

УДК 519.6

РЕШЕНИЕ ЗАДАЧИ О ПРЕПЯТСТВИИ МЕТОДОМ ДЕКОМПОЗИЦИИ ОБЛАСТИ

М.А. Игнатьева, А.В. Лапин

Аннотация

Метод декомпозиции области с неналегающими подобластями применяется к решению задачи о препятствии. Препятствие, а значит и свободная граница, расположено в подобласти исходной области, следовательно, известно, где решение может потерять гладкость. Декомпозиция осуществляется с использованием информации о расположении препятствия.

Строятся сеточные аппроксимации исходной задачи на несогласованных по подобластям сетках; при аппроксимации задачи в подобласти, содержащей свободную границу, используется более мелкая сетка.

Для решения сеточных задач предлагаются два итерационных метода, которые трактуются как нелинейные аналоги метода расщепления Дугласа – Рэкфорда. Доказывается сходимость итераций, обсуждаются вопросы реализации методов, приводятся результаты вычислительных экспериментов.

Введение

Метод декомпозиции области с неналегающими подобластями основан на разделении области, в которой нужно решить краевую задачу, на подобласти и аппроксимациях задач в подобластиах. Это позволяет строить итерационные методы, на каждом шаге которых требуется решать приближенные задачи в подобластиах, связанные между собой некоторыми условиями на линиях разрезов области. При сеточных аппроксимациях (методы конечных элементов, конечных разностей, конечных объемов) задачи в подобластиах имеют меньшую алгебраическую размерность, чем исходная сеточная задача. Более того, в случае простой геометрии подобластей и при использовании структурированных сеток для решения задач в подобластиах можно применять эффективные итерационные, а в ряде случаев и прямые методы. Отметим также, что метод декомпозиции области дает возможность применения различных аппроксимаций в подобластиах и естественным образом приспособлен к построению параллельных алгоритмов.

В настоящее время методы декомпозиции области с неналегающими подобластями наибольшее развитие получили для линейных эллиптических уравнений второго порядка (см., например, монографии и обзорные статьи [1–7] и труды конференций по методам декомпозиции области [8, 9]). В то же время, построению и исследованию этих методов для нелинейных эллиптических задач со свободными границами посвящены лишь немногочисленные статьи (см. [10–13]).

В настоящей работе метод декомпозиции области с аппроксимацией исходной задачи по методу конечных элементов применяется для решения задачи о препятствии, когда препятствие расположено в некоторой подобласти исходной области. В подобласти, содержащей препятствие, т. е. и свободную границу, решение задачи в общем случае обладает малой гладкостью, поэтому в ней используется более

мелкая сетка. Сетки в подобластях строятся частично согласованными: на границе раздела подобластей множество узлов крупной сетки является подмножеством множества узлов мелкой сетки. На приближенное решение (кусочно полиномиальную функцию из пространства конечных элементов) накладывается условие непрерывности при переходе через границу раздела подобластей. Это условие является дополнительным ограничением в приближенной задаче и при построении итерационных методов либо присоединяется к имеющемуся ограничению в области, либо снимается с помощью множителей Лагранжа. В результате предлагаются два итерационных метода. Оба они могут рассматриваться как нелинейные аналоги метода расщепления Дугласа – Рэнфорда. Доказывается сходимость итераций, обсуждаются вопросы реализации методов, приводятся результаты вычислительных экспериментов.

1. Постановка задачи, эквивалентные формулировки

Пусть $\Omega \subset \mathbb{R}^2$ – ограниченная область с кусочно-гладкой границей $\partial\Omega$, разделяемая кусочно-гладкой кривой S на две подобласти Ω_1 и Ω_2 . Определим множество $K_0 = \{u \in H_0^1(\Omega) \mid u(x) \geq 0 \text{ для п. в. } x \in \Omega_2\}$ и рассмотрим следующую задачу о препятствии: найти функцию $u \in K_0$, доставляющую минимум функционалу

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \int_{\Omega} f u dx, \quad f \in L_2(\Omega). \quad (1)$$

Известно [14], что эта задача имеет единственное решение $u \in K_0 \cap H^2(\Omega)$ и эквивалентна вариационному неравенству

$$u \in K_0 : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla(v - u) dx \geq \int_{\Omega} f(v - u) dx \quad \forall v \in K_0. \quad (2)$$

Приведем еще несколько эквивалентных формулировок задачи (1), которые будут использованы при аппроксимации по методу конечных элементов. Определим следующие пространства и множество:

$$V_i = \{u_i \in H^1(\Omega_i) \mid u_i(x) = 0 \text{ для п. в. } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega, \}, \quad i = 1, 2,$$

$$K = \{(u_1, u_2) \in V_1 \times V_2 \mid u_1(x) = u_2(x) \text{ для п. в. } x \in S, \quad u_2(x) \geq 0 \text{ для п. в. } x \in \Omega_2\}.$$

Будем искать пару $(u_1, u_2) \in K$, доставляющую минимум функционалу

$$J_{1,2}(u_1, u_2) = J_1(u_1) + J_2(u_2), \quad J_i(u_i) = \frac{1}{2} \int_{\Omega_i} |\nabla u_i|^2 dx - \int_{\Omega_i} f u_i dx. \quad (3)$$

Нетрудно видеть, что задачи (3) и (1) эквивалентны в следующем смысле. Если (u_1, u_2) – решение задачи (3), то функция $u(x) = \{u_1(x), x \in \Omega_1; u_2(x), x \in \Omega_2\}$ является решением задачи (1) и обратно, если u – решение задачи (1) и u_i – сужения функции u на Ω_i , $i = 1, 2$, то (u_1, u_2) является решением (3).

Функционал $J_{1,2}$ дифференцируем по Гато на $V_1 \times V_2$, и его дифференциал имеет вид

$$J'_{1,2}(u_1, u_2)(v_1, v_2) = J'_1(u_1)v_1 + J'_2(u_2)v_2, \quad J'_i(u_i)v_i = \int_{\Omega_i} \nabla u_i \nabla v_i dx - \int_{\Omega_i} f v_i dx.$$

Пусть $I_K(u) = \{0, \text{ если } u \in K; +\infty \text{ иначе}\}$ – индикаторная функция множества K и ∂I_K – ее субдифференциал. Задача минимизации функционала (3) эквивалентна вариационному неравенству [14]

$$\begin{aligned} \text{найти } (u_1, u_2) \in V_1 \times V_2 : & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \nabla u_i \nabla (v_i - u_i) dx + I_K(v_1, v_2) - \\ & - I_K(u_1, u_2) \geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f(v_i - u_i) dx \quad \forall (v_1, v_2) \in V_1 \times V_2, \end{aligned} \quad (4)$$

которое в свою очередь может быть записано в виде включения

$$J'_1(u_1) + J'_2(u_2) + \partial I_K(u_1, u_2) \ni 0. \quad (5)$$

1.1. Аппроксимация. Построим сеточную аппроксимацию задачи (4), используя метод конечных элементов и квадратурные формулы. Для простоты будем считать, что $\Omega = (0, 1) \times (0, 1)$, $\Omega_1 = (0, 0.5) \times (0, 1)$, $\Omega_2 = (0.5, 1) \times (0, 1)$. Построим в $\bar{\Omega}_1$ квадратную сетку с шагом H , а в $\bar{\Omega}_2$ – квадратную сетку с шагом $h = H/m$, где $m > 0$ – фиксированное целое число. Пусть ω_1 и ω_2 – множества внутренних узлов этих сеток, $\partial\omega_i$ – узлы, лежащие на границе области Ω_i , и $s_i = \{x \in \partial\omega_i \mid x \in S\}$. Множество элементов (квадратных ячеек), образованных линиями сетки и лежащих в $\bar{\Omega}_i$, обозначим через \mathcal{T}_h^i .

