смысле [1]. Она характеризует регулярные функции из M^I следующим образом. Скажем, что $f \in M^I$ *регулярна* и запишем $f \in \mathrm{Reg}(I;M)$, если $d(f(s), f(t)) \to 0$ при

$s,t \to \tau - 0$ для всех $a < \tau \le b$ и при $s,t \to \tau' + 0$ для всех $a \le \tau' < b$ (по критерию Коши в случае полного M это эквивалентно существованию односторонних пределов $f(\tau - 0), f(\tau' + 0) \in M$). Имеем $\mathrm{Reg}(I;M) = \{f \in M^I : \nu_n(f) = o(n)\}$ (см. [1, 3–5]).

Полагая в теореме 1 $g_j = c$ для всех $j \in \mathbb{N}$, получаем принципы выбора из [3–5].

3. Поскольку ν_n — псевдометрика на M^I, то на M^I можно ввести отношение эквивалентности $\sim$ правилом: $f \sim g$, если $\nu_n(f,g) = o(n)$, где $f,g \in M^I$. Класс эквивалентности $\mathrm{R}(g) = \{f \in M^I : f \sim g\}$ называется классом *условной регулярности* функции $g \in M^I$, а любая функция $f \in \mathrm{R}(g)$ называется *g-регулярной*. Отметим, что условие '$\nu_n(f,g) \le \mu_n \ \forall\, n \in \mathbb{N}$' в теореме 1 означает, что f является g-регулярной. Кроме того, $\mathrm{Reg}(I;M) = \mathrm{R}(c)$.

Основные свойства класса $\mathrm{R}(g)$: (1) если $g \in M^I$ ограничена, то все функции из $\mathrm{R}(g)$ ограничены; (2) $\mathrm{R}(g)$ замкнут относительно равномерной сходимости (но не относительно поточечной сходимости); (3) если (M,d) полное, то $(\mathrm{R}(g), d_\infty)$ также полное.

4. Классическая *жорданова вариация* функции $f \in M^I$ есть

$$V(f) := \sup\Big\{\sum_{i=1}^{n} d(f(t_i), f(t_{i-1})) : n \in \mathbb{N} \text{ и } \{t_i\}_{i=0}^{n} \prec I\Big\} = \lim_{n\to\infty} \nu_n(f).$$

Полагая $\mathrm{BV}(I;M) = \{f \in M^I : V(f) < \infty\}$, для $f \in \mathrm{BV}(I;M)$ найдем, что $\nu_1(f) \le V(f)$ и $\nu_n(f)/n \le V(f)/n \to 0$ при $n \to \infty$, т.е. f ограничена и $f \in \mathrm{Reg}(I;M)$.

Альтернативное описание класса $\mathrm{Reg}(I;M)$ опирается на понятие *ε-вариации* $V_\varepsilon(f)$ функции $f \in M^I$, введенное в [8]:

$$V_\varepsilon(f) = \inf\{V(g) : g \in \mathrm{BV}(I;M) \text{ и } d_\infty(f,g) \le \varepsilon\}, \quad \varepsilon > 0 \quad (\inf\varnothing = \infty).$$

Имеем $\mathrm{Reg}(I;M) = \{f \in M^I : V_\varepsilon(f) < \infty \text{ для всех } \varepsilon > 0\}$. Например, если $x,y \in M$, $x \ne y$, и функция типа Дирихле $f \equiv \mathscr{D}_{x,y} : [0,1] \to M$ определена правилом: $f(t) = x$, если $t \in [0,1]$ рационально, и $f(t) = y$ для иррациональных $t \in [0,1]$, то $f \notin \mathrm{Reg}(I;M)$, $V_\varepsilon(f) = \infty$ при $0 < \varepsilon < d(x,y)/2$ и $V_\varepsilon(f) = 0$ при $\varepsilon \ge d(x,y)$.

Следствием теоремы 1 является следующая теорема ([6, Theorem 3]):

Теорема 2. *Пусть последовательность функций $\{f_j\} \subset M^I$ — такая, что*
(а) *при любом $t \in I$ замыкание в M множества $\{f_j(t) : j \in \mathbb{N}\}$ компактно*;
(б) $\limsup_{j\to\infty} V_\varepsilon(f_j) < \infty$ *для всех* $\varepsilon > 0$.
Тогда существует подпоследовательность в $\{f_j\}$, которая поточечно сходится на I к некоторой функции $f \in \mathrm{Reg}(I;M)$.

5. Теорема 1 содержит в качестве частных случаев все принципы выбора, цитированные выше, и в отличие от них может быть применена к последовательностям нерегулярных функций. Пусть, например, последовательности $\{x_j\}$ и $\{y_j\} \subset M$ сходятся в M к x и $y \in M$ соответственно, где $x \ne y$. Тогда последовательность функций типа Дирихле $f_j = \mathscr{D}_{x_j,y_j}$, $j \in \mathbb{N}$, сходится поточечно на $I = [0,1]$ к функции $f = \mathscr{D}_{x,y}$. Полагая $g_j = f = \mathscr{D}_{x,y}$ для всех $j \in \mathbb{N}$ в теореме 1, найдем, что для любых $s,t \in I$

$$|(f_j,g_j)(\{s,t\})| \le d(f_j(s),g_j(s)) + d(f_j(t),g_j(t)) \le 2\varepsilon_j,$$

где $\varepsilon_j := \max\{d(x_j,x), d(y_j,y)\} \to 0$ при $j \to \infty$. Отсюда вытекает, что $\nu_n(f_j,g_j) \le 2n\varepsilon_j$, а потому, условие (в) теоремы 1 выполняется.

6. Сравнение различных принципов выбора приведено в работе [9].

7. Следуя методологии [7] (где вместо теоремы Хелли используется теорема Рамсэя из формальной логики), можно показать, что *если* $\{f_j\} \subset M^I$ *удовлетворяет условию* (a) *теоремы* 1 *и* $\lim_{N\to\infty} \sup_{j,k\geq N} \nu_n(f_j, f_k) = o(n)$, *то* $\{f_j\}$ *содержит подпоследовательность, сходящуюся поточечно на* I (к какой-либо регулярной или нерегулярной функции).

Литература

1. Чантурия З. А. *Модуль изменения функции и его применения в теории рядов Фурье* // Докл. АН СССР. – 1974. – Т. 214. – № 1. – С. 63–66.

2. Chistyakov V. V. *Selections of bounded variation* // J. Appl. Anal. – 2004. – V. 10. – P. 1–82.

3. Chistyakov V. V. *The optimal form of selection principles for functions of a real variable* // J. Math. Anal. Appl. – 2005. – V. 310. – P. 609–625.

4. Chistyakov V. V. *A selection principle for functions of a real variable* // Atti Sem. Mat. Fis. Univ. Modena e Reggio Emilia. – 2005. – V. 53. – P. 25–43.

5. Чистяков В. В. *Поточечный принцип выбора для функций одной переменной со значениями в равномерном пространстве* // Матем. труды (Новосибирск). – 2006. – Т. 9. – № 1. – P. 176–204.

6. Chistyakov V. V., Chistyakova S. A. *The joint modulus of variation of metric space valued functions and pointwise selection principles* // Studia Math. – 2017. – V. 238. – P. 37–57.

7. Chistyakov V. V., Maniscalco C. *A pointwise selection principle for metric semigroup valued functions* // J. Math. Anal. Appl. – 2008. – V. 341. – № 1. – P. 613–625.

8. Fraňková D. *Regulated functions* // Math. Bohem. – 1991. – V. 116. – P. 20–59.

9. Maniscalco C. *A comparison of three recent selection theorems* // Math. Bohem. – 2007. – V. 132. – P. 177–183.

10. Korenblum B. *A generalization of two classical convergence tests for Fourier series, and some new Banach spaces of functions* // Bull. Amer. Math. Soc. (N. S.) – 1983. – V. 9. – P. 215–218.

11. Musielak J., Orlicz W. *On generalized variations (I)* // Studia Math. – 1959. – V. 18. – P. 11–41.

12. Schrader K. *A generalization of the Helly selection theorem* // Bull. Amer. Math. Soc. – 1972. – V. 78. – P. 415–419.

13. Waterman D. *On* Λ*-bounded variation* // Studia Math. – 1976. – V. 57. – P. 33–45.

THE JOINT MODULUS OF VARIATION OF FUNCTIONS AND CONDITIONALLY REGULAR SELECTION PRINCIPLE

S.A. Chistyakova, V.V. Chistyakov

Given a closed interval $I = [a, b]$ *and a metric space* (M, d), *we introduce a nondecreasing sequence* $\{\nu_n\}$ *of pseudometrics on* M^I *(the set of all functions from* I *into* M*), called the joint modulus of variation. We show that if two sequences of functions* $\{f_j\}$ *and* $\{g_j\}$ *from* M^I *are such that* $\{f_j\}$ *is pointwise relatively compact on* I, $\{g_j\}$ *is pointwise convergent on* I, *and* $\limsup_{j\to\infty} \nu_n(f_j, g_j) = o(n)$ *as* $n \to \infty$, *then* $\{f_j\}$ *admits a pointwise convergent subsequence whose limit on* I *is a conditionally regulated function.*

Keywords: metric space, joint modulus of variation, pointwise convergence, selection principle, regulated function, generalized variation.

УДК 517.5

ДВОИЧНЫЕ МАСШТАБИРУЮЩИЕ СПЛАЙН-ФУНКЦИИ

С.А. Чумаченко[1]

1 *chumachenkosergei@gmail.com*; Саратовский национальный исследовательский государственный университет

Рассматривается новый класс базисных сплайнов, которые получаются многократным интегрированием функции Уолша. Доказано, что эти сплайны являются решением масштабирующего уравнения. Указан явный вид этого масштабирующего уравнения.

