УЧЕНЫЕ ЗАПИСКИ КАЗАНСКОГО УНИВЕРСИТЕТА
Том 155, кн. 4 Физико-математические науки *2013*

УДК 519.21

СКОРОСТЬ СХОДИМОСТИ В ПРЕДЕЛЬНЫХ ТЕОРЕМАХ ДЛЯ СЛАБОЗАВИСИМЫХ СЛУЧАЙНЫХ ВЕЛИЧИН

В.Т. Дубровин

Аннотация

Определено новое условие слабой зависимости случайных величин, позволяющее перенести предельные теоремы для независимых случайных величин на случай слабой зависимости с сохранением скорости сходимости. Приведен пример последовательности случайных величин, удовлетворяющих новому условию слабой зависимости.

Ключевые слова: предельные теоремы, случайные величины, независимость, слабая зависимость, перемешивание, скорость сходимости.

1. Постановка задачи. Определения

В работе определяется новое условие слабой зависимости, при котором предельные теоремы для независимых случайных величин остаются справедливыми (с сохранением скорости сходимости) и для слабозависимых случайных величин. Условие слабой зависимости, позволяющее получить такой результат, мы назовем условием «усиленного сильного перемешивания» (у.с.п.).

В основе определения условия у.с.п. лежит условие сильного перемешивания (с.п.) [1, 2], которое усиливается добавлением дополнительного условия. Для установления целесообразности условия у.с.п. приводится пример последовательности случайных величин, удовлетворяющих этому условию.

Доказывается также, что если при определении нового условия слабой зависимости вместо условия сильного перемешивания рассмотреть условие ψ-перемешивания [3] и добавить те же дополнительные условия, то случайные величины, образующие последовательность, становятся независимыми. Отметим, что доказательство данного утверждения не удается провести, если вместо ψ-перемешивания использовать сильное перемешивание.

Везде в дальнейшем мы будем рассматривать стационарные в узком смысле последовательности случайных величин.

Определение 1. Будем говорить, что последовательность случайных величин $\xi_0, \xi_1, \xi_2, \ldots$ удовлетворяет условию усиленного сильного перемешивания, если для любых множеств $A_1 \in \mathfrak{M}_{r_1}, \ldots, A_s \in \mathfrak{M}_{r_s}$, $B_1 \in \mathfrak{M}_{t_1}, \ldots, B_l \in \mathfrak{M}_{t_l}$ верно неравенство

$$|P(A_1 \ldots A_s B_1 \ldots B_l) - P(A_1 \ldots A_s) \cdot P(B_1 \ldots B_l)| \le \frac{C_1}{\sqrt{d}} \cdot \frac{1}{l+s},$$

где $r_1 < r_2 < \cdots < r_s \le t_1 < t_2 < \cdots < t_l$ и $d = (t_1 - r_s)$ – расстояние между множествами $\{r_1, \ldots, r_s\}$, $\{t_1, \ldots, t_l\}$ ($\{r_1, \ldots, r_s\}$, $\{t_1, \ldots, t_l\}$ – подмножества множества $\{0, 1, 2, \ldots\}$); $\mathfrak{M}_i$ – σ-алгебра, порожденная случайной величиной ξ_i; $C_1 = \mathrm{const}$.

Договоримся везде в дальнейшем через C_i обозначать некоторые постоянные величины.

Приведем пример случайных величин, удовлетворяющих условию у.с.п.

Рассмотрим последовательность простых случайных величин [4, с. 18] $\xi_0,\ \xi_1,\ \xi_2,\dots,$ заданных на вероятностных пространствах $(\Omega, \mathfrak{M}_k, P)$, $k = 0,1,2,\dots,$ и удовлетворяющих условию сильного перемешивания

$$\sup_{A\in\mathfrak{M}_0^t,\, B\in\mathfrak{M}_{t+\tau}^{\infty}} |P(AB) - P(A)\cdot P(B)| = \alpha(\tau) = C_2/\tau, \qquad (1)$$

где $\mathfrak{M}_0^t$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами ξ_i, $0 \le i \le t$; $\mathfrak{M}_{t+\tau}^{\infty}$ – σ-алгебра, порожденная случайными величинами ξ_i, $i \ge t+\tau$.

