Известия вузов. Математика *http://www.ksu.ru/journals/izv_vuz/*
2012, №2, с. 3–12 *Гос. номер статьи по НТЦ "Информрегистр" 0421200123\0014*

М.Э. АБРАМЯН

О СХОДИМОСТИ В РАВНОМЕРНОЙ НОРМЕ МЕТОДА ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ ДЛЯ СИНГУЛЯРНОГО ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ С ГЁЛЬДЕРОВСКОЙ ПЛОТНОСТЬЮ

Аннотация. В работе исследуется приближенный метод решения сингулярного интегрального уравнения. Метод состоит в аппроксимации сингулярного оператора с использованием составной квадратурной формулы типа прямоугольников. Разрешимость возникающих при этом систем линейных алгебраических уравнений имеет место, если интегральное уравнение разрешимо и для коэффициентов уравнения выполняется условие сильной эллиптичности. При этих условиях получена оценка скорости сходимости решений систем линейных уравнений к решению рассматриваемого интегрального уравнения в равномерной векторной норме.

Ключевые слова: сингулярное интегральное уравнение, составная квадратурная формула типа прямоугольников, гёльдеровская функция, гёльдеровская плотность, сходимость в равномерной векторной норме.

УДК: 517.968

Abstract. We investigate an approximate method of solving singular integral equation. The method consists in approximation of singular equation with the use of compound formula of rectangles type. The corresponding systems of linear algebraic equations are uniquely solvable if integral equation is solvable, and coefficients of an equation satisfy the strong ellipticity condition. Under these conditions we estimate the rate of the convergence of solutions of systems of linear equations to the solution of the integral equation in the uniform vector norm.

Keywords: singular integral equation, discretization of integral operators by the method of rectangles, Hölder function, Hölder density, convergence in the uniform vector norm.

Работа продолжает исследования приближенного метода решения сингулярных интегральных уравнений, в котором аппроксимация сингулярного интеграла осуществляется с помощью составной квадратурной формулы типа прямоугольников. Ранее подобные методы изучались рядом авторов ([1]–[5] и приведенная там литература).

В данной работе рассматривается полное сингулярное интегральное уравнение на единичной окружности, которое содержит сингулярный интеграл с плотностью, являющейся гёльдеровской функцией. Для данного уравнения в работе получена оценка скорости сходимости метода прямоугольников в векторной L_∞-норме.

1. Формулировка основного результата. Пусть Γ — единичная окружность в комплексной плоскости $\mathbb{C}$. Обозначим через $H_\alpha(\Gamma)$ пространство всех определенных на Γ комплекснозначных функций f, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α ($\in (0,1)$):

Поступила 24.02.2011

$|f(t_1)-f(t_2)| \le A|t_1-t_2|^\alpha$, $t_1, t_2 \in \Gamma$, где $A = A(f)$ — коэффициент Гёльдера для функции f, не зависящий от выбора точек t_1, t_2.

Через $H_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$ будем обозначать пространство всех определенных на $\Gamma\times\Gamma$ комплекснозначных функций двух переменных, удовлетворяющих условию Гёльдера с показателем α ($\in (0,1)$) по совокупности переменных: $|f(t_1,\tau_1) - f(t_2,\tau_2)| \le A(|t_1-t_2|^\alpha + |\tau_1-\tau_2|^\alpha)$, $t_1, t_2, \tau_1, \tau_2 \in \Gamma$. Положим $H_{\alpha-0}(\Gamma) = \bigcup\limits_{\beta\in(0,\alpha)} H_\beta(\Gamma)$, $H_{\alpha-0}(\Gamma\times\Gamma) = \bigcup\limits_{\beta\in(0,\alpha)} H_\beta(\Gamma\times\Gamma)$. Через $\mathbb{H}_\alpha$, $\alpha\in(0,1)$, обозначим множество интегральных операторов вида $\int\limits_\Gamma k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau$ с ядром $k \in H_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$, действующих в пространстве $H_\alpha(\Gamma)$. Обозначим $\mathbb{H}_{\alpha-0} = \bigcup\limits_{\beta\in(0,\alpha)} \mathbb{H}_\beta$. Пусть S — оператор сингулярного интегрирования $(Sf)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - t}$, $t\in\Gamma$, где интеграл понимается в смысле главного значения по Коши. Через $S^{(\mu)}$ будем обозначать оператор сингулярного интегрирования с плотностью $\mu \in H_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$: $(S^{(\mu)}f)(t) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_\Gamma \frac{\mu(t,\tau)f(\tau)\,d\tau}{\tau-t}$, $t\in\Gamma$. Если область определения операторов S и $S^{(\mu)}$ не уточняется, то предполагается, что данные операторы действуют из $H_\alpha(\Gamma)$ в $H_{\alpha-0}(\Gamma)$ ([6], § 18, пп. 1, 3).

Рассмотрим полное сингулярное интегральное уравнение

$$(aI + S^{(\mu)})x = y, \tag{1}$$

где $a, y \in H_\alpha(\Gamma)$, $\mu \in H_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$, I — единичный оператор. Будем предполагать, что оператор $D = aI + S^{(\mu)}$ является обратимым в $L_2(\Gamma)$. Это, в частности, означает, что для любой функции $y \in H_\alpha(\Gamma)$ существует единственное решение $\widetilde{x}$ уравнения (1), принадлежащее $H_{\alpha-0}(\Gamma)$ (см. п. 4).