Ключевые слова: двоичные базисные сплайны, масштабирующее уравнение.

Пусть $If(x) = \int_0^x f(t)\,dt$ $(x \in [0,1])$ – оператор интегрирования, $W_{2^n-1}(x)$ – функции Уолша.

Определение 1. *Функцию* $\varphi_n(x) = (4I)^n W_{2^n-1}(2^{-n}x)$ $(x \in [0,2^n])$ *будем называть двоичным базисным сплайном n-й степени.*

В [1] было доказано, что система сжатий и сдвигов, построенная на основе функции $\varphi_n(x)$, является базисом в пространстве $C_0[0,1]$ и справедливо неравенство

$$|f(x) - S_{2^n+j}(x)| = \omega_f(\frac{1}{2^{n+2}}) + \omega_f^2(\frac{1}{2^{n+2}}).$$

где $S_{2^n+j}(x)$ - значение частичных сумм в точке x, ω_f, ω_f^2 - модули непрерывности первого и второго порядка.

Теорема о масштабирующем уравнении. *Справедливо следующее равенство:*

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{2^m}\varphi_m(2x-0) + \sum_{t=1}^{2^m-1} \frac{1}{2^{m-1}}\varphi_m(2x-t) + \frac{1}{2^m}\varphi_m(2x-2^m)$$

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 16-01-00152).

Литература

1. Чумаченко С. А *Об одном из аналогов системы Фабера-Шаудера*. – Казань: Труды математического центра имени Н.И. Лобачевского, 2016. – Т. 53. – С. 163.

2. Кашин Б. С., Саакян А. А. *Ортогональные ряды.* – М.: АЦФ, 1999. – 550 с.

3. Аубакиров Т. У., Бокаев Н. А. *О новом классе систем функций типа Фабера–Шаудера* // Мат. заметки. – 2007. – Т. 82. – № 5. – С. 643.

BINARY REFINEMENT SPLINE FUNCTIONS

S.A. Chumachenko

We define binary basic splines of natural order and obtain a refinement equation for this splines.

Keywords: binary basic spline, refinement equation.

УДК 517.518.83

О ВЛИЯНИИ СДВИГА АРГУМЕНТА ПРИБЛИЖАЮЩЕЙ ФУНКЦИИ НА КАЧЕСТВО АППРОКСИМАЦИИ КОНСТАНТЫ ЛЕБЕГА ОПЕРАТОРА ФУРЬЕ

И.А. Шакиров[1]

1 *iskander@tatngpi.ru*; Набережночелнинский государственный педагогический университет

Для константы Лебега оператора Фурье получены вполне определенные приближенные представления. Погрешности аппроксимации оценены в равномерной дискретной метрике, когда соответствующие остаточные члены принадлежат различным классам.

Ключевые слова: норма оператора Фурье, асимптотическое равенство, остаточный член константы Лебега, наилучшее приближение константы Лебега.

Классический оператор Фурье $S_n : C_{2\pi} \to C_{2\pi}$ порождает константу Лебега

$$L_n = \|S_n\| = \frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{|\sin(2n+1)t|}{\sin t}dt,\ n \in N\ (L_0 = 1, L_1 = \frac{1}{3} + \frac{2\sqrt{3}}{\pi} = 1.43599112\ldots). \quad (1)$$

В первой половине прошлого века Л. Фейером, Г. Сеге, Г. Харди для вычисления значения константы (1) были установлены различные формулы:

$$L_n = \frac{1}{2n+1} + \frac{2}{\pi}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\operatorname{tg}\frac{\pi k}{2n+1},\ L_n = \frac{16}{\pi^2} + \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{1}{4k^2-1}\sum_{m=1}^{(2n+1)k}\frac{1}{2m-1}\right),$$

$$L_n = 4\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{th}(2n+1)t}{\operatorname{th} t}\cdot\frac{dt}{\pi^2+4t^2},\ L_n = \frac{4}{\pi^2}\int_0^{\infty}\frac{\operatorname{sh}(2n+1)t}{\operatorname{sh} t}\cdot\ln[\operatorname{ctg} h((n+0.5)t)]dt.$$

Они имеют важное теоретическое значение, но сложны для вычисления значений константы Лебега. Поэтому поиск простых приближенных формул, позволяющих с достаточно малой погрешностью вычислить константу L_n, является актуальной задачей.

В 1910 г. Л. Фейер уточнил поведение константы (1) вида $L_n = O(\ln n)$, установив более точное асимптотическое равенство

$$L_n \equiv L(n) = \frac{4}{\pi^2}\ln n + O(1)\ (n \to \infty). \quad (2)$$

С тех пор оценкой величин $O(1)$ в (2), L_n снизу и сверху, поиском элемента наилучшего равномерного (дискретного) приближения вида

$$\frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + b\ (a, b \in R_0^+ = [0, +\infty))$$

для L_n занимались многие математики. Однако задача определения наилучших коэффициентов $a = a^*,\ b = b^*$ в приближенном равенстве

$$L_n \approx \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) + b,\ n \in N\ ((a, b) \in \overline{\Omega} = R_0^+ \times R_0^+) \quad (3)$$

до сих пор остается нерешенной проблемой теории функций.

Для классов строго возрастающих (M^+) и строго убывающих (M^-) остаточных членов (функций аргумента n и параметров a, b) вида

$$O_n(a,b) = L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b,\ n \in N\ ((a,b) \in \overline{\Omega}) \tag{4}$$

недавно автором получены следующие результаты.

Теорема 1 [1]. *В приближенном равенстве (3) наилучшее равномерное приближение константы Лебега в классе*

$$M^- = \{O_n(a,b) | (a,b) \in \Omega^- = [0,1/2] \times [0,3/2] \subset \overline{\Omega}\}$$

достигается при значениях параметров $a = a^- = 0.5$ *и* $b = b^- = 1.27100777\ldots$, *т.е. пара* $(a^-, b^-) \in \Omega^-$ *является решением экстремальной задачи*

$$\inf_{(a,b)\in\Omega^-} \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| = \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^-) - b^- \right| = \varepsilon^- = 0.00065453\ldots. \tag{5}$$

Теорема 2 [2]. *В приближенном равенстве (3) наилучшее равномерное приближение константы Лебега в классе*

$$M^+ = \{O_n(a,b) | (a,b) \in \Omega^+ = [a^+, +\infty] \times [0, \frac{3}{2}] \subset \overline{\Omega}\}$$

достигается при значениях параметров $a = a^+ = 0.51188859\ldots$ *и* $b = b^+ = 1.26940801\ldots$, *т.е. пара* $(a^+, b^+) \in \Omega^+$ *является решением экстремальной задачи*

$$\inf_{(a,b)\in\Omega^+} \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| = \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^+) - b^+ \right| = \varepsilon^+ = 0.00094523\ldots. \tag{6}$$

Из этих теорем видно, что поведение остаточных членов остается неизученной в классе

$$M^0 = \{O_n(a,b) | (a,b) \in \Omega^0 = (\frac{1}{2}, a^+) \times [0, \frac{3}{2}] \subset \overline{\Omega}\},$$

где они могут быть строго возрастающими либо убывающими, или функциями общего вида. Укажем вполне определенную функцию $O_n(a^0, b^0)$ общего вида из M^0, для которой имеет место следующий результат.

Теорема 3. *Для остаточного члена* $O_n(a^0, b^0) \in M^0$ *с параметрами*

$$a^0 = \exp\left(\pi^2 \frac{L_1 - \alpha_0}{4}\right) - 1 = 0.50485280\ldots,\ b_0 = \alpha_0,$$

имеет место оценка

$$\inf_{(a,b)\in\Omega^0} \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a) - b \right| < \sup_{n\in N} \left| L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln(n+a^0) - \alpha_0 \right| = \varepsilon^0 = 0.00031763\ldots, \tag{7}$$

где $\alpha_0 = \lim_{n\to\infty}[L_n - \frac{4}{\pi^2}\ln n] = 1.27035324\ldots$ *– известная константа Ватсона.*

Замечание 1. *Сравнение величин (5) – (7) показывает, что в теореме 3 результаты двух предыдущих теорем усилены более чем в два раза:* $\varepsilon^-/\varepsilon^0 = 2.06\ldots$, $\varepsilon^+/\varepsilon^0 = 2.97\ldots$.

Замечание 2. *В классе* M^0 *не существует остаточного члена, совпадающего всюду в* N *с константой* L_n.

Литература

1. Шакиров И. А. *О наилучшей приближенной замене константы Лебега оператора Фурье* // Материалы межд. конф. по алгебре, анализу и геометрии, посвящен. юбилеям выдающихся профессоров Казанского ун-та, математиков Широковых. Казань: Казанский ун-т. Изд-во Академии наук РТ, 2016. – С. 352–353.

2. Шакиров И. А. *Об оптимальном приближении нормы оператора Фурье семейством логарифмических функций* // Итоги науки и техники. Современная математика и ее приложения. Тематические обзоры. – 2017. – Т. 139. – С. 92–104.

INFLUENCE OF SHIFT OF THE ARGUMENT OF THE APPROXIMATING FUNCTION ON APPROXIMATION OF THE LEBESGUE CONSTANT FOR THE FOURIER OPERATOR

I.A. Shakirov

For the Lebesgue constant of the Fourier operator, some approximate formulas notions are received. Errors of approximation are estimated in the uniform discrete metrics when the corresponding remainders belong to various classes.