Определим конечномерные пространства и множество:

$$V_{ih} = \{u_{ih} \in V_i \mid u_{ih} \in \mathbb{Q}_1(x) \text{ для всех } \delta \in \mathcal{T}_h^i\}, \quad i = 1, 2,$$

$$K_h = \{(u_{1h}, u_{2h}) \in V_{1h} \times V_{2h} \mid u_{1h}(x) = u_{2h}(x) \text{ для } x \in S, u_{2h}(x) \geq 0 \text{ для } x \in \Omega_2\},$$

где $\mathbb{Q}_1(x)$ – пространство билинейных функций. Заменив в (4) u_i на u_{ih} и K на K_h , получим аппроксимацию задачи (4) по методу конечных элементов:

$$\begin{aligned} \text{найти } (u_{1h}, u_{2h}) \in V_{1h} \times V_{2h} : & \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} \nabla u_{ih} \nabla (v_{ih} - u_{ih}) dx + I_{K_h}(v_{1h}, v_{2h}) - \\ & - I_{K_h}(u_{1h}, u_{2h}) \geq \sum_{i=1}^2 \int_{\Omega_i} f(v_{ih} - u_{ih}) dx \quad \forall (v_{1h}, v_{2h}) \in V_{1h} \times V_{2h}. \end{aligned} \quad (6)$$

Применим теперь квадратурные формулы для аппроксимации интегралов в (6). Пусть S_δ – квадратурная формула трапеций на элементе δ :

$$S_\delta(v) = \frac{\text{mes } \delta}{4} \sum_{i=1}^4 v(d_i),$$

где через $\{d_i\}$ обозначены вершины элемента $\delta = [x_1, x_1+h] \times [x_2, x_2+h]$. Поставим в соответствие функциям $u_{ih} \in V_{ih}$ векторы узловых параметров $u_i \in \mathbb{R}^{N_i}$, $i = 1, 2$, такие, что $u_{1,j} = u_{1h}(x_j)$ для $x_j \in \omega_1 \cup s_1$, $u_{2,j} = u_{2h}(x_j)$ для $x_j \in \omega_2 \cup s_2$, а N_i равно числу точек множества $\omega_i \cup s_i$. Положим

$$(A_i u_i, v_i) = \sum_{\delta \in \mathcal{T}_h^i} S_\delta(\nabla u_{ih}(x) \nabla v_{ih}(x)), \quad (f_i, v_i) = \sum_{\delta \in \mathcal{T}_h^i} S_\delta(f(x) v_{ih}(x)),$$

где одним и тем же символом (\cdot, \cdot) обозначено евклидово скалярное произведение как в \mathbb{R}^{N_1} , так и в \mathbb{R}^{N_2} . Введем обозначения для множеств:

$$M_1 = \{u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2} \mid u_{2,i} = \Pi_H(u_1)(x_i) \text{ для } x_i \in S\},$$

где $\Pi_H(u_1)(x_i)$ – значение в точке x_i кусочно-линейной функции, построенной по значениям u_1 в точках s_1 ,

$$\tilde{M}_2 = \{u_2 \in \mathbb{R}^{N_2} \mid u_{2,i} \geq 0 \text{ для } x_i \in \omega_2\}, \quad M_2 = \{u = (u_1, u_2) \mid u_2 \in \tilde{M}_2\}, \quad M = M_1 \cap M_2.$$

Сеточная схема для задачи (4) имеет вид: найти вектор $u = (u_1, u_2) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$ такой, что для всех $v = (v_1, v_2) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \mathbb{R}^{N_2}$

$$(A_1 u_1, v_1 - u_1) + (A_2 u_2, v_2 - u_2) + I_M(v) - I_M(u) \geq (f_1, v_1 - u_1) + (f_2, v_2 - u_2).$$

Запишем это вариационное неравенство в виде включения. Пусть

$$A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad f = \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}, \quad C = \partial I_M.$$

Тогда задачу (6) можно записать в виде

$$Au + Cu \ni f. \quad (7)$$

Матрица A в (7) является симметричной и положительно определенной, C – максимально монотонный оператор. Отсюда следует однозначная разрешимость (7) [15].

Легко убедиться, что для индикаторной функции множества M справедливо равенство $I_M = I_{M_1 \cap M_2} = I_{M_1} + I_{M_2}$. Более того, вектор (u_1, u_2) с положительными компонентами, удовлетворяющий условию $u_{1,i} = u_{2,i}$ на S , принадлежит $\text{int}M_2 \cap M_1$, поэтому (см. [16]) $\partial(I_{M_1} + I_{M_2}) = \partial I_{M_1} + \partial I_{M_2}$. Пусть $C_1 = \partial I_{M_1}$, $C_2 = \partial I_{M_2}$ и $\tilde{C}_2 = \partial I_{\tilde{M}_2}$ – субдифференциалы индикаторных функций соответствующих множеств. Тогда $C = C_1 + C_2$, и включение (7) можно написать в виде

$$\begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{C}_2 u_2 \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} u_1 \\ u_2 \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} f_1 \\ f_2 \end{pmatrix}.$$

1.2. Метод расщепления. Применим для решения включения (7) итерационный метод

$$D^{-1}B(u^{n+1} - u^n) + Au^n + C(B(u^{n+1} - u^n) + u^n) \ni f, \quad n = 0, 1, 2, \dots \quad (8)$$

с некоторыми невырожденными матрицами B и D . Реализацию каждой итерации метода (8) будем осуществлять при помощи процедуры расщепления

$$\begin{cases} D^{-1}(u^{n+1/2} - u^n) + Au^n + Cu^{n+1/2} \ni f, \\ B(u^{n+1} - u^n) = u^{n+1/2} - u^n. \end{cases} \quad (9)$$

В качестве D в (9) выберем диагональную матрицу итерационных параметров

$$D = \text{diag}(\underbrace{\tau_1, \dots, \tau_1}_{N_1}, \underbrace{\tau_2, \dots, \tau_2}_{N_2}), \quad \tau_1, \tau_2 > 0.$$

Выбор матрицы D в таком виде мотивирован тем, что в подобластях Ω_i имеем сетки с разными шагами, следовательно, каждая из задач в подобластях должна решаться со своим итерационным параметром.