Зафиксируем $n\in\mathbb{N}$ и определим на контуре Γ точки $t_n^m = (t_n)^m$, $m\in\mathbb{Z}$, где $t_n = \exp(2\pi i/n)$. Будем называть *n-мерной дискретизацией непрерывной на Γ функции f* вектор $[f]^{(n)} = \bigl(f(t_n^0), f(t_n^1), \dots, f(t_n^{n-1})\bigr) \in \mathbb{C}^n$, а *$n$-мерной дискретизацией сингулярного интегрального оператора $S^{(\mu)}$ по формуле прямоугольников* — оператор умножения на матрицу $S_n^{(\mu)} = \|s_{ml}^{(\mu,n)}\|_{m,l=0}^{n-1}$ с элементами

$$s_{ml}^{(\mu,n)} = \begin{cases} 0, & m = l; \\ \frac{1}{\pi i}\frac{\mu(t_n^m, t_n^l)(t_n^{l+1} - t_n^l)}{t_n^l - t_n^m}, & m \ne l. \end{cases}$$

Для непрерывной на Γ функции f обозначим через $d_n(f)$ диагональную матрицу порядка n с диагональными элементами $f(t_n^0), f(t_n^1), \dots, f(t_n^{n-1})$; в частности, $d_n(1) = I_n$ — единичная матрица порядка n.

В пространстве $\mathbb{C}^n$ будем использовать векторную норму $\|z^{(n)}\|_{(n)} = \max\limits_{m=0,\dots,n-1} |z_m^{(n)}|$. Матричная норма, подчиненная данной векторной норме, имеет вид ([7], п. 14.58)

$$\|A_n\|_{(n)} = \max_{m=0,\dots,n-1} \sum_{l=0}^{n-1} |a_{ml}^{(n)}|.$$

Поставим уравнению (1) в соответствие систему линейных уравнений

$$(d_n(a) + S_n^{(\mu)})x^{(n)} = [y]^{(n)}, \tag{2}$$

где $[y]^{(n)}$ — n-мерная дискретизация функции $y \in H_\alpha(\Gamma)$.

Основным результатом данной работы является теорема о сходимости решения системы уравнений (2) к решению уравнения (1).

Теорема. *Пусть оператор D является обратимым в $L_2(\Gamma)$, и для функций a и μ выполняется условие сильной эллиптичности*

$$a(t) + \lambda\mu(t,t) \neq 0, \quad \lambda \in [-1,1], \quad t \in \Gamma. \tag{3}$$

Тогда для всех $n \in \mathbb{N}$, начиная с некоторого $n_0 = n_0(D)$, система (2) *имеет единственное решение $\widetilde{x}^{(n)}$, которое связано с решением $\widetilde{x}$ уравнения* (1) *следующим образом*:

$$\|[\widetilde{x}]^{(n)} - \widetilde{x}^{(n)}\|_{(n)} \leq Cn^{-\alpha}(\ln n + 1)^{4+2/\alpha},$$

где $C = C(D,y)$ не зависит от n.

Замечание. В [3]–[5] показано, что условие (3) является необходимым и достаточным для сходимости рассмотренного приближенного метода (например, [5], п. 10.13). В ([5], п. 10.21) также приведены оценки скорости сходимости метода в случае пространств Соболева. Нашей целью является обоснование оценки скорости сходимости в векторной L_∞-норме.

В качестве подготовительного этапа к доказательству теоремы отметим, что удобнее пользоваться другим представлением интегрального уравнения (1) и системы линейных уравнений (2).

Для сингулярного интегрального оператора с плотностью μ имеет место представление

$$\frac{1}{\pi i}\int_\Gamma \frac{\mu(t,\tau)f(\tau)\,d\tau}{\tau - t} = \frac{b(t)}{\pi i}\int_\Gamma \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau - t} + \int_\Gamma \frac{k(t,\tau)f(\tau)\,d\tau}{\tau - t},$$

где $b(t) = \mu(t,t)$, $k(t,\tau) = \frac{1}{\pi i}\left(\mu(t,\tau) - \mu(t,t)\right)$. Очевидно, $b \in H_\alpha(\Gamma)$, $k \in H_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$, причем функция k удовлетворяет дополнительному условию $k(t,t) = 0$, $t \in \Gamma$.

Пространство функций $k \in H_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$, удовлетворяющих указанному дополнительному условию, будем обозначать через $H'_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$. Если функция k принадлежит пространству $H'_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$, то для нее справедлива оценка

$$|k(t,\tau)| \leq A(k)|\tau - t|^\alpha, \tag{4}$$

где $A(k)$ — коэффициент Гёльдера для функции k.

Через $\mathbb{H}'_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, будем обозначать множество всех интегральных операторов с ядром вида $\frac{k(t,\tau)}{\tau - t}$, $k \in H'_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$, действующих из $H_\alpha(\Gamma)$ в $H_{\alpha-0}(\Gamma)$ (см. п. 2, свойство 7). Положим $\mathbb{H}'_{\alpha-0} = \bigcup\limits_{\beta\in(0,\alpha)} \mathbb{H}'_\beta$. Очевидно, для любого $\alpha \in (0,1)$ имеет место вложение $\mathbb{H}_\alpha \subset \mathbb{H}'_\alpha$.

С использованием введенных обозначений уравнение (1) можно переписать в виде

$$(aI + bS + K)x = y, \tag{5}$$

где $a, b, y \in H_\alpha(\Gamma)$, $K \in \mathbb{H}'_\alpha$. При этом условие (3) примет вид

$$a(t) + \lambda b(t) \neq 0, \quad \lambda \in [-1,1], \quad t \in \Gamma. \tag{6}$$

Пусть $K \in \mathbb{H}'_\alpha$ — интегральный оператор, ядро которого $\frac{k(t,\tau)}{\tau - t}$, $k \in H'_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$. Будем называть *$n$-мерной дискретизацией оператора K по формуле прямоугольников* оператор умножения на матрицу $[K]_n = \|k^{(n)}_{ml}\|_{m,l=0}^{n-1}$ с элементами

$$k^{(n)}_{ml} = \begin{cases} 0, & m = l; \\ \frac{k(t_n^m, t_n^l)(t_n^{l+1} - t_n^l)}{t_n^l - t_n^m}, & m \neq l. \end{cases}$$

Данная дискретизация согласована с ранее определенной дискретизацией сингулярного интегрального оператора $S^{(\mu)}$, поэтому систему уравнений (2) можно представить в виде

$$(d_n(a) + d_n(b)S_n + [K]_n)x^{(n)} = [y]^{(n)}, \tag{7}$$

где $a, b \in H_\alpha(\Gamma)$, $K \in \mathbb{H}'_\alpha$, S_n — матрица n-мерной дискретизации сингулярного интегрального оператора $S^{(\mu)}$ с единичной плотностью: $\mu(t,\tau) \equiv 1$.

