ЗАДАЧИ
студенческой олимпиады им. Н. И. Лобачевского
1 декабря 2019 г.

1. Дан многочлен $x^n - a_1x^{n-1} - \ldots - a_n$, где все $a_k \geqslant 0$, $\sum a_k > 0$. Сколько положительных корней может иметь этот многочлен?

2. Доказать, что для любых векторов $\mathbf{v}$ и $\mathbf{w}$ в пространстве $\mathbb{R}^3$ произведение $\mathbf{v} \cdot ((\mathbf{v} \times \mathbf{w}) \times \mathbf{w})$ не положительно. Когда это произведение равно нулю?

3. Непрерывно дифференцируемая функция f, $f \not\equiv 0$, удовлетворяет условию: $f'(x) = f(-x)$ для всех $x \in \mathbb{R}$. Найти все вещественные нули функции f.

4. На плоскости даны два эллипса с одинаковыми осями, касающиеся один другого в вершинах: Φ_1 с уравнением $x^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$ и Φ_2 с уравнением $(x-2a)^2/a^2 + y^2/b^2 = 1$. По каким траекториям будут двигаться фокусы эллипса Φ_2 при качении этого эллипса вокруг эллипса Φ_1?

5. Каждый студент группы из 25-ти студентов симпатичен не более, чем двум студентам этой группы. Отношение симпатии, вообще говоря, не является симметричным.
а) Доказать, что в группе найдется 5 студентов, попарно не симпатичных между собой (3 балла).
б) Какое наибольшее количество произвольным образом выбранных студентов можно отчислить, чтобы по прежнему гарантированно нашлись 5 попарно не симпатичных студентов? (4 балла)

6. Имеется два тела одинаковой массы и одинаковой теплоемкости. Температура первого тела $0°C$, второго $90°C$. Можно ли нагреть первое тело за счёт теплообмена со вторым до температуры $60°C$, если второе тело произвольным образом можно делить на части? Предполагается, что теплообмена с окружающей средой нет, при соприкосновении двух тел с температурами T_1 и T_2 и массами m_1 и m_2, их температура мгновенно выравнивается до $T = (T_1m_1 + T_2m_2)/(m_1 + m_2)$.

7. Доказать неравенство: $\displaystyle\int_0^1 \int_0^1 \frac{xydxdy}{(e^{x-y}+1)^2} \geqslant \frac{1}{16}.$

8. Последовательность целых чисел такова, что $x_0 = 0$, $|x_n| = |x_{n-1} + 1|$ для всех натуральных n. Каково наименьшее возможное значение выражения $|x_1 + x_2 + \ldots + x_{2019}|$?

9. а) Для матриц B и C размера 2×2 проверить, что след матрицы $BC - CB$ равен нулю (2 балла).
б) Доказать, что для любой вещественной матрицы A размера 2×2 с нулевым следом существуют такие вещественные матрицы B и C, что $A = BC - CB$ (5 баллов).
Примечания. Следом матрицы называется сумма элементов главной диагонали. Операция $[B, C] = BC - CB$ называется коммутатором B и C. Т.о., требуется доказать для матриц 2×2, что след матрицы равен нулю тогда и только тогда, когда матрица является коммутатором. За доказательство существования комплексных матриц B и C в пункте б) – 4 балла.

10. За круглым столом сидят n ($n > 4$) человек. Все они, независимо друг от друга, случайно (с вероятностью $1/2$) выбирают кого-то из своих соседей. Найти: а) среднее количество людей, которых никто не выбрал (2 балла); б) дисперсию этого количества (5 баллов).
Напоминание: если $\mathbb{M}\xi$ — среднее (математические ожидание) случайной величины ξ, то дисперсия $\mathbb{D}\xi$ подсчитывается по формуле $\mathbb{D}\xi = \mathbb{M}(\xi - \mathbb{M}\xi)^2 = \mathbb{M}\xi^2 - (\mathbb{M}\xi)^2$.

11. Николай начертил две равновеликие фигуры: правильный пятиугольник с прямыми углами при вершинах и правильный треугольник. Чему равны углы при вершинах треугольника?