Второе уравнение в (9) при выборе оператора B в блочно-диагональном виде расщепляется на две несвязанные системы линейных уравнений, соответствующие подобластям Ω_1 и Ω_2 . Например, в случае $B = E + DA$ (нелинейный вариант метода Дугласа–Рэкфорда) получаем

$$\begin{cases} (E_1 + \tau_1 A_1)(u_1^{n+1} - u_1^n) = u_1^{n+1/2} - u_1^n & \text{в } \omega_1 \cup s_1, \\ (E_2 + \tau_2 A_2)(u_2^{n+1} - u_2^n) = u_2^{n+1/2} - u_2^n & \text{в } \omega_2 \cup s_2, \end{cases}$$

где E, E_i – единичные матрицы соответствующих размеров.

Для включения вида (7) с положительно определенной матрицей A сходимость метода Дугласа–Рэкфорда доказана в работе [10], где также получены оценки скорости сходимости и показано, что в случае блочно-диагональной матрицы A оптимальные итерационные параметры вычисляются по формуле $\tau_i = 1/\sqrt{\lambda_{i,\max}\lambda_{i,\min}}$, где $\lambda_{i,\max}$ и $\lambda_{i,\min}$ – максимальное и минимальное собственные числа матрицы A_i .

Остановимся на вопросах решения включения в (9), которое при указанном выборе матрицы D приобретает вид

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} u_1^{n+1/2} \\ \frac{1}{\tau_2} u_2^{n+1/2} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{C}_2 u_2^{n+1/2} \end{pmatrix} + C_1 \begin{pmatrix} u_1^{n+1/2} \\ u_2^{n+1/2} \end{pmatrix} \ni \begin{pmatrix} \frac{1}{\tau_1} u_1^n + f_1 - A_1 u_1^n \\ \frac{1}{\tau_2} u_2^n + f_2 - A_2 u_2^n \end{pmatrix}. \quad (10)$$

Решение включения (10) для координат вектора $u^{n+1/2}$, соответствующих внутренним сеточным точкам подобластей Ω_1 и Ω_2 , осуществляется по явным формулам:

$$\begin{cases} u_1^{n+1/2} = \tau_1(f_1 - A_1 u_1^n) + u_1^n & \text{в } \omega_1, \\ u_2^{n+1/2} = \text{Pr}_{\geq 0}(\tau_2(f_2 - A_2 u_2^n) + u_2^n) & \text{в } \omega_2, \end{cases}$$

где $\text{Pr}_{\geq 0}(x) = \max\{x, 0\}$ – операция проектирования на множество неотрицательных чисел.

Для координат вектора $u^{n+1/2}$, соответствующих сеточным точкам на разрезе S , получим следующую задачу:

$$D^{-1}u^{n+1/2} + \partial I_{M_1}(u^{n+1/2}) \ni f - Au^n + D^{-1}u^n.$$

Обозначив правую часть включения через $\Phi = (\Phi_1, \Phi_2)$, $\Phi_i = \frac{1}{\tau_i}u_i^n + f_i - A_i u_i^n$, $i = 1, 2$, запишем эквивалентную задачу минимизации:

$$\min_{(u_1, u_2) \in M_1} g(u_1, u_2), \quad g(u_1, u_2) = \frac{1}{2\tau_1}(u_1, u_1) + \frac{1}{2\tau_2}(u_2, u_2) - (\Phi_1, u_1) - (\Phi_2, u_2). \quad (11)$$

Введем следующие нумерации узлов s_1 и s_2 :

$$s_1 = \{x_k \mid x_k = (0.5, (k-1)H), \quad k = 1, \dots, n_1\},$$

$$s_2 = \{x_j \mid x_j = (0.5, (j-1)h), \quad j = 1, \dots, n_2\},$$

где n_i – число точек множества s_i . Тогда узел $x_j \in s_2$ с номером $j = (k-1)m+1$ будет совпадать с узлом $x_k \in s_1$. По определению множества M_1 имеем

$$\begin{cases} u_{2j} = u_{1k}, & \text{если } j = (k-1)m+1, \\ u_{2j} = u_{1,k+1} \frac{i}{m} + u_{1,k} \left(1 - \frac{i}{m}\right), & \text{если } j = (k-1)m+i+1, \quad i = 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (12)$$

Здесь узлы с номерами $(k-1)m+i+1$, $i = 1, \dots, m-1$ являются «висячими» узлами множества s_2 (т. е. в этих точках нет соответствующих узлов множества s_1), принадлежащими интервалу $((k-1)H, kH)$ по x_2 . Записывая функцию g в (11) более подробно, получим

$$\begin{aligned} g(u_1, u_2) = & \frac{1}{2\tau_1} \sum_{k=1}^{n_1} u_{1,k}^2 + \frac{1}{2\tau_2} \sum_{k=1}^{n_1} u_{2,(k-1)m+1}^2 + \frac{1}{2\tau_2} \sum_{k=1}^{n_1-1} \sum_{i=1}^{m-1} u_{2,(ik)}^2 - \\ & - \sum_{k=1}^{n_1} \Phi_{1,k} u_{1,k} - \sum_{k=1}^{n_1} \Phi_{2,(k-1)m+1} u_{2,(k-1)m+1} - \sum_{k=1}^{n_1-1} \sum_{i=1}^{m-1} \Phi_{2,(ik)} u_{2,(ik)}, \end{aligned}$$

где через (ik) обозначен индекс $j = (k-1)m+i+1$. Используя (12), исключим значения u_2 и получим задачу безусловной минимизации функции

$$\begin{aligned} f(u_1) \equiv g(u_1, u_2(u_1)) = & \left(\frac{1}{2\tau_1} + \frac{1}{2\tau_2} \right) \sum_{k=1}^{n_1} u_{1,k}^2 + \\ & + \frac{1}{2\tau_2} \sum_{k=1}^{n_1-1} \sum_{i=1}^{m-1} (a_i u_{1,k+1} + (1-a_i) u_{1,k})^2 - \sum_{k=1}^{n_1} (\Phi_{1,k} + \Phi_{2,(k-1)m+1}) u_{1,k} - \\ & - \sum_{k=1}^{n_1-1} \sum_{i=1}^{m-1} \Phi_{2,(ik)} (a_i u_{1,k+1} + (1-a_i) u_{1,k}), \quad a_i = \frac{i}{m}. \end{aligned}$$

Уравнение Эйлера для этой задачи – система линейных алгебраических уравнений

$$Qu = b, \quad (13)$$

с трехдиагональной матрицей $Q = \{q_{k,l}\} \in \mathbb{R}^{n_1 \times n_1}$, элементы которой определены равенствами

$$q_{k,k} = \left(\frac{1}{\tau_1} + \frac{1}{\tau_2} \right) + \frac{1}{\tau_2} \sum_{i=1}^{m-1} (a_i^2 + (1-a_i)^2), \quad q_{k,k-1} = q_{k,k+1} = \frac{1}{\tau_2} \sum_{i=1}^{m-1} a_i (1-a_i).$$

Очевидно, что все ненулевые элементы матрицы Q положительны и Q имеет строгое диагональное преобладание. Для решения (13) может быть использован, например, метод прогонки или метод Холецкого.