В дальнейшем константы, не зависящие от n, обозначаются буквой C. На протяжении всей работы используются следующие обозначения: $D_n^{(0)} = d_n(a) + d_n(b)S_n$, $D_n = d_n(a) + d_n(b)S_n + [K]_n$, $D_{n,\xi} = a(\xi)I_n + b(\xi)S_n$, $\xi \in \Gamma$.

Кратко опишем схему доказательства теоремы (в работе [8] применялся более простой вариант данной схемы). Для получения требуемой оценки сходимости достаточно исследовать свойства обратных матриц D_n^{-1} (существующих, начиная с некоторого n_0) и показать, что при возрастании n для норм этих матриц имеет место не более чем логарифмический по n рост (см. неравенство (20)). Построение семейства обратных матриц $\{D_n^{-1}\}$ проводится с помощью двух вспомогательных семейств матриц $\{D_n^{(1)}\}$ и $\{D_n^{(2)}\}$. При построении семейства матриц $\{D_n^{(1)}\}$ (см. п. 3) используется схема, аналогичная обоснованию локального принципа Гохберга–Крупника ([9], гл. XII, § 1); при этом учитываются свойства дискретизаций сингулярного интегрального оператора S. Следует заметить, что использовать *результат* локального принципа Гохберга–Крупника (рассмотрев банахову алгебру ограниченных последовательностей матриц и связанные с ней фактор-алгебры, как это было сделано в [10] при исследовании сходимости в векторной L_2-норме) в данном случае нельзя, так как матрицы $\{D_n\}$ не являются равномерно ограниченными по n в L_∞-норме (в силу логарифмического роста нормы S_n). При построении семейства матриц $\{D_n^{(2)}\}$ (см. п. 4) используются свойства дискретизаций интегральных операторов со слабой особенностью и ряд фактов, связанных с обратимостью подобных операторов.

Доказательство теоремы будет основано на пунктах 2–5.

2. Свойства дискретизаций сингулярного интегрального оператора S и интегральных операторов со слабой особенностью. Первые три свойства связаны с матрицей S_n. Их доказательства базируются на теории циркулянтов и содержатся в [11].

1. *Пусть $f \in H_\alpha(\Gamma)$, $\alpha \in (0,1)$. Тогда для любого $n \in \mathbb{N}$ справедлива оценка $\|[Sf]^{(n)} - S_n[f]^{(n)}\|_{(n)} \le Cn^{-\alpha}(\ln n + 1)\|f\|_\alpha$, где C не зависит от f, n и α; $\|\cdot\|_\alpha$ — гёльдеровская норма порядка α: $\|f\|_\alpha = \max\limits_{t\in\Gamma}|f(t)| + \sup\limits_{t,\tau\in\Gamma,\, t\ne\tau} \frac{|f(t)-f(\tau)|}{|t-\tau|^\alpha}$.*

2. *Для матрицы $D_{n,\xi}$ при любом $\xi \in \Gamma$ справедлива оценка $\|D_{n,\xi}\|_{(n)} \le C(\ln n + 1)$, где C не зависит от n и ξ. Аналогичная оценка справедлива и для матрицы $D_n^{(0)}$.*

3. *Если a и b удовлетворяют условию (6), то существует такое $n_0 = n_0(a,b) \in \mathbb{N}$, что для $n \ge n_0$ и любых $\xi \in \Gamma$ матрицы $D_{n,\xi}$ являются обратимыми, причем*

$$\|D_{n,\xi}^{-1}\|_{(n)} \le C(\ln n + 1), \quad \text{где } C \text{ не зависит от } n \text{ и } \xi.$$

Следующие свойства связаны с дискретизациями интегральных операторов со слабой особенностью.

4. *Пусть $a \in H_\alpha(\Gamma)$, $K \in \mathbb{H}'_\alpha$. Тогда $aK \in \mathbb{H}'_\alpha$, $KaI \in \mathbb{H}'_\alpha$ и для любого $n \in \mathbb{N}$*

$$[aK]_n = d_n(a)[K]_n, \quad [KaI]_n = [K]_n d_n(a).$$

Данное свойство очевидно.

5. *Пусть $n \in \mathbb{N}$, $K \in \mathbb{H}'_\alpha$. Тогда $\|[K]_n\|_{(n)} \le C$, где $C = C(K)$ не зависит от n.*

Свойство вытекает из (4) и легко проверяемой оценки $\sum\limits_{l=0,\dots,n-1,\, l\ne m} |t_n^l - t_n^m|^{-\alpha} \le Cn.$

Отметим, что из данного свойства и свойства 2 вытекает оценка

$$\|D_n\|_{(n)} \le C(\ln n + 1). \tag{8}$$

6. *Пусть* $K_1, K_2 \in \mathbb{H}'_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. *Тогда оператор* K_1K_2 *принадлежит классу* $\mathbb{H}'_{\alpha-0}$, *и для его дискретизаций имеет место оценка*

$$\|[K_1K_2]_n - [K_1]_n[K_2]_n\|_{(n)} \leq Cn^{-\alpha}(\ln n + 1)^2.$$

Принадлежность оператора K_1K_2 классу $\mathbb{H}'_{\alpha-0}$ вытекает из известных свойств сингулярных интегральных операторов (например, [6], § 18, пп. 1, 3). Оценка доказывается с помощью непосредственных преобразований; при этом используется соотношение (4), оценка $\sum\limits_{l=0,\dots,n-1,\, l\neq m} |t_n^l - t_n^m|^{\alpha-2} \leq Cn^{2-\alpha}$, а также оценка, справедливая для $k \in H'_\alpha(\Gamma\times\Gamma)$ и любых $n \in \mathbb{N}$, $l \in \{0,\dots,n-1\}$:

$$\left| \int_\Gamma \frac{k(\theta, t_n^l)\, d\theta}{t_n^l - \theta} - \sum_{\substack{j=0\\ j\neq l}}^{n-1} \frac{k(t_n^j, t_n^l)(t_n^{j+1} - t_n^j)}{t_n^l - t_n^j} \right| \leq C(\ln n + 1)n^{-\alpha},$$

где $C = C(k)$ не зависит от n и l.

