ФЕДЕРАЛЬНОЕ ГОСУДАРСТВЕННОЕ АВТОНОМНОЕ ОБРАЗОВАТЕЛЬНОЕ УЧРЕЖДЕНИЕ ВЫСШЕГО ПРОФЕССИОНАЛЬНОГО ОБРАЗОВАНИЯ КАЗАНСКИЙ(ПРИВОЛЖСКИЙ)ФЕДЕРАЛЬНЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

ИНСТИТУТ МАТЕМАТИКИ И МЕХАНИКИ ИМ. Н.И. ЛОБАЧЕВСКОГО

КАФЕДРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Специальность: 010100 – Математика

Специализация: Дифференциальные уравнения

ВЫПУСКНАЯ КВАЛИФИКАЦИОННАЯ РАБОТА

(дипломная работа)

"Задача Римана в случае комплексного коэффицента"

Работа завершена:

«____»______________2015 г. ______________ Исмагилов А. А.

Работа допущена к защите:

Научный руководитель:
кандидат физико-математических наук, доцент

«____»______________2015 г. ______________ Салехова И. Г.

Заведующий кафедрой:
доктор физико-математических наук, профессор

«____»______________2015 г. ______________ Елизаров А. М.

Казань — 2015

Содержание

Введение **2**
1. Некоторые сведения из теории целых и мероморфных функций. 2
2. Задача Римана в случае конечного числа контуров. 3
3.Задача Римана в случае счетного множества числа контуров. . . 3
4. Некоторые сведения из теории эллиптических и квазиэллиптических функций. 5

Глава I. Задача Римана в случае конечного числа гладких разомкнутых дуг. **7**
I. Задача о скачке 7
II. Задача Римана 8

Глава II. Структура решения задачи в случае счетного множества гладких розомкнутых дуг **14**
I. Постановка задачи 14
II. Задача о скачке. 15
III. Однородная задача. 15

Глава III. Случай двоякопериодичесокого расположения дуг. **18**
I. Постановка задачи. 18
II. Задача о скачке. 18
III.Задача Римана 20
1.Решение задачи в классе $h(b_0)$ 20
2.Решение задачи в классе $h(a_0)$ 22
3.Решение задачи в классе $h(a_0, b_0)$ 22
4.Решение задачи в классе h_0 23

Глава IV. Случай непериодического свободного члена. **24**
I. Задача о скачке. 24
II.Задача Римана в классе $h(b_k)$. 26
1.Постановка задачи. 26
2.Решение задачи. 26

Введение

1. Некоторые сведения из теории целых и мероморфных функций.

Голоморфная функция — функция комплексного переменного, определённая на открытом подмножестве комплексной плоскости $\mathbb{C}$ и комплексно дифференцируемая в каждой точке.

Целая функция — функция, голоморфная во всей открытой комплексной плоскости $\mathbb{C}$.

Теорема Вейерштрасса [1,с 230]
Любая целая функция f, имеющая не более чем счётное количество нулей $0 \cup a_n \to \infty$, где точка 0 — нуль порядка λ, может быть представлена в виде бесконечного произведения вида

$$f(x) = z^{\lambda} e^{h(z)} \prod_{1}^{\infty} (1 - \frac{z}{a_n}) e^{[\frac{z}{a_n} + \frac{1}{2}(\frac{z}{a_n})^2 + ... + \frac{1}{p_n}(\frac{z}{a_n})^{p_n}]}$$

где $h(z)$ - некоторая целая функция, а неотрицательные числа p_n подобраны таким образом, чтобы ряд

$$\sum_{1}^{\infty} |\frac{z}{a_n}|^{p_n+1}$$

сходился при всех z.

Теорема Лиувилля:
Если фукция f голоморфна во всей замкнутой плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, то она постоянна.

Мероморфная функция - это функция комплексной переменной, которая в открытой плоскости $\mathbb{C}$ не имеет особых точек, отличных от полюсов.

Теорема Миттаг-Меффлера [1, с 223]
Пусть мероморфная функция $f(z)$ имеет в точках $z = a_k, |a_1| \leq |a_2| \leq ... \leq |a_k| \leq ...$ и $lim |a_k| = \infty, k \to \infty$ полюсы с главными частями $g_k(\frac{1}{z-a_k}) = G_k(z)$ и пусть $h_k^p(z) = G_k(0) + G_k^1(0)z + ... + \frac{G_k^{(p)}(0)}{p!} z^p$ будут отрезки тейлоровских разложений $g_k(\frac{1}{z-a_k})$ по степеням z. Тогда существует такая последовательность целых чиселp_k и такая целая функция $f_0(z)$, что для всех $z \neq a_k$ имеет место разложение $f(z) = f_0(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ g_k(\frac{1}{z-a_k}) - h_k^{p_k}(z) \right\}$, абсолютно и равномерно сходящееся в любом конечном круге $|z| \leq R$.

2. Задача Римана в случае конечного числа контуров.

Пусть $L = \bigcup_{k=1}^{p} L_k$, где L_k -гладкий замкнутый контур.
Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с граничной линией L, имеющую конечный порядок на ∞ , по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), t \in L \tag{1}$$

$G(t) \neq 0$ - коэффициент задачи, $g(t)$ - свободный член задачи. Функции $G(t)$ и $g(t) \in H(\overline{L})$

Пусть $\chi(z)$ - каноническое решение, удовлетворяющее условиям:

$$1)\chi^+(t) = G(t)\chi^-(t), t \in L,$$

$$2)\chi^+(t), \chi^-(t) \neq 0, t \in L.$$

С учетом того, что $G(t) = \frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}$, условие (1) перепишется в виде:

$$\Phi^+(t) = \frac{\chi^+(t)}{\chi^-(t)}\Phi^-(t) + g(t), t \in L,$$

откуда

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi^+(t)} = \frac{g(t)}{\chi^+(t)}$$

Решение задачи запишется в виде:

$$\Phi(z) = \frac{\chi(z)}{2\pi\iota} \int\limits_L \frac{g(t)dt}{\chi^+(t)(t-z)} + \chi(z)P(z)$$

где $P(z)$ - полином, степень которого определяется поведением искомой функции на бесконечности [2].

3.Задача Римана в случае счетного множества числа контуров.

Пусть имеется счетное множество L_k гладких замкнутых дуг $L_1, L_2 ...$ не имеющих общих точек(в том числе и концов), таких, что если R_k есть кратчайшее расстояние от начала координат до L_k, то

$$0 < R_1 \leq R_2 \leq ... \lim_{k\to\infty} R_k = \propto$$

при этом предпологаем, что в конечной части плоскости находится конечное число линий. На каждом контуре L_k заданы функции $G_k(t)$ и $g_k(t)$, удовлетворяющие условию Гельдера на каждой из закрытых дуг $\overline{L_k}$, причем $G_k(t) \neq 0$ всюду на L_k, включая концы.
Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с линиями скачков $L_1, L_2, ...$, если на этих линиях заданы условия

$$\Phi^+(t) = G_k(t)\Phi^-(t) + g_k(t), t \in L_k$$

выполняющиеся всюду, кроме концов.

Задача о скачке
Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, если на линиях L_k заданы условия

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g_k(t), t \in L_k$$

Если искомая функция $\Phi(z)$ является кусочно-голоморфной с конечным числом линий скачков $L_k, (k = 1, 2, 3..., q)$, тогда $\Phi(z)$ имеет вид:

$$\Phi(z) = \sum_{k=1}^{q} \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau - z} + R(z),$$

где $R(z)$ - мероморфная или рациональная функция.

Особую линию L_k, в окрестности которой $\Phi(z)$ отличается от интеграла типа Коши лишь аналитической в окрестности и на линии L_k функцией, будем называть *полярной особой линией первого порядка* [3, с 101].