Keywords: norm of the Fourier operator, asymptotic equality, remainder of the Lebesgue constant, the best approximation of the Lebesgue constant.

УДК 517.9

ИНТЕГРАЛЬНЫЕ ПРЕДСТАВЛЕНИЯ РЕШЕНИЙ ДЛЯ ОДНОГО ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО УРАВНЕНИЯ ВТОРОГО ПОРЯДКА СО СВЕРХСИНГУЛЯРНОЙ ТОЧКОЙ

Ф.М. Шамсудинов[1]

1 *faizullo100@yahoo.com*; Курган-Тюбинский государственный университет им. Носира Хусрава, Таджикистан

В данной работе для одного гиперболического уравнения второго порядка со сверхсингулярной точкой получены представления многообразия решений при помощи двух произвольных функций одного независимого переменного, изучены свойства полученных решений, а также рассмотрена граничная задача А.

Ключевые слова: интегральные представления, гиперболическое уравнение, многообразия решений, прямоугольник, свойства решений, граничная задача.

Пусть D – прямоугольник $\{(x,y): 0<x<\delta_1, \quad 0<y<\delta_2\}$. Далее обозначим

$$\Gamma_1=\{y=0,\ 0<x<\delta_1\}, \quad \Gamma_2=\{x=0,\ 0<y<\delta_2\}.$$

В области D рассмотрим уравнение следующего вида

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x\partial y}+\frac{a(x,y)}{r^{\alpha}}\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{b(x,y)}{r^{\beta}}\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{c(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}u=\frac{f(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}, \tag{1}$$

где $r^2=x^2+y^2$, $a(x,y)$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y)$ – заданные функции в области D, $\alpha>2$, $\beta<1$ (α, β – целые положительные числа).

Проблеме исследования дифференциальных уравнений с регулярными, сингулярными и сверхсингулярными коэффициентами посвящены работы [1]–[6].

Способом, разработанным в [3] и [4] для уравнений (1), получены представления многообразия решений при помощи двух произвольных функции одной независимой переменной.

В дальнейшем обозначим $C_2(D)$ – класс функций, которые имеют непрерывные производные первого порядка в D такие, что $U_{xy} \in C(D)$.

Теорема 1. *Пусть в уравнении* (1) *коэффициенты и правая часть удовлетворяют следующим условиям:*

1. $a(x,y) \in C_x^1(\overline{D})$, $b(x,y)$, $c(x,y)$, $f(x,y) \in C(\overline{D})$;
2. $\left|a(x,y) - a(0,0)\right| \le H_1 r^{\alpha_1}, H_1 = \text{const}$, $\alpha_1 > \alpha - 1$;
3. $a(0,0) < 0$;
4. $f(x,y) = o\left(r^{\delta_1}\right)$, $\delta_1 > \alpha + \beta - 1$;
5. $c_1(x,y) = o\left(\exp\left[a(0,0) W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y)\right] r^{\delta_2}\right)$, $\delta_2 > \alpha + \beta - 1$,

   $c_1(x,y) = -c(x,y) + r^{\alpha+\beta}\dfrac{\partial}{\partial x}\left(\dfrac{a(x,y)}{r^{\alpha}}\right) + a(x,y)b(x,y)$.

Тогда любое решение уравнение (1) из класса $C_2(D)$ представимо в виде

$$u(x,y) = \exp\left[-W_a^{\alpha}(x,y) - a(0,0) W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y)\right]\left\{F_1(x,y) + \right.$$
$$\left. + \int_0^y ds \int_0^x R_1(x,y;t,s) F_1(t,s)\, dt\right\} \equiv K_1(\varphi_1(x), \psi_1(y), f(x,y)), \quad (2)$$

$$F_1(x,y) = \varphi_1(x) + \int_0^y \exp\left[W_a^{\alpha}(x,s) - W_b^{\beta}(x,s) + a(0,0) W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,s)\right] \times$$
$$\times \left(\psi_1(y) + \int_0^x \frac{f(t,s)}{(t^2+s^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}} \exp\left[W_b^{\beta}(t,s)\right] dt\right) ds, \quad (3)$$

$$W_a^2(x,y) = \int_0^y \frac{a(x,s) - a(0,0)}{(x^2+s^2)^{\frac{\alpha}{2}}} ds, \quad W_b^{\beta}(x,y) = \int_0^x \frac{b(t,y) - b(0,0)}{(t^2+y^2)^{\frac{\beta}{2}}} dt,$$

$$W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y) = \frac{y}{x^2(\alpha-2) r^{\alpha-2}} + \frac{1}{x^2}\frac{\alpha-3}{\alpha-2} J^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y), \quad J^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y) = \int_0^y (x^2+s^2)^{1-\frac{\alpha}{2}} ds,$$

$\varphi_1(x)$, $\psi_1(y)$ – произвольные функции точек контуров Γ_1 и Γ_2. В равенстве (2) $R_1(x,y;t,s)$ – резольвента явно выписанного интегрального уравнения Вольтерра второго рода.

Доказательство теоремы 1 основана на представлении левой части уравнения (1) в виде произведения двух линейных дифференциальных операторов первого порядка.

Используя условия, наложенные на коэффициенты уравнения (1), представим это уравнение в следующем в виде:

$$\left(\frac{\partial}{\partial x}+\frac{b(x,y)}{r^{\beta}}\right)\left(\frac{\partial}{\partial y}+\frac{a(x,y)}{r^{\alpha}}\right)u=\frac{f(x,y)+c_1(x,y)u(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}. \tag{4}$$

В равенстве (7), вводя новую неизвестную функцию

$$\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{a(x,y)}{r^{\alpha}}u=V_1(x,y), \tag{5}$$

сведем задачу к решению следующего дифференциального уравнения

$$\frac{\partial V_1}{\partial x}+\frac{b(x,y)}{r^{\beta}}V_1=\frac{f(x,y)+c_1(x,y)u(x,y)}{r^{\alpha+\beta}}. \tag{6}$$

Считая в уравнении (6) правую часть известной, находим

$$V_1(x,y)=\exp\left[-W_b^{\beta}(x,y)\right]\left(\psi_1(y)+\int_0^x\frac{f(t,y)+c_1(t,y)u(t,y)}{(t^2+y^2)^{\frac{\alpha+\beta}{2}}}\exp\left[W_b^{\beta}(t,y)\right]dt\right). \tag{7}$$

Теперь, решая уравнение (5), выражаем $u(x,y)$ через $V_1(x,y)$ [5, с. 26]:

$$u(x,y)=\exp\left[-W_a^{\alpha}(x,y)-a(0,0)W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y)\right]\times$$
$$\times\left(\varphi_1(x)+\int_0^y V_1(x,s)\exp\left[W_a^{\alpha}(x,s)+a(0,0)W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,s)\right]ds\right). \tag{8}$$

Подставляя в (8) вместо $V_1(x,y)$ его значение из (7), приходим к решению интегрального уравнения Вольтерра второго рода. Решая это уравнение, получим утверждение теоремы 1.

При этом

$$u(x,y)\Big|_{y=0}=\varphi_1(x),\quad P^{\alpha}_{y,a}(u)\Big|_{x=0}=\left(\frac{\partial u}{\partial y}+\frac{b(x,y)}{r^{\alpha}}u\right)\Big|_{x=0}=\psi_1(y),$$

$$\varphi_1(x)\in C(\Gamma_1),\ \psi_1(y)\in C^1(\Gamma_2).$$

Поведение решения вида (8) в окрестности Γ_1 определяется равенством

$$u(x,y)=O\left(\exp\left[-a(0,0)W^{(1)}_{\frac{\alpha}{2}-1}(x,y)\right]\right)\quad\text{при}\quad x\to 0.$$

Для полученного интегрального представления решений уравнения (1) ставится и решается следующая граничная

Задача А. Требуется в области D найти решение уравнения (1) из класса $C_2(D)$, удовлетворяющее на Γ_1 и Γ_2 следующим граничным условиям:

$$\left.\begin{aligned}u(x,y)\big|_{y=0}&=f_1(x),\\ P^{\alpha}_{y,a}(u)\Big|_{x=0}&=g_1(y),\end{aligned}\right\}$$

где $f_1(x)$, $g_1(x)$ – соответственно заданные функции точек контуров Γ_1 и Γ_2.

Литература

1. Нахушев А.М. *О задаче Дарбу для гиперболических уравнений* // ДАН СССР. – 1970. – Т. 195. – № 4. – С. 776–779.

2. Бицадзе А.В. *Некоторые классы уравнений в частных производных.* – М.: Наука, 1981. – 448 с.

3. Раджабов Н. *Интегральные представления и граничные задачи для некоторых дифференциальных уравнений с сингулярной линей или сингулярными поверхностями*. Учебное пособие по спецкурсу, ч.4. – Душанбе, 1985. – 147 с.

4. Раджабов Н. *Введение в теорию дифференциальных уравнений в частных производных со сверхсингулярными коэффициентами*. – Душанбе: Изд. ТГУ, 1992. – 236 с.

5. Шамсудинов Ф.М. *Интегральные представления решений и граничные задачи для общего гиперболического уравнения второго порядка со сверхсингулярной коэффициентами* // ДАН РТ. – 2001. – Т. 44. – № 3-4. – С. 25–30.

6. Вирченко Н.А., Шамсудинов Ф.М. *Интегральные представления решений и граничные задачи для общего гиперболического уравнения второго порядка со сверхсингулярной точкой* // ДАН Украины. – 2003. – № 1. – С.17–22.