Аналогичным образом доказываются следующие свойства.

7. *Пусть* $f \in H_\alpha(\Gamma)$, $K \in \mathbb{H}'_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. *Тогда* $Kf \in H_{\alpha-0}(\Gamma)$ *и для любого* $n \in \mathbb{N}$ *справедлива оценка* $\|[Kf]^{(n)} - [K]_n[f]^{(n)}\|_{(n)} \leq Cn^{-\alpha}(\ln n + 1)$.

8. *Пусть* $K \in \mathbb{H}'_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$. *Тогда* $SK \in \mathbb{H}'_{\alpha-0}$, $KS \in \mathbb{H}'_{\alpha-0}$ *и имеют место оценки* $\|[SK]_n - S_n[K]_n\|_{(n)} \leq Cn^{-\alpha}(\ln n + 1)^2$ *и* $\|[KS]_n - [K]_nS_n\|_{(n)} \leq Cn^{-\alpha}(\ln n + 1)^2$.

9. *Для* $K \in \mathbb{H}'_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, *имеет место оценка*

$$\|(I_n - S_n^2)[K]_n\|_{(n)} \leq Cn^{-\alpha}(\ln n + 1).$$

3. Построение семейства матриц $D_n^{(1)}$. Построение проводится по схеме, аналогичной той, которая была использована при обосновании локального принципа Гохберга–Крупника ([9], гл. XII, § 1).

Через $\psi_{\xi,\delta}$, $\xi \in \Gamma$, $\delta \in (0,1)$, будем обозначать определенную на Γ бесконечно дифференцируемую функцию, равную 1 на дуге длины δ, центром которой является точка ξ, и равную нулю вне дуги длины 3δ с центром в этой же точке. Функцию $\psi_{\xi,\delta}$ назовем *локализующей функцией порядка* δ *в точке* ξ.

Сформулируем две леммы, связанные с локализующими функциями.

Лемма 1. *Для любых* $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in \Gamma$, $\delta \in (0,1)$ *имеет место оценка* $\|d_n(\psi_{\xi,\delta})(D_n^{(0)} - D_{n,\xi})\|_{(n)} \leq C(\ln n + 1)\delta^\alpha$, *где* α — *показатель Гёльдера функций* a *и* b, *входящих в* $D_n^{(0)}$ *и* $D_{n,\xi}$, *а* C *не зависит от* n, ξ, δ.

Доказательство. Достаточно представить выражение $d_n(\psi_{\xi,\delta})(D_n^{(0)} - D_{n,\xi})$ в виде $d_n(a_\xi) + d_n(b_\xi)S_n$, где $a_\xi(t) = \psi_{\xi,\delta}(t)\cdot(a(t) - a(\xi))$, $b_\xi(t) = \psi_{\xi,\delta}(t)\cdot(b(t) - b(\xi))$, и воспользоваться (8) и оценками $\|d_n(a_\xi)\|_{(n)} \leq C\delta^\alpha$, $\|d_n(b_\xi)\|_{(n)} \leq C\delta^\alpha$, в которых константа C не зависит от n, ξ и δ. □

Лемма 2. *Для любых* $n \in \mathbb{N}$, $\xi \in \Gamma$, $\delta \in (0,1)$ *имеет место соотношение* $D_n^{(0)}d_n(\psi_{\xi,\delta}) - d_n(\psi_{\xi,\delta})D_n^{(0)} = d_n(b)[K_{\xi,\delta}]_n$, *где* $K_{\xi,\delta}$ — *интегральный оператор с бесконечно дифференцируемым ядром.*

Доказательство. Требуемым интегральным оператором является оператор $S\psi_{\xi,\delta}I - \psi_{\xi,\delta}S$. Бесконечная дифференцируемость ядра данного оператора вытекает из бесконечной дифференцируемости функций $\psi_{\xi,\delta}$. □

В дальнейшем будем рассматривать только такие $n \in \mathbb{N}$, для которых матрицы $D_{n,\xi}$ являются обратимыми при любых $\xi \in \Gamma$ (см. свойство 3).

Учитывая оценки, приведенные в свойстве 3 и лемме 1, можно доказать следующее утверждение: существует такое целое M_n, не превосходящее $C(\ln n+1)^{2/\alpha}$, что при $\delta_n = 2\pi/M_n$ для локализующих функций справедливо соотношение

$$d_n(\psi_{\xi,\delta_n}) = d_n(\psi_{\xi,\delta_n}) D_n^{(0)} {D_{n,\xi}}^{-1} (I_n - U_{n,\xi})^{-1}, \tag{9}$$

где $U_{n,\xi} = d_n(\psi_{\xi,\delta_n'})(D_{n,\xi} - D_n^{(0)}) {D_{n,\xi}}^{-1}$, причем $\|(I_n - U_{n,\xi})^{-1}\|_{(n)} \le 2$.

Рассмотрим систему функций $\psi_n^{(m)}(t) = \psi_{\xi_n^m,\delta_n}(t)$, где $\xi_n^m = t_{M_n}^m$, $m = 0,\ldots,M_n-1$, а также функцию $\psi_n(t) = \sum\limits_{m=0}^{M_n-1} \psi_n^{(m)}(t)$. Легко видеть, что $|1/\psi_n(t)| \le 1$, $t \in \Gamma$.