При наличии бесконечного множества L_k полярных линий первого порядка имеет место теорема, являющаяся *аналогом теоремы Миттаг-Леффлера*:

Существует однозначная функция, голоморфная в любой конечной точке плоскости, не лежащей на линиях L_k , главная часть которой в окрестности линии L_k есть интеграл типа Коши

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau - z}$$

Функция, существование которой утверждается в предыдущей теореме имеет вид:

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty} [F_k(z) - h_k(z)]$$

где $h_k(z) = \sum_{j=1}^{n_k-1} c_{kj} z^j$ - отрезок ряда Тейлора разложения $F_k(z)$ внутри круга $|z| < qR_k(q < 1)$, подобранный таким образом, что ряд сходится абсолютно и равномерно в любой конечной области, если отбросить в нем конечное число членов.

Функция $F(z)$ - частное решение задачи о скачке.Тогда общее решение имеет вид:
$$\Phi(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)}$$

где $P(z)$ - целая функция[4].

4. Некоторые сведения из теории эллиптических и квазиэллиптических функций.

Определение.
Мероморфная в конечной плоскости комплексного переменного $\mathbb{C}$, двоякопериодическая функция f(z) называется *эллиптической(ЭФ)* [5,с 3].

Порядком r ЭФ f(z) называется число ее полюсов в параллеграмме периодов с учетом кратности. ЭФ порядка r=0 - постоянная, а ЭФ порядка r=1 не существует.

$\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} [\frac{1}{z-w} + \frac{z}{w^2} + \frac{1}{w}]$ - дзета-функция Вейерштрасса. Функция $\zeta(z)$ является нечетной, мероморфной функцией, имеющий полюсы в точках $z = \omega$, в частности полюс первого порядка в z=0. При изменении z на период функция $\zeta(z)$ изменяется на аддитивную постоянную:

$$\zeta(z+\omega) = \zeta(z) + \eta, \eta = m_1\eta_1 + m_2\eta_2, \eta_k = 2\zeta(\frac{\omega_k}{2}), k = 1, 2, ...$$

Между основными периодами и величинами η_1, η_2 имеется связывающее их *соотношение Лежандра*

$$\eta_1\omega_2 - \eta_2\omega = 2\pi\iota$$

$\sigma(z) = z \prod\limits_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} (1 - \frac{z}{w}) exp(\frac{z}{w} + \frac{z^2}{2w^2}), k_1^2 + k_2^2 \neq 0$ - сигма функция Вейерштрасса, при этом $\zeta(z) = \frac{\sigma'(z)}{\sigma(z)}$

Функция $\sigma(z)$ - нечетная, целая, с простыми нулями в точках $z = \omega$. При изменении z на приод функция $\sigma(z)$ изменяется на функциональный множитель:
$$\sigma(z+\omega) = \epsilon\sigma(z) exp[\eta(z + \omega/2)],$$

где $\epsilon = 1$, если $\omega/2$ - период, и $\epsilon = -1$, если $\omega/2$ - не период. Имеет место равенство:
$$\frac{\sigma(z-b+\omega)}{\sigma(z-a+\omega)} = \frac{\sigma(z-b)}{\sigma(z-a)} e^{\eta(a-b)}, a, b \in \mathbb{C} \qquad (2)$$

Мероморфную в C функцию f(z), удовлетворяющую любому из усвловий

$$f(z+\omega_k) = f(z) + g_k, k = 1, 2,$$

или

$$f(z+\omega_k) = f(z)exp(\gamma_k), k = 1, 2, \tag{3}$$

где ω_k, g_k, γ_k -некоторые числа из $\mathbb{C}$, причем Im $\omega_2/\omega_1 \neq 0$ будем называть *квазиэллиптической функцией(КЭФ)*

Критерием существования аналитической функции $f(z) \neq 0$ с условием (3) является равенство:

$$\gamma_1\omega_2 - \gamma_2\omega_1 = 2\pi\imath\tilde{\omega}, \tilde{\omega} = n_1\omega_1 + n_2\omega_2.$$

n_1, n_2 - фиксированная пара целых чисел.

Глава I. Задача Римана в случае конечного числа гладких разомкнутых дуг.

I. Задача о скачке

Пусть $L = \bigcup_{k=1}^{p} L_k$, где $L_k = \widehat{(a_k, b_k)}$ -гладкая разомкнутая дуга. . Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, исчезающую на бесконечности , по граничному условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t), t \in L \tag{1}$$

Известно,что частным решением этой задачи является функция

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z}$$

Рассмотрим функцию

$$\widetilde{\Phi(z)} = \Phi(z) - \Phi_1(z),$$

где $\Phi(z)$- общее решение задачи.
На основании формул Сохоцкого имеем:

$$\Phi_1^+(t) - \Phi_1^-(t) = \varphi(t),$$

поэтому, учитывая (1), имеем

$$\widetilde{\Phi^+(t)} - \widetilde{\Phi^-(t)} = 0, t \in L,$$

то есть

$$\widetilde{\Phi^+(t)} = \widetilde{\Phi^-(t)}, t \in L$$

Таким образом, функция $\widetilde{\Phi(z)}$ непрерывно продолжима через L , а значит аналитически продолжима. На основании теоремы Лиувилля имеем:

$$\widetilde{\Phi(z)} \equiv C, C - const$$

В силу того, что $\Phi(\infty) = 0, \Phi_1(\infty) = 0$ имеем $\widetilde{\Phi(\infty)} = 0$, то есть $C = 0$
Таким образом,

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_L \frac{\varphi(\tau)d\tau}{\tau - z}$$

II. Задача Римана

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию, исчезающую на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t), t \in L,$$

$$G(t) \equiv G_0, G_0 = A + iB \in \mathbb{C}$$

Решение задачи полученно в классах $h(b_k), h(a_k), h(a_k, b_k), h_0, h_{c_q}$

1.Решение задачи в классе $h(b_k)$

Под классом $h(b_k)$ понимается класс функций, ограниченных в точках b_k
Для решения задачи построим каноническую функцию, удовлетворяющую условиям:
1) $\chi_b(z) \in h(b_k)$;
2) $\chi_b^+(t) = G_0\chi_b^-(t), t \in L$;
3) $\chi_b^+(t), \chi_b^-(t) \neq 0, t \in L$.

Для построения $\chi_b(z)$ рассмотрим функцию $\gamma(z)$, которая является решением задачи о скачке:

$$\gamma^+(t) - \gamma^-(t) = lnG_o, t \in L$$

Константу lnG_0 фиксируем так, чтобы $argG_0 \in (0, 2\pi)$

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_L \frac{\ln G_0 d\tau}{\tau - z} = \frac{lnG_0}{2\pi\iota}\int\limits_L \frac{d\tau}{\tau - z} =$$

$$= \frac{lnG_0}{2\pi\iota}\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{L_k} \frac{d\tau}{\tau - z} =$$

$$\frac{lnG_0}{2\pi\iota}\sum_{k=1}^{p}\int\limits_{L_k} d\ln(\tau - z) = \frac{ln(G_0)}{2\pi\iota}\sum_{k=1}^{p}\ln(\tau - z)\Big|_{a_k}^{b_k} =$$

$$= \frac{lnG_0}{2\pi\iota}\sum_{k=1}^{p}\ln(\frac{b_k - z}{a_k - z})$$

Под $\ln(\frac{b_k - z}{a_k - z})$ понимаем однозначную ветвь голоморфную в плоскости с разрезом вдоль L_k и приминающую на бесконечности значение, равное нулю.

$$\alpha + \iota\beta = \frac{lnG_0}{2\pi\iota} = -\iota\frac{ln|G_0|}{2\pi} + \frac{\arg G_0}{2\pi},$$