INTEGRAL REPRESENTATIONS OF SOLUTIONS FOR A SECOND ORDER HYPERBOLIC EQUATION WITH A SUPERSINGULAR POINT

F.M. Shamsudinov

In this paper, for a hyperbolic equation of the second order with a supersingular point, we obtain representations of the set of solutions by means of two arbitrary functions of one independent variable, the properties of the solutions obtained are studied, and also the boundary value problem A is investigated.

Keywords: integral representations, hyperbolic equation, set of solutions, rectangle, solution properties, boundary value problem.

УДК 517.52

О НЕКОРРЕКТНОСТИ ПРИЗНАКА ПОТОЧЕЧНОЙ СХОДИМОСТИ ДИНИ РЯДОВ ФУРЬЕ ПО ОБОБЩЁННЫМ СИСТЕМАМ ХААРА НА НУЛЬМЕРНЫХ ГРУППАХ

В.И. Щербаков[1]

1 *kafmathan@mail.ru*; Московский технический университет связи и информатики

В статье говорится, что полученный на модифицированном отрезке [0, 1] поточечный признак сходимости рядов Фурье по обобщённым системам Хаара S-признак Дини, который (для $\sup\limits_{n} p_n = \infty$ *) всегда лучше V-признака Дини (признака Дини-Виленкина) при распространении его на нульмерные компактные абелевы группы становится некорректным, ибо сходимость на группе может зависеть от выбора базисных элементов.*

Ключевые слова: нульмерная компактная абелева группа, модифицированный отрезок [0, 1], обобщённые системы Хаара, V-признак Дини (признак Дини-Виленкина), S-признак Дини.

Пусть $p_0 = 1, \{p_n\}_{n=1}^{\infty}$ – последовательность, состоящая из простых чисел; $m_n = \prod_{k=0}^{n} p_k \, (n = 0, 1, 2, \ldots)$. Всякое натуральное число n единственным образом можно разложить по формуле

$$n = \sum_{k=0}^{s} a_k m_k = a_s m_s + n', \tag{1}$$

где a_k, s и n' – целые с $0 \le a_k < p_{k+1}$; $1 \le a_s < p_{s+1}$; $0 \le n' < m_s$.

Пусть G — нульмерная компактная абелева группа (группа Виленкина) с операцией $\oplus$ и обратной операцией $\ominus$ и со вложенной системой подгрупп

$$G = G_0 \supset G_1 \supset G_2 \supset \ldots \supset G_n \supset \ldots \text{ и } \bigcap_{n=0}^{\infty} G_n = \{0_G\} \tag{2}$$

(0_G – нулевой элемент группы G) и фактор-группа $G_{n-1} \setminus G_n$ имеет порядок p_n $(n = 1, 2, \ldots)$. Определённая таким образом система подгрупп $\{G_n\}_{n=0}^{\infty}$ является системой окрестностей нуля. Относительно вышеуказанной топологии определяем предел и непрерывность функции (под функцией будем понимать отображение группы G во множество комплексных чисел $\mathbb{C}$). Получилась нульмерная компактная абелева группа, которую иногда называют группой Виленкина (её определил Н.Я. Виленкин [1]).

В каждом из смежных классов $G_{n-1} \setminus G_n$ выберем по элементу $e_n \, (n = 1, 2, \ldots)$, которые назовем базисными и зафиксируем. Тогда всякую точку $x \in G$ единственным образом можно разложить по формуле

$$x = x_1 e_1 \oplus x_2 e_2 \oplus \ldots \oplus x_n e_n \oplus \ldots, \tag{3}$$

где x_k– целые с $0 \le x_k < p_k$; для $a \in G$, по определению, $ka = \underbrace{a \oplus a \oplus \ldots \oplus a}_{k \text{ раз}}$ и $0a = 0_G$.

Число x_k в равенстве (3) будем называть **k-м коэффициентом** элемента $x \in G$ при его разложении по базису $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$.

Можно определить отображение группы G на отрезок [0, 1]:

$$x = x_1 e_1 \oplus x_2 e_2 \oplus \ldots \oplus x_n e_n \oplus \ldots \longmapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x_n}{m_n} \tag{4}$$

с нарушением взаимной однозначности только в $\{p_n\}$ -рациональных точках (точки $x_1 e_1 \oplus x_2 e_2 \oplus \ldots \oplus (x_n - 1) e_n \oplus (p_{n+1} - 1) e_{n+1} \oplus (p_{n+2} - 1) e_{n+2} \oplus \ldots \oplus (p_{n+k} - 1) e_{n+k} \oplus \ldots$ и $x_1 e_1 \oplus x_2 e_2 \oplus \ldots \oplus x_n e_n \oplus 0_G \oplus \ldots \oplus 0_G \oplus \ldots$ при отображении (4) переходят в одно и то же число). Отображение (4) иногда называют отображением Монна [2, 3].

Положив $\mu(x \oplus G_n) = \frac{1}{m_n}$, по схеме Лебега определяем меру (на борелевских множествах она совпадает с мерой Хаара) и абсолютно сходящийся интеграл на G. За $L(G)$ обозначим множество функций, интеграл от которых по группе G абсолютно сходится. Аналогично действительной прямой определяем ортогональные и ортонормированные системы функций. Рассмотрим следующую ортонормированную систему функций $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty} : \chi_0(x) \equiv 1; \chi_{m_k}(x) =$

$$\begin{cases} \sqrt{m_k} \exp\left(\frac{2i\pi x_{k+1}}{p_{k+1}}\right) & \text{, если } x \in G_k \\ 0 & \text{для } x \in G \setminus G_k \end{cases} \quad (k = 0, 1, 2, \ldots) \text{ и}$$

$$\chi_n(x) = \chi_{a_s m_s + n'}(x) = (\chi_{m_s}(x \ominus < \tfrac{n'}{m_s} >))^{a_s},$$

где x_k определены в формуле (3), s, a_s и n' – в равенстве (1), а $< \frac{n'}{m_s} >$ – "конечный" прообраз числа $\frac{n'}{m_s}$ при отображении Монна (4) (то есть все коэффициенты элемента $< \frac{n'}{m_s} >$ при его разложении по формуле (3), начиная с $(s+1)$-го, равны нулю).

Для $p_n \equiv 2$ система $\{\chi_n(x)\}_{n=o}^{\infty}$ совпадает с системой Хаара [4]; для $\sup\limits_n p_n < \infty$ она рассматривалась (на отрезке [0, 1]) Б.И. Голубовым и А.И. Рубинштейном [5]; для любых p_n (также на отрезке [0, 1]) — Б.И. Голубовым [6] (Б.И. Голубов и А.И. Рубинштейн [5], а также Б.И. Голубов [6] условие простоты на числа p_n не накладывали); на нульмерных компактных абелевых группах она рассматривалась С.Ф. Лукомским [7].

Известны следующие мажоранты ядер Дирихле по обобщённым системам Хаара $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$:

1. Мажоранта Виленкина (V-мажоранта):

$$V(x) = m_{n+1}, \text{ если } x \in G_n \setminus G_{n+1}; n = 0, 1, 2, \ldots$$

(в [1] $V(x)$ обозначена как $[\frac{1}{x}]$) ;

2. S-мажоранта

$$S(x) = \frac{m_n}{\sin \frac{\pi x_{n+1}}{p_{n+1}}} \text{ для } x \in G_n \setminus G_{n+1}; n = 0, 1, 2, \ldots \text{ , а } x_{n+1} \text{ определены в (3)}$$

(в [8] $S(x)$ обозначена как $q(x)$).

В зависимости от мажорант ядер Дирихле, имеются и два признака сходимости Дини для рядов Фурье по обобщённым системам Хаара на нульмерных компактных абелевых группах (см., например, [9, 10]; симметричные признаки Дини, за неимением места, мы здесь не расматриваем):

Теорема V (V-признак Дини или признак Дини-Виленкина). *Если справедливо условие*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \oplus t) - f(x)| V(t)\, dt = 0, \tag{5}$$

то ряд Фурье по обобщённой системе Хаара от функции $f(t) \in L(G)$ сходится к ней в точке $x \in G$.

Теорема S (S-признак Дини). *При выполнении условия*

$$\lim_{n\to\infty} \int\limits_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \oplus t) - f(x)| S(t)\, dt = 0, \tag{6}$$

ряд Фурье по обобщённой системе Хаара от функции $f(t) \in L(G)$ сходится к ней в точке $x \in G$.

(из этих теорем, в частности, следует, что для $\sup\limits_n p_n < \infty$ система $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ является системой сходимости).

К сожалению, S-мажоранта (а также S-признак Дини (в отличие от признака Дини-Виленкина)) зависит от выбора базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$, и при $\sup\limits_n p_n = \infty$ эта зависимость существенна. Имеют место следующая

Теорема 1. *Если* $\sup\limits_n p_n = \infty$ *, то существует непрерывная на группе* G *функция* $f(t)$ *такая, что при одном выборе базисных элементов* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *выполнено условие (6) (и, следовательно, ряд Фурье от функции* $f(t)$ *по обобщённой системе Хаара в точке* x *сходится), однако найдётся и иной выбор базисных элементов* $e'_n \in G_{n-1} \setminus G_n$ *(при этом обобщённая система Хаара* $\{\chi_n(x)\}_{n=0}^{\infty}$ *останется той же самой, однако изменится её нумерация), относительно которой ряд Фурье по (перенумерованной) обобщённой системе Хаара от той же самой функции* $f(t)$ *и в той же самой точке* $x \in G$ *разойдётся.*

Однако при любом выборе базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ соответствующий S-признак Дини для $\sup\limits_n p_n = \infty$ всегда лучше V-признака (который от выбора базисных элементов $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ не зависит), ибо справедлива следующая

Теорема 2. *Для* $\sup\limits_n p_n = \infty$ *при любых базисных элементах* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ *существует непрерывная на группе* G *функция* $f(t)$ *(зависящая, вообще говоря, от базисных элементов* $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$*), для которой выполнено условие (6) (и, следовательно, её ряд Фурье по обобщённой системе Хаара сходится в точке* x*), однако*

$$\int\limits_{G_n \setminus G_{n+1}} |f(x \oplus t) - f(x)| V(t)\, dt \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \infty.$$

Литература

1. Виленкин Н.Я. *Об одном классе полных ортонормальных систем* // Изв. АН СССР. Сер. матем. – 1947. – Т. 11, № 4. – С. 363—400.