Определим семейство матриц

$$D_n^{(1)} = \sum_{m=0}^{M_n-1} d_n(\psi_n^{(m)}) D_{n,\xi_n^m}^{-1} (I_n - U_{n,\xi_n^m})^{-1} d_n(1/\psi_n).$$

С учетом приведенных выше оценок и свойства 3 получаем оценку

$$\|D_n^{(1)}\|_{(n)} \le C(\ln n+1)^{1+2/\alpha}. \tag{10}$$

Рассмотрим произведение $D_n^{(0)} D_n^{(1)} = \sum\limits_{m=0}^{M_n-1} D_n^{(0)} d_n(\psi_n^{(m)}) D_{n,\xi_n^m}^{-1} (I_n - U_{n,\xi_n^m})^{-1} d_n(1/\psi_n)$.

В силу леммы 2 и равенства (9) произведение можно представить в виде $I_n + V_n$, где

$$V_n = d_n(b) \sum_{m=0}^{M_n-1} [K_{\xi_n^m,\delta_n}]_n D_{n,\xi_n^m}^{-1} (I_n - U_{n,\xi_n^m})^{-1} d_n(1/\psi_n), \tag{11}$$

а $K_{\xi_n^m,\delta_n}$ — интегральный оператор с бесконечно дифференцируемым ядром.

Для $D_n D_n^{(1)}$, таким образом, имеем

$$D_n D_n^{(1)} = I_n + V_n + [K]_n D_n^{(1)}. \tag{12}$$

4. Построение семейства матриц $D_n^{(2)}$. Вначале приведем два вспомогательных утверждения о представлении обратных интегральных операторов.

Лемма 3. *Если оператор K принадлежит классу $\mathbb{H}_{\alpha-0}$, $\alpha \in (0,1)$, и оператор $I-K$ обратим, то оператор $(I-K)^{-1}$ можно представить в виде $(I-K)^{-1} = I+\widetilde{K}$, $\widetilde{K} \in \mathbb{H}_{\alpha-0}$.*

Доказательство. Тот факт, что оператор $\widetilde{K}$ является интегральным оператором с непрерывным ядром $\widetilde{k}$, следует из непрерывности ядра оператора K ([12], §4, п. 4.2). Чтобы доказать, что ядро $\widetilde{k}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha-\varepsilon$ по первой переменной равномерно относительно второй переменной, достаточно представить оператор $\widetilde{K}$ в виде $K + K\widetilde{K}$ и установить соответствующий факт для оператора $K\widetilde{K}$. Аналогично доказывается, что ядро $\widetilde{k}$ удовлетворяет условию Гёльдера с показателем $\alpha-\varepsilon$ по второй переменной равномерно относительно первой переменной. Таким образом, $\widetilde{K} \in \mathbb{H}_{\alpha-0}$. □

Лемма 4. *Если оператор K принадлежит классу $\mathbb{H}'_\alpha$, $\alpha \in (0,1)$, и оператор $I-K^n$ обратим для любого $n \in \mathbb{N}$, то оператор $(I-K)^{-1}$ можно представить в виде $(I-K)^{-1} = I+\widetilde{K}$, $\widetilde{K} \in \mathbb{H}'_{\alpha-0}$.*

Доказательство. Оператор $(I-K)^{-1}$ можно представить в виде

$$(I-K^n)^{-1}\Big(I+\sum_{m=1}^{n-1}K^m\Big). \tag{13}$$

В силу свойства 6 оператор K^n принадлежит классу $\mathbb{H}'_{\alpha-0}$ для любого $n\in\mathbb{N}$. Поскольку оператор K является интегральным оператором со слабой особенностью, все степени K^n, начиная с некоторого показателя $n_0\in\mathbb{N}$, являются интегральными операторами с ограниченным ядром ([12], § 6, п. 6.2). Учитывая эти факты, нетрудно установить, что оператор $K'=K^{2n_0}$ принадлежит классу $\mathbb{H}_{\alpha-0}$. Поскольку по условию леммы оператор $I-K'$ обратим, можем воспользоваться результатом леммы 3 и представить оператор $(I-K')^{-1}$ в виде $I+\widetilde{K}'$, где $\widetilde{K}'\in\mathbb{H}_{\alpha-0}$. Обозначим $K''=\sum\limits_{m=1}^{2n_0-1}K^m$; в силу свойства 6 $K''\in\mathbb{H}_{\alpha-0}$. С учетом (13) окончательно получаем $(I-K)^{-1}=(I+\widetilde{K}')(I+K'')=I+\widetilde{K}$, $\widetilde{K}=\widetilde{K}'+K''+\widetilde{K}'K''\in\mathbb{H}'_{\alpha-0}$. $\square$

Положим $\widetilde{a}=\frac{a}{a^2-b^2}$, $\widetilde{b}=-\frac{b}{a^2-b^2}$. В силу (6) $\widetilde{a},\widetilde{b}\in H_\alpha(\Gamma)$; кроме того, $(aI+bS)(\widetilde{a}I+\widetilde{b}S)=I$.

Рассмотрим оператор $D'=D(\widetilde{a}I+\widetilde{b}S)=I-K_0$, где $K_0=-K(\widetilde{a}I+\widetilde{b}S)\in\mathbb{H}'_{\alpha-0}$ (см. свойство 8). Так как оператор D по условию обратим, то оператор D' также обратим, и $(D')^{-1}=(aI+bS)D^{-1}$.