где

$$\alpha = \frac{\arg G_0}{2\pi}, \beta = -\iota\frac{ln|G_0|}{2\pi}$$

$$e^{\gamma(z)} = e^{(\alpha+i\beta)\sum_{k=1}^{p}\ln(\frac{(b_k-z)}{a_k-z})} = \prod_{k=1}^{p}(\frac{b_k - z}{a_k - z})^{\alpha+i\beta}$$

Тогда

$$\chi_b(z) = \prod_{k=1}^{p}(\frac{b_k - z}{a_k - z})^{\alpha+i\beta}$$

Рассмотрим сначала решение соответствующей однородной задачи ($g(t) \equiv 0$)
Рассматривая поведение функции $\chi_b(z)$ на бесконечности делаем вывод, что функция $\chi_b(z)$ ограничена на бесконечности
С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^-(t)}, t \in L$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)},$$

которая аналитична во всей плоскости C, кроме того, $f(z)$ на бесконечности обращается в ноль, поэтому $f(z) \equiv 0$, откуда следует, что соответствующая однородная задача не имеет решений.
Перейдем к решению неоднородной задачи.
С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}, t \in L$$

На основании результатов по решению задачи о скачке имеем:

$$\frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)} = \frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)(\tau - z)},$$

откуда

$$\Phi(z) = \chi_b(z)\frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau)(\tau - z)}$$

2.Решение задачи в классе $h(a_k)$

Каноническую функцию возьмем в виде

$$\chi_a(z) = \prod_{k=1}^{p}(\frac{b_k - z}{a_k - z})^{\alpha+\iota\beta}(\frac{a_k - z}{b_k - z})$$

Решение задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \chi_a(z)\frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau - z)}$$

3.Решение задачи в классе h_0

Под этим классом будет понимать класс функций, не ограниченных на концах $c_k = a_k, b_k$.

$$\chi_0(z) = \chi_b(z)\prod\nolimits_{k=1}^{p}(\frac{1}{z-b_k})$$

В данном случае функция $f(z) = \frac{\Phi_0(z)}{\chi_0(z)}$ является функцией, аналитической в $\mathbb{C}$ и имеющей на бесконечности полюс порядка $p-1$, так как

$$\frac{1}{\chi_0(z)} \sim z^p, z \to \infty$$

По теореме Лиувилля имеем:

$$f(z) = \mathsf{P}_{p-1}(z) = a_0 + a_1 z + ... + a_{p-1}z^{p-1}$$

Таким образом решение однородной задачи запишется в виде

$$\Phi_0(z) = \chi_0(z)\,\mathsf{P}_{p-1}(z)$$

Общее решение задачи Римана запишется по формуле:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \chi_0(z)\frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_0(\tau)^{+}(\tau-z)}$$

4.Решение задачи в классе $h(a_k, b_k)$

Под этим классом будет понимать класс функций,ограниченных на концах a_k, b_k

$$\chi_{ab}(z) = \prod\nolimits_{k=1}^{p}(\frac{b_k - z}{a_k - z})^{\alpha+\iota\beta}\prod\nolimits_{k=1}^{p}(z-a_k)$$

Функция $f(z) = \frac{\Phi_0(z)}{\chi_{ab}(z)}$ аналитическая в $overline\mathbb{C}$ и исчезает на бесконечности, поэтому $f(z) \equiv 0$,то $\Phi_0(z) \equiv 0$

Решение неоднородной задачи запишется в виде

$$\Phi_{a,b}(z) = \frac{\chi_{a,b}(z)}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi^{+}_{a,b}(\tau)(\tau-z)}$$

$\chi_b(z)$ имеет на бесконечности полюс порядка р, а интеграл при $\chi_{ab}(z)$ имеет ноль первого порядка. Имеем, что $\Phi_{a,b}(z)$ имеет полюс (р-1) порядка. Так как нами отыскивается решение, исчезающее на бесконечности, поэтому $\Phi_{a,b}(z)$ не будет давать решение. Для разрешимости задачи необходимо, чтобы интеграл имел ноль порядка р.Разложим в ряд Лорана интеграл.

Разложение интеграла в ряд Лорана в окрестности бесконечности будет иметь вид:

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)}{\chi^+(\tau)(\tau-z)}d\tau = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{1}{z^{i+1}}\int\limits_L \frac{g(\tau)\tau^i}{\chi^+(\tau)}d\tau,$$

так как

$$\frac{1}{\tau-z} = -\frac{1}{z-\tau} = -\frac{1}{z}\left(\frac{1}{1-\frac{\tau}{z}}\right) =$$

$$= -\frac{1}{z}\sum_{i=0}^{\infty}\frac{\tau}{z^i}^i = \sum_{i=0}^{\infty}\frac{\tau^i}{z^{i+1}}$$

Отсюда имеем, что задача имеет единственное решение при выполнении усовий разрешимости:

$$\int\limits_L \frac{g(\tau)\tau^i}{\chi^+(\tau)}d\tau = 0$$

при $i = 0, 1...., (p-1)$

5.Решение задачи в классе $h(c_q)$

Обозначим через $\{c_k\}_1^{2p}$ последовательность всех концов $a_k, b_k (k = 1, ..., p)$ взятых в каком-нибудь порядке. Под классом $h(c_q)$ будем понимать класс функций, ограниченных в окрестности некоторых концов, а в остальных концах имеющих бесконечность порядке не выше единицы.

Для построения канонической функции рассмотрим функцию:

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_L \frac{\ln G_0 d\tau}{\tau-z} = (\alpha+i\beta)\prod\nolimits_{k=1}^{p}\left(\frac{z-b_k}{z-a_k}\right),$$

которая является решением задачи о скачке со скачком lnG_0.
где $\alpha + i\beta = \frac{lnG_0}{2\pi\iota}$,а под lnG_0 понимаем значение, определенное условием $argG_0 \in (o, 2\pi)$
Тогда:

$$\chi_q(z) = \chi_b(z)\frac{\prod\limits_{k:a_k\in h(c_q)}(z-a_k)}{\prod\limits_{k:b_k\in h(c_q)}(z-a_k)} = \left[\frac{\prod\limits_{k=1}^{q}(z-\frac{c_k}{q})}{\prod\limits_{k=q+1}^{2p}(z-\frac{c_k}{q})}\right]^{\alpha+\iota\beta} =$$

$$= \left[\frac{R_1(z)}{R_2(z)}\right]^{\alpha+\iota\beta}$$

где

$$R_1 = \prod\nolimits_{k=1}^{q}(z-c_k), R_2 = \prod\nolimits_{k=q+1}^{2p}(z-c_k)$$

Под $[\frac{R_1(z)}{R_2(z)}]^{\alpha+\iota\beta}$ понимается однозначная ветвь, голоморфная в плоскости с разрезом вдоль L, причем на бесконечности имеет поведение

$$\chi_q(z) \sim \frac{1}{z^{2\alpha(p-q)}}, z \to \infty$$

Выясняем поведение $\chi_q(z)$ на бесконечности. Представим $\chi_q(z)$ в виде

$$\chi_q(z) = [\frac{\prod_{k=1}^{q}(1-\frac{c_k}{z})}{z^{2p-2q}\prod_{k=q+1}^{2p}(1-\frac{c_k}{z})}]^{\alpha+i\beta}$$

1)Рассмотрим случай q=p:
Для решения однородной задачи с помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_q^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi_q^-(t)}, t \in L$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_q(z)},$$

которая аналитична во всей плоскости $\overline{\mathbb{C}}$, кроме того, $f(z)$ на бесконечности обращается в ноль, поэтому $f(z) \equiv 0$, откуда следует, что соответствующая однородная задача не имеет решений.
Перейдем к решению неоднородной задачи.
С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_q^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_q^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi_q^+(t)}, t \in L$$

На основании результатов по решению задачи о скачке имеем:

$$\frac{\Phi(z)}{\chi_q(z)} = \frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_q^+(\tau)(\tau-z)},$$