Пусть ζ – простая случайная величина (случайный фактор), заданная на вероятностном пространстве $(\Omega, \mathfrak{M}_\zeta, P)$.

Заметим, что σ-алгебры $\mathfrak{M}_i$, $\mathfrak{M}_\zeta$ конечны.

Обозначим

$$\beta_{ij}^k = P(A_i^{\xi_k}|A_j^{\zeta}) - P(A_i^{\xi_k}),$$

где $A_i^{\xi_k}$ и A_j^{ζ} – элементарные события из σ-алгебр $\mathfrak{M}_i$ и $\mathfrak{M}_\zeta$ соответственно.

Определение 2. Если при любом k в любой строке матрицы $\{\beta_{ij}^k\}_{i,j}^{N,r}$ существует положительный элемент, то будем говорить, что случайные величины ξ_k, $k = 0,1,2,\dots,$ слабо зависят от случайного фактора ζ. Если при этом элементы матрицы $\{\beta_{ij}^k\}_{i,j}^{N,r}$ не зависят от k, то будем говорить, что ξ_k, $k = 0,1,2,\dots,$ одинаково слабо зависят от ζ.

Предложение 1. *Последовательность простых случайных величин, удовлетворяющая условию с.п.* (1) *и условию одинаковой слабой зависимости от случайного фактора, удовлетворяет условию у.с.п.*

Доказательство. По теореме умножения вероятностей

$$P(A_1^{\xi_1}\dots A_s^{\xi_s}) = P(A_1^{\xi_1})\cdot P(A_2^{\xi_2}|A_1^{\xi_1})\dots P(A_s^{\xi_s}|A_1^{\xi_1}\dots A_{s-1}^{\xi_{s-1}}). \qquad (2)$$

Введем общее обозначение $\widehat{P}(A_i^{\xi_k})$ для условных вероятностей $P(A_i^{\xi_k}|A_1^{\xi_1}\dots A_m^{\xi_m})$, $m = 1,\dots,k-1$. Из условия слабой зависимости от фактора ζ следует, что найдется такое j, что

$$\widehat{P}(A_i^{\xi_k}|A_j^{\zeta}) - \widehat{P}(A_i^{\xi_k}) > 0,$$

то есть матрица $\|\widehat{\beta}_{ij}^k\|_{i,j}^{N,r}$, состоящая из элементов $\widehat{\beta}_{ij}^k = \widehat{P}(A_i^{\xi_k}|A_j^{\zeta}) - \widehat{P}(A_i^{\xi_k})$, содержит в каждой строке положительный элемент. Обозначим $\mu = \min\limits_{i,j} \dfrac{\widehat{\beta}_{ij}^k}{\widehat{P}(A_i^{\xi_k})}$. Очевидно, что $\mu > 0$. Заметим, что μ не зависит от k, так как случайные величины ξ_k одинаково слабо зависят от фактора ζ.

Далее,

$$\widehat{P}(A_i^{\xi_k}) = \frac{\widehat{P}(A_i^{\xi_k}|A_j^{\zeta})}{1 + (\widehat{P}(A_i^{\xi_k}|A_j^{\zeta}) - \widehat{P}(A_i^{\xi_k}))/\widehat{P}(A_i^{\xi_k})} \le \frac{1}{1+\mu}.$$

Из данной оценки и (2) получаем

$$P(A_1^{\xi_1}\dots A_s^{\xi_s}) \le \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^s.$$

В итоге имеем следующие оценки:

$$P(A_1 \dots A_s) \le \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^s, P(B_1 \dots B_l) \le \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^l,$$

$$P(A_1 \dots A_s B_1 \dots B_l) \le \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^{l+s}.$$

Из условия сильного перемешивания следует

$$|P(A_1 \dots A_s B_1 \dots B_l) - P(A_1 \dots A_s)P(B_1 \dots B_l)| \le \alpha(d).$$