Лемма 5. *Оператор, обратный оператору D', можно представить в виде*

$$(D')^{-1}=I+\widetilde{K}_0,\quad \widetilde{K}_0\in\mathbb{H}'_{\alpha-0}. \tag{14}$$

Доказательство. Поскольку оператор K_0 принадлежит $\mathbb{H}'_{\alpha-0}$, его ядро представимо в виде $\frac{k_0(t,\tau)}{\tau-t}$, где $k_0\in H'_{\alpha-0}(\Gamma\times\Gamma)$. Воспользовавшись теоремой об аппроксимации гёльдеровской функции тригонометрическим полиномом ([13], теорема 1.3.1) и выбрав $\beta\in(0,\alpha)$ и $\varepsilon>0$, построим тригонометрический полином $P_0(t,\tau)=\sum\limits_{m=-M}^{M}\sum\limits_{n=-N}^{N}a_{mn}t^m\tau^n$ и функцию $\sigma_0\in H_\beta(\Gamma\times\Gamma)$, $\|\sigma_0\|_\beta<\varepsilon$, такие, что $k_0(t,\tau)=P_0(t,\tau)+\sigma_0(t,\tau)$, $t,\tau\in\Gamma$ (здесь $\|\cdot\|_\beta$ — гёльдеровская норма порядка β).

Учитывая, что $k_0(t,t)=0$, представим оператор K_0 в виде суммы двух интегральных операторов:

$$(K_0x)(t)=\int_\Gamma\frac{P_0(t,\tau)-P_0(t,t)}{\tau-t}\,x(\tau)\,d\tau+\int_\Gamma\frac{\sigma_0(t,\tau)-\sigma_0(t,t)}{\tau-t}\,x(\tau)\,d\tau=(K_1x)(t)+(K_2x)(t).$$

Нетрудно установить, что ядро оператора K_1 является тригонометрическим полиномом. Ядро оператора K_2 имеет вид $\frac{k_2(t,\tau)}{\tau-t}$, где $k_2(t,\tau)=\sigma_0(t,\tau)-\sigma_0(t,t)$. Очевидно, $k_2\in H'_\beta(\Gamma\times\Gamma)$ и $\|k_2\|_\beta<2\varepsilon$. Из последней оценки вытекает неравенство

$$|k_2(t_1,\tau_1)-k_2(t_2,\tau_2)|<2\varepsilon(|t_1-t_2|^\beta+|\tau_1-\tau_2|^\beta).$$

Учитывая это неравенство, оценим норму оператора K_2 как оператора, действующего из $L_\infty(\Gamma)$ в $L_\infty(\Gamma)$: $\|K_2\|\le\sup\limits_{t\in\Gamma}\int\limits_\Gamma\frac{|k_2(t,\tau)|\,|d\tau|}{|\tau-t|}=\sup\limits_{t\in\Gamma}\int\limits_\Gamma\frac{|k_2(t,\tau)-k_2(t,t)|\,|d\tau|}{|\tau-t|}<2\varepsilon C_\beta$, где C_β не зависит от k_2.

Если положить $\varepsilon=(4C_\beta)^{-1}$, то для нормы оператора K_2 будет выполняться оценка $\|K_2\|<1/2$, и, следовательно, оператор $I-K_2^n$ будет обратим для любого $n\in\mathbb{N}$. Таким образом, для оператора $K_2\in\mathbb{H}'_\beta$ выполнены все условия леммы 4. Используя результат данной леммы, получаем $(I-K_2)^{-1}=I+\widetilde{K}_2$, где $\widetilde{K}_2\in\mathbb{H}'_{\beta-0}$.

Вернемся к оператору $D' = I - K_0$. Имеем $D' = I - K_1 - K_2 = (I - K_2)(I - K_1')$, где $K_1' = K_1 + \widetilde{K}_2 K_1$.

Исследуем свойства оператора $\widetilde{K}_2 K_1$. Ранее было установлено, что оператор K_1 имеет бесконечно дифференцируемое ядро — тригонометрический полином $p(t,\tau)$, а оператор $\widetilde{K}_2$ имеет ядро вида $\frac{\widetilde{k}_2(t,\tau)}{\tau - t}$, где $\widetilde{k}_2 \in H_{\beta-0}(\Gamma\times\Gamma)$. Тогда оператор $\widetilde{K}_2 K_1$ имеет ядро

$$k_{21}(t,\tau) = \int_\Gamma \frac{\widetilde{k}_2(t,\theta)}{\theta - t}\, p(\theta,\tau)\, d\theta = \int_\Gamma \frac{\widetilde{k}_{21}(t,\tau,\theta)\, d\theta}{\theta - t},$$

где $\widetilde{k}_{21}$ — функция, удовлетворяющая условию Гёльдера с показателем $\beta - 0$ по каждой из своих переменных равномерно относительно других переменных. В силу известных свойств сингулярных интегральных операторов (например, [6], § 18, пп. 1, 3) заключаем, что функция k_{21} принадлежит классу $H_{\beta-0}(\Gamma\times\Gamma)$. Следовательно, $\widetilde{K}_2 K_1 \in \mathbb{H}_{\beta-0}$.

Поскольку оператор K_1 имеет бесконечно дифференцируемое ядро, оператор $K_1' = K_1 + \widetilde{K}_2 K_1$ тоже принадлежит классу $\mathbb{H}_{\beta-0}$. Операторы D' и $I - K_2$ обратимы, следовательно, оператор $I - K_1'$ также обратим. Поэтому в силу леммы 3 $(I - K_1')^{-1} = I + \widetilde{K}_1'$, где $\widetilde{K}_1' \in \mathbb{H}_{\beta-0}$.

Из представления $D' = (I - K_2)(I - K_1')$ получаем следующее представление для $(D')^{-1}$: $(D')^{-1} = (I + \widetilde{K}_1')(I + \widetilde{K}_2) = I + \widetilde{K}_0$, где $\widetilde{K}_0 = \widetilde{K}_1' + \widetilde{K}_2 + \widetilde{K}_1'\widetilde{K}_2$. Поскольку $\widetilde{K}_1' \in \mathbb{H}_{\beta-0} \subset \mathbb{H}'_{\beta-0}$, $\widetilde{K}_2 \in \mathbb{H}'_{\beta-0}$ и в силу свойства 6 $\widetilde{K}_1'\widetilde{K}_2 \in \mathbb{H}'_{\beta-0}$, заключаем, что $\widetilde{K}_0 \in \mathbb{H}'_{\beta-0}$. Учитывая произвол в выборе $\beta \in (0,\alpha)$, получаем, что оператор $\widetilde{K}_0$ принадлежит классу $\mathbb{H}'_{\alpha-0}$. $\square$

Оператор D^{-1} с учетом леммы 5 можно представить в виде

$$D^{-1} = (\widetilde{a}I + \widetilde{b}S)(D')^{-1} = \widetilde{a}I + \widetilde{b}S + \widetilde{K},$$

где $\widetilde{K} = (\widetilde{a}I + \widetilde{b}S)\widetilde{K}_0 \in \mathbb{H}'_{\alpha-0}$ в силу свойства 8. Заметим, что оператор $\widetilde{K}$ удовлетворяет соотношению

$$(aI + bS)\widetilde{K} + K(\widetilde{a}I + \widetilde{b}S) + K\widetilde{K} + b(S\widetilde{a}I - \widetilde{a}S) + b(S\widetilde{b}I - \widetilde{b}S)S = 0, \tag{15}$$

которое вытекает из равенства $DD^{-1} = I$ с учетом того, что $S^2 = I$.

Введем семейство матриц

$$D_n^{(2)} = d_n(\widetilde{a}) + d_n(\widetilde{b})S_n + [\widetilde{K}]_n, \quad n \in \mathbb{N}.$$

Из свойств 2 и 5 следует оценка

$$\|D_n^{(2)}\|_{(n)} \le C(\ln n + 1). \tag{16}$$

Лемма 6. *Для любого интегрального оператора $B \in \mathbb{H}'_\alpha$ и любого $\varepsilon \in (0,\alpha)$ справедлива оценка*

$$\|(D_n D_n^{(2)} - I_n)[B]_n\|_{(n)} \le C n^{-\alpha+\varepsilon}.$$

Доказательство. Учитывая вид матриц D_n и $D_n^{(2)}$, имеем

$$\begin{aligned}(D_n D_n^{(2)} - I_n)[B]_n = d_n(b\widetilde{b})(S_n^2 - I_n)[B]_n + (d_n(a) + d_n(b)S_n)[\widetilde{K}]_n[B]_n +\\ + [K]_n(d_n(\widetilde{a}) + d_n(\widetilde{b})S_n)[B]_n + [K]_n[\widetilde{K}]_n[B]_n +\\ + d_n(b)(S_n d_n(\widetilde{a}) - d_n(\widetilde{a})S_n)[B]_n + d_n(b)(S_n d_n(\widetilde{b}) - d_n(\widetilde{b})S_n)S_n[B]_n.\end{aligned}$$

Для первого слагаемого в правой части полученного равенства в силу свойства 9 справедлива оценка $\|d_n(b\widetilde{b})(S_n^2 - I_n)[B]_n\|_{(n)} \le Cn^{-\alpha}(\ln n + 1)$.

Оставшиеся слагаемые с учетом свойств 2, 4, 6, 8 можно представить в виде $[(aI+bS)\widetilde{K}B+K(\widetilde{a}I+\widetilde{b}S)B+K\widetilde{K}B+b(S\widetilde{a}I-\widetilde{a}S)B+b(S\widetilde{b}I-\widetilde{b}S)SB]_n+\Delta_n$, где $\|\Delta_n\|_{(n)}\le Cn^{-\alpha+\varepsilon}$.

Для завершения доказательства леммы осталось воспользоваться соотношением (15). □

5. Построение матрицы, обратной к D_n. Следуя [14], рассмотрим матрицу $D_n^{(3)}=D_n^{(2)}+D_n^{(1)}-D_n^{(2)}D_nD_n^{(1)}$. В силу (8), (10) и (16) для нормы данной матрицы справедлива оценка

$$\|D_n^{(3)}\|_{(n)}\le C(\ln n+1)^{3+2/\alpha}. \tag{17}$$

Легко убедиться в справедливости соотношения $D_nD_n^{(3)}-I_n=-(D_nD_n^{(2)}-I_n)(D_nD_n^{(1)}-I_n)$. С учетом (12) правая часть последнего соотношения примет вид

$$(D_nD_n^{(2)}-I_n)(V_n+[K]_nD_n^{(1)})=-(D_nD_n^{(2)}-I_n)V_n-(D_nD_n^{(2)}-I_n)[K]_nD_n^{(1)}. \tag{18}$$

Оценим норму последнего слагаемого. Так как $K\in\mathbb{H}'_\alpha$, в силу леммы 6 справедлива оценка $\|(D_nD_n^{(2)}-I_n)[K]_n\|_{(n)}\le Cn^{-\alpha+\varepsilon}$ и с учетом (10) норма последнего слагаемого в (18) оценивается величиной $Cn^{-\alpha+\varepsilon}(\ln n+1)^{1+2/\alpha}$.

Обратимся к первому слагаемому в правой части (18). Согласно определению (11) матрицы V_n достаточно проанализировать выражение

$$(D_nD_n^{(2)}-I_n)\sum_{m=0}^{M_n-1}[bK_{\xi_n^m,\delta_n}]_nV'_{n,\xi_n^m}, \tag{19}$$

где $V'_{n,\xi_n^m}=D_{n,\xi_n^m}^{-1}(I_n-U_{n,\xi_n^m})^{-1}d_n(1/\psi_n)$, причем $\|V'_{n,\xi_n^m}\|_{(n)}\le C(\ln n+1)$.

Оператор $K_{\xi,\delta}$ для любых $\xi\in\Gamma$, $\delta\in(0,1)$ является интегральным оператором с бесконечно дифференцируемым ядром, поэтому $bK_{\xi,\delta}\in\mathbb{H}_\alpha$ и, следовательно, $bK_{\xi,\delta}\in\mathbb{H}'_\alpha$. В силу леммы 6 для любого $\varepsilon\in(0,\alpha)$ имеет место оценка $\|(D_nD_n^{(2)}-I_n)[bK_{\xi,\delta}]_n\|_{(n)}\le Cn^{-\alpha+\varepsilon}$. Поэтому, принимая во внимание оценки для M_n и $\|V'_{n,\xi_n^m}\|_{(n)}$, выражение (19) оценим величиной $Cn^{-\alpha+\varepsilon}(\ln n+1)^{1+2/\alpha}$.

Объединим полученные оценки: $D_nD_n^{(3)}-I_n=\Delta_n$, где $\|\Delta_n\|_{(n)}\le Cn^{-\alpha+\varepsilon}(\ln n+1)^{1+2/\alpha}$.

Таким образом, для всех $n\in\mathbb{N}$, начиная с некоторого n_0, матрица $I_n+\Delta_n$ является обратимой, норма матрицы $(I_n+\Delta_n)^{-1}$ равномерно по n ограничена, и в качестве матрицы, обратной D_n, можно взять $D_n^{-1}=D_n^{(3)}(I_n+\Delta_n)^{-1}$, причем согласно (17) для всех $n\ge n_0$

$$\|D_n^{-1}\|_{(n)}\le C(\ln n+1)^{3+2/\alpha}. \tag{20}$$

Перейдем к заключительной части доказательства теоремы.

Пусть $\widetilde{x}$ — решение уравнения (5), $\widetilde{x}^{(n)}$ — решение системы уравнений (7). Разность $D_n[\widetilde{x}]^{(n)}-D_n\widetilde{x}^{(n)}$ можно преобразовать к виду $d_n(b)\big(S_n[\widetilde{x}]^{(n)}-[S\widetilde{x}]^{(n)}\big)+\big([K]_n[\widetilde{x}]^{(n)}-[K\widetilde{x}]^{(n)}\big)$. Учитывая свойства 1 и 7, получаем $\|D_n[\widetilde{x}]^{(n)}-D_n\widetilde{x}^{(n)}\|_{(n)}\le Cn^{-\alpha}(\ln n+1)$. Осталось применить оценку $\|[\widetilde{x}]^{(n)}-\widetilde{x}^{(n)}\|_{(n)}\le\|D_n^{-1}\|_{(n)}\cdot\|D_n[\widetilde{x}]^{(n)}-D_n\widetilde{x}^{(n)}\|_{(n)}$ и воспользоваться оценкой (20). □

Автор глубоко признателен профессору В.С. Пилиди за обсуждение данной работы и высказанные при этом многочисленные полезные замечания.

Литература

[1] Белоцерковский С.М., Лифанов И.К. *Численные методы в сингулярных интегральных уравнениях* (Наука, М., 1985).

[2] Лифанов И.К. *Метод сингулярных интегральных уравнений и численный эксперимент* (*в математической физике, аэродинамике, теории упругости и дифракции волн*) (Янус, М., 1995).

[3] Rathsfeld A. *Quadraturformelverfahren für eindimensionale singuläre Integralgleichungen*, Semin. Anal. Operator equal. and num. analysis (Karl Weierstrass-Inst. Math. Akad. Wiss. DDR, Berlin, 1986), pp. 147–186.

[4] Prößdorf S., Rathsfeld A. *Stabilitätskriterien für Näherungsverfahren bei singulären Integralgleichungen in L^p* Z. Anal. Anwend. **6**, 539–558 (1987).

[5] Prößdorf S., Silbermann B. *Numerical analysis for integral and related operator equations* (Birkhäuser Verlag, Basel, 1991).

[6] Мусхелишвили Н.И. *Сингулярные интегральные уравнения* (Наука, М., 1968).

[7] Воеводин В.В., Кузнецов Ю.А. *Матрицы и вычисления* (Наука, М., 1984).

[8] Абрамян М.Э. *Обоснование сходимости в равномерной норме метода прямоугольников для полного сингулярного интегрального уравнения с непрерывными коэффициентами на окружности*, Изв. вузов. Сев.-Кавк. регион. Естеств. науки, № 5, 5–10 (2008).

[9] Гохберг И.Ц., Крупник Н.Я. *Введение в теорию одномерных сингулярных интегральных операторов* (Штиинца, Кишинев, 1973).

[10] Абрамян М.Э. *Обоснование сходимости метода прямоугольников для полного сингулярного интегрального уравнения с непрерывными коэффициентами на окружности*, Матем. заметки **77** (2), 163–175 (2005).

[11] Абрамян М.Э., Пилиди В.С. *Обоснование метода прямоугольников для сингулярного интегрального уравнения с постоянными коэффициентами на окружности*, ВИНИТИ, № 2385-В98 (Ростовск. гос. ун-т, 1998).

[12] Забрейко П.П., Кошелев А.И., Красносельский М.А. и др. *Интегральные уравнения* (Наука, М., 1968).

[13] Пилиди В.С. *Локальный метод исследования линейных операторных уравнений типа бисингулярных интегральных уравнений*, Дисс. … канд. физ.-матем. наук (РГУ, Ростов н/Д., 1972).

[14] Пилиди В.С. *Критерии равномерной обратимости регулярных аппроксимаций одномерных сингулярных интегральных операторов с кусочно непрерывными коэффициентами*, Изв. АН СССР. Серия матем. **54** (6), 1270–1294 (1990).

М.Э. Абрамян

доцент, кафедра алгебры и дискретной математики,
Южный федеральный университет,
ул. Большая Садовая, д. 105/42, г. Ростов-на-Дону, 344006, Россия,

e-mail: mabr@math.sfedu.ru

M.E. Abramyan

Associate Professor, Chair of Algebra and Discrete Mathematics,
Southern Federal University,
105/42 Bol'shaya Sadovaya str., Rostov-on-Don, 344006 Russia,

e-mail: mabr@math.sfedu.ru