откуда

$$\Phi(z) = \chi_q(z)\frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_q^+(\tau)(\tau-z)}$$

2) Рассмотрим случай q<p :
Факторизовав коэффицент с помощью канонической функции сводим нашу

задачу к нахождению $f(z) = \frac{\Phi_0(z)}{\chi_q(z)}$
В данном случае функция $f(z)$ является функцией, аналитической в $\mathbb{C}$ и имеющей на бесконечности поведениие $f(z) \sim z^{(p-q)2\alpha-1}, z \to \infty$, так как

$$\frac{1}{\chi_q(z)} \sim z^{2\alpha(p-q)} = z^{(p-q)([2\alpha]+\{2\alpha\})},$$

тогда:

$$f(z) = \mathsf{P}_{(p-q)[2\alpha]-1}(z) z^{(\{2\alpha\})(p-q)}$$

Таким образом решение однородной задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \chi_q(z)\, \mathsf{P}_{(p-q)[2\alpha]-1}(z) z^{\{2\alpha\}(p-q)}$$

Общее решение задачи Римана запишется по формуле:

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \chi_q(z) \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_q^+(\tau - z)}$$

3)Рассмотрим случай q>p :
Рассмотрим сначала решение соответствующей однородной задачи $g(t) \equiv 0$
Рассматривая поведение функции $\chi_q(z)$ на бесконечности делаем вывод, что функция $\chi_q(z)$ на бесконечности имеет порядок $(q-p)[2\alpha] + \{2\alpha\}(q-p)$
С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_q^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi_q^-(t)}, t \in L$$

Рассмотрим функцию

$$f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_q(z)},$$

которая аналитична во всей плоскости $\mathbb{C}$, кроме того, $f(z)$ на бесконечности обращается в ноль, поэтому $f(z) \equiv 0$, откуда следует, что соответствующая однородная задача не имеет решений.
Перейдем к решению неоднородной задачи.
С помощью канонической функции перепишем граничное условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_q^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_q^-(t)} = \frac{g(t)}{\chi_q^+(t)}, t \in L$$

На основании результатов по решению задачи о скачке имеем:

$$\frac{\Phi(z)}{\chi_q(z)} = \frac{1}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_q^+(\tau)(\tau - z)},$$

откуда

$$\Phi(z) = \chi_q(z)\frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_q^+(\tau)(\tau - z)}$$

Рассуждая аналогично случаю класса $h(a_k, b_k)$ получим, что задача имеет единственное решение, при выполнении условий разрешимости

$$\int\limits_{L_k} t^{k-1}\frac{g(t)}{\chi^+(t)}dt = 0, k = 1, 2, ..., [2\alpha](q - p)$$

Замечание
1) Если G_0- положительная вещественная константа,то выберем, $\alpha = 0$, тогда

$$e^{\gamma(z)} = \prod\nolimits_{k=1}^{p}(\frac{b_k - z}{a_k - z})^{i\beta},$$

то есть функция $e^{\gamma(z)} = \chi_{ab}(z) \in h(a_k, b_k)$. Решение задачи существует только в классе $h(a_k b_k)$ и имеет вид:

$$\Phi(z) = \chi_{ab}(z)\frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_{ab}^+(\tau - z)}$$

2) Из класса $h_(c_q)$ при $q = p$ - имеем класс $h_(a_k)$ или $h_(b_k)$,$q = 2p$ -класс $h_(a_k b_k)$, а при $q = 0$ класс h_0.

Глава II. Структура решения задачи в случае счетного множества гладких розомкнутых дуг

I. Постановка задачи

Пусть имеется счетное множество L_k гладких замкнутых дуг $L_1, L_2...$ не имеющих общих точек(в том числе и концов), таких, что если R_k есть кратчайшее расстояние от начала координат до L_k, то

$$0 < R_1 \leq R_2 \leq ... \lim_{k\to\infty} R_k = \propto$$

при этом предпологаем, что в конечной части плоскости находится конечное число линий. На каждом контуре L_k заданы функции $g_k(t)$, удовлетворяющие условию Гельдера на каждой из закрытых дуг L_k.

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с линиями скачков $L_1, L_2, ...$, если на этих линиях заданы условия

$$\Phi^+(t) = G_0\Phi^-(t) + g_k(t), t \in L_k$$

выполняющиеся всюду, кроме концов.

II. Задача о скачке.

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, если на линиях L_k заданы условия

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g_k(t), t \in L_k$$

На основании изложенного выше частным решением задачи о скачке является функция

$$F(z) = \sum_{k=1}^{\infty}[F_k(z) - h_k(z)],$$

причем

$$F_k(z) = \frac{1}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau - z},$$

а $h_k(z) = \sum_{k=1}^{n_k-1} c_{kj}z^j$ - отрезок ряда Тейлора разложения $F_k(z)$ внутри круга $|z| < qR_k(q < 1)$, подобранный таким образом, что ряд сходится абсолютно и равномерно в любой конечной области, если отбросить в нем конечное число членов.

Общее решение задачи примет вид

$$\Phi(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{n_k}}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)},$$

где $P(z)$ - целая функция.

III. Однородная задача.

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, непрерывные граничные значения которой $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ на каждой из разомкнутых дуг последовательности L_k удовлетворяют условию

$$\Phi^+(t) = G_0\Phi^-(t), t \in L_k$$

1.Решение задачи в классе $h(b_k)$.

Для решения построим каноническую функцию $\chi_b(z)$
Рассмотрим кусочно-голоморфную функцию

$$\gamma(z)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{n_k}}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{lnG_0 d\tau}{\tau^{n_k}(\tau-z)}=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{lnG_0}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}[\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{\tau}-\frac{z}{\tau^2}-\frac{z^2}{\tau^3}-...\frac{z^{n_k-1}}{\tau^{n_k-1}}]d\tau=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{lnG_0}{2\pi\iota}(\int\limits_{L_k}\frac{d\tau}{\tau-z}-\int\limits_{L_k}\frac{d\tau}{\tau}-\sum_{j=1}^{n_k-1}\int\limits_{L_k}\frac{z^j d\tau}{\tau^{j+1}})=$$

$$=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{lnG_0}{2\pi\iota}(ln\frac{b_k-z}{a_k-z}-ln\frac{b_k}{a_k}+\sum_{j=1}^{n_k-1}[\frac{z^j}{jb_k^j}-\frac{z^j}{ja_k^j}])=$$

$$=\frac{lnG_0}{2\pi\iota}\sum_{k=1}^{\infty}ln\frac{1-\frac{z}{b_k}}{1-\frac{z}{a_k}}=$$

$$=\frac{lnG_0}{2\pi\iota}(\sum_{k=1}^{\infty}lnE(\frac{z}{b_k},n_k-1)-\sum_{k=1}^{\infty}lnE(\frac{z}{a_k},n_k-1))=$$

$$=\frac{lnG_0}{2\pi\iota}\sum_{k=1}^{\infty}ln\frac{E(\frac{z}{b_k},n_k-1)}{E(\frac{z}{a_k},n_k-1)}$$

$$e^{\Gamma(z)}=\prod\nolimits_{k=1}^{\infty}(\frac{E(\frac{z}{b_k},n_k-1)}{E(\frac{z}{a_k},n_k-1)})^{\alpha+i\beta}$$

$E(\frac{z}{a_k},n_k-1)=(1-\frac{z}{a_k})e^{\sum_{l=1}^{n_k-1}(\frac{z}{a_k l})^l}$ - первичный множитель Вейерштрасса.Под $ln\frac{1-\frac{z}{b_k}}{1-\frac{z}{a_k}}$ понимаемся однозначная ветвь в плоскости с разрезом вдоль L_k.
На основании вышеизложенного функция $\gamma(z)$ является частым решением задачи о скачке со скачком lnG_0
Каноническая функция будет иметь вид:

$$\chi_b(z)=e^{\gamma(z)}=\prod\nolimits_{k=1}^{\infty}(\frac{E(\frac{z}{b_k},n_k-1)}{E(\frac{z}{a_k},n_k-1)})^{\alpha+\iota\beta}$$