2. Monna A.F. *Analysys non-Archimedence*. — Berlin – Heidelberg – N.Y.: Springer-Verlag, 1970. – 118 p.

3. Хренников А.Ю., Шелкович В.М. *Современный p-адический анализ и математическая физика. Теория и приложения*. – М.: Физматгиз, 2012. – 452 с.

4. Haar A. *Zur Theorie des Orthogonalischen Functionsysteme* // Math. Ann. – 1910. – V. 69. – P. 331–371.

5. Голубов Б.И., Рубинштейн А.И. *Об одном классе систем сходимости* // Матем. сб., Нов. сер. – 1966. – Т. 71. – Вып. 1. – С. 96–115.

6. Голубов Б.И. *Об одном классе полных ортонормальных систем* // Сиб. матем. журн. – 1968. – Т. IX, № 2. – С. 297–314.

7. Лукомский С.Ф. *О рядах Хаара на компактной нульмерной группе* // Изв. Сарат. ун-та, сер. матем., мех., информ., нов. сер. – 2009. – Т. 9, вып. 1. – С. 24–29.

8. Щербаков В.И. *О поточечной сходимости рядов Фурье по мультипликативным системам* // Вестн. МГУ, сер. матем. – 1983. – № 2. – С. 37–42.

9. Shcherbakov V.I. *A Majorants of the Dirichlet kernels and the Dini pointwise tests for generalized Haar systems* // Mathematical Notes. – 2017. – V. 101, № 3. – P. 542–565.

10. Щербаков В.И. *Мажоранты ядер Дирихле и поточечные признаки Дини для обобщённых систем Хаара* // Математические заметки. – 2017. – Т. 101, вып. 3. – С. 446–473.

ON THE VECTOR BOUNDARY VALUE RIEMANN PROBLEM ON RIEMANN SURFACE

V.I. Shcherbakov

We show that a S-Dini test of pointwise convergence of the Fourier series for generalized Haar's systems on the modified segment [0, 1], which is always better (for unbounded sequence $\{p_n\}_{n=1}^{\infty}$) than analogous V-Dini (Dini-Vilenkin) test, will be incorrect, if we want to extend it to the zero-dimensional abelian groups because the convergence on the groups may be depend of the choice of basic elements.
Keywords: zero-dimensional group, modified segment [0, 1], generalized Haar's systems, V-Dini test (Dini-Vilenkin test), S-Dini test.

УДК 519

О ПРЕОБРАЗОВАНИЯХ ЛЯПУНОВА

З.Я. Якупов[1]

1 *zymat@bk.ru*; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ (КНИТУ-КАИ)

Группы преобразований являются реальными объектами окружающего мира, о присутствии и о физической структуре которых можно судить по их влиянию на наши представления. К ним относятся, например, представления об однородности и изотропности пространства и времени, о динамическом подобии явлений, о галилеевой и лоренцовой инвариантности и т. п.

Ключевые слова: группы преобразований, обыкновенные дифференциальные уравнения, качественная теория, приводимость, методы сравнения.

Введение. Поскольку математические модели многих явлений реального мира формулируются в виде дифференциальных уравнений, то становится ясным, что одним из наиболее существенных приложений теории групп является их использование в общей теории дифференциальных уравнений [1]- [4]. Приоритет в области применения групповых методов к изучению дифференциальных уравнений принадлежит норвежскому математику С. Ли. Первоначально целью С. Ли было создание теории интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений на столь же надежной групповой основе, какая была создана Н. Абелем для решения алгебраических уравнений. В связи с этим С. Ли сформулировал и изучил фундаментальное понятие группы (группы Ли), допускаемой данной системой дифференциальных уравнений. В настоящее время математическое направление, предметом которого является совместное рассмотрение групп преобразований и допускающих эти группы дифференциальных уравнений, получило название группового анализа дифференциальных уравнений.

Методы. Круг задач группового анализа дифференциальных уравнений обширен и представляет собой область приложения теории и алгоритмов этого анализа [5]- [9]. Исходные предпосылки для использования теоретико-группового подхода к изучению дифференциальных уравнений, в частности обыкновенных, заключается в следующем [10].

Применение классических методов исследования к интегрированию обыкновенных дифференциальных уравнения оказывается недостаточно эффективным для решения ряда современных прикладных проблем: задач моделирования, численно-аналитического интегрирования уравнений, имеющих неединственное решение, некоторых обратных задач и тому подобных исследований.

В теории уравнений с частными производными хорошо зарекомендовали себя групповые методы, основанные, в первую очередь, на классической теории (непрерывных) групп Ли. В случае обыкновенных дифференциальных уравнений использование классического группового анализа также имеет некоторое ощутимое преимущество перед применением традиционных методов. Но конкретно непрерывные группы преобразований оказались малоэффективными для решения обыкновенных дифференциальных уравнений.

Последнее обстоятельство обусловлено тем, что задача отыскания непрерывной группы преобразований для обыкновенного дифференциального уравнения эквивалентна по сложности задаче его интегрирования. Поэтому на первый план при исследовании обыкновенных дифференциальных уравнений выдвигается поиск дискретных или понимаемых в обычном смысле групп преобразований, замкнутых на рассматриваемом классе уравнений [2]-[4]. Такое направление исследований позволило найти большое число новых интегрируемых уравнений, которые до сих пор не удавалось проинтегрировать классическими методами [8]- [9]. Также теория групп вообще проливает свет на целый ряд широко используемых на практике подходов и результатов по интегрированию конкретных типов уравнений и позволяет лучше рассмотреть внутренние связи между различными методами [5]- [7].

Заключение. Таким образом, одна из основных идей теоретико-группового подхода к теории обыкновенных дифференциальных уравнений заключается в следующем. Рассматривается некоторая группа преобразований (в частности, какая-либо группа преобразований Ляпунова) на конкретных математических объектах (уравнениях). Эта группа преобразований на заданном множестве объектов индуцирует отношение эквивалентности. Тем самым образуется фактор-множество, причем все эквивалентные объекты попадают в один класс эквивалентности. В результате такой факторизации исследуемое уравнение будет эквивалентно некоторому уравнению, взятому в качестве простейшего представителя данного класса эквивалентности. Нахождение этого простейшего уравнения – основная задача при изучении свойств решений исходного уравнения.

Литература

1. Якупов З.Я. *Группы преобразований Ляпунова и устойчивость решений нелинейных дифференциальных уравнений* // Автореф. дис… канд. физ.-мат. наук. – Нижний Новгород, 1994.

2. Филичев А.С., Якупов З.Я. *О групповом подходе к доказательству гипотезы* // Научно-техн. вестник Поволжья. – 2016. – № 4. – С. 116–119.

3. Якупов З.Я. *Ляпуновские преобразования стационарного уравнения Шрёдингера с возмущающим потенциалом* // Матем. моделир. – 1995. – Т. 7, № 5. – С. 71.

4. Yakupov Z.Ya. *About the Hadamard matrices* // Сб.: Наука в совр. инф. обществе. Матер. VI межд. научно-практ. конф. – 2015. – С. 115–118.

5. Якупов З.Я., Яруллин А.А. *О помехоустойчивом кодирова-нии* // Сб.: Фунд. наука и техн. - персп. разработки. Матер. VII межд. научно-практ. конф. НИЦ «Академический». – 2015. – С. 178–180.

6. Якупов З.Я., Яруллин А.А. *О роли коллективных стратегий в развитии нанотехнологий* // Сб.: Фунд. наука и техн. - персп. разработки. Матер. VII межд. научно-практ. конф. НИЦ «Академический». – 2015. – С. 181–183.

7. Галимова Р.К., Якупов З.Я. *Концепции магистерских программ* // Сб.: Фунд. наука и техн. - персп. разработки. Матер. VII межд. научно-практ. конф. НИЦ «Академический». – 2015. – С. 85–94.

8. Лутфуллин Б.Л., Якупов З.Я. *Язык RUST и реализация нечёткой логики* // Новая наука: Проблемы и перспективы. – 2016. – № 6-3 (85). – С. 42–50.

9. Галимова Р.К., Якупов З.Я. *Исследование решений уравнения Лапласа в технологических процессах с использованием парогазовых разрядов с жидкостными электродами* // Журнал Средневолжск. матем. общества. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 135–139.

10. Якупов З.Я., Галимова Р.К. *Об адамаровых матрцах* // В кн.: Математика в современном мире. Матер. Межд. конф. посв. 150-летию Д.А. Граве. – 2013. – С. 40–41.

ON THE TRANSFORMATIONS OF LYAPUNOV

Z.Ya. Yakupov

The groups of transformations of differentials simulate real objects of the surrounding world, the presence and the physical structure of which can be judged by their influence on our ideas. These include, for example, ideas of the homogeneity and isotropy of space and time, the dynamic similarity of phenomena, the Galilean and Lorentz invariance, and so on.

Keywords: transformation groups, ordinary differential equations, qualitative theory, reducibility, comparison methods.