2. Метод декомпозиции области с использованием функции Лагранжа

Пусть, как и выше, $V_i = \{u_i \in H^1(\Omega_i) \mid u_i(x) = 0 \text{ для п. в. } x \in \partial\Omega_i \cap \partial\Omega\}$, $i = 1, 2$, и определено выпуклое замкнутое подмножество подпространства V_2 :

$$K_2 = \{u_2 \in V_2 \mid u_2(x) \geq 0 \text{ для п. в. } x \in \Omega_2\}.$$

Для задачи (3) определим функцию Лагранжа

$$\mathcal{L} : V_1 \times K_2 \times L_2(S) \rightarrow \mathbb{R}, \quad \mathcal{L}(u_1, u_2, \lambda) = J_1(u_1) + J_2(u_2) + \int_S \lambda(u_1 - u_2) dS \quad (14)$$

и перейдем от задачи (3) к задаче поиска седловой точки лагранжиана (14). Если (u_1, u_2, λ) – седловая точка \mathcal{L} , т. е.

$$\mathcal{L}(u_1, u_2, \lambda) = \sup_{\mu} \inf_{v_1, v_2} \mathcal{L}(v_1, v_2, \mu) = \inf_{v_1, v_2} \sup_{\mu} \mathcal{L}(v_1, v_2, \mu),$$

то $u(x) = \{u_1(x), x \in \Omega_1; u_2(x), x \in \Omega_2\}$ является решением исходной задачи [16]. Необходимыми и достаточными условиями того, что тройка (u_1, u_2, λ) есть седловая точка лагранжиана (14), являются следующие соотношения [16]:

$$\mathcal{L}'_{u_1}(u_1, u_2, \lambda) = 0, \quad \mathcal{L}'_{u_2}(u_1, u_2, \lambda) + \partial I_{K_2}(u_2) \ni 0, \quad \mathcal{L}'_\lambda(u_1, u_2, \lambda) = 0. \quad (15)$$

В рассматриваемом случае система (15) принимает вид: найти тройку $(u_1, u_2, \lambda) \in V_1 \times K_2 \times L_2(S)$ такую, что

$$\begin{aligned} \int_{\Omega_1} \nabla u_1 \nabla v_1 dx + \int_S \lambda v_1 d\Gamma &= \int_{\Omega_1} f_1 v_1 dx \quad \forall v_1 \in V_1, \\ \int_{\Omega_2} \nabla u_2 \nabla (v_2 - u_2) dx - \int_S \lambda (v_2 - u_2) d\Gamma &\geq \int_{\Omega_2} f_2 (v_2 - u_2) dx \quad \forall v_2 \in K_2, \\ \int_S (u_1 - u_2) \mu d\Gamma &= 0 \quad \forall \mu \in L_2(S). \end{aligned} \quad (16)$$

Докажем существование и единственность решения задачи (16). Как уже отмечалось выше, решение u задачи (1) принадлежит $H^2(\Omega)$. Пусть $u_i = u|_{\Omega_i}$ – сужения функции u на подобласти Ω_i . Из вариационного неравенства (2) с учетом гладкости решения $u \in H^2(\Omega)$ следуют поточечные (в смысле «почти всюду») соотношения

$$\begin{cases} -\Delta u_1 = f_1, & x \in \Omega_1, \\ -\Delta u_2 - f_2 \geq 0, \quad u_2 \geq 0, \quad (-\Delta u_2 - f_2)u_2 = 0, & x \in \Omega_2, \\ \frac{\partial u_1}{\partial \mathbf{n}_1} = -\frac{\partial u_2}{\partial \mathbf{n}_2}, \quad u_1 = u_2 & x \in S, \\ u_1 = 0, & x \in \partial\Omega_1 \setminus S, \\ u_2 = 0, & x \in \partial\Omega_2 \setminus S, \end{cases} \quad (17)$$

где \mathbf{n}_1 и \mathbf{n}_2 – единичные векторы внешних нормалей к Ω_1 и Ω_2 на границе S . Положив $\lambda = \partial u / \partial \mathbf{n}_2 \in L_2(S)$, из поточечных постановок (17) стандартной техникой получаем обобщенные постановки – интегральное тождество и вариационное неравенство в (16). Третье уравнение в (16) очевидно выполнено. Таким образом, тройка (u_1, u_2, λ) – решение задачи (16). Из интегрального тождества и вариационного неравенства в (16) легко получить единственность u_1 и u_2 и, как следствие, единственность $\lambda = \partial u / \partial \mathbf{n}_2$.

2.1. Аппроксимация. Так же, как в п. 1.1, построим в области Ω сетку, определим конечномерные пространства

$$V_{ih} = \{u_{ih} \in V_i \mid u_{ih} \in \mathbb{Q}_1(x) \text{ для всех } \delta \in \mathcal{T}_h^i\},$$

$$\Lambda_h = \text{tr} V_{2h} – \text{пространство следов функций из } V_{2h} \text{ на } S$$

и множество

$$K_{2h} = \{u_{2h} \in V_{2h} \mid u_{2h}(x) \geq 0 \text{ для } x \in \Omega_2\}.$$

Аппроксимацией задачи (16) по методу конечных элементов назовем следующую задачу: найти тройку $(u_{1h}, u_{2h}, \lambda_h) \in V_{1h} \times K_{2h} \times \Lambda_h$ такую, что для любых

$$(v_{1h}, v_{2h}, \mu_h) \in V_{1h} \times K_{2h} \times \Lambda_h$$

$$\begin{aligned} & \int_{\Omega_1} \nabla u_{1h} \nabla v_{1h} dx + \int_S \lambda_h v_{1h} d\Gamma = \int_{\Omega_1} f v_{1h} dx, \\ & \int_{\Omega_2} \nabla u_{2h} \nabla (v_{2h} - u_{2h}) dx - \int_S \lambda_h (v_{2h} - u_{2h}) d\Gamma \geq \int_{\Omega_2} f (v_{2h} - u_{2h}) dx, \\ & \int_S (u_{1h} - u_{2h}) \mu_h d\Gamma = 0. \end{aligned} \quad (18)$$