Общее решение неоднородной задачи запишется в виде

$$\Phi(z)=\Phi_0(z)+\Phi_1(z)$$

где $\Phi_0(z)=\chi_b(z)P(z)$ - общее решение соответствующей однородной задачи,
$\Phi_1(z)$ - частное решение неоднородной задачи со скачком $\frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}$ и имеет вид:

$$\Phi_1(z)=P(z)+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{z^{n_k}}{2\pi\iota}\int\limits_{L_k}\frac{g(\tau)d\tau}{\chi_b^+(\tau)\tau^{n_k}(\tau-z)}$$

2.Решение задачи в классе $h(a_k)$

Каноническая функция будет иметь вид

$$\chi_a(z) = e^{\Gamma(z)}\Pi(z) = \prod\nolimits_{k=1}^{\infty}(\frac{E(\frac{z}{b_k}, n_k - 1)}{E(\frac{z}{a_k}, n_k - 1)})^{\alpha+\iota\beta} \prod\nolimits_{k=1}^{\infty}(\frac{E(\frac{z}{a_k}, n_k - 1)}{E(\frac{z}{b_k}, n_k - 1)})$$

Общее решение неоднородной задачи будет иметь вид

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z)$$

где $\Phi_0(z) = \chi_a(z)P(z)$ - общее решение соответствующей однородной задачи,
$\Phi_1(z)$ - частное решение неоднородной задачи со скачком $\frac{g(t)}{\chi_a^+(t)}$ и имеет вид:

$$\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_a^+(\tau)\tau^{n_k}(\tau - z)}$$

3.Решение задачи в классе h_0 **.**
Каноническая функция будет иметь вид:

$$\chi_0(z) = \chi_b(z) \prod\nolimits_{k=1}^{\infty}(\frac{1}{E(\frac{z}{b_k}, n_k - 1)})$$

Общее решение неоднородной задачи будет иметь вид

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z),$$

где

$$\Phi_0(z) = \chi_a(z)P(z),$$
$$\Phi_1(z) = P(z) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_0^+(\tau)\tau^{n_k}(\tau - z)}.$$

4.Решение задачи в классе $h(a_k, b_k)$ **.**

Каноническая функция будет иметь вид:

$$\chi_{ab}(z) = \chi_b(z) \prod\nolimits_{k=1}^{\infty} E(\frac{z}{a_k}, n_k - 1)$$

Общее решение неоднородной задачи будет иметь вид

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z),$$

где

$$\Phi_0(z) = \chi_a(z)P(z),$$
$$\Phi_1(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi\iota} \int\limits_{L_k} \frac{g(\tau)d\tau}{\chi_{ab}^+ \tau^{n_k}(\tau - z)}.$$

Глава III. Случай двоякопериодичесокого расположения дуг.

I. Постановка задачи.

Пусь дуга $L_0 = (\widehat{a_0, b_0}) \in R$, где R - параллелограм с верщинами $0, w_1, w_2, w_1{+}w_2, Imw_2/w_1 > 0. L = \cup L_k$ где L_k полученны из L_0 преобразованиями двоякопериодической группы $z + w, w = k_1 w_1 + k_2 w_2, k_1, k_2 \in Z$

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, ограниченную на бесконечности, удовлетворяющую условию

$$\Phi^+(t) = G_0 \Phi^-(t) + g(t), t \in L$$

где $g(t) = g_k(t), t \in \overline{L_k}$ удовлетворяет условию

$$g_0(t) = g_k(t + w), t \in \overline{L_0}, g_0(t) \in H_\lambda(\overline{L_0}) \tag{3.1}$$

Поставленная задача равносильна задаче нахождения двоякопериодичской (эллиптической) кусочно-голоморфной функции, ограниченной в паллелограмме периодов с линией скачкой L_0 по краевому условию

$$\Phi^+(t) = G_0 \Phi^-(t) + g_0(t), t \in L_0, g_0(t) \in H_\lambda(\overline{L_0}) \tag{3.2}$$

II. Задача о скачке.

На основании результатов по решению задачи Римана в случае счетного можества гладких разомкнутых дуг задача о скачке

$$\gamma^+(t) - \gamma^-(t) = g(t), t \in L, g(t) = g_k(t), t \in \overline{L_k} \tag{3.3}$$

имеет частное решение

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^{n_k} (\tau - z)} \tag{3.4}$$

Можно конкеретизировать набор целых чисел n_k при построении частного решения. Справедлива

Теорема 3.1.

Если $n > 0$ есть целое число, при котором ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} A_k (R_k)^{-n+1}, A_k = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{L_k} |g_k(\tau)||d\tau|, R_k = min_{\tau \in L_k}(|\tau|) \tag{3.5}$$

сходится, то ряд (3.4) при всех $n_k = n$ сходится аюсолютно и равномерно на любом компакте, не содержащем точек контуров L_k, после отбрасывания соответсвующего числа членов.

Задача о скачке в этм случае имеет частное решение

$$\tilde{\gamma}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^{n} (\tau - z)} \tag{3.6}$$

В нашем случае сходимость ряда (3.5) обеспечивается сходимостью ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}(R_k)^{-(n+1)}, \tag{3.7}$$

так как $A_k = A_0$
Ряд (3.4) представим в виде

$$\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}(R_k)^{-(n+1)} = \frac{1}{R_0^{n+1}} + {\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}}' \frac{1}{|\tau+w|^{n+1}} =$$

$$= \frac{1}{R_0^{n+1}} + {\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}}' \frac{1}{|w|^{n+1}|\frac{\tau}{w}+1|^{n+1}} \tag{3.8}$$

Учитывая, что $|\frac{\tau}{w}+1|^{n+1} \to 1$ при $k_1, k_2 \to \infty$ сходимость (3.7) равносильна сходимости ряда

$${\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}}' \frac{1}{|w|^{n+1}} \tag{3.9}$$

где знаком $\sum'$ понимаем сумму, в которой отсутсвтует член, соответсвующий $k_1 = k_2 = 0$
Из теории двоякопериодических функций известно, что наименьшее n , при котором ряд (3.8) сходится равно 2,поэтому задача (3.3) имеет частное решение:

$$\tilde{\gamma}(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^2}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau^2(\tau-z)}$$

Учитывая(3.1) представим (3.10) в виде

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{z^2}{2\pi i}\int\limits_{L_k}\frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau^2(\tau-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g_0(\tau)(\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{\tau}-\frac{z}{\tau^2})d\tau+$$

$$+{\sum_{k=1}^{\infty}}'\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_k}g_k(\tau)(\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{\tau}-\frac{z}{\tau^2})d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g_0(\tau)[\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{\tau}-\frac{z}{\tau^2}]+{\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}}'(\frac{1}{\tau+w-z)}-\frac{1}{\tau+w}-\frac{z}{(\tau+w)^2})]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_0}g_0(\tau)[\frac{1}{\tau-z}-\frac{1}{\tau}-\frac{z}{\tau^2}+$$

$$+{\sum_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty}}'(\frac{1}{\tau+w-z)}-\frac{1}{\tau+w}-\frac{z}{(\tau+w)^2}+\frac{1}{w}-\frac{1}{w}+\frac{\tau-z}{w^2}-\frac{\tau-z}{w^2}]d\tau =$$

$$= \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]d\tau + \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)\zeta'(\tau)]d\tau$$

где $\zeta(z) = \frac{1}{z} + \sum\limits_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} [\frac{1}{z-w} + \frac{z}{w^2} + \frac{1}{w}]$ - дзета-функция Вейерштрасса
Если отыскивать двоякопериодическиие решения задачи (3.2) и учесть, что условие $\int\limits_{L_0} g_0(\tau)d\tau = 0$ является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи, то получим

$$\gamma(z + w) = \gamma(z) + \frac{w_k}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)\zeta'(\tau)d\tau + Aw_k, k \in Z$$

откуда $A = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)\zeta'(\tau)d\tau$
Таким образом, с точностью до постоянного слогаемого получен двоякопериодический аналог интеграла типа Коши:

$$\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_0} g_0(\tau)(\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau))d\tau$$

III.Задача Римана .