УДК 519.6

О НАПРАВЛЕНИИ RBHM И ЕГО ЭВОЛЮЦИИ

З.Я. Якупов[1], Р.К. Галимова[2]

1 *zymat@bk.ru*; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ (КНИТУ-КАИ)

2 *zymat@bk.ru*; Казанский национальный исследовательский технический университет им. А.Н. Туполева – КАИ (КНИТУ-КАИ)

В современном мире передача информации через электронные каналы связи, а также обработка (в любом виде) информации осуществляется при помощи ее кодирования. В кодировании, в свою очередь, применяются матрицы Адамара. В настоящее время неизвестно, существуют ли матрицы Адамара всех порядков, кратных четырем. Нахождение матриц высших порядков дает возможность более качественно передавать и обрабатывать информацию. Работа посвящена изучению проблемы Адамара, нахождению зависимостей между порядками матриц и описывающими их формулами, модернизации известного списка формул для выражения порядков этих матриц.

Ключевые слова: теория кодирования информации, помехоустойчивое кодирование, матрицы Адамара, коды Рида-Соломона, гипотеза Адамара.

Введение. Перспективным направлением в исследовании данного вопроса является матричное кодирование. Матрицы Адамара, рассмотренные французским математиком Жаком Адамаром еще в 1893 году, являются, на наш взгляд, одним из ключевых понятий такого направления [1]. Матрица Адамара - это такая квадратная матрица порядка n, элементами которой являются 1 и −1. Любые попарно взятые различные строки или столбцы матрицы Адамара всегда удовлетворяют условию ортогональности: их скалярное произведение равно нулю. Уже сейчас матрицы Адамара находят своё применение при решении различных задач теории кодирования [2]-[4]. Итак, использование матриц Адамара в помехоустойчивом кодировании, видимо, способно помочь устранить некоторые неудобства, связанные с применением кодов Рида-Соломона. Однако, такие **нерешенные проблемы**, как: - недоказанность существования матриц Адамара любых порядков, кратных четырем (гипотеза Адамара), - отсутствие признака наличия ошибок в раскодированном сообщении, - отсутствие алгоритма устранения ошибок в раскодированном сообщении, тормозят приложение матриц Адамара в данной области помехоустойчивого кодирования. Можно надеяться, что решение **проблем**, описанных выше, совсем скоро станет одной из приоритетных задач теории кодирования информации.

Методы. Теоретической и методологической основой исследований в области изучения матриц Адамара являются научные достижения отечественных и зарубежных специалистов [5]-[6]. В ходе выполнения исследований использовались известные способы доказательства соответствия матриц критериям матриц Адамара, а также методы Уильямсона, Элиха, Голдберга, Бомера-Холла.

Заключение. Итак, матричный (Адамара) подход оказывается весьма плодотворным и приводит к неожиданным научным результатам [7]-[12].

Литература

1. Якупов З.Я. *О генезисе Адамаровых матриц* // Аналитическая механика, устойчивость и управление: Труды X Межд. Четаевской конф. Т.1. Секция 1. Аналит. механика. Казань, 12-16 июня 2012 г. – Казань: Изд-во Казан. гос. техн. ун-та, 2012. – 548 с.

2. Якупов З.Я., Хазиев Р.М. *Адамаровы матрицы* // Fundamental and applied sciences today. Vol. 2: Матер. межд. научно-практ. конф. CreateSpace. 4900 LaCross Road. North Charleston, SC, USA 29406. – Москва: spc Academic, 2013. – С. 147–149.

3. Галимова Р.К., Якупов З.Я. *Уравнения эллиптического типа в моделировании технологических процессов* // Труды Математического центра им. Н. И. Лобачевского. — Т.51. – Казань: Изд-во Казан. матем. общества, изд-во Академии наук РТ, 2015. – С. 144–146.

4. Yakupov Z. Ya. *About the Hadamard matrices* // Science in the modern information society VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 13-14.07.2015, Vol. 3. – North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. – P. 115–118.

5. *Дискретная математика и математические вопросы кибернетики*. Т.1. – М.: Наука, 1974. – 311 с.

6. Hedayat A. , Wallis W.D. *Hadamard matrices and their applications*. – University of Illinois at Chicago Circle and University of Newcastle. The Annals of Statistics. – 1978. – V. 6, № 6.

7. Якупов З.Я., Лутфуллин Б.Л. *Язык RUST и реализация нечёткой логики* // Новая наука: проблемы и перспективы: Межд. научн. период. изд. по итогам Межд. научно-практ. конф. (04 июня 2016 г., г. Стерлитамак). В 3 ч. – Ч.3. – С. 42–49.

8. Галимова Р.К., Якупов З.Я. *Исследование решений уравнения Лапласа в технологических процессах с использованием парогазовых разрядов с жидкостными электродами* // Журнал Средневолжск. Матем. Общ. – 2015. – Т. 17, № 1. – С. 135–139.

9. Галимова Р.К., Якупов З.Я. *Концепции магистерских программ* // Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol. 2. – North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. – P. 85–94.

10. Якупов З.Я., Яруллин А.А. *О помехоустойчивом кодировании* // Fundamental science and technology–promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol. 2. – North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. – P. 178–180.

11. Якупов З.Я., Яруллин А.А. *О роли коллективных стратегий в развитии нанотехнологий* // Fundamental science and technology – promising developments VI: Proceedings of the Conference/ North Charleston, 1-2.12.2015, Vol. 2. – North Charleston, SC, USA: CreatSpace, 2015. – P. 181–183.

12. Якупов З.Я., Филичев А.С.*О групповом подходе к доказательству гипотезы Адамара* // Научно-техн. вестник Поволжья. – 2016. – №4. – С. 116–119.

ABOUT THE DIRECTION OF RBHM AND ITS EVOLUTION

Z.Ya. Yakupov, R.K. Galimova

In the modern world, the transmission of information through electronic communication channels, as well as processing (in any form) of information , is carried out by means of its coding. In the coding, in turn, the Hadamard matrices are used. At present, it is not known whether there exist Hadamard matrices of all orders that are divisible by four. Finding matrices of higher orders makes it possible to transfer and process information more qualitatively. The work is devoted to the study of the Hadamard problem, the determination of the dependencies between the orders of matrices and the formulas describing them, the modernization of a well-known list of formulas for expressing the orders of these matrices.

Keywords: theory of information coding, noise-immune coding, Hadamard matrices, Reed-Solomon codes, Hadamard's conjecture.

УДК 517.54

КОНФОРМНОЕ ОТОБРАЖЕНИЕ КРУГОВОЙ ОБЛАСТИ С РАЗРЕЗАМИ ПО ДУГАМ НА ПРОИЗВОЛЬНУЮ МНОГОСВЯЗНУЮ ОБЛАСТЬ С ГЛАДКОЙ ГРАНИЦЕЙ

Д.Ф. Абзалилов[1], Е.А. Широкова[2]

1 *damir.abzalilov@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет
2 *elena.shirokova@kpfu.ru*; Казанский (Приволжский) федеральный университет

Приближённый метод построения конформного отображения путём репараметризации границы обобщен на случай многосвязных областей. Метод основан на сведении решения интегрального уравнения к системе линейных дифференциальных уравнений и не требует итерационного процесса. Круговое кольцо с разрезами по дугам делится на кольцевые области с границами вдоль разрезов и отображающая функция на каждой из этих областей представляется в виде ряда Лорана.

Ключевые слова: конформное отображение, многосвязная область, интегральные уравнения Фредгольма.

В работе представлен метод приближённого конформного отображения кольца с разрезами по дугам на заданную многосвязную область с гладкой границей. Теория этого метода для односвязных областей была развита в работах [1,2], обобщение на двусвязную область и численная реализация получены в [3]. Метод основан на репараметризации границы области. Преимуществами метода репараметризации являются следующие: метод не требует дополнительных построений (таких, как триангуляция, упаковка кругами и т.п.), вспомогательных конформных отображений (напр., с помощью интеграла Кристоффеля-Шварца), метод не использует решения вспомогательных краевых задач (метод Wegmann-а, метод сопряжённых функций), он не требует итерационного процесса.

Решение интегрального уравнения сведено к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений. Приближённое решение получается при усечении системы. Круговая область разбивается на кольцевые области с границами по дуговым разрезам, на каждой из которых решение записано в виде усеченного ряда Лорана. Такой вид решения обеспечивает гладкость и позволяет в аналитической форме проводить его дифференцирование и интегрирование, что важно при решении прикладных задач.

Рассмотрим $(N+1)$-связную область D_z ограниченную гладкой внешней кривой L_0 и гладкими внутренними кривыми L_s заданными в параметрическом виде

$$L_s = \{z = z_s(t),\ z_s(0) = z_s(2\pi),\ t \in [0,2\pi]\},\ s = \overline{0,N}.$$

Мы предполагаем, что точка $z = 0$ лежит внутри контура L_0. Эта точка может либо лежать внутри области D_z либо вне её, т.е. в области, ограниченной одним из внутренних контуров, который обозначим L_N.

Построим конформное отображение единичного круга $D_\zeta = \{\zeta = re^{i\theta} : r < 1, \theta \in [0,2\pi]\}$ (в случае $0 \in D_z$) или кругового кольца $D_\zeta = \{\zeta = re^{i\theta} : R_N < r < 1, \theta \in [0,2\pi]\}$ (в случае $0 \notin D_z$) с разрезами ℓ_s по дугам $\zeta = R_s e^{i\theta}, \theta \in [\alpha_s, \beta_s]$ на область D_z путем перепараметризации границы. Мы будем искать функции $\theta_s(t)$, $s = \overline{0,N}$, $t \in [0,2\pi]$, такие, что $z_s(t(\theta))$ являются граничными значениями аналитической функции $z(\zeta)$ в D_ζ. Параметры R_s, α_s, β_s, определяющие область D_ζ, также являются неизвестными и находятся в процессе решения задачи.