Используя перечисленные оценки, получим окончательно

$$\begin{aligned}
&|P(A_1 \dots A_s B_1 \dots B_l) - P(A_1 \dots A_s)P(B_1 \dots B_l)| = \\
&\quad = \left(\sqrt{|P(A_1 \dots A_s B_1 \dots B_l) - P(A_1 \dots A_s)P(B_1 \dots B_l)|}\right)^2 \le \\
&\quad \le \sqrt{\alpha(d)}(P(A_1 \dots A_s B_1 \dots B_l) + P(A_1 \dots A_s)P(B_1 \dots B_l))^{1/2} \le \\
&\quad \le C_3 \cdot \sqrt{\alpha(d)} \left(\frac{1}{1+\mu}\right)^{(l+s)/2} \le C_4 \frac{\sqrt{\alpha(d)}}{l+s} = \frac{C_5}{\sqrt{d}(l+s)}.
\end{aligned}$$

Таким образом, требуемое утверждение доказано. □

Теперь сделаем замечание, касающееся условия у.с.п. Начнем с того, что определим условие ψ-перемешивания.

Определение 3. Будем говорить, что последовательность случайных величин ξ_0, ξ_1, $\xi_2, \dots$, заданных на вероятностных пространствах $(\Omega, \mathfrak{M}_k, P)$, $k = 0, 1, 2, \dots$, удовлетворяет условию ψ-перемешивания, если

$$\sup_{A \in \mathfrak{M}_0^t,\, B \in \mathfrak{M}_{t+\tau}^\infty} \left|\frac{P(AB)}{P(A)P(B)} - 1\right| = \psi(\tau) \to 0 \quad \text{при} \quad \tau \to \infty.$$

Здесь $P(A)P(B) \ne 0$.

Заметим, что если последовательность случайных величин удовлетворяет условию ψ-перемешивания, то она удовлетворяет и условию с.п. [5].

Допустим, что последовательность случайных величин ξ_0, ξ_1, $\xi_2, \dots$ удовлетворяет условию ψ-перемешивания. С помощью условия ψ-перемешивания, используя принцип формулирования условия у.с.п., определим следующее условие слабой зависимости последовательности случайных величин ξ_0, ξ_1, $\xi_2, \dots$ Пусть $\mathfrak{M}_k$ – σ-алгебры, порожденные случайными величинами ξ_k, $k = 0, 1, 2, \dots$; D_k^ε – классы, состоящие из элементов $A \in \mathfrak{M}_k$ таких, что $P(A) < \varepsilon$ (см. [4, разд. 15.1.Б]). И пусть $\mathfrak{M}'_k$ – σ-алгебра, порожденная классом D_k^ε. В дальнейшем нам потребуется следующее

Определение 4. (Условие (А)). Будем говорить, что последовательность случайных величин ξ_k удовлетворяет условию (А), если существует $\varepsilon > 0$ такое, что для любого конечного набора множеств $A_{k_1}, \dots, A_{k_n}$ из классов $D_{k_1}^\varepsilon, \dots, D_{k_n}^\varepsilon$ соответственно, $k_1 < k_2 < \dots < k_n, n > 1$, имеет место неравенство

$$\left|\frac{P(A_{k_1} \dots A_{k_n})}{P(A_{k_1} \dots A_{k_j}) \cdot P(A_{k_{j+1}} \dots A_{k_n})} - 1\right| \le \frac{C_6 \psi(k_{j+1} - k_j)}{n^{1/2}}, \quad j = 1, 2, \dots, n-1,$$

где постоянная C_6 не зависит от n.

Замечание 1. В описанной ситуации условие (A) эквивалентно независимости σ-алгебр $\mathfrak{M}'_k$.

Доказательство. Достаточно доказать, что условие (A) влечет независимость классов D_k^ε [4, разд. 15.1]. Доказательство будем проводить от противного. Ясно, что если все возможные выражения под знаком модуля в условии (A) нули, то D_k^ε – независимые классы, и наоборот. Предположим, что D_k^ε не являются независимыми, то есть найдется набор $A_{k_1}, \ldots, A_{k_n}$ такой, что

$$\delta = \left| \frac{P(A_{k_1} \ldots A_{k_n})}{P(A_{k_1} \ldots A_{k_j}) \cdot P(A_{k_{j+1}} \ldots A_{k_n})} - 1 \right| \neq 0.$$

Зафиксируем сколь угодно большое N. Выберем Δ такое, что $\psi(\Delta) \leq 1/N^2$ (см. определение ψ-перемешивания). Пусть $B_j \in D^\varepsilon_{k_n + j\Delta}$, $j = 1, \ldots, N-n$. В силу условия (A)

$$\left| \frac{P(A_{k_1} \ldots A_{k_n} B_1 \ldots B_{N-n})}{P(A_{k_1} \ldots A_{k_j}) \cdot P(A_{k_{j+1}} \ldots A_{k_n} B_1 \ldots B_{N-n})} - 1 \right| \leq \frac{C_6 \psi(k_{j+1} - k_j)}{N^{1/2}}.$$

Далее к выражению под модулем применяем $N-n$ раз условие ψ-перемешивания:

$$\left| \frac{P(A_{k_1} \ldots A_{k_n} B_1 \ldots B_{N-n})}{P(A_{k_1} \ldots A_{k_j}) \cdot P(A_{k_{j+1}} \ldots A_{k_n} B_1 \ldots B_{N-n})} - 1 \right| =$$

$$= \left| \frac{P(A_{k_1} \ldots A_{k_n} B_1 \ldots B_{N-n-1}) P(B_{N-n})(1 + \theta_1 \psi(\Delta))}{P(A_{k_1} \ldots A_{k_j}) \cdot P(A_{k_{j+1}} \ldots A_{k_n} B_1 \ldots B_{N-n-1}) P(B_{N-n})(1 + \theta_2 \psi(\Delta))} - 1 \right| =$$

$$= \left| \frac{P(A_{k_1} \ldots A_{k_n})}{P(A_{k_1} \ldots A_{k_j}) \cdot P(A_{k_{j+1}} \ldots A_{k_n})} \left(\frac{1 + \theta_1 \psi(\Delta)}{1 + \theta_2 \psi(\Delta)} \right)^{N-n} - 1 \right|.$$

Отсюда следует

$$\frac{C_6 \psi(k_{j+1} - k_j)}{N^{1/2}} \geq \left| \frac{P(A_{k_1} \ldots A_{k_n})}{P(A_{k_1} \ldots A_{k_j}) \cdot P(A_{k_{j+1}} \ldots A_{k_n})} - 1 + \right.$$

$$\left. + \frac{P(A_{k_1} \ldots A_{k_n})}{P(A_{k_1} \ldots A_{k_j}) \cdot P(A_{k_{j+1}} \ldots A_{k_n})} \left(\left(\frac{1 + \theta_1 \psi(\Delta)}{1 + \theta_2 \psi(\Delta)} \right)^{N-n} - 1 \right) \right| \geq \delta - (1 + \delta) \frac{C_7}{N}.$$

Здесь мы учли, что $\psi(\Delta) \leq 1/N^2$. Так как N – сколь угодно большое число, из полученного неравенства следует равенство нулю величины δ, что противоречит предположению $\delta \neq 0$. Таким образом, замечание доказано. $\square$

Заметим, если при определении условия (A) использовать условие с.п., то есть вместо условия (A) применить условие у.с.п., то приведенное доказательство замечания провести не удается.

2. Формулировки теорем

Первая теорема формулируется для произвольных простых случайных величин.

Теорема 1. *Пусть простые случайные величины последовательности ξ_0, ξ_1, $\xi_2, \ldots$ удовлетворяют условию у.с.п. И пусть для независимых ξ_0, ξ_1, $\xi_2, \ldots$ справедливо предельное соотношение*

$$P(g_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) < x) = F(x) + R,$$

где $R \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для* ξ_k, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *удовлетворяющих у.с.п., справедливо соотношение*

$$P(g_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) < x) = F(x) + R + O\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Здесь $g_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n)$ *– некоторая непрерывная функция от аргументов* $\xi_1, \ldots, \xi_n$; $F(x)$ *имеет ограниченную плотность вероятности.*

Во второй теореме формулируется результат, аналогичный утверждению теоремы 1, но уже для любых не обязательно простых случайных величин.

Теорема 2. *Пусть случайные величины* $\hat{\xi}_0$, $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2, \ldots$ *удовлетворяют условию у.с.п. И пусть для независимых* $\hat{\xi}_0$, $\hat{\xi}_1$, $\hat{\xi}_2, \ldots$ *справедливо предельное соотношение*

$$P(g_n(\hat{\xi}_0, \hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_n) < x) = F(x) + R,$$

где $R \to 0$ *при* $n \to \infty$. *Тогда для* $\hat{\xi}_k$, $k = 0, 1, 2, \ldots$, *удовлетворяющих у.с.п., справедливо соотношение*

$$P(g_n(\hat{\xi}_0, \hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_n) < x) = F(x) + R + O\left(1/\sqrt{n}\right).$$

Здесь $g_n(\hat{\xi}_0, \hat{\xi}_1, \ldots, \hat{\xi}_n)$ *– некоторая непрерывная функция от аргументов* ξ_k, $k = 0, 1, \ldots, n$; $F(x)$ *имеет ограниченную плотность вероятности.*

3. Доказательство теорем

Доказательство теоремы 1. Пусть $\Pi^{(pl+p_0)}$ – множество всех натуральных чисел вида $pl + p_0$, $l = 0, 1, 2, \ldots$, где $p \geq 1$, $p_0 \leq p - 1$ – натуральные числа.

Обозначим

$$\delta(A, B) = P(AB) - P(A) \cdot P(B);$$

B^i, $i = 0, 1, \ldots, n$, – элементарные события из σ-алгебры $\mathfrak{M}_i$, порожденной простой случайной величиной ξ_i; $N = \{1, \ldots, n\}$; $\bigcap\limits_{i \in \Pi^{(pl+p_0)} \bigcap N} B^{(pl+p_0)}$ – элементарный объем.

Проведем последовательно следующие преобразования.

Первый шаг

$$P(B^0 B^1 \ldots B^n) = P(B^0 B^1 \ldots B^n) - P(B^{(2l)}) P(B^{(2l+1)}) + P(B^{(2l)}) P(B^{(2l+1)}) =$$

$$= \delta(B^{(2l)}, B^{(2l+1)}) + P(B^{(2l)}) P(B^{(2l+1)}) =$$

второй шаг

$$= \delta(B^{(2l)}, B^{(2l+1)}) + [\delta(B^{(4l)}, B^{(4l+2)}) + P(B^{(4l)}) P(B^{(4l+2)})] \cdot [\delta(B^{(4l+1)}, B^{(4l+3)}) +$$

$$+ P(B^{(4l+1)}) P(B^{(4l+3)})] = \delta(B^{(2l)}, B^{(2l+1)}) + \delta(B^{(4l)}, B^{(4l+2)}) \cdot \delta(B^{(4l+1)}, B^{(4l+3)}) +$$

$$+ \delta(B^{(4l)}, B^{(4l+2)}) \cdot P(B^{(4l+1)}) P(B^{(4l+3)}) + P(B^{(4l)}) P(B^{(4l+2)}) \cdot \delta(B^{(4l+1)}, B^{(4l+3)}) +$$

$$+ P(B^{(4l)}) P(B^{(4l+2)}) P(B^{(4l+1)}) P(B^{(4l+3)}) =$$

третий шаг

$$= \delta(B^{(2l)}, B^{(2l+1)}) + \delta(B^{(4l)}, B^{(4l+2)}) \cdot \delta(B^{(4l+1)}, B^{(4l+3)}) + \delta(B^{(4l)}, B^{(4l+2)}) \times$$

$$\times [\delta(B^{(8l+1)}, B^{(8l+5)}) + P(B^{(8l+1)}) P(B^{(8l+5)})] \cdot [\delta(B^{(8l+3)}, B^{(8l+7)}) +$$

$$
\begin{gathered}
+P(B^{(8l+3)})P(B^{(8l+7)})] + \delta(B^{(4l+1)}, B^{(4l+3)})[\delta(B^{(8l)}, B^{(8l+4)}) + P(B^{(8l)})P(B^{(8l+4)})]\times \\
\times[\delta(B^{(8l+2)}, B^{(8l+6)})+P(B^{(8l+2)})P(B^{(8l+6)})]+[\delta(B^{(8l)}, B^{(8l+4)})+P(B^{(8l)})P(B^{(8l+4)})]\times \\
\times[\delta(B^{(8l+2)}, B^{(8l+6)}) + P(B^{(8l+2)})P(B^{(8l+6)})] \cdot [\delta(B^{(8l+1)}, B^{(8l+5)})+ \\
+P(B^{(8l+1)})P(B^{(8l+5)})] \cdot [\delta(B^{(8l+3)}, B^{(8l+7)}) + P(B^{(8l+3)})P(B^{(8l+7)})] = \\
= \delta(B^{(2l)}, B^{(2l+1)}) + \delta(B^{(4l)}, B^{(4l+2)}) \cdot \delta(B^{(4l+1)}, B^{(4l+3)}) + \delta(B^{(4l)}, B^{(4l+2)})\times \\
\times\delta(B^{(8l+1)}, B^{(8l+5)}) \cdot \delta(B^{(8l+3)}, B^{(8l+7)}) + \delta(B^{(4l)}, B^{(4l+2)})\times \\
\times\delta(B^{(8l+1)}, B^{(8l+5)})P(B^{(8l+3)})P(B^{(8l+7)}) + \delta(B^{(4l)}, B^{(4l+2)}) \cdot P(B^{(8l+1)})P(B^{(8l+5)})\times \\
\times\delta(B^{(8l+3)}, B^{(8l+7)}) + \delta(B^{(4l)}, B^{(4l+2)}) \cdot P(B^{(8l+1)})P(B^{(8l+5)})P(B^{(8l+3)})P(B^{(8l+7)})+ \\
+\delta(B^{(4l+1)}, B^{(4l+3)}) \cdot \delta(B^{(8l)}, B^{(8l+4)}) \cdot \delta(B^{(8l+2)}, B^{(8l+6)}) + \delta(B^{(4l+1)}, B^{(4l+3)})\times \\
\times\delta(B^{(8l)}, B^{(8l+4)}) \cdot P(B^{(8l+2)})P(B^{(8l+6)}) + \delta(B^{(4l+1)}, B^{(4l+3)}) \cdot P(B^{(8l)})P(B^{(8l+4)})\times \\
\times\delta(B^{(8l+2)}, B^{(8l+6)}) + \delta(B^{(4l+1)}, B^{(4l+3)}) \cdot P(B^{(8l)})P(B^{(8l+4)})P(B^{(8l+2)})P(B^{(8l+6)})+ \\
+\delta(B^{(8l)}, B^{(8l+4)}) \cdot \delta(B^{(8l+2)}, B^{(8l+6)}) \cdot \delta(B^{(8l+1)}, B^{(8l+5)}) \cdot \delta(B^{(8l+3)}, B^{(8l+7)}) + \dots + \\
+P(B^{(8l)})P(B^{(8l+2)}) \cdot P(B^{(8l+4)})P(B^{(8l+6)}) \cdot P(B^{(8l+1)})P(B^{(8l+3)})\times \\
\times P(B^{(8l+5)})P(B^{(8l+7)}) =
\end{gathered}
$$

и т. д.

На k-м шаге последний член будет состоять из 2^{k-1} сомножителей вида $P(B^{(2^k l+p)})$, каждый из которых представляется скобкой $[\delta(\cdot) + P(\cdot)P(\cdot)]$. Перемножая скобки, мы можем разбить получающиеся при этом члены на три группы: произведение $\delta(\cdot)\cdots\delta(\cdot)$; «средние» члены, где вместо какого-либо $\delta(\cdot)$ входит $P(\cdot)P(\cdot)$; последний член $P(\cdot)P(\cdot)\cdots P(\cdot)$.

На каждом k-м шаге (число шагов будет равным $C_8 \log_2 n$) у произведения $\delta(\cdot)\cdots\delta(\cdot)$ и у «средних» членов вынесем за скобки множитель $\max\limits_{p_0,p_0'} \delta(B^{(2^k l+p_0)}, B^{(2^k l+p_0')})$. В итоге получим

$$
P(B^0 B^1 \dots B^n) = \prod_{i=0}^{n} P(B^i) + \sum_{k=1}^{C_8 \log_2 n} C_9(k) \max_{p_0,p_0'} \delta(B^{(2^k l+p_0)}, B^{(2^k l+p_0')}), \qquad (3)
$$

где $C_9(k)$ – постоянная, зависящая только от номера шага.

Сумму, которая получается после вынесения у произведения $\delta(\cdot)\cdots\delta(\cdot)$ и у «средних» членов за скобки множителя $\max\limits_{p_0,p_0'} \delta(B^{(2^k l+p_0)}, B^{(2^k l+p_0')})$, оценим таким образом, чтобы ряд сходился быстрее геометрической прогрессии со знаменателем $\max\left(\dfrac{1}{4}, \dfrac{1}{1+\mu}\right)$. Отсюда следует, что существует постоянная $C_{10} \geq C_9(k)$.

Пусть ξ_0^*, ξ_1^*, $\xi_2^*, \dots$ – последовательность независимых простых случайных величин, распределенных так же, как и простые случайные величины ξ_0, ξ_1, $\xi_2, \dots$ Имеем

$$
P(g_n(\xi_0, \xi_1, \dots, \xi_n) < x) = \sum_{g_n(\xi_0,\dots,\xi_n)<x} P(B^0 B^1 \dots B^n),
$$

$$
P(g_n(\xi_0^*, \xi_1^*, \dots, \xi_n^*) < x) = \sum_{g_n(\xi_0^*,\dots,\xi_n^*)<x} P(B^0) \dots P(B^n).
$$

Отсюда и из (3) следует

$$
\begin{aligned}
&|P(g_n(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n)<x)-P(g_n(\xi_0^*,\xi_1^*,\dots,\xi_n^*)<x)| = \\
&\qquad = \Bigl|\sum_{g_n(\cdots)<x}(P(B^0\dots B^n)-P(B^0)\dots P(B^n))\Bigr| = \\
&\qquad = \Bigl|\sum_{g_n(\cdots)<x}\sum_{i=1}^{C_8\log_2 n} C_9(i)\max_{p_0,p_0'}\delta(B^{(2^il+p_0)},B^{(2^il+p_0')})\Bigr| \le \\
&\qquad \le \sum_{i=1}^{C_8\log_2 n} C_{10}\Bigl|\sum_{g_n(\cdots)<x}\delta(B^{(2^il+\hat p_0)},B^{(2^il+\hat p_0')})\Bigr|, \qquad (4)
\end{aligned}
$$

где $\hat p_0$, $\hat p_0'$ – значения, на которых достигается максимум суммы справа в (4).

Пусть Ω – множество всех элементарных объемов $B^0,\dots,B^n$, количество которых определяется числом (конечным) элементов σ-алгебр $\mathfrak{M}_i (i=1,\dots,n)$ и числом n. Заметим, что с ростом n растет число элементов множества Ω.

Очевидно, справедливо неравенство

$$
\Bigl|\sum_{g_n(\cdots)<x}\delta\left(B^{(2^il+\hat p_0)},B^{(2^il+\hat p_0')}\right)\Bigr| \le \max_G\Bigl|\sum_G\delta\left(B^{(2^il+\hat p_0)},B^{(2^il+\hat p_0')}\right)\Bigr|,
$$

где G – произвольное подмножество Ω.

Можно показать, что существует такая постоянная C_{11}, что верно неравенство

$$
\max_G\Bigl|\sum_G\delta\left(B^{(2^il+\hat p_0)},B^{(2^il+\hat p_0')}\right)\Bigr| \le C_{11}\max_{A_i\times B_i}\Bigl|\sum_{A_i\times B_i}\delta\left(B^{(2^il+\hat p_0)},B^{(2^il+\hat p_0')}\right)\Bigr|, \qquad (5)
$$

где $B^{(2^il+\hat p_0)}\in A_i$, $B^{(2^il+\hat p_0')}\in B_i$; $A_i\times B_i$ – прямое произведение множеств A_i и B_i из Ω.

Оценка (5) верна, так как множества G могут быть представлены в виде объединения множеств вида $A_i\times B_i$, причем число множеств вида $A_i\times B_i$, входящих в объединение, ограничено постоянной, не зависящей от n.

Используя (4) и (5), получим

$$
\begin{aligned}
&\triangle = |P(g_n(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n)<x)-P(g_n(\xi_0^*,\xi_1^*,\dots,\xi_n^*)<x)| \le \\
&\qquad \le \sum_{i=1}^{C_8\log_2 n} C_{12}\Bigl|\sum_{\widehat A_i\times\widehat B_i}\delta\left(B^{(2^il+\hat p_0)},B^{(2^il+\hat p_0')}\right)\Bigr|.
\end{aligned}
$$

Здесь $\widehat A_i$, $\widehat B_i$ – множества, на которых достигается максимум. С учетом аддитивности $\delta(\cdot,\cdot)$ и условия у.с.п. имеем

$$
\triangle \le \sum_{i=1}^{C_8\log_2 n} C_{13}\frac{1}{\sqrt{2^{i-1}\left(\dfrac{n}{2^{i-1}}+\dfrac{n}{2^{i-1}}\right)}} \le C_{14}\cdot\frac{1}{\sqrt{n}}. \qquad (6)
$$

Из (6) следует утверждение теоремы 1. □

Доказательство теоремы 2. По условию функция $g_n(\xi_0,\xi_1,\dots,\xi_n)$ непрерывна от аргументов $\xi_1,\dots,\xi_n$, поэтому для любого $\varepsilon>0$ и для любых ξ_0,

$\xi_1, \ldots, \xi_n$ – произвольных случайных величин – существуют простые случайные величины $\overline{\xi}_0, \overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n$ такие, что

$$|P(g_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) < x) - P(g_n(\overline{\xi}_0, \overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n) < x)| < \varepsilon. \tag{7}$$

Если случайные величины удовлетворяют условию у.с.п., то простые случайные величины также удовлетворяют условию у.с.п., поэтому по теореме 1 имеем

$$P(g_n(\overline{\xi}_0, \overline{\xi}_1, \ldots, \overline{\xi}_n) < x) = F(x) + R + O(1/\sqrt{n}). \tag{8}$$

Из (7) и (8) следует

$$P(g_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) < x) = F(x) + O(1/\sqrt{n}) + \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ – произвольное число.

Если взять $\varepsilon = O(1/\sqrt{n})$, то получим

$$P(g_n(\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n) < x) = F(x) + R + O(1/\sqrt{n}).$$

Теорема 2 доказана. □

Замечание 2. Утверждение теоремы 2 остается справедливым и для случая, когда $\xi_0, \xi_1, \ldots, \xi_n, \ldots$ есть последовательность со значением в $\mathbb{R}_k$.

Summary

V.T. Dubrovin. Convergence Rate in Limit Theorems for Weakly Dependent Random Variables.

We define a new condition for weak dependence of random variables, which makes it possible to extend limit theorems for independent random variables to the case of a weak dependence with retention of convergence rate. We give an example of a sequence of random variables satisfying the new weak dependence condition.

Keywords: limit theorems, random variables, independence, weak dependence, mixing, convergence rate.

Литература

1. *Rosenblatt M.* A central limit theorem and a strong mixing condition // Proc. Natl. Acad. Sci. USA. – 1956. – V. 42, No 1. – P. 43–47.
2. *Ибрагимов И.А., Линник Ю.В.* Независимые и стационарно связанные величины. – М.: Наука, 1965. – 524 с.
3. *Blum J.R., Hanson D.L., Koopmans L.H.* On the strong law of large numbers for a class of stochastic processes // Z. Wahrsch. Verw. Gebiete. – 1963. – Bd. 2, H. 1. – S. 1–11.
4. *Лоэв М.* Теория вероятностей. – М.: Иностр. лит., 1962. – 719 с.
5. *Iosifescu M.* Recent advances in mixing sequences of random variables // Third Int. Summer School on Probability Theory and Mathematical Statistics, Varna 1978. – Sofia: Pub. House of the Bulgarian Acad. Sci., 1980. – P. 111–138.

Поступила в редакцию
08.10.13

Дубровин Вячеслав Тимофеевич – кандидат физико-математических наук, доцент кафедры математической статистики, Казанский (Приволжский) федеральный университет, г. Казань, Россия.

E-mail: *vchebakova@mail.ru*