Решение задачи полученно в классах $h(b_0), h(a_0), h_0, h(a_0, b_0)$.

1.Решение задачи в классе $h(b_0)$.

Под классом $h(b_0)$ понимается класс функций, ограниченных в точках $b_k = b_0 + \omega$
Для решения задачи построим каноничускую функцию, удовлетворяющую условиям:
1) $\chi_b(z) \in h(b_0)$;
2) $\chi_b^+(t) = G_0\chi_b^-(t), t \in L$;
3) $\chi_b^+(t), \chi_b^-(t) \neq 0, t \in L$.

Для решения задачи (3.1) рассмотрим функцию $\gamma(z)$, которая является решением задачи о скачке

$$\gamma^+(z) - \gamma^-(z) = lnG_0, t \in L_0$$

причем lnG_0 фиксируем так, чтобы $argG_0 \in (0, 2\pi)$
На основании предыдущего

$$\gamma(z) = (\alpha + i\beta) \int\limits_{L_0} (\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau))d\tau = (\alpha + i\beta) \int\limits_{L_0} \frac{\sigma'(\tau - z)}{\sigma(\tau - z)} - \frac{\sigma'(\tau)}{\sigma(\tau)}]d\tau =$$

$$= (\alpha + i\beta) \int\limits_{L_0} \frac{\sigma'(\tau - z)}{\sigma(\tau - z)}d\tau - (\alpha + i\beta) \int\limits_{L_0} \frac{\sigma'(\tau)}{\sigma(\tau)}d\tau =$$

$$= (\alpha + i\beta) ln \frac{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)}$$

где

$$\sigma(u) = u \prod_{k_1,k_2=-\infty}^{\infty} (1-\frac{u}{w}) exp(\frac{u}{w} + \frac{u^2}{2w^2}), k_1^2 + k_2^2 \neq 0$$

- сигма функция Вейерштрасса, при этом $\zeta(u) = \frac{\sigma'(u)}{\sigma(u)}$
Тогда

$$\chi_b(z) = exp(\gamma(z)) = [\frac{\sigma(z-b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z-a_0)\sigma(b_0)}]^{(\alpha+i\beta)}$$

$\chi_b(z)$является квазиэлиптической, то есть:

$$\chi_b(z+w_k) = \chi_b(z) exp(-\eta_k \tilde{\alpha}), \eta_k = 2\zeta(\frac{w_k}{2}),$$

где

$$\tilde{\alpha} = (\alpha + i\beta)(b_0 - a_0) \tag{3.11}$$

Действительно, на основании (2)

$$[\frac{\sigma(z+w_k-b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z+w_k-a_0)\sigma(b_0)}]^{(\alpha+i\beta)} = [\frac{\sigma(z-b_0}{\sigma(z-a_0)} \frac{\sigma(a_0)}{\sigma(b_0)} exp(\eta_k(\tilde{\alpha})]$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)}$, которая является квазиэлептической усвлоием:

$$f(z+w_k) = f(z) exp(\eta_k \tilde{\alpha}) \tag{3.12}$$

Таким образом, получили задачу построения квазиэлиптической функции(КЭФ), удовлетворяющей условию $f(z+w_k) = f(z)exp(\eta_k\tilde{\alpha})$. Однако, критерием существования КЭФ голоморфной функции $f(z) \neq 0$ удовлетворяющей условию (3.12) является условие:

$$\tilde{\alpha}(\eta_1 w_2 - \eta_2 w_1) = 2\pi\tilde{w}$$

где $\tilde{w} = n_1 w_1 + n_2 w_2$, откуда учитывая соотношение Лежандра, получим $\tilde{\alpha} = \tilde{w}$

Поэтому рассмотрим 2 случая.
1)Пусть $\tilde{\alpha} \neq \tilde{w}$,Соответствующая однородная задача нетревиальных решений не имеет.
Для решения неоднородной задачи будем использовать квазиэлиптический аналог ядра Коши $A(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau-z-\tilde{\alpha})}{\sigma(-\tilde{\alpha})\sigma(\tau-z)}$, причем $A(\tau, z+w_k) = A(\tau, z)exp(\tilde{\alpha}\eta_k)$
Единственное решение задачи будет иметь вид :

$$\Phi(z) = \frac{\chi_b(z)}{2\pi i} \int_{L_0} A(\tau, z) \frac{f(\tau)}{\chi_b^+(\tau)} d\tau \tag{3.13}$$

2)Случай, когда $\tilde{\alpha} = \tilde{w}$
Каноническую функцию возьмем в следующем виде

$$\chi_b(z) = e^{\Gamma(z)} e^{\tilde{\eta} z}, \tilde{\eta} = n_1\eta_1 + n_2\eta_2$$

Решение соответствующей однородной задачи записывается по формуле

$$\Phi_0(z) = C\chi_b(z), C - const$$

Тогда решение задачи имеет вид :

$$\Phi(z) = \Phi_0(z) + \Phi_1(z)$$

где $\Phi_1(z)$ определяется формулой (3.13)

2.Решение задачи в классе $h(a_0)$.

Рассуждая аналогично, получим:

$$\Phi(z) = \frac{\chi_a(z)}{2\pi i} \int\limits_{L_0} A_1(\tau, z) \frac{f(\tau)}{\chi_a^+(\tau)} d\tau$$

,где

$$\chi_a(z) = [\frac{\sigma(z - b_0)\sigma(a_0)}{\sigma(z - a_0)\sigma(b_0)}]^{(\alpha + i\beta) - 1}$$

$$A_1(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z - \tilde{\alpha_1})}{\sigma(-\tilde{\alpha_1})\sigma(\tau - z)}, \tilde{\alpha_1} = (\alpha + i\beta - 1)(b_0 - a_0)$$

3.Решение задачи в классе $h(a_0, b_0)$.

Каноническая функция будет иметь вид:

$$\chi_{ab}(z) = \chi_b(z) \frac{\sigma(z - a_0)}{\sigma(z - \theta)}, \theta \in \overline{L_0}$$

Функция $\chi_{ab}(z)$ удовлетворяет условию $\chi_{ab}(z + w_k) = \chi_{ab}(z) exp(\beta\eta_k)$, где $\beta = -\tilde{\alpha} + \theta - a_0$. Тогда элиптическая функция $f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_{ab}(z)}$ тождественна равно нулю, откуда следует, что соответсвующя однородная задача не имеет отличных от нуля решений. Для решения неоднородной задачи возьмем $\theta = a_0 + \tilde{\alpha}$, тогда $\beta = 0$.

Имея $\chi_{ab}(z)$, перепишем краевое условие в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_{ab}^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{\chi_{ab}^-(t)} = \frac{f(t)}{\chi_{ab}^+(t)}, t \in L_0$$

Таким образом, функция $\frac{\Phi(z)}{\chi_{ab}(z)}$ является решением задачи о скачке в класе двоякопериодиских функций. На основании известных результатов имеем, что необходимым условием разрешимости получивейся задчи является равенство $\int\limits_{L_0} \frac{f(\tau)d\tau}{\chi_{ab}^{+}(\tau)} = 0$.