Рассмотрим аналитическую в области D_z функцию $\zeta(z)$, отображающую область D_z на D_ζ (с соответствием $\zeta(0) = 0$ в случае $0 \in D_z$) и аналитическую в D_z функцию $\ln \frac{z}{\zeta(z)}$. Согласно [1] необходимым и достаточным условием для аналитичности $\ln \frac{z}{\zeta(z)}$ в D_z является граничное условие

$$\ln \frac{z_s(t)}{R_s e^{i\theta_s(t)}} = \sum_{\sigma=0}^{N} \frac{1}{\pi i} \int_0^{2\pi} \ln\left(\frac{z_\sigma(\tau)}{R_\sigma e^{i\theta_\sigma(\tau)}}\right) \frac{z'_\sigma(\tau)}{z_\sigma(\tau) - z_s(t)} d\tau, \quad s = \overline{0,N}. \tag{1}$$

Мнимая часть соотношения (1) записывается в виде уравнения Фредгольма

$$q'_s(t) = \sum_{\sigma=0}^{N} \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} q'_\sigma(\tau) K_{\sigma s}(\tau, t) d\tau + p_s(t), \quad s = \overline{0,N}, \tag{2}$$

$$K_{\sigma s}(\tau,t)=-\left(\arg[z_\sigma(\tau)-z_s(t)]\right)'_t,\quad p_s(t)=\sum_{\sigma=0}^{N}\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi}[\ln|z_\sigma(\tau)|]'(\ln|z_\sigma(\tau)-z_s(t)|)'_t\,d\tau,$$

где $q_s(t)=\arg z_s(t)-\theta_s(t)$, $s=\overline{0,N}$.

Приближенное решение этого уравнения будем искать в виде ряда Фурье

$$q'_s(t)=\sum_{j=1}^{M}a_{js}\cos jt+b_{js}\sin jt,\ t\in[0,2\pi],\quad s=\overline{0,N}. \tag{3}$$

Существование решения (2) и сходимость приближённого решения к точному для односвязной области при $M\to\infty$ показано в работе [2]. Интегральное уравнение Фредгольма второго рода (2) сведено к линейной системе для коэффициентов Фурье a_{js} and b_{js}.

Функции $q_s(t)$, $s=\overline{0,N}$ могут быть восстановлены по производным (3) с точностью до неизвестных постоянных q_{0s}:

$$q_s(t)=q_{0s}+\tilde{q}_s(t),\quad \tilde{q}_s(t)=\sum_{j=1}^{M}\frac{a_{js}}{j}\sin jt-\frac{b_{js}}{j}\cos jt,\ t\in[0,2\pi].$$

Далее находим $\tilde{\theta}_s(t)=\arg z_s(t)-\tilde{q}_s(t)$, $\theta_s(t)=\tilde{\theta}_s(t)-q_{0s}$. Если перепараметризовать границы, используя обратные функции: $z_s(\theta)=z_s(t_s(\theta))$, то можно восстановить отображающую функцию $z(\zeta)$ по интегральной формуле Коши:

$$z(\zeta)=\frac{1}{2\pi}\sum_{s=0}^{N}\int_{\ell_s}\frac{z_s(\theta)R_se^{i\theta}}{R_se^{i\theta}-\zeta}d\theta=\frac{1}{2\pi}\sum_{s=0}^{N}\int_0^{2\pi}\frac{z_s(t)R_se^{i\theta_s(t)}\theta'_s(t)}{R_se^{i\theta_s(t)}-\zeta}dt. \tag{4}$$

Полученное решение может быть приближённо найдено в виде полиномов Лорана в каждом из колец $R_{s_0}\le|\zeta|\le R_{s_0-1}$:

$$z(\zeta)=\sum_{\substack{0\le s\le N\\ |\zeta|<R_s}}\sum_{k=0}^{M}c_{ks}\left(\frac{\zeta}{Q_s}\right)^k+\sum_{\substack{0\le s\le N\\ |\zeta|>R_s}}\sum_{k=1}^{M}c_{-ks}\left(\frac{Q_s}{\zeta}\right)^k,$$

где

$$Q_s=R_se^{-iq_{0s}} \tag{5}$$

– неизвестные постоянные, а коэффициенты c_{ks} вычисляются по формулам

$$c_{ks}=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}z_s(t)e^{-ik\tilde{\theta}_s(t)}\theta'_s(t)dt,\ k=\overline{0,M},$$

$$c_{-ks}=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}z_s(t)e^{ik\tilde{\theta}_s(t)}\theta'_s(t)dt,\ k=\overline{1,M}.$$

Согласно представлению в виде интеграла Коши (4), вне единичного круга ($|\zeta|>1$) функция $z(\zeta)$ обращается в нуль, это приводит к соотношениям

$$\sum_{s=0}^{N}c_{-ks}Q_s^k=0,\quad k=\overline{1,M}. \tag{6}$$

В случае $0 \notin D_z$ интегральное представление (4) обращается в нуль внутри круга ($|\zeta| < R_N$), следовательно

$$\sum_{s=0}^{N} c_{ks} Q_s^{-k} = 0, \quad k = \overline{0, M}. \tag{7}$$

Комплексные постоянные Q_s (5) находятся из соотношений (6) и (7) методом наименьших квадратов. Для этого ищется минимум функции

$$\varepsilon(Q_s) = \varepsilon_1(Q_s) + \varepsilon_2(Q_s),$$

$$\varepsilon_1(Q_s) = \sum_{k=1}^{M} \left(\sum_{s=0}^{N} c_{-ks} Q_s^k \right)^2, \qquad \varepsilon_2(Q_s) = \begin{cases} \sum\limits_{k=0}^{M} \left(\sum\limits_{s=0}^{N} c_{ks} Q_s^{-k} \right)^2, & 0 \notin D_z, \\ 0, & 0 \in D_z. \end{cases}$$

Для точного решения минимальное значение ε равно нулю, для приближённого оно показывает точность вычислений. Параметры α_s и β_s определяются как наименьшее и наибольшее значения $\theta_s(t)$.

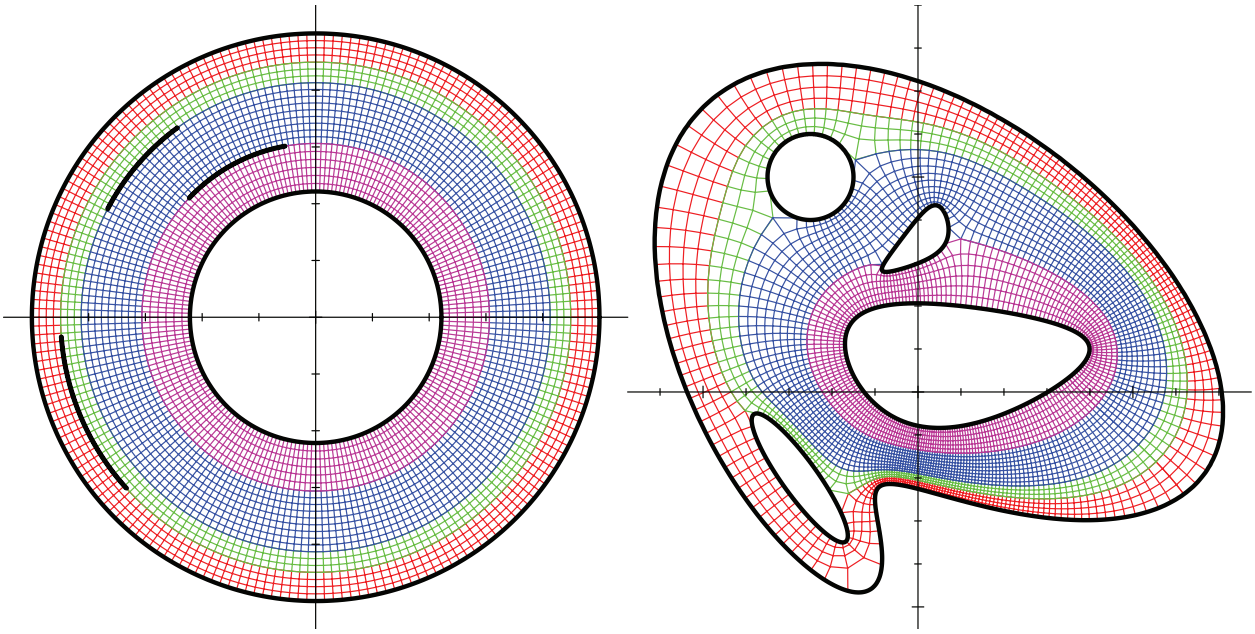


Рис. 1. Пример конформного отображения

На рис. 1 показан пример конформного отображения для области, границы которой являются невыпуклыми кривыми:

$$L_0 = \{z = e^{it} - 0.5ie^{2it} + 0.2e^{-2it}\},$$
$$L_1 = \{z = -0.55 - 0.4i - 0.1(1-i)e^{it} - 0.1(1-2i)e^{-it}\},$$
$$L_2 = \{z = -0.5 + i + 0.2e^{-it}\},$$
$$L_3 = \{z = 0.7i + (1+i)(0.04e^{it} + 0.1e^{-it}) - 0.02e^{2it}\},$$
$$L_4 = \{z = 0.2 + 0.15i - 0.1(1+i)e^{it} - 0.3(1-i)e^{-it} - 0.03(1-i)e^{2it}\}.$$

Исследовалось влияние числа M коэффициентов ряда Фурье на точность расчётов. Результаты представлены в табл. 1, в ней также указано затраченное время.