Для аппроксимации интегралов по подобластям Ω_i , $i = 1, 2$, снова будем использовать составную формулу трапеций по соответствующим квадратным элементам. Далее, обозначим через $\mathcal{S}_h = \{\sigma\}$ разбиение S на отрезки длины h , где h – шаг мелкой сетки, и для аппроксимации интегралов по отрезкам $\sigma \in S$ применим формулу трапеций:

$$\int_{\sigma} v dx \approx E_{\sigma}(v) = \frac{h}{2}(v(x_2) + v(x_2 + h)), \quad \sigma = [x_2, x_2 + h].$$

Поставим в соответствие функциям $u_{ih} \in V_{ih}$ векторы узловых параметров $u_i \in \mathbb{R}^{N_i}$, $i = 1, 2$, где N_i равно числу точек множества $\omega_i \cup s_i$, в соответствие λ_h – вектор $\lambda \in \mathbb{R}^{N_{\lambda}}$, N_{λ} равно числу точек s_2 , и положим

$$\begin{aligned} (A_i u_i, v_i) &= \sum_{\delta \in \mathcal{T}_i} S_{\delta}(\nabla u_{ih}(x) \nabla v_{ih}(x)), \quad (f_i, v_i) = \sum_{\delta \in \mathcal{T}_i} S_{\delta}(f(x) v_{ih}(x)), \\ (R_i \lambda, v_i) &= \sum_{\sigma \in \mathcal{S}_h} E_{\sigma}(\lambda_h, v_{ih}), \quad i = 1, 2. \end{aligned} \quad (19)$$

Как и в п. 1.1 определим множество

$$\tilde{M}_2 = \{u_2 \in \mathbb{R}^{N_2} \mid u_{2,i} \geq 0 \text{ для } x \in \omega_2\} \quad (20)$$

и максимально монотонный оператор $\tilde{C}_2 = \partial I_{\tilde{M}_2}$.

Сеточной аппроксимацией (16) будет следующая система

$$\begin{aligned} A_1 u_1 + R_1 \lambda &= f_1, \\ A_2 u_2 + \tilde{C}_2 u_2 + R_2 \lambda &\ni f_2, \\ R_1^T u_1 + R_2^T u_2 &= 0. \end{aligned} \quad (21)$$

Приведем также запись этой системы в терминах сеточных функций и сеточных операторов. Будем использовать обозначения $\Delta_H u = u_{x_1 \bar{x}_1} + u_{x_2 \bar{x}_2}$, $\Delta_h u = u_{x_1 \bar{x}_1} + u_{x_2 \bar{x}_2}$ для сеточных операторов Лапласа на сетках с шагами H в Ω_1 и h в Ω_2 , в тот время как для разностных производных u_{x_i} , $u_{\bar{x}_i}$ обозначения одинаковые для разных сеток. Тогда сеточная задача запишется в виде

$$\begin{cases} -\Delta_H u_1 = f_1, & x \in \omega_1, \\ \frac{2}{H} u_{1 \bar{x}_1} - u_{1 x_2 \bar{x}_2} = -\frac{2}{H} \lambda_{\Sigma} + f_1, & x \in s_1, \\ u_1 = 0, & x \in \partial \omega_1 \setminus s_1, \end{cases} \quad (22)$$

$$\text{где } \lambda_{\Sigma}(x_i) = \left(\lambda(x_i) + \sum_{j=1}^{m-1} (\lambda(x_i - jh) + \lambda(x_i + jh)) (1 - j/m) \right) / m,$$

$$\begin{cases} -\Delta_h u_2 + \tilde{C}_2 u_2 \ni f_2, & x \in \omega_2, \\ -\frac{2}{h} u_{2x_1} - u_{2x_2 \bar{x}_2} = \frac{2}{h} \lambda + f_2, & x \in s_2, \\ u_2 = 0, & x \in \partial \omega_2 \setminus s_2, \end{cases} \quad (23)$$

$$\begin{cases} u_{2j} = u_{1k}, & j = (k-1)m+1, \\ u_{2j} = u_{1,k+1} \frac{i}{m} + u_{1,k} \left(1 - \frac{i}{m}\right), & j = (k-1)m+i+1, \quad i = 1, \dots, m-1. \end{cases} \quad (24)$$

Пусть

$$u = (u_1, u_2)^T, \quad f = (f_1, f_2)^T,$$

$$R = \begin{pmatrix} R_1 \\ R_2 \end{pmatrix}, \quad C = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & \tilde{C}_2 \end{pmatrix}, \quad A = \begin{pmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & A_2 \end{pmatrix}, \quad (25)$$

$$f, u \in \mathbb{R}^{N_u}, N_u = N_1 + N_2; \quad A, C : \mathbb{R}^{N_u} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}; \quad R : \mathbb{R}^{N_\lambda} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}.$$

Тогда систему (21) можно записать следующим образом:

$$\begin{cases} Au + Cu + R\lambda \ni f, \\ -R^T u = 0. \end{cases}$$

Наконец, введя обозначения

$$y = (u, \lambda)^T, \quad F = (f, 0)^T,$$

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} A & R \\ -R^T & 0 \end{pmatrix}, \quad \mathcal{C} = \begin{pmatrix} C & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad (26)$$

получим

$$\mathcal{A}y + \mathcal{C}y \ni F, \quad (27)$$

где \mathcal{A} – положительно полуопределенная матрица, а именно

$$\exists \alpha > 0 : (\mathcal{A}y, y) = (Au, u) \geq \alpha \|u\|^2.$$

Теорема 1. Решение задачи (27) существует и единствено.

Доказательство. Рассмотрим задачу

$$\min_{u \in \tilde{M}_1 \cap \tilde{M}_2} \frac{1}{2} (Au, u) - (f, u), \quad (28)$$

где $A = A^T > 0$, $A : \mathbb{R}^{N_u} \rightarrow \mathbb{R}^{N_u}$, $\tilde{M}_1 = \{u \in \mathbb{R}^N \mid R^T u = 0\}$ с прямоугольной матрицей R , матрицы A и R определены в (25), \tilde{M}_2 определено в (20). Множество $\tilde{M}_1 \cap \tilde{M}_2$ не пусто, так как вектор $u \equiv 0$ принадлежит этому множеству. Задача (28) имеет единственное решение, так как функционал квадратичный, а множество $\tilde{M}_1 \cap \tilde{M}_2$ – выпуклое, замкнутое и непустое.

Нетрудно построить вектор u с положительными компонентами, соответствующими узлам сетки ω_2 и удовлетворяющими (24). Такой вектор принадлежит множеству $\text{int} \tilde{M}_2 \cap \tilde{M}_1$, поэтому $\partial(I_{\tilde{M}_1} + I_{\tilde{M}_2}) = \partial I_{\tilde{M}_1} + \partial I_{\tilde{M}_2}$. Следовательно, задача (28) равносильна следующей

$$Au + \partial I_{\tilde{M}_1}(u) + \partial I_{\tilde{M}_2}(u) \ni f. \quad (29)$$

Иначе говоря, если $u \in \tilde{M}_1 \cap \tilde{M}_2$ – решение (28), то

$$\exists \chi \in \partial I_{\tilde{M}_2}(u), \quad \exists \xi \in \partial I_{\tilde{M}_1}(u) : \quad Au + \chi + \xi = f.$$

Последнее означает, что

$$-(Au + \chi - f) = \xi \in \partial I_{\tilde{M}_1}(u) \Leftrightarrow (Au + \chi - f, v) = 0 \quad \forall v \in \tilde{M}_1.$$

Множество \tilde{M}_1 по определению является ядром оператора R^T . Таким образом, $(Au + \chi - f) \in (\text{Ker } R^T)^\perp = \text{Im } R$ [17], и задача $R\lambda = f - \chi - Au$ имеет решение. Это означает, что пара (u, λ) является решением системы

$$\begin{cases} Au + \chi + R\lambda = f, & \chi \in Cu, \\ -R^T u = 0. \end{cases} \quad (30)$$

Единственность u в (30) следует из единственности решения (28), остается показать единственность λ . Пусть существуют λ_1 и λ_2 , удовлетворяющие (30). Поскольку в рассматриваемой задаче ограничения на u присутствуют лишь во внутренних точках Ω_2 , то $\chi_i \equiv 0$ для i , соответствующих узлам s_2 . Подставив λ_1 и λ_2 в первое уравнение (30) и, вычитая почленно одно уравнение из другого, получим $R(\lambda_1 - \lambda_2) = 0$. Из (23) следует, что прямоугольная матрица R содержит диагональный блок размера $N_\lambda \times N_\lambda$, на диагонали которого стоят положительные числа, т. е. матрица R является матрицей полного ранга. Отсюда заключаем, что $\lambda_1 - \lambda_2 \equiv 0$. \square

2.2. Метод расщепления.

Запишем схему расщепления для задачи (27):

$$\begin{cases} D^{-1}(E + DC)y^{n+1/2} \ni D^{-1}y^n + F - \mathcal{A}y^n, \\ B(y^{n+1} - y^n) = y^{n+1/2} - y^n, \end{cases} \quad (31)$$

где

$$B = E + D\mathcal{A} = \begin{pmatrix} E_1 + \tau_1 A_1 & 0 & -\tau_1 R_1 \\ 0 & E_2 + \tau_2 A_2 & -\tau_2 R_2 \\ -\tau_3 R_1^T & -\tau_3 R_2^T & E_3 \end{pmatrix}. \quad (32)$$

Здесь

$$D = \text{diag}(\underbrace{\tau_1, \dots, \tau_1}_{N_1}, \underbrace{\tau_2, \dots, \tau_2}_{N_2}, \underbrace{\tau_3, \dots, \tau_3}_{N_\lambda}), \quad \tau_i > 0, \quad i = 1, 2, 3,$$

является диагональной матрицей итерационных параметров, такой, что каждая из задач для нахождения u_1 , u_2 и λ имеет свой постоянный итерационный параметр; E_i , $i = 1, 2, 3$, – единичные матрицы соответствующих размеров.

Первое включение в (31) распадается на следующие подзадачи:

$$\begin{cases} u_1^{n+1/2} = \tau_1(f_1 - A_1 u_1^n - R_1^T \lambda^n) + u_1^n, \\ u_2^{n+1/2} = \text{Pr}_{\geq 0}(\tau_2(f_2 - A_2 u_2^n - R_2^T \lambda^n) + u_2^n), \\ \lambda^{n+1/2} = \tau_3(R_1^T u_1^n + R_2^T u_2^n) + \lambda^n, \end{cases} \quad (33)$$

решение которых осуществляется по явным формулам.

Второе уравнение, в отличие от случая п. 1.2, представляет собой связанный через λ^{n+1} систему в точках S

$$\begin{cases} (E_1 + \tau_1 A_1)(u_1^{n+1} - u_1^n) + \tau_1 R_1(\lambda^{n+1} - \lambda^n) = u_1^{n+1/2} - u_1^n, \\ (E_2 + \tau_2 A_2)(u_2^{n+2} - u_2^n) + \tau_2 R_2(\lambda^{n+1} - \lambda^n) = u_2^{n+1/2} - u_2^n, \\ \lambda^{n+1} - \lambda^n - \tau_3 R_1^T(u_1^{n+1} - u_1^n) - \tau_3 R_2^T(u_2^{n+1} - u_2^n) = \lambda^{n+1/2} - \lambda^n. \end{cases}$$

Приведем формулировку утверждений из [18], которые будут использованы при доказательстве сходимости метода (31)–(32).

Напомним, что оператор $T : K \rightarrow K$, где $K \subset V$ – выпуклое, замкнутое множество гильбертова пространства V , называется *нерастягивающим*, если

$$\|Tx - Ty\| \leq \|x - y\| \quad \forall x, y \in K$$

и *жестко нерастягивающим*, если

$$(Tx - Ty, x - y) \geq \|Tx - Ty\|^2 \quad \forall x, y \in K.$$

Предложение 1 [18]. Пусть $T_1, T_2 : K \rightarrow K$ – жестко нерастягивающие операторы, тогда $S = T_1(2T_2 - E) + E - T_2$ – жестко нерастягивающий.

Предложение 2 [18]. Пусть оператор $G : K \rightarrow K$ – жестко нерастягивающий, и существует по крайней мере одна его неподвижная точка. Тогда итерации метода $v^{n+1} = Gv^n$ слабо сходятся к v , где $v = Gv$ – неподвижная точка оператора G .

Теорема 2. Итерации метода (31)–(32) сходятся к решению задачи (27) при любом выборе матрицы $D = D^T > 0$.

Доказательство. Введем обозначения

$$Ty = \mathcal{C}y - F, \quad J_A = (E + D\mathcal{A})^{-1}, \quad J_Ty = (E + DT)^{-1}y, \quad J_Av^n = y^n.$$

Тогда включение (27) примет вид

$$\mathcal{A}y + Ty \ni 0,$$

а итерационный метод (31) можно записать как

$$v^{n+1} = J_T(2J_A - E)v^n + (E - J_A)v^n. \quad (34)$$

Пусть пространство векторов оснащено скалярным произведением $(u, v)_{D^{-1}} = (D^{-1}u, v)$, где (\cdot, \cdot) – евклидово скалярное произведение. Обозначим через H пространство векторов с введенным скалярным произведением и докажем, что оператор $G = J_T(2J_A - E) + E - J_A$ является жестко нерастягивающим в H , т. е. для любых $u, v \in \mathbb{R}^n$ выполняется неравенство

$$(Gu - Gv, u - v)_{D^{-1}} \geq \|Gu - Gv\|_{D^{-1}}^2.$$

Согласно предложению 1, для этого достаточно доказать, что J_A и J_B – жестко нерастягивающие в H .

Обозначив $J_Au = x$ и $J_Av = y$, получим

$$\begin{aligned} (J_Au - J_Av, u - v)_{D^{-1}} &= (x - y, (E + D\mathcal{A})x - (E + D\mathcal{A})y)_{D^{-1}} = \\ &= \|x - y\|_{D^{-1}}^2 + (\mathcal{A}x - \mathcal{A}y, x - y)_{D^{-1}} \geq \|x - y\|_{D^{-1}}^2 = \|J_Au - J_Av\|_{D^{-1}}^2, \end{aligned}$$

т. е. J_A – жестко нерастягивающий.

Аналогично,

$$\begin{aligned} (J_T u - J_T v, u - v)_{D^{-1}} &= (x - y, (E + D\mathcal{C})x - (E + D\mathcal{C})y)_{D^{-1}} \geqslant \\ &\geqslant \|x - y\|_{D^{-1}}^2 = \|J_T u - J_T v\|_{D^{-1}}^2. \end{aligned}$$

Таким образом, G – жестко нерастягивающий в H , и из предложения 2 следует, что $v^n \rightarrow v$ при $n \rightarrow \infty$, где $v = Gv$ – единственная неподвижная точка оператора G . Это равносильно существованию единственного решения задачи (27) $y = (E + D\mathcal{A})^{-1}v$. \square

3. Численные результаты

Для сравнения предложенных методов решения двух полученных конечномерных задач (7) и (27) была проведена серия числовых расчетов. Методы тестировались на примере, когда известно точное решение u_{ex} дифференциальной задачи (1):

$$u_{ex}(x) = \begin{cases} \sin\left(\frac{4\pi x_1}{3}\right) \sin(\pi x_2), & x \in (0, 0.75) \times (0, 1), \\ 0, & x \in (0.75, 1) \times (0, 1). \end{cases}$$

При расчетах шаг H сетки в области Ω_1 варьировался, в области Ω_2 использовалась сетка с шагом $h = H/2$. Параметры τ_1 и τ_2 были взяты как теоретически оптимальные для задач в подобластях Ω_1 и Ω_2 . В методе с множителями Лагранжа параметр τ_3 подбирался в ходе вычислительных экспериментов. Начальное приближение для λ во всех тестах $\lambda^0 \equiv 0$.

Табл. 1
Число итераций. Критерий остановки $\|u - u_{ex}\|_C < \varepsilon$

ε	$11 \times 21, 21 \times 41$		$21 \times 41, 41 \times 81$		$41 \times 81, 81 \times 161$	
	I	II	I	II	I	II
0.5	5	6	9	9	15	16
0.05	17	17	34	34	67	67
0.005	29	29	59	59	119	119
0.0005	–	–	86	83	171	170

В табл. 1 показано число итераций метода Дугласа–Рэкфорда для схемы без множителей Лагранжа (I) и с множителями (II) в зависимости от заданной точности на различных сетках. Начальное приближение $u \equiv 0$. Знак «–» означает, что заданная точность не достигается.

Далее исследовалось поведение методов в зависимости от шага сетки и выбора начального приближения. В качестве критерия остановки использовалось условие $\|u - u_{ex}\|_C < 0.005$. В первой строке табл. 2 показаны варианты выбора начального приближения. Как видно из таблицы, в случае начального приближения $u_1 = 0$ в $\omega_1 \cup s_1$, $u_2 = 0$ в $\omega_2 \cup s_2$ число итераций для обеих схем практически одинаково и при увеличении размерности задачи линейно зависит от числа точек по одному направлению.

Во втором случае ($u_1 = -2$ в $\omega_1 \cup s_1$, $u_2 = 2$ в $\omega_2 \cup s_2$) число итераций для схем I и II одинаково, и оно значительно больше, чем в первом случае. В этом случае в процессе вычислений возникает локальное возмущение погрешности – максимум погрешности сохраняется в течение итераций вблизи угловых точек области Ω_2 и медленно убывает в них, в то время как в остальных точках области

Табл. 2

Число итераций при различных начальных приближениях

$\bar{\omega}_1$, $\bar{\omega}_2$		$u_1^0 = 0, u_2^0 = 0$	$u_1^0 = -2, u_2^0 = 2$	$u_1^0 = 2, u_2^0 = -2$			
		I	II	I	II	I	II
11×21 ,	21×41	29	33	115	115	115	37
21×41 ,	41×81	59	63	224	224	232	66
41×81 ,	81×161	119	122	444	444	127	129
81×161 ,	161×321	238	241	885	885	979	251

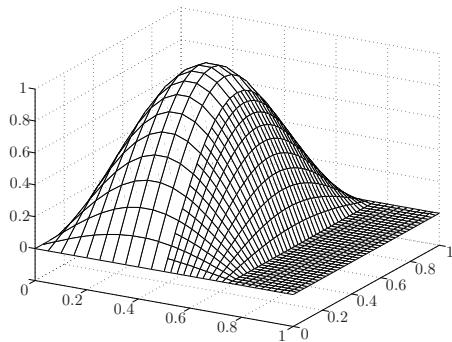


Рис. 1. Решение сеточной задачи

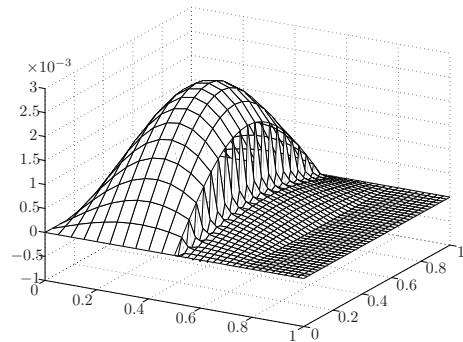
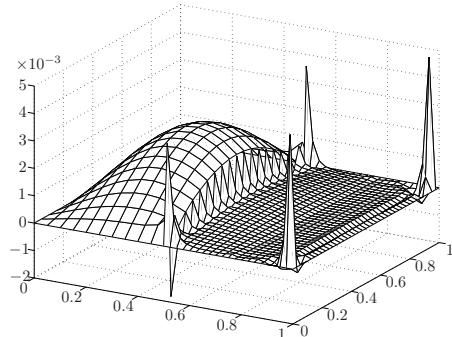
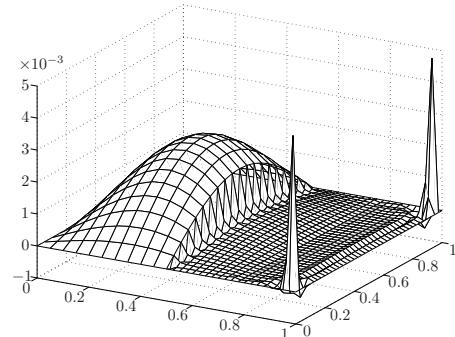


Рис. 2. Распределение погрешности

Рис. 3. Погрешность, схема I,
 $u_1^0 = -2, u_2^0 = 2$ Рис. 4. Погрешность, схема II,
 $u_1^0 = -2, u_2^0 = 2$

решение уже фактически не меняется (рис. 3, 4). Отметим, что в случае схемы I возмущение погрешности наблюдается также около граничных точек, прилегающих к разрезу (рис. 3). В результате дополнительных расчетов, при варьировании начального приближения, было выяснено, что особенность в погрешности вызвана рассогласованием начального приближения с граничными условиями, которое особенно сказывается в окрестности коинцидентного множества.

В третьем случае выбор начального приближения $u_2 = -2$ не приводил к возмущению погрешности около угловых точек, что обеспечило меньшее число итераций в схеме II по сравнению с предыдущим случаем. Однако при решении схемы I снова наблюдался пик погрешности около разреза S , что привело к большому числу итераций. Можно было бы предположить, что это происходит из-за разрыва начального приближения на границе S , но выбор начального приближения в виде

$u_1 = -2, u_2 = -2$ не исправил ситуацию.

Основываясь на результатах вычислительных экспериментов можно утверждать, что в случае «хорошего» начального приближения метод Дугласа–Рэкфорда для обеих схем ведет себя одинаково, но схема с множителями Лагранжа схема менее чувствительна к выбору начального приближения. Однако использование схемы Лагранжа осложняется отсутствием теоретических оценок параметра τ_3 .

Ниже приведены некоторые иллюстрации к результатам расчетов на сетке с шагом $H = 0.05$ и $h = 0.025$. На рис. 1 показано численное решение сеточной задачи. Рис. 3, 4 иллюстрируют распределение погрешности в схемах I и II при остановке по критерию $\|u - u_{ex}\|_C \leq 0.005$ в случае начального приближения $u_1 = -2, u_2 = 2$.

В любом случае после достаточно большого количества итераций получено одноковое распределение погрешности, как на рис. 2, что подтверждает совпадение сеточных решений обеих схем.

Работа выполнена при финансовой поддержке РФФИ (проект № 04-01-00484).

Summary

M.A. Ignatieva, A.V. Lapin. Solution of the obstacle problem by domain decomposition method.

Domain decomposition method with non-overlapping subdomains is applied for solving the obstacle problem. An obstacle being located in a known subdomain of the initial domain, partitioning of the domain is made by using this information, so, the information about possible loss of the solution regularity.

Finite element method with quadrature rules and non-matching grids in the subdomains is used to approximate corresponding variational inequality; finer grid is constructed in the subdomain containing the obstacle.

Two iterative methods are constructed to solve finite dimensional problems, they can be viewed as non-linear variants of Douglas – Rachford splitting iterative method. Convergence of the iterative algorithms is proved, their implementation is discussed, and numerical results are applied.

Литература

1. *Лебедев В.И.* Метод композиции. – М.: ОВМ АН СССР, 1986. – 192 с.
2. *Лебедев В.И., Агошков В.И.* Операторы Пуанкаре–Стеклова и их приложения в анализе. – М.: ОВМ АН СССР, 1983. – 184 с.
3. *Агошков В.И.* Методы разделения области в задачах математической физики // Вычислительные процессы и системы. – М.: Наука, 1991. – Вып. 8. – С. 4–51.
4. *Quarteroni A.* Domain decomposition and parallel processing for the numerical solution of partial differential equations // Survey on Mathematics for Industry. – 1991. – V. 1. – P. 75–118.
5. *Quarteroni A., Periaux J., Kuznetsov Yu., Widlund O.B.* Domain decomposition methods in science and engineering. – Providence: AMS, 1994.
6. *Smith B., Bjørstad P., Gropp W.* Domain decomposition. Parallel multilevel method for elliptic partial differential equations. – Cambridge University Press, 1996.
7. *Le Tallec P.* Domain decomposition methods in computational mechanics // Comput. Mechanics Adv. – 1994. – V. 1. – P. 121–220.

8. *Herrera I., Keyes D., Widlund O., Yates R. (Eds.) Domain Decomposition Methods in Science and Engineering.* – Mexico City, Mexico: National Autonomous University of Mexico (UNAM), 2003. – 466 p.
9. *Kornhuber R., Hoppe R., Periaux J., Pironneau O., Widlund O., Xu J. (Eds.) Domain decomposition methods in science and engineering. Lecture Notes in Computational Science and Engineering.* – Springer, 2004. – V. 40. – 700 p.
10. *Laitinen E., Lapin A. V., Pieskä J. Splitting iterative methods and parallel solution of variational inequalities // Lobachevskii J. of Mathematics.* – 2001. – V. 8. – P. 167–184.
11. *Dostal Z., Friedlander A., Gomes F.A.M., Santos S.A. Preconditioning by projectors in the solution of contact problems: A parallel implementation // Ann. Oper. Res.* – 2002. – V. 117. – P. 117–129.
12. *Dostal Z., Horak D. Scalability and FETI based algorithm for large discretized variational inequalities // Math. Comput. Simul.* – 2003. – V. 61. – P. 347–357.
13. *Danek J., Hlaváček I., Nedoma J. Domain decomposition for generalized unilateral semi-coercive contact problem with given friction in elasticity // Math. Comput. Simul.* – 2005. – V. 68. – P. 271–300.
14. *Лионс Ж.-Л. Некоторые методы решения нелинейных краевых задач.* – М.: Мир, 1972. – 588 с.
15. *Barbu V. Nonlinear semigroups and differential equations in Banach spaces.* – Nordhoff Intern. Publ., 1976.
16. *Экланд И., Темам Р. Выпуклый анализ и вариационные проблемы.* – М.: Мир, 1979. – 399 с.
17. *Боеводин В.В., Кузнецов Ю.А. Матрицы и вычисления.* – М.: Наука, 1984. – 320 с.
18. *Lions P. L., Mercier B. Splitting algorithms for the sum of two nonlinear operators // SIAM J. Numer. Anal.* – 1979. – V. 16. – P. 964–979.

Поступила в редакцию
04.11.05

Лапин Александр Васильевич – доктор физико-математических наук, профессор кафедры математической статистики Казанского государственного университета.

E-mail: *alapin@ksu.ru*

Игнатьева Марина Александровна – кандидат физико-математических наук, научный сотрудник НИИ математики и механики им. Н.Г. Чеботарева Казанского государственного университета.

E-mail: *Marina.Ignatieva@ksu.ru*