В силу того, что $\chi_{ab}(z)$ в точке θ имеет полюс, а мы ищем кусочноголоморфную функцию, для разрешимоти задачи интеграл при $\chi_{ab}(z)$ в точке θ должен обращаться в 0, поэтому решение задачи имеет вид

$$\Phi(z) = \frac{\chi_{ab}(z)}{2\pi i} \int\limits_{L_0} \frac{f(\tau}{\chi_a^{+}(\tau)}[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau - a_0 - \tilde{\alpha})]d\tau$$

4.Решение задачи в классе h_0 .

Каноническая функция будет иметь вид:

$$\chi_0(z) = \chi_b(z)\frac{\sigma(z-\theta)}{\sigma(z-b_0)}, \theta \in \overline{L_0}$$

причем $\chi_0(z + w_k) = \chi_0(z)exp(-\beta_1\eta_k), \beta_1 = \tilde{\alpha} + \theta - b_0$ и β не равно периоду.

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_0(z)}$, которая является квазиэлептической, с условием

$$f(z + w_k) = f(z)exp(\eta_k\beta_1)$$

Кроме того, функция f(z) имеет в точке θ полюс первого порядка. На основании известных свойств квазиэлептических функций, функция f(z) должна иметь нуль первого порядка в точке $\tilde{\theta}$, причем имеет место равенство

$$\theta - \tilde{\theta} = \beta_1(\eta_1 w_2 - \eta_2 w_1)/2\pi\iota = \beta_1$$

при этом мы учли соотнощение Лежандра. Функция f(z) имеет вид

$$f(z) = C\frac{\sigma(z + \overline{\alpha} - b_0)}{\sigma(z-\theta)}$$

Итак, $\Phi_0(z) = C\chi_0(z)\frac{\sigma(z+\alpha-b_0)}{\sigma(z-\theta)}$
Таким образом решение неоднородной задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \frac{\chi_0(z)}{2\pi i} \int\limits_{L_0} A(\tau, z)\frac{f(\tau)}{\chi_a^{+}(\tau)}d\tau + \Phi_0(z),$$

где

$$A(\tau, z) = \frac{\sigma(\tau - z - \beta_1)}{\sigma(-\beta_1)\sigma(\tau - z)}.$$

Глава IV. Случай непериодического свободного члена.

I. Задача о скачке.

Пусь дуга $L_0 = (\widehat{a_0, b_0}) \in R$, где R - параллелограм с верщинами $0, w_1, w_2, w_1 + w_2 . L = \cup L_k, L_k$ полученны из L_0 преобразованиями двоякопериодической группы $z + w, w = k_1 w_1 + k_2 w_2, k_1, k_2 \in Z$

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, удовлетворяющую краевому условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = g_k(t), t \in L_k \tag{4.1}$$

На основании предыдущего решение задачи в случае счетного множества гладких рахомкнутых дуг частным решением задачи является функция

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z^{n_k}}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau^{n_k}(\tau - z)} \tag{4.2}$$

Имея $\gamma(z)$, можно записать общее решение задачи в виде

$$\Phi(z) = \gamma(z) + P(z),$$

P(z) -произвольная целая функция.

Для того, чтобы сформулировать дополнительные требования, которые нужно наложить на функцию $g(t) = g_k(t), t \in \overline{L_k}$, чтобы задача имела конечное число линейно-независимых решений, введем

Определение. Последовательность $\Gamma = (\Gamma_m)_1^{\infty}$ замкнутых контуров назовем правильной системой контуров, если она обладает слежующими свойствами:
1)Γ_1 содержит внутри точку z=0
2) Γ_m лежит в области, ограниченной контуром $\Gamma_{(m+1)}$
3) если $d_m = min_{z \in \Gamma_n} |z|$, то $lim_{m \to \infty} d_m = \infty$
4) $\frac{l_m}{d_m} \leq a$, где l_m - длинна $\Gamma_m, a > 0$ - постоянная, не зависящая от m.

В нашем случае в качестве системы Γ можно взять следующую последовательность: за Γ_1 примем границу параллелограмма, составленного из 9 конгруэнтых параллелограммов, центром котрого является R, за Γ_2 - границу параллелограмма, составленного из 25 конгруэнтных параллелограммов, центром которого является R, и т.д.(в данном случае $a = \frac{[6\omega_1 + 6\omega_2]}{d_1)}$).

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию, удовлетворяющую условию (4.1) и условию

$$|\Phi(z)| \leq M, z \in \Gamma$$

Относительно функции $g(t)$ предположим, что выполняется условие

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k = N_1 < \infty, B_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k} |g_k(\tau)|d\tau| \tag{4.3}$$

При условии (4.3) ряд

$$\gamma(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{2\pi i}\int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)} \tag{4.4}$$

сходится абсолютно и равномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов. Дейтсвительно, пусть $|z| \leq r, 0 < r < \infty, \tau \in L_k, \tau \neq z$,

$$|\gamma(z)| = \frac{|z|}{2\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k^2}\int\limits_{L_k} \frac{|g_k(\tau)||d\tau|}{|1 - \frac{z}{\tau}|}$$

При всех достаточно больших k величина $|\frac{z}{\tau}|$ будет сколько угодно малой, так как $|z| \leq r$. Поэтому можно подобрать такой номер K, чтобы при $k \geq K$ выполнялось неравенство

$$|1 - \frac{z}{\tau}| \geq \frac{1}{2}. \tag{4.5}$$

Тогда, с учетом (4.5) имеем

$$|\gamma(z)| = \frac{r}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k^2}\int\limits_{L_k} |g_k(\tau)||d\tau| \leq \frac{r}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_k}{R_k^2} < N_2 < \infty$$

Покажем ограниченность $\gamma(z)$ на Г. В силу свойств Г и L существует такая $\delta > 0$, что $|\tau - z| \geq \delta$ при всех $\tau \in L, z \in \Gamma$, и

$$|\gamma(z)| \leq \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2\pi}|\int\limits_{L_k} g_k(\tau)(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau})d\tau| \leq$$

$$\leq \delta^{-1}\sum_{k=0}^{\infty} B_k + \sum_{k=0}^{\infty} B_k R_k^{-1} = \delta^{-1}N_2 + N_3$$

Итак, доказана

Теорема. *Все решения задачи (4.1) при условии (4.3), удовлетворяющие неравенству*

$$|\Phi(z)| \leq M, z \in \Gamma$$

определяются формулой

$$\Phi(z) = \gamma(z) + C,$$

где $\gamma(z)$ *имеет вид* (4.4), *а* C *- постоянная.*

II. Задача Римана в классе $h(b_k)$.

Под классом $h(b_k)$ понимаем класс функций, ограниченных в точках b_k.

1.Постановка задачи.