Расчёты проводились на персональном компьютере Intel Core i5-3330 3Ghz CPU, 4Gb RAM, программа написана на языке Fortran.

Таблица 1.1. Зависимость расчётов от числа коэффициентов ряда Фурье

M	ε	Time (s)
25	$0.4916 \cdot 10^{-3}$	0.28
50	$0.3010 \cdot 10^{-4}$	0.42
100	$0.1862 \cdot 10^{-5}$	1.07
200	$0.1158 \cdot 10^{-6}$	4.07
400	$0.7219 \cdot 10^{-8}$	19.84

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект 15-01-06135).

Литература

1. Широкова Е. А. *О приближенном конформном отображении единичного круга на односвязную область* // Изв. вузов. Математика – 2014. – № 3. – С. 57–67.

2. Shirokova E. A., Ivanshin P. N. *Approximate Conformal Mappings and Elasticity Theory* // J. of Compl. Analysis. – 2016.

3. Abzalilov D. F., Shirokova E. A. *The approximate conformal mapping onto simply and doubly connected domains* // Complex Variables and Elliptic Equations – 2017. – V.62. – P. 554–565.

THE CONFORMAL MAPPING OF AN ANNULUS WITH CIRCULAR SLITS ONTO AN ARBITRARY MULTIPLY CONNECTED DOMAIN WITH SMOOTH BOUNDARY

D.F. Abzalilov, E.A. Shirokova

The method of boundary curve reparametrization is generalized to the case of multiply connected domains. We construct the approximate analytical conformal mapping of the unit disk or an annulus with circular slits onto an arbitrary given multiply connected bounded domain. The method is based on integral equations solution which is reduced to a linear system solution and does not require iterations. The annulus with slits is divided in annuli with the slits over their borders and the mapping function in each annular region has the form of a Laurent polynomial. The method is easily computable.

Keywords: conformal mapping, multiply connected domain, Fredholm integral equation.

АВТОРСКИЙ УКАЗАТЕЛЬ

A
Abdullayev F.G. 10
Abdullayev G.A. 10
Akgьn R. 10, 11
Aptekarev A.I. 11

E
Elshenawy A. 12

F
Fattahi A. 15

K
Kaliraj A.S. 16

M
Muthukumar P. 17

S
Shirokova E.A. 12

V
Vodopyanov S.K. 18

А
Абдуллина З.Ф. 382
Абед С.А. 72
Абзалилов Д.Ф. 417
Абрамова В.В. 22
Абубакиров Н.Р. 23
Авхадиев Ф.Г. 27
Агафонов А.А. 159
Агачев Ю.Р. 29, 33, 37
Аксентьев Л.А. 23
Алипова К.А. 241
Алхалифах С.А. 40
Амозова К.Ф. 41, 45
Антонов Н.Ю. 47
Асанбеков У.К. 49
Асташкин С.В. 51
Ахмадиев М.Г. 55

Б
Балгимбаева Ш.А. 58
Барышев А.А. 62
Беднов Б.Б. 66
Бердников Г.С. 68
Бикчентаев А.М. 72
Бондаренко Г.А. 62
Брук В.М. 75
Буланов А.П. 79

В
Веселова Л.В. 84, 89
Вихарев С.С. 82
Волков Б.О. 91
Волосивец С.С. 94

Г
Габбасов Н.С. 97
Галатенко В.В. 99
Галимова З.Х. 102
Галимова Р.К. 415
Галимянов А.Ф. 29
Ганенкова Е.Г. 41, 45
Гафиятуллина Л.И. 104
Гималтдинова А.А. 105
Гладышев Ю.А. 107
Голубов Б.И. 112
Горбачев Д.В. 113
Горская Т.Ю. 321
Горяйнов В.В. 117
Граф С.Ю. 122, 125
Григорьева Е.Г. 128
Григорян С.А. 131
Григорян Т.А. 228
Губайдуллина С.А. 135
Гумеров Р.Н. 136
Гущина В.А. 138

Д
Данченко В.И. 143
Данченко Д.Я. 143
Даутова Д.Н. 146

Дудов С.И. 22, 244

Е

Еникеева С.Р. 148

З

Закирова З.Х. 150
Зонова Н.Ю. 153

И

Ибрагимова Н.А. 156
Иванов В.И. 113
Иваньшин П.Н. 158
Игнатьев Ю.Г. 159
Исаев К.П. 162
Исмагилов А.А. 166

К

Казанцев А.В. 135
Калирай С. 167
Калитвин А.С. 170
Калитвин В.А. 170
Калманович В.В. 107, 344
Камалетдинов А.Ш. 174
Карачик В.В. 178
Катковская И.Н. 179
Кац Б.А. 181
Кац Д.Б. 184
Кашин Б.С. 187
Каюмов И.Р. 40, 166, 187
Каюмова А.В. 166
Кечко Е.П. 340
Кириллов М.И. 188
Клячин А.А. 192
Клячин В.А. 128
Кожевникова Л.М. 174
Кокурин М.М. 196
Кокурин М.Ю. 194
Колесников И.А. 199
Кондрашов А.Н. 200
Королева О.А. 205
Котов П.А. 207
Кривошеева О.А. 209
Кротов В.Г. 179
Крусс Ю.С. 212
Кужаев А.Ф. 216
Кузнецова А.Ю. 217
Кулагина М.Ф. 221
Курин А.Ф. 224

Л

Липачева Е.В. 131, 228
Лосев А.Г. 232
Лукашенко Т.П. 99
Лукомский Д.С. 62
Лукомский С.Ф. 235
Луценко А.В. 162
Лыков К.В. 237

М

Магомедова В.Г. 304
Мазепа Е.А. 248
Макаров А.В. 244
Макаров Р.В. 246
Малютина А.Н. 49, 241, 275
Мардвилко Т.С. 252
Мартемьянова Н.В. 253
Миронов А.Н. 260
Миронова С.Р. 181
Мисюк В.Р. 257
Мокейчев В.С. 264
Мушко М.Д. 235

Н

Напалков В.В. 307
Насибуллин Р.Г. 265, 269
Насыров С.Р. 146
Нахапетян Б.С. 271
Никитин А.С. 188
Новик А. 275
Новиков Ан.Ан. 84, 278
Новиков В.В. 280

О

Ожегова А.В. 284

П

Павлова Н.Г. 287
Панченко А.Г. 192
Пекарский А.А. 252

Першагин М.Ю. 33
Пиров Р. 290
Погодина А.Ю. 181
Половинкин Е.С. 293
Полубоярова Н.М. 297
Поннусами С. 40, 41, 45, 166, 167
Прохоров Д.В. 300

Р

Рамазанов А.-Р.К. 304
Рахимова А.И. 307
Розит А.П. 382
Румянцев Р.А. 221

С

Сабитов К.Б. 308
Сабитова Ю.К. 311
Савина А.В. 37
Садовничий В.А. 99
Салахудинов Р.Г. 104, 316
Салехова И.Г. 153
Салимов Р.Б. 317, 321
Самойлова Я.И. 125
Сафаров Д.С. 325
Семенко Е.В. 329
Семенко Т.И. 329
Серегина Е.В. 344
Сидоров А.М. 264
Сидоров С.Н. 333
Ситдиков А.С. 131, 188
Смирнов О.И. 113
Солиев Ю.С. 334
Сперанский К.С. 337
Старков В.В. 167
Старовойтов А.П. 340
Степович М.А. 344
Сулейманов А.З. 317
Султанбеков Ф.Ф. 348

Т

Терехин П.А. 337
Тилеубаев Т.Е. 349
Тимергалиев Б.С. 354
Тихонов О.Е. 84, 89
Трухляева И.В. 361
Трынин А.Ю. 357
Тукмаков Д.А. 364
Турилова Е. 367
Тухлиев К. 370

У

Уткина Е.А. 156

Ф

Федотов А.И. 372
Филиппов В.И. 376
Фуфаев Д.В. 380

Х

Хабибуллин Б.Н. 382
Хайруллина Л.Э. 284
Халиуллин С.Г. 386
Хамматова Д.М. 187
Хамхалтер Я. 367
Хасанов Ю.Х. 389
Хасанова Э.Н. 393
Хачатрян Л.А. 271
Хинкканен А. 187
Холматова З.Ш. 278

Ч

Чистяков В.В. 394, 399
Чистякова С.А. 399
Чумаченко С.А. 403

Ш

Шабалин П.Л. 393
Шакиров И.А. 404
Шакиров Н.З. 166
Шамсудинов Ф.М. 406
Шафигуллин И.К. 269
Широкова Е.А. 417

Щ

Щербаков В.И. 409

Ю

Юлмухаметов Р.С. 162

Я

Якупов З.Я. 413, 415

ТРУДЫ
МАТЕМАТИЧЕСКОГО ЦЕНТРА
ИМЕНИ Н. И. ЛОБАЧЕВСКОГО

ТОМ 54

ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ, ЕЕ ПРИЛОЖЕНИЯ И СМЕЖНЫЕ ВОПРОСЫ

Материалы Тринадцатой международной Казанской летней научной школы-конференции (Казань, 21 – 27 августа 2017 г.)

Подписано в печать 16.08.2017
Бумага офсетная. Формат 60x84 1/16.
П.л. 26,25. Печать ризографическая.
Тираж 200 экз. Заказ 16.8/17-1

Издательство Академии наук
Республики Татарстан
420111, г. Казань, ул. Баумана, 20
e-mail: izdat.anrt@yandex.ru