Требуется найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z) \in h(b_k)$, удовлетворяющую условию

$$\Phi_0^+(t) = G_0\Phi_0^-(t) + g_k(t), t \in L_k, G_0 \in C \tag{4.6}$$

и удовлетворяющую на правильной системе Γ условию

$$|\Phi(z) \leq M, z \in \Gamma \tag{4.7}$$

Дополнительно предположим, что функция $g(t)$ удовлетворяет условию

$$\sum_{k=0}^{\infty} B_k = N_1 < \infty, B_k = \frac{1}{2\pi}\int\limits_{L_k} |g_k(\tau)|d\tau| \tag{4.8}$$

2.Решение задачи.

$$\Phi_0^+(t) = G_0\Phi_0^-(t), t \in L$$

Для решения задачи построим каноническую функцию $\chi_b(z)$, которая удовлетворяет следующим условиям

1) $\chi_b(z) \in h(b_k)$;
2) $\chi_b^+(t) = G_0\chi_b^-(t), t \in L$;
3) $\chi_b^+(t), \chi_b^-(t) \neq 0, t \in L$.
4) $\chi_b^+(z + w) = \chi_b^+(z)$

Рассмотрим функцию $\Gamma(z)$, которая является решением задачи о скачке со скачком lnG_0

$$\Gamma^+ - \Gamma^- = lnG_0, t \in L$$

На основании вышеизложенного

$$\Gamma(z) = \frac{lnG_0}{2\pi\iota}\int\limits_{L_0}[\zeta(\tau - z) - \zeta(\tau)]d\tau = (\alpha + \iota\beta)ln\frac{\sigma(b_0 - z)\sigma(a_0)}{\sigma(a_0 - z)\sigma(b_0)}$$

Тогда

$$exp(\Gamma(z)) = [\frac{\sigma(b_0 - z)\sigma(a_0)}{\sigma(a_0 - z)\sigma(b_0)}]^{(\alpha+\iota\beta)} \in h(b_k)$$

причем

$$exp(\Gamma(z + \omega_k)) = [\frac{\sigma(b_0 - z - w_k)}{\sigma(a_0 - z - w_k)}]^{(\alpha+\iota\beta)} = [\frac{\sigma(b_0 - z)}{\sigma(a_0 - z)}]^{(\alpha+\iota\beta)}exp[(-\tilde{\alpha}\eta_k)$$

где $\tilde{\alpha} = (\alpha + \iota\beta)(b_0 - a_0)$

Так как $\tilde{\alpha} \neq 0$, то функция $exp(\Gamma(z))$ не является эллиптической, здесь возможны два случая
1) $\tilde{\alpha} = \overline{\omega}$
Тогда в качетсве канонической функции возьмем функцию

$$\chi_b(z) = e^{\Gamma(z)} e^{\tilde{\eta} z}, \tilde{\eta} = n_1\eta_1 + n_2\eta_2$$

Тогда

$$\chi_b(z+\omega_k) = e^{\Gamma(z+\omega_k} e^{\eta(z+\omega_k)} = e^{\Gamma(z)} e^{-\overline{\omega}\eta_k} e^{\tilde{\eta} z} e^{\tilde{\eta}\omega_k} =$$
$$= \chi_b(z) e^{-\omega\eta_k + \tilde{\eta}\tilde{\omega_k}} = \chi_b(z)$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{\Phi_0(z)}{\chi_b(z)}$, которая является целой функцией и ограниченной на Г.В силу принципа максимума модуля функция $f(z)$ ограниченна в $\overline{\mathbb{C}}$. По теореме Лиувилля $f(z) \equiv C$.

$$\Phi_0(z) = Ce^{\tilde{\eta} z} exp\left(\Gamma(z)\right)$$

Для решения неоднородной задачи с помощью функции краевое условие (4.6)запишем в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^+(t)} + \frac{g(t)}{\chi_b^+(t)}, t \in L$$

Таким образом, мы пришли к задаче о скачке. На основании вышеизложенного получим

$$\Phi_1(z) = \chi_b(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)\chi_b^+(z)}$$

Покажем, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)d\tau}{\tau(\tau - z)\chi_b^+(z)} \tag{4.9}$$

сходится абсолютно и равеномерно на любом компакте после отбрасывания конечного числа членов. Заметим, что $\chi_b^+(t)$ и $1/\chi_b^+(t)$ равномерно ограничены при $t \in L$, так как являются периодическими.

Итак, пусть $|z| \leq r, 0 < z < \infty, \tau \in L, \tau \neq z$.

$$|\widetilde{\Phi}(z)| \leq \frac{|z|}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int\limits_{L_k} \frac{|g_k(\tau)|d\tau|}{|\chi_b^+(\tau)||1 - \frac{z}{\tau}} \leq \frac{|z|}{2\pi} M_1 \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int\limits_{L_k} \frac{|g_k(\tau)||d\tau|}{|1 - \frac{z}{\tau}|}$$

При всех достаточно больших k величина $\frac{z}{\tau}$ будет сколь угодно малой, так как $|z| \leq r$. Поэтому можно подобрать такой номер K, что при $k \geq K$ выполняется неравенство

$$|1 - \frac{z}{\tau}| \geq \frac{1}{2} \tag{4.10}$$

Тогда с учетом(4.10) из (4.9) имеем

$$|\widetilde{\Phi}(z)| \leq \frac{M_1|r|}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{R_k^2} \int\limits_{L_k} |g_k(\tau)||d\tau| = \frac{M_1}{2\pi} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_1}{R_k^2} < N_2 < \infty$$

Покажем ограниченность $|\widetilde{\Phi}(z)|$ на Γ. В силу свойств Γ и L существует такая постоянная $\delta > 0$, что $\delta \leq |\tau - z|$ при всех $\tau \in L$ и $z \in \Gamma$ и

$$|\widetilde{\Phi}(z) \leq \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{2\pi} |\int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau)}{\chi_b^+} \left(\frac{1}{\tau - z} - \frac{1}{\tau} \right) d\tau| \leq$$

$$\leq \frac{M_1}{2\pi} \left[\delta^{-1} \sum_{k=1}^{\infty} B_k + \sum_{k=1}^{\infty} B_k R_k^{-1} \right] = \delta^{-1} N_2 + N_3$$

Учитывая периодичность $\chi_b(z)$ получаем

$$\Phi_1(z) \leq M, z \in \Gamma$$

Таким образом, общее решение задачи запишется в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_0(z)$$

2) $\tilde{\alpha} \neq \overline{\omega}$

Тогда в качестве канонической функции возьмем функцию

$$\chi_b(z) = exp(\Gamma(z)) \frac{\sigma(z - \theta)}{\sigma(z - \theta_1)},$$

причем, точки θ и θ_1 подберем так, чтобы $\theta_1 - \theta = \tilde{\alpha}$ и чтобы $\theta, \theta_1 \notin \overline{L}$. Очевидно, что такой подбор можно осуществить бесчисленным множеством способов. Функция $\chi_b(z)$ будет тогда эллиптической. С помощью $\chi_b(z)$ краевое условие перепишем в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{\chi_b^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{\chi_b^-(t)}, t \in L$$

Рассмотрим функцию $f(z) = \frac{\Phi(z)}{\chi_b(z)}$, Функция f(z) будет мероморфной функцией, ограниченной на Γ, причем имеющую нули в точках $\theta_1 + \omega$ и полюсы в точках $\theta + \omega$, но такая функция $f(z) \equiv C$. Следовательно однородная задача решений не имеет.

Решение неоднородной задачи имеет вид

$$\Phi_1(z) = \chi_b(z) \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau(\tau - z)\chi_b^+(\tau)} = \chi_b(z) \widetilde{\Phi}(z)$$

где

$$\widetilde{\Phi}(z) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{z}{2\pi i} \int\limits_{L_k} \frac{g_k(\tau) d\tau}{\tau(\tau - z)\chi_b^+(\tau)}$$

при условии, что функция $g(t)$ удовлетворяет счетному множеству условий

$$\widetilde{\Phi}(z)|_{z=\theta_1+\omega} = 0$$

Список используемой литературы .

[1] Шабат Б.В. Введение в комлексный анализ(часть I). М.: Наука, 1976-320с.
[2] Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. М.: Физматгиз, 1962-511с.
[3] Голубев В.В. Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции. М.:Физматгиз, 1958.
[4] Салехова И.Г. « Задача Римана в случае счетного множества разомкнутых дуг » // сборник статей « Теория функций комплексного переменного и краевые задачи». Ч.: ЧГУ, 1974. Выпуск 2 С.131-140.
[5] Аксеньтева Е.П. Функции Вейштрасса, 2014
[6] И.С. Салехова М.М.Яхина « Смешанная задача для плоскости с прямолинейными разрезами»// учен. Зап. Казан. Ун-та. Сер. Физ.-матем. Науки - 2013.-Т.155, кн.2.-С